東西数学史

三上義夫

東西数学史の題名は、我等東洋人としてはピンと頭に響く．此題名は共立社南條君から与えられたことを感謝する．

既に東西数学史と云うから，其題号の通りか，東洋から始め西洋で終ることにした．此順序の記述に就ては、私の前に中瀬古博士の世界化学史があり，私は其順序の採用に於て博士から学んだことを感謝する．

和漢の数学に関して私の述べたものは，全く私自身の見解である．諸先輩並に多くの師友から示教された事の多いのは、深く感謝する。奈良朝時代の事は澤田吾一君の同時代の数的研究の著述に負う所が多い．

友人小倉金之助博士並に井出彌門君補訳の『カジョリ初等数学史』の序に於て、私は起稿中の東西数学史は紙数に制限ある為め，西洋の事は殆んど説き及ぶ事が出来ないと述べたのであるが，屡々変更を来たして遂に一通り論述を終えることが出来た。煩簡の中庸を得ざるものあるは、之れが為めである．切に覧者の諒恕を望む．

西洋の数学は主として未見の師友スミス，カジョリ両君の著述に基づいて説を立てた．茲に謹んで敬意を表する．

著者

目次

総　論

近来我国に於て歴史熱は次第に勃興した．数学史乃至科学史に就ても幾多の研究家が出で，或は外国の書を訳し，或は和漢の事蹟を闡明して発表するものが，漸く多きを加える．多きを加うると同時に，其研究は漸く精細となり，又一方に於ては大体の形勢を達観する事も進まんとしている．分析と綜合は何時も必ず相俟って進む事を要するものであり，此両者が共に整頓して始めて歴史の真相が明らかにされる．我国の科学史界に於て斯の如き形勢の見えたるは，即ち其歴史研究が必ずしも幼稚に非ざる事を語る．此れは専門家の事に就て言ったのであるが，専門家を駆って此に至らしめたものは即ち社会の背景に気脈相通ずるものがあり，彼等専門家に一種のインスピレーションを与え，鬱勃として胸底に止むべからざるもの有らしめるからに外ならぬ．我国の科学史界は前途甚だ汪洋たりと謂うべきであろう．我等科学史家は甚だ力強さを感ずる．歴史の回顧は固より自覚の増進を語る．即ち歴史研究の進む所以は，同時に我国数学科学界の活動を意味し，其前途有望なる事を示めす．宜なる哉，大正十五年我国に於て汎太平洋学術会議の開かるるや，諸外国から幾多の諸大家が参列したるに拘らず，我国人は其間に伍して何等遜色ある事を見なかった．此れ少くも太平洋岸に関係ある学術に於ては，既に我国の学界を除外して独歩する事の出来なくなった所以を明示するものである．数学は此会議に於て関係を有しなかったけれども，開会の際に我が学術研究会議が Scientific Japan，Past and Present なる一書を編纂して参加の諸学者に配布したものには和漢諸種の学術に関する歴史発達を叙したのであるが，和漢の数学に関しても私は会議の依頼を受け，簡単ながらに之を記述するの光栄を有した．私は我国の数学を学ぶものが，進んで彼国の学界に雄飛し，彼をして我に学ぶの必要を暁らしむるに至る事の，遠からざらん事を望むのである．

現に我々が学修する所の数学諸科は凡て西洋の数学に非ざるはない．近年我国に於て良数学書が着々として刊行発表されるようになったけれども，而も多くは外国の諸書に依拠したものであり，外国の数学書を無視して適当に学修研究を進める事の出来ない．従て数学とし云へば，即ち外国伝来のものであり，我国の如きは古来数学の誇るに足るものがあったろうとは，誰か思おう．而も徳川時代には立派な数学があった．支那の数学を基礎として開発したものではあるけれども，而も支那に見ざる特殊の発達を成就したのであって，其歴史は一種の精彩を有する．外国の数学史家も之に対し興味を以て注意している．維新の際に当り，和算即ち日本の数学は棄たれて西洋の数学が採入れられる事になったけれども，其当時に於ては決して優勝劣敗の意味ではなかった．汎く諸般の事物を外国から学びて，諸外国と競争角逐の場裡に立たなければならぬ必要上，数学に於ても亦彼れに学び，依て諸多の工学理学等を学修するの方便としなければならなかったのであり，其目的の為めには世界一般の科学界数学界に仲間入りしなければならぬから，数学も世界一般のものを修めようと云うのであった．誠に賢明な処置である．和算家の中には洋算に対し多く不満があり，随分対抗もしたけれども，又和算家にして同時に洋算をも修め，洋算の摂取並に普及に貢献したものも少くなかった．洋算が割合に早く理解され同化され得たのは，其間に和算家が之を援助した功績が与っているのである．此時に当り一時研究創意は中絶したかの観があるけれども，其後二十年許りを経て漸く整頓するに至っては再び新規の研究が続出することとなり，以て今日の現状を見るに至った．故に維新を限界として我国の数学は固有の発達と西洋の数学の摂取と云う一目瞭然たる分界線を劃しているようなものの，それは単なる外見に止まり，実を云うと，一貫した継続である．和服が洋服となり，下駄の代りに靴をはくようになったのと少しも異ならぬ．たとい洋装しても我々は何処までも日本人であり，日本の精神は依然として之を包蔵している．我国に和算なるものが特殊の発達を途げ，幾多の尊重すべき業績を遺している事は，即ち我等現在人並に我等の子孫に対し永遠に自覚を喚起せしめ，修養と努力は即ち我等をして数学の研究，開拓の上に相当に高き地歩を成し得べき事を実際の体験を以て確信せしむる所以であり，我等の心臓を強く鼓舞するのである．故に私は今，世界の数学発達の跡を叙するに当り，先づ我国の数学史から其叙述を始めようと思う．他国人に対しては勿論意味を成なぬであろうけれども，我等日本人としては之を適切に感ずる．

