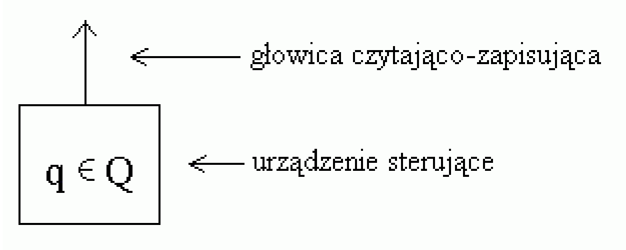
5. Automat liniowo ograniczony i języki kontekstowe

¢	a	a	b	c	c	b	a	b	$

← skończona taśma



Automat liniowo ograniczony jest kolejnym (po automacie skończonym i automacie ze stosem) modelem algorytmu rozpoznawania przynależności słowa do języka. Ma skończone sterowanie, taśmę podzieloną na komórki oraz głowicę taśmy, mogącą w dowolnej chwili obserwować tylko jedną komórkę taśmy. Każda z komórek taśmy może zawierać dokładnie jeden ze skończonej liczby symboli taśmowych.
Zależnie od symbolu obserwowanego przez głowicę taśmy oraz stanu sterowania skończonego, automat liniowo ograniczony w pojedynczym ruchu:
(1) zmienia stan,
(2) nadpisuje symbol w obserwowanej komórce taśmy, zastępując nim symbol uprzednio tam wpisany,
(3) przesuwa głowicę o jedną komórkę w lewo lub w prawo.
Automat pracuje na SKOŃCZONEJ taśmie i nie może zapisać niczego poza obszarem ograniczonym przez ¢ i $. W momencie początkowym pomiędzy ogranicznikami ¢ i $ na taśmie zapisane jest badane słowo. Automat liniowo ograniczony nie ma ruchów w lewo od ¢ i ani w prawo od $, nie może on nadpisać symboli ¢ i $ żadnymi innymi symbolami.
Z poniższej formalnej definicji wynika, że automat liniowo ograniczony jest w ogólnym przypadku "maszyną" niedeterministyczną
Automat definiujemy jako ósemkę:

$$A = \langle Q, \Gamma, q_0, F, T, ¢, \$, \delta \rangle \in \mathcal{A}_{LO}$$

gdzie:
$\mathcal{A}_{LO}$ – klasa automatów liniowo-ograniczonych
Q – skończony zbiór stanów
Γ – skończony zbiór symboli taśmy
$q_0 \in Q$ – stan początkowy
$F \subset Q$ – podzbiór stanów końcowych
$T \subset \Gamma$ – alfabet wejściowy
¢ i $ – lewy i prawy ogranicznik taśmy
$\delta: Q \times \Gamma' \to 2^{Q \times \Gamma' \times \{L,R\}}$ – funkcja przejścia (L – w lewo, R – w prawo)
($\Gamma' = \Gamma \cup \{¢, \$\}$)

Konfiguracja automatu liniowo ograniczonego to: (q, ¢$\alpha\uparrow\beta$\$) gdzie:
q – stan
$\alpha, \beta \in \Gamma^*$
$\uparrow$ - wskazanie położenia głowicy (głowica obserwuje pierwszy symbol łańcucha β)
<u>Przykład:</u>
Funkcja przejścia:

$$\delta(q_1, b) = \{(q_2, a, R)\}$$

oznacza ruch:
$(q_1, ¢aa\uparrow bccbab\$) \vdash (q_2, ¢aaa\uparrow ccbab\$)$

Konfiguracja początkowa:

$(q_0, ¢\uparrow x\$) \qquad x \in T^*$

Automat liniowo-ograniczony A akceptuje język $L \subset T^*$ $\Leftrightarrow$ gdy:

$$L(A) = \{x \in T^* \mid (\exists q \in F)\ (\exists y \in \Gamma^*)\ ((q_0, ¢\uparrow x\$) \vdash_A^* (q, ¢y\uparrow \$))\}$$

przy czym: $(q, ¢y\uparrow\$)$ – konfiguracja stopująca

$|x| = |y|$

Twierdzenie 5.1.
Klasa języków akceptowalnych przez automaty liniowo-ograniczone L_{LO} jest tożsama z klasą języków kontekstowych L_K (monotonicznych L_M) – klasa 1 w hierarchii Chomsky'ego

$$L_{LO} = L_K = L_M$$

Przykład:
Automat liniowo-ograniczony akceptujący język $L = \{a^i b^i a^i \mid i = 1,2,...\}$

A = <Q, Γ, q_0, F, T, ¢, \$, δ>
Q = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}
$q_0 = 0$
F = {8}
Γ = {a, b, c, d, g, h}
T = {a, b}
δ:

Q\taśma	¢	a	b	c	d	g	h	$
0	0,¢,R	0,a,R	1,d,L					
1		2,c,R		1,c,L	1,d,L			
2		3,a,L	1,d,L	2,c,R	2,d,R			
3	4,¢,R			3,c,L	3,d,L			
4		5,g,L		4,c,R	4,d,R			
5					6,h,R	5,g,L	5,h,L	
6		5,g,L				6,g,R	6,h,R	7,$,L
7				8,c,R		7,g,L	7,h,L	
8						8,g,R	8,h,R	

Kolejne konfiguracje automatu przy akceptacji słowa *aabbaa* $\in L$ przedstawiono poniżej. Zastosowano nieco inną notację. Tutaj numer aktualnego stanu automatu pokazuje zarazem położenie głowicy. Głowica automatu obserwuje symbol położony bezpośrednio z prawej strony miejsca oznaczonego numerem stanu.

	¢	0	a		a		b		b		a		a		$
	¢		a	0	a		b		b		a		a		$
	¢		a		a	0	b		b		a		a		$
	¢		a	1	a		*d*		b		a		a		$
	¢		a		*c*	2	*d*		b		a		a		$
	¢		a		*c*		*d*	2	b		a		a		$
	¢		a		*c*	1	*d*		*d*		a		a		$
	¢		a	1	*c*		*d*		*d*		a		a		$
	¢	1	a		*c*		*d*		*d*		a		a		$
	¢		*c*	2	*c*		*d*		*d*		a		a		$
	¢		*c*		*c*	2	*d*		*d*		a		a		$
	¢		*c*		*c*		*d*	2	*d*		a		a		$
	¢		*c*		*c*		*d*		*d*	2	a		a		$
	¢		*c*		*c*		*d*	3	*d*		a		a		$
	¢		*c*		*c*	3	*d*		*d*		a		a		$
	¢		*c*	3	*c*		*d*		*d*		a		a		$
	¢	3	*c*		*c*		*d*		*d*		a		a		$
3	¢		*c*		*c*		*d*		*d*		a		a		$
	¢	4	*c*		*c*		*d*		*d*		a		a		$
	¢		*c*	4	*c*		*d*		*d*		a		a		$
	¢		*c*		*c*	4	*d*		*d*		a		a		$
	¢		*c*		*c*		*d*	4	*d*		a		a		$
	¢		*c*		*c*		*d*		*d*	4	a		a		$
	¢		*c*		*c*		*d*	5	*d*		**g**		a		$
	¢		*c*		*c*		*d*		**h**	6	**g**		a		$
	¢		*c*		*c*		*d*		**h**		**g**	6	a		$
	¢		*c*		*c*		*d*		**h**	5	**g**		**g**		$
	¢		*c*		*c*		*d*	5	**h**		**g**		**g**		$
	¢		*c*		*c*	5	*d*		**h**		**g**		**g**		$
	¢		*c*		*c*		**h**	6	**h**		**g**		**g**		$
	¢		*c*		*c*		**h**		**h**	6	**g**		**g**		$
	¢		*c*		*c*		**h**		**h**		**g**	6	**g**		$
	¢		*c*		*c*		**h**		**h**		**g**		**g**	6	$
	¢		*c*		*c*		**h**		**h**		**g**	7	**g**		$
	¢		*c*		*c*		**h**		**h**	7	**g**		**g**		$
	¢		*c*		*c*		**h**	7	**h**		**g**		**g**		$
	¢		*c*		*c*	7	**h**		**h**		**g**		**g**		$
	¢		*c*	7	*c*		**h**		**h**		**g**		**g**		$
	¢		*c*		*c*	8	**h**		**h**		**g**		**g**		$
	¢		*c*		*c*		**h**	8	**h**		**g**		**g**		$
	¢		*c*		*c*		**h**		**h**	8	**g**		**g**		$
	¢		*c*		*c*		**h**		**h**		**g**	8	**g**		$
	¢		*c*		*c*		**h**		**h**		**g**		**g**	8	$

Pamiętamy, że gramatyki kontekstowe (monotoniczne) zawierają produkcje, w których prawe strony są przynajmniej tak długie, jak lewe strony. Często formułując gramatykę nie bierzemy pod uwagę tego wymagania i otrzymujemy gramatykę bez ograniczeń (klasy 0 według hierarchii Chomsky'ego). Jednak prawie każdy język, jaki możemy sobie wyobrazić jest językiem kontekstowym; znane są jedynie dowody, że pewne języki nie są językami kontekstowymi. Dlatego też języki generowane przez gramatyki klasy zero w większości przypadków są językami klasy 1. Można więc przekształcić większość gramatyk klasy 0 w równoważne gramatyki kasy 1.