今，私の記載に就て計画するところを言えば，主として徳川時代に発達した和算の概要を述べ，次に和算の根原であった支那数学を叙し，一方には清朝時代の造詣を以て我国の和算と対比し，次に印度の数学を考え，回教国の数学を述べ，是に於て翻って希臘数学を説き，最後に欧米近世の大発展に説き及ぼうと思う．若し紙数が許すならば，欧洲最近の事までも描写し，又維新以後の我国の状態をも明らかにしたいけれども，恐らく，それまでは筆を運び得ないかを危ぶむ．和漢数学に就ては二十余年来研究するところであり，取纏めて叙述する事を希望したのであるが，従来出版の書肆を見出す事が出来ないので未だ着手し得ざるを遺憾とした．然るに今始めて支那数学史と日本数学史と一部づつ起草するの機会を与えられ，従来の研究を取纏むる事に急いでいる．故に和漢数学史に就て私が茲に筆を執るのものは，其総論を成すのである．其委細を知らんと欲する人は，近く完成さるべき両書の出版を俟たれん事を望む．

西洋の数学に就て設くところも亦，やがて説くべき和漢数学史上の比較に資する事が出来れば，私は仕合せと思う．西洋数学史並に一般科学史も一通りの研究を積みたいと思い，其資料も可なり蒐集したけれども，余裕に乏しきを以て全く中止したのであるが，今比較研究の便を思うて茲に筆を執り，数学を学修する後進の人士に向って，其学ぶところの学術の大勢を観取して戴きたいと思う．若し私の此の叙述が多少にても過去を回顧して将来に進取するの精神を養い得るの資とならば，私の数学史研究は充分に報いられたる事を感謝する．

第１編　日本の数学

第１章　日本古代の数学

日本の古典中に於ける神代に関する記事中に八百万の神だとか，千五百万など云う数が屡々現われているのは著しいが，故遠藤利貞翁の『大日本数学史』には之を以て直ちに神代に行われたものとしている．けれども日本の神典は構成年代も問題であり，又支那思想を伝えたと思われるものも幾らもあり，此の数え方の如きも必ず神代から日本に存したと見る事は出来ない．恐らく支那から伝ったのであろう．

支那の文化伝来以前に於ける日本の数学が如何なるものであったかは，極めて不明であり，又文字の使用以前に属するので大なる進歩はなかったと見て差支あるまい．けれども一から十までの数詞は他国語中に其例を見ざる特殊のものにして，其語根は音韻の変化で倍数を表わすようになっている．

仏教が伝わり又支那の制度を採用して我国の文化は著しく整頓したものになったのであるが，此時支那の暦法を遵用した事は人の能く知る所である．支那の数学も亦伝わる．大宝令に依れば，大学及び国学を立てて官吏を養成したもので，其大学では支那の算書を教科に用いたのであった．此諸算書中，我国で後世まで伝えられたものは一もない．支那では現存のものもある．隋唐の用書と略ぼ同一であり随分高尚なものであるが，全部学修されたかは，今之を知るに由もない．而も祭良朝時代に於ける戸籍などの整頓，税務などの立派に行われた事を見ると，可なり数学の学習には意を留めたものらしい．奈良や京都の都城設計は支那の都城に摸したのであるが，街衢の命名法は彼れに倣ったものでなかった．広い田野に條里を立てて井然たるものにしたのも著しく，当時の遺跡と思われる道路の如きは，今の参謀本部実測図に照して見るのに，東西及び南北を通じての測量が随分精密であったと云う．当時，磁針はないので，天測に依ったものと見ねばならぬ．

奈良朝時代には計算に算木を用いた事は大宝令中に見えている．籌の字で之を記るす．平安朝から鎌倉時代の頃に掛けても算木で計算を行うた事は，種々の記事が残っている．算木と云うのは徳川時代の和算家の使用した名称であるが，つまり小さき竹片若くは木片を並べて数を表わし，計算を行うたのである．其用法は勿論支那から始まる．算木は和漢数学の発達上に極めて大切な役目を演じたものである．

奈良朝時代に行われた度量衡も全く支那の制を模したものでなく，又彼れにありては二百四十歩を一畝としたのに，我に於ては三百六十歩を一段としたのであった．

奈良朝時代に於て数学は有利な状態に向いつつあったように思われるが，其後に至りては律令の制度が次第に行われざるに至ったと共に，数学の如きも長く発達の余地なく，徳川時代に至るまでは注意すべき進歩を示めさなかった．暦法に於て支那の宣明暦が用いられてから，数十年を経る毎に改暦を行いて，月日の狂いを訂正しなければならぬものを，其侭に訂正もせず，八百余年間も押し通して使用したと云う事実があり，つまり之を訂正改造するだけの数学上の能力の欠けた事を明瞭に言い表わすものと謂って宜かろう．平安朝の中期から鎌倉，室町時代の如きは斯の如き状態であったとはいえ，継子立の算法など遊戯として行われたらしく，数学に関する趣味に欠けていない事が知られよう．継子立とは実子と継子十五人づつの中で誰を相続人に立てようかと云うので，輪形に並ばしめ，或る原則の下に数を抜きて，最後に遺れるものを採ろうと云うのである．此の遊戯は平安朝時代から現われている．之に類似のものは西洋にも凡そ同時代から在るが，支那に在ったかは未だ見当らぬ．

第２章　算盤の伝来

算盤は徳川時代にも我国で盛んに行われた．現今に於ても逓信省貯金局や銀行会社等の会計は凡て算盤を使用している．世間では算盤は日本独特のものと考えるものもあり，算盤の算法を和算と云う人もあり，其書物に和算何々と命じたものもあり，算盤が日本人の日用生活上に深く喰い入っている事は勿論である．けれども算盤は日本の発明ではない．支那から伝ったのである．支那で何時代から行われたかは明瞭でないが，現今でも多く行われているのであり，明末の算書には現用のものと同形の図が出ているが，支那には其以前の図もなく，実物も存する事を知らぬ．然るに日本では前田侯爵家に前田利家が名護屋の陣中に携えた遺品があり，又伊勢には文安元年 (一四四四) 云々の裏書きある現品が伝えられている．形状は支那のものに類し，梁上二珠であるのも支那のものに同じい．思うに支那では更に以前から行われ，日本へも早くから伝ったものに相違ない．

支那の古いものは梁上一珠，梁下四珠のものもあった．

支那の算盤は軸が長く，珠が鈍い楕円状であるが，日本のは軸が短かく．珠が稜ばったものになったのが異なる．日本人の動作に適当するように改造したのであろう．算盤の算法に於ても徳川時代の諸算書に見えたるものは，支那の算書中のものとは，余程改造されて軽便になっている．

山形在に梁上三珠の算盤があるが，珠形などから見ると，日本製であるらしい．此種のものは多く行われた形迹がない．

支那では算盤の使用に依って，多く数学上に貢献した事があるらしく思われないが，日本では算法の発達上に影響したことが余程著しい．

第 3 章　徳川時代に於ける数学の勃興

日本で数学が発達したのは徳川時代になってからの事であった．其初め毛利重能なるものあり，秀吉に仕えて明国に留学し，程大位の『算法統宗』を得て帰ったが，此れから珠算を拡め，珠算に関する著書もあって，数学中興の祖となったと云われている．珠算が毛利から始まったものでない事は，前掲の伊勢の算盤の存在に依って明らかである．明国留学の事も亦確実な史料がない．けれども朝鮮役の時に『宋楊輝算法』及び元の朱世傑の『算学啓蒙』の朝鮮版が伝来した事は，東京高師所蔵の本に依って明らかである．此頃から日本の数学が開け初めた事も亦疑う事を要せぬ．