<u>Przykład: według [###]</u>
Dana jest gramatyka klasy 0:

(1) $S \to ACaB$
(2) $Ca \to aaC$
(3) $CB \to DB$
(4) $CB \to E$
(5) $aD \to Da$
(6) $AD \to AC$
(7) $aE \to Ea$
(8) $AE \to \varepsilon$

Gramatyka ta generuje język $\{ a^i \mid i = 2^n,\ n > 0 \}$. Nieterminale A i B pełnią odpowiednio rolę lewego i prawego znacznika końca form zdaniowych, C jest znacznikiem, który przesuwa się przez łańcuch symboli a pomiędzy A a B, podwajających liczbę za pomocą produkcji (2). Gdy C zderzy się z prawym znacznikiem końca czyli z /b, wtedy przekształca się w D lub E za pomocą produkcji (3) lub (4). Jeśli wybrane zostanie D, to wędruje ono w lewo na mocy produkcji (5), dopóki nie zostanie osiągnięty lewy znacznik końca A. W tym momencie D zamienia się ponownie w CC na mocy produkcji (6) i cały proces rozpoczyna się na nowo.. Jeśli zostanie wybrane E, to prawy znacznik końca zostanie pochłonięty. Następnie E wędruje w lewo na mocy produkcji (7) i pochłania lewy znacznik końca, pozostawiając łańcuch złożony z 2^n symboli a dla pewnego $n > 0$. Możemy dowieść przez indukcję względem liczby kroków w wyprowadzeniu, że jeśli produkcja (4) nie zostanie nigdy użyta, to każda z otrzymanych form zdaniowych ma jedną z następujących postaci:
(a) S;
(b) Aa^iCa^jB, gdzie $i+2j$ jest dodatnią potęga dwójki;
(c) Aa^iDa^jB, gdzie $i+j$ jest dodatnią potęgą dwójki.
Po użyciu produkcji (4) pozostaje nam forma zdaniowa o postaci Aa^iE, gdzie i jest dodatnią potęgą liczby 2. Wtedy jedyna możliwa kontynuacja wyprowadzenia to i zastosowań produkcji (7) w celu otrzymania AEa^i, a następnie jednokrotne zastosowanie (8), dające słowo a^i, gdzie i jest dodatnią potęgą dwójki.
Powyższa gramatyka zawiera dwie produkcje sprzeczne z definicją gramatyki kontekstowej (monotonicznej). Są nimi produkcje
(4) $CB \to E$
(8) $AE \to \varepsilon$

Możemy jednak utworzyć gramatykę kontekstową (monotoniczną) dla języka $\{ a^i \mid i = 2^n,\ n > 0 \}$ uprzytomniając sobie, że A, B, C, D i E nie są niczym innym, jak tylko znacznikami, które w końcu znikają. Zamiast więc używać dla nich oddzielnych symboli, możemy włączyć te znaczniki do symboli a poprzez utworzenie nieterminali "złożonych" typu [CaB], który to zapis jest pojedynczym nowym symbolem nieterminalnym pojawiającym się zamiast łańcucha CaB.

Pełny zestaw symboli złożonych potrzebnych do naśladowania poprzedniej gramatyki klasy 0 to: [ACaB}, [Aa], [ACa], [ADa], [AEa], [Ca], [Da], [Ea], [aCB], [CaB], [aDB], [aE], [DaB] i [aB]. Produkcje naszej gramatyki kontekstowej, które grupujemy zgodnie z naśladowanymi przez nie produkcjami poprzedniej gramatyki bez ograniczeń, to:

(1) S → [ACaB]
(2) [Ca] a → a a [Ca]
[Ca] [aB] → a a [CaB]
[ACa] a → [Aa] a [Ca]
[ACa] [aB] → [Aa] a [CaB]
[ACaB] → [Aa] [aCB]
[CaB] → a [aCB]
(3) [aCB] → [aDB]
(4) [aCB] → [aE]
(5) a [Da] → [Da] a
[aDB] → [DaB]
[Aa] [Da] → [ADa] a
a [DaB] → [Da] [aB]
[Aa] [DaB] → [ADa] [aB]
(6) [ADa] → [ACa]
(7) a [Ea] → [Ea] a
[aE] → [Ea]
[Aa] [Ea] → [AEa] a
(8) [AEa] → a

Czytelnik zechce pokazać że obydwie gramatyki – stara i nowa – generują ten sam język.