毛利の著書と思われるものは，元和八年 (一六二二) の作がある．恐らく其以前の作もあったであろうが，現存せぬ．同年の作は又佐渡に居った百川治兵衛の『諸勘分物』の第二巻が今も佐渡に在る．吉田光由の『塵劫記』(寛永四年，一六二七，初版) が出たのは其後である．吉田は毛利の高弟であるが，百川の師伝は伝わらぬ．此等は何れも教科書であって，深い数学を説いたものではないが，教授上に特殊の注意を払えるものなる事が認められる．算盤の算法や，日用の計算法や，求積の事など，其主要な事項である．継子立等の見えているのも面白い．

円周率は此等及び他の和算初期の諸書に皆三・一六を用いているが，此れは十の平方根と云う事であり，之に相当するものは支那にもないではないが，多く用いられたものではない．恐らく日本では何等かの状況によって之を使用するようになったのであろう．

此等初期の算書は支那の数学から学ぶところは多かったのであろうけれども，而も支那の算書の記載其侭に受け継いだものではなかった．

和算勃興の初期に於て支那の算書中最も影響を及ぼしたのは『算法統宗』と『算学啓蒙』とであるが，方程，盈朒，方陣，天元術等は皆此等の支那算書から之を学んだ．方程は一次連立方程式解法であり，盈朒は二つの仮定値を立てて之に基き真の答数を定める算法である．方陣は magic square である．円欑と称し，円周並に直径上に排列したものもある．天元術は支那の代数学にして，宋末元初に発達したものであるが，算木を並べて代数演算を施し，又得るところの方程式をも解いたのである．算木の算法であるのが，誠に留意すべきである．

和算家が天元術を学んだのは，全く『算学啓蒙』に依る．『算学啓蒙』には天元術は使用されているが．之に関して深く説明する所なく，全く師伝を待たずして単に此書だけから天元術の算法を会得するのは，容易ではなかった．随分苦心したらしい形迹も有り有りと認められる．完全に之を了解し得るまでには可なりの年所を閲した．けれども最後に了解し，又之を用いて自由に問題を解き得るようになった．確実に其地歩を成したのは沢口一之にして，其著『古今算法記』は寛文十年 (一六七〇) の作である．

『古今算法記』の問題解法には注意すべき事がある．一つの問題を解いて得る所の答数は普通に一種に限るのであるが，稀には二種の答を得る事がある．つまり二次方程式に二根のある場合に遭遇したのである．今から考えると何でもない事であるけれども．此種の場合に就て未だ嘗て古来の論究が有るでもなく，又之を適当に処理すべき何等の準備もない，一つの問題には一つの答が有るべきものと思いつめて居たものに，案外にも二つの答が出たのであるから，全く狼狽せざるを得なかったであろう．故に之を正当なものと認める事が出来ない．斯の如きは問題が正常でないのである．之を「翻狂」だと言っている．アブノルマルと見たのである．病的の問題だとしたのである．従て問題中に見えたる諸数を変じて答が一種に限るように改め，然る後に之を解く事とした．翻狂には二種の答を得るもの以外のものも考えられているが，今は其詳述を避ける．

沢口一之の此の処理は勿論正当のものではないが，問題の翻狂と云う事を言ったのが動機になって，其後関孝和の手で方程式の吟味に関する研究が起り一種の方程式論が成立するに至ったのである．

沢口一之が天元術を用いて諸問題を解いたのは，其前に他の算書に此等の問題を発表した人があったからである．算書中に問題を出して後進の解答を求める事は，寛永十八年 (一六四一) 版の『塵劫記』新版から始まる．此以後，諸算書中

に之を解いたものあり，さらに又新に問題を提出するの風を成し，其風習は長く行われて百余年の後に至った．沢口一之の書も亦其過程中の一書にして，彼れの提出した所の問題は之を解いたもの二三家あり，中に就きて関孝和が最も顕われている．其事は後に説く．

磯村吉徳の『算法闕疑抄』(万治三年，一六六〇) も先輩の出した問題を解き，且つ新らしい問題を遺したものであった．礒村は代数的の処理を嫌い，成るべく算術的に解く事を求め，之を他力と自力に比している．又算術的の解をする事を和術と云った．此の如き態度の適否如何は姑く措き，斯く云う精神が適当に働いて後年の成果を得るようになったものであろうとも思われる．

『闕疑抄』に見えたる諸問題には注意すべきものが多い．次の時代に於て関孝和の諸研究には此等の問題から出発したろうかと思われるものも間々認められる．

図形に関する問題の処理には勾股弦の関係を巧みに応用したものであるが，此関係や他の諸定理の分解的証明は礒村の書中などに見えている．

円に関する算法並に正多角形の算法は，和算家が其初期から深く注意したもので，村松茂清の『算俎』には可なり精しい算法が出ている．此等も関孝和に至って整頓したものが出来た．

和算初期の状態は大概今言うようなものであるが，此時代には算盤が普及した事，支那の代数学が了解された事，諸種の問題が出た事などが主であって，関孝和の出現に向って準備を整えた時代であったと謂って宜かろう．

第4章　関　孝　和

関孝和は通称新助，寛永十九年 (一六四二) 三月，上州藤岡に生れたと言われているが，一説には寛永十四年 (一六三七) の産とも云い其出典が明らかでない．今のところ，不明と見て置きたい．ただ其実家内山氏並に養家関氏が元と藤岡に関係の有った事は事実である．関，内山両氏共に幕臣にして，関孝和は甲州公即ち後の六代将軍に仕え，数学及び機巧に長じた為めに相当に尊敬されたらしい．寛永五年 (一七〇八) 十月廿四日に歿した．墓誌にも享年を記るして居らぬ．著述の算書は幾らも残って居るが，其経歴の委細並に人物性行の如何に就て徴すべき史料が乏しい．

関孝和が数学史上に頭角を現わしたのは『発微算法』(延宝二年，一六七四) の刊行である．此書は沢口一之の『古今算法記』の十五問題に答えたもので，演段術と名くる新算法を以て解いたのであった．勿論簡単に術文を記るしたのみではあるが，後に門人建部賢弘の名で『発微算法演段諺解』(貞享二年，一六八五) が刊行せられ，関の演段術は広く行わるるに至った．関孝和の演段術とは如何なる者ぞ．今委細に之を解説する事は出来ないが，簡単に言えば，天元術を二重に施したようなものであった．天元術では所問の未知数を含むところの二つの式を立てて相減じ，因て一つの方程式を得るのが原則である．然るに『古今算法記』の問題の如く複雑なものになると，直ちに此原則を適用して方程式を得る事が六ケしい．是に於て所問の未知数の外に他の補助数若くは徑数とも云うべきものを採りて此両数を含める二つの方程式を作る．此両式から補助数を消去すれば，所問の一未知数に就ての一つの方程式が得られる．関孝和の演段術は実に此算法の処理に関するものであった．演段術は支那の天元術から一歩を進めたものに外ならぬ．

けれども天元術と演段術との間には一つの重要な相違がある．天元術は算木を使用して方程式構成の演算を施すのが原則であるが，算木の布列によって此演算を行うには未知数が唯一種の場合に限られ，他の諸数は凡て数値が与えられたものでなければならない．然るに演段術に於ては一未知数の外に一補助数を用いるので，此両者を算木で布列する事は六ケしい．支那の四元術の如き方法を用うれば出来ない事はないが，和算家は四元術を知らなかったらしく，類似の算法は一も和算家の著書中に所見がない．従て演段術で二数を含める方程式を作るのは，算木に依頼したのでなく，筆算式に記載したものであった．筆算式記載の代数演算は支那数学中には見ざる所であり，明末清初の西洋数学の漢訳中にも見えて居らぬ．演段術は天元術を二重に適用した如き形式のものであったのが，注意すべきである許りでなく，筆算式の代数学が新たに構成された事に意義がある．

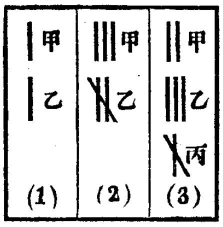
関孝和の演段術には各種の算法があるが，中に就きて最も注意すべきは西洋数学上の行列式に相当するものの成立った事である．此算法は，『演段諺解』には使用されて居らぬが．稿本『解伏題之法』(一六八三年重訂) 中に見える．西洋では関と同時代に出た Leibniz から始まり，同氏は之を公にせる事なく，之に関する研究の起きたのは十八世紀中葉以後であるが，関孝和の方法は一層整頓し一層一般のものであったのが著しい．関孝和の行列式論に西洋の関係が有り得ぬ事に論はない．

此方法につき念の為めに今少しく改めて言って見よう．未知数 x と補助数 k とを含める二つの方程式を作り，此両式から k を消去して x のみの一方程式を作るのが演段術の一般形式であるが，其演段術の一方法として，両方程式から加

減して適当な数だけの式を作り，方形になるように工夫したのが，即ち行列式である，此行列式の展開に就て関は述べているのである．展開には交式及び斜乗と云う二つの方法に依る．誠に巧みなものであって，原則としては如何にも立派である．けれども不幸にして関孝和の取扱方には，交式にも斜乗にも間違いがある．四つの場合に区別して論ずべきものを二つに区別したので誤ったのであった．交式に関する過誤は早く訂正されたが，斜乗に就ては凡そ百年後に至りても尚過誤のままで解説したものもあった．

関孝和と同時代に島田尚政門流，井関知辰作の『算法発揮』があって，別の仕方で行列式の展開を行うている．此れには過誤はなく，又稿本ではなく刊本であった．行列式の算法を公刊したものは，恐らく之を持て世界の嚆矢とする．

行列式に就ては其後に至り久留島義太，管野元健等があって展開方法に新工夫を凝らし，見るべきものがあった．



関孝和の演段術は筆算式の代数学であり，従て筆算式の代数紀法を要するのであるが，其紀法は支那の方程即ち一次連立方程式解法や，又天元術の代数演算を筆記する方法，並に算木で数を表わす並べ方の記載等から来たものであり，ここに示めす所の三つの式は，(1) は甲と乙の和であり，(2) は三甲と二乙の差であり，又 2 甲 + 3 乙 x − 丙 $x^2 = 0$ を表わすに (3) の形に依る．此の如く算木を並べた形で数を記るすものを籌式と云い，文字を用うるところの代数紀法を傍書式と称した．之を関孝和の代数紀法とする．

関孝和は点竄術を創意したと云う事であるが，点竄の名称は後代の命名で，後には一般に代数演算和くは代数的の処理方法，又は解析方法と云うような意に用いられるようになった．点竄術とは日本の代数学と見て置けば宜い．

演段術と点竄術とは其異同の事など判然せず，又屡々混同され勝ちであるが，実は演段術は上述の如きものであるから，特殊の代数方法に関し，点竄の一部分を成すと見て宜かろう．

関孝和は方程式の吟味なども之を試み，問題が成立つ為めの條件をも明らかにし，極大極小に関する研究も此れから出発される事になったのである．所謂極数術と称するものも，此意味に於て関孝和から出たと謂って宜い．又方程式は一根のみに限るものでなく，二根又は其以上の根があっても宜い事をも見出した．即ち方程式は一般に次数と同数の根を有する筈であるが，其根には正根のみならず負根もあり，又其諸根は欠けている事もあるが，此場合には対を成して欠けるものである．例えば三次方程式には一般に三根があるが場合に依りて其二根が欠けて一根しかない時がある．二次方程式には二根があるが，場合によりては一根もない事がある．根のなき場合を無商と云う．和算家は根と云わずして商と云っているのである．

天元術で得るところの数字方程式を解くのは，一桁づつ求めるのであるが，関孝和は幾桁か求めた上は割算で省略計算を行うべき事を記るしている．

関孝和の角術も亦注意すべきものの一つであろう．角術とは正多角形に関する算法である．前から正多角形に就て多少の記載されたものがないではないが，纏まった一種の算法として成立ったものは関孝和からである．其算法は関の死後に『括要算法』の中に公にされている．辺数と一辺の長さを知りて，角中径及び平中径即ち外接半径と内接半径とを求むるのが其問題にして，方程式の形で之を求めている．其諸方程式を整理し，其構成の法則を発見して一般の公式を作る事なども後には出来るようになった．角術は日本の数学上では大切な分科の一つであり，之に関する文献は甚だ多い．円に内接する多角形の一辺だけ除き他は凡て相等しきものに就ても正多角形の場合と同様の研究が成立している．

方陣，円攅の布列法を説いたものも，関孝和の稿本は最も初期のものに属する．島田貞継の著書は刊本にして，或は関の研究に先立ったのである．関と同時に田中吉真も亦研究があり，方陣に就ては此人の研究が最も整うている．幾多の方陣の作られ得る事なども此人は明瞭に述べている．田中は上方の算家，甚だ優れた人物であったと思われるが，其著述の現存するものが少ない．方陣に就ては其以後までも和算家の種々に工夫したものが甚だ多い．

関孝和の『算脱験符』も亦一は継子立の算法を説いたものであり，一は目付字の研究である．此等や支那から伝ったと思われる剰一術などに基いて和算家の不定解析は発達を始めた．

幾何学的図形の問題は和算家の好んで攻究したもので，其解法は多くは代数的に試みたけれども，又多少の証明なども行われないではなかった．関孝和は『解見題之法』，『求積』，『毬闕変形草』等の諸稿本の中に此種の攻究を記るしている．其多くは求積に関するものであり，螺線などに関するものもある．円弧を回転した立体の体積は弧積の重心が画いた円周の長さへ弧積を乗じたものとする．此れ即ち希臘の Pappus 並にスイスの Guldin の得た算法と等しい．和漢算法中には其前代に絶えて類例を見ない．

円理の創意は関孝和の業績中最も重要なるものと考えられているのであるが，此に就ては固より問題がある．普通に円理と称するものが果して関孝和の創意であったろうか，若くは関の存生中に成立していたであろうか．此れは甚だ不明で

ある．其算法の明瞭に記されているのは，関の歿後に門下の人の書いたものの外にはない．此問題に就ては今多く議論を進める事をすまい．

けれども関孝和が円の算法に就て業績のあった事は何等の疑いなく，『括要算法』中の所謂弧術なるものは誠に手の掛った苦心の作である．初めに円周率を求めるに，四角形を容れ，八角形となし，十六角形とし，次第に辺数を倍して其周の長さを算出し，其次々の諸値に一種の処理を施して修正を加え．依って円周の値を得る事とした．同じ方法は円弧の長さの算法にも役立つ．例えば円径一尺とし矢の長さ一寸，二寸，三寸，四寸，五寸として其弧長を求める．そうして或る攻究を積みて，矢と弧長とを含んだ式を作って，矢の長さが此等の場合に相当するときは全体の式が消え尽きるようにならしめ，此式は矢の値の他の場合に就ても一般に成立つものと見る．其算法は随分難解であるけれども，決して不條理なものではない．こうして何次方程式かで其結果を得るのである．

類似の算法は『大成算経』にも記るされ，後代の算書中には幾らも其記述を見る．類似の公式が建部賢弘著『研幾算法』(一六八五) 中に見えているから，其頃には既に成立していた事も明らかである．此等算法は支那の招差法を其侭に適用したものではないけれども，招差法の変形的適用と謂っても宜かろうかと思う．而も尋常一様の苦心で出来たものではないであろう．招差法は支那で出来たのであるが，関孝和は之を一般の形式に記載し盛んに応用している．之に関し有限級数の総和等に関して有益な研究がある．

第 5 章　関孝和と同時代及び其門下

関孝和の業績に就ては前章既に之を略述した．関孝和は和算の勃興に向える機運を受けて之を大成したのは云うまでもないが，和算は関孝和の手で整頓せられ，之に依って後来の発達を規定した如き有様となった．世に算聖と称せられ，関夫子と呼ばれ，数学と云えば直ちに関流の独占であるかの観を呈するに至ったのも，故ありと謂うベしである．関孝和は一人の力，何うして能くあれだけの大業績を立て得たであろうか．此等は従来屡問題とされて居る．然るに関孝和の生涯には甚だ疑問視さるべき事がある．即ち関は或る時，奈良の某寺に何人にも不可解の唐書ありと聞き，定めて算書ならんと思い，奈良に急行して写し取り，江戸に帰って三年の間，苦心勉学してから，其学力は大に増進したと云う話がある．此話は関の歿後三十年許りの頃に作られた書物に見え，甚だ有名なものであり，又一説には関は自分の使った種本を焼き棄てたと云う事も見える．恐らく関が何等かの種本を見た事に疑いはあるまい．関が壮年の頃に『宋楊輝算法』を得た事は，関の奥書を記るした写本の写しが残っているので知られる．或は『算学啓蒙』を見たと云い，或は元の李冶の『測円海鏡』など見たものと考える人もある．劉宋の祖冲之の『綴術』が其種本ではなかったろうかと疑うものもある．勿論充分の攻究を要するであろう．

然るに関孝和の著述を検するに，其年紀あるものは，刊行の『発微算法』と一の暦書を除くの外は凡て延宝八年 (一六八〇) から貞享二年 (一六八五) まで足掛六年間の重訂に係る．年紀の知られざるものも，凡て此年代の頃には成立していた事の立証され得るものがある．関孝和の数学は此年代の頃に全部出来上って，其以後の二十余年間は殆んど全く為す所はなかったと見て宜い．此事情により前述の疑問は益々高まらざるを得ぬ．

又一方には関孝和が筆算式の代数学を創めた為めに，西洋の代数学から学ぶところがあったのではないかとの疑いもある．関孝和と同時代に和蘭で数学を学んだ日本人があり，此人は医学をも修めたと云う事であるし，又当時外国から帰った医者に鳩野宗巴があるので，関孝和は此方面の影響もありはしなかったかとの疑いが高まる．

けれども鳩野宗巴が数学に関係の有った形迹なく，和蘭で学んだ人が鳩野と同一人ではないようであり，又帰来したらしくもなく，恐らく混血児か何かで日本人と称したものであったろうから，左まで疑いの眼で白眼視する必要はないであろう．

関孝和の代数学は支那系統のものであり，西洋の関係を認めるに足るべき理由に乏しい．明末清初に漢訳された西洋の暦算書は凡て禁書の中に入れられ，関孝和が之を参照したろうとも思われないが若し参照したにしても，関の説いた如き代数学を記るしたものはない．関が若し有力な種本を有したとすれば何うしても支那の古い算書であったろう．

関孝和の頭角を顕わした直前の時代に於て．和算の発達が着々として其準備を整えて居た事は前に述べた．関孝和は決して偶然に出たのではない．関孝和と同時代の人にも，従前は余り有力な人物はなく，関だけが群を抜いて優れた人であったように思われたのであるが，如何にも群を抜いた人ではあったろう．而も当時の諸算家の業績を研究するに，随分優れた人が幾人かあったように思われる．此等の人々の著述は刊行のもののみ残り，稿本類は一二のものを除く外は伝って居らぬので，当時の造詣につき其真相を捉える事は出来ないけれども，現存の史料から判断しても関の著述に見る如き事項を説いた算書が往々に存したのであった．方陣に就ては関の前に会津藩の島田貞継があり，同時代に田中吉真は一層

進んだ解説をしている．行列式に就ても大阪の島田尚政又は其門人が関の生存中に関の説いたのとは別の方法を述べて之を刊行した．他にも類似の事を説いた人がある．其書中に説くところの代数紀法は関の使用したものとは同じでない．後に大阪の宅間流及び金沢の三池流などで用いた紀法は其系統に属する．田中吉真の如きは代数演算に就ても随分盛んにやっているし，連分数の事なども立派に使っている．円の算法に就ても関と同時代の頃に種々の研究があったらしく，円周率一一三分の三五五とするのは，普通に関から始まる如く見られているが，実は其前に問題中に之を記るした人があったのである．関孝和と同時代の諸算書に見るところの術理は，関から伝ったものも無いではなかろうが，必ずしも全部関和孝の伝統を引いたものと見做し得べきやは問題であろう．寧ろ関孝和ほどの人物が出現しても宜いような機運が動いていたので，関孝和はあれだけの業績を挙げる事も出来たのであるし，他にも立派な人物が幾らも輩出したのだと見るのが至当であろう．ただ問題になるのは『綴術』の関係が何うかと云う事である．此問題に就ては支那数学の條下に譲る．

関孝和と同時代には有力な人物が中々にあったけれども，関に比して非常に違った事が一つあった．即ち関の門下からは有力な人物が多く輩出し，爾後連綿として其学統を継ぎ，関流と云えば唯一の優秀な算学派であり，関流以外には幾多の流派はあっても，有れども無きが如く，殆んど振わなかったに反して，関流は隆々として昌え以て幕末までも及んだのである．此れ一には関の学力と云い其造詣と云い他に較べて優れていた事にも頼ろうが，又後継者に多く有力家を得た事にも頼ろう．関自身も幕臣であり，幕臣や江戸在勤の諸藩士中の有力家が多く其門流から出た事も亦大いに関係があったであろう．関孝和の稿本著述類が比較的に多く世に伝っているのは，其流派が盛んであったからであろう．他の諸派は勢力微弱であったから，自然に諸算書も伝わり得なかったとも見られよう．

関流以外で有力な流派は，関当時の算家の伝統を引くものとしては中西流及び宮城流があり，共に随分拡まりはしたが，有力な人物の輩出した事はなかった．其流祖は江戸の中西正好及び京都の宮城清行である．

稍や後れて発達したものには大阪の宅間流があり，大阪では勢力があったけれど，知名の大家に乏しく，又業績の見るべきものも多くない．後に天文学者高橋至時が初め此派に就て算学を学んだ人である事などは著しい．金沢の三池流は初め大阪から伝ったのであり可なり有力者もあったらしいが，金沢にのみ限局せられ，大なる発展の遂げる事が出来なかった．福岡の星野流，紀州の小川流など云うのも同様であった．

関孝和の門人中には人物の多かった中に荒木村英及び建部賢弘の二人が傑出した．関の遺稿『括要算法』の刊行されたのは荒木の手から出ている．荒木の著述は多く伝って居らぬが，其門人に松永良弼があり，著述も多く，関流の教授系統は此人の手で余程整頓した．

建部賢弘は幕臣にして，其兄二人と共に関孝和の門に入り，早くから其能力を認められたらしい．『研幾算法』，『発微算法演段諺解』は此人の名で刊行された．関孝和の諸研究を取纏め且つ若干の事項をも添加して作ったらしい所の『大成算経』二十巻は従来主として賢弘の作であろうと云われていたが，関と賢弘並に其兄賢明の三人で編纂に着手し，二十年を要して遂に賢明の手で纏めたものであるとは建部氏に伝った記録に見える．宝暦中に成ったものであると云う．関氏の数学は大概具われりと謂って宜かろう．普通に円理と云うもののみ見えて居らぬのは，或は実際未だ成立していなかったからとも見られよう．此れには議論もあるのである．建部賢弘は後に『不休綴術』などの著述がある．

賢弘の門人に中根元圭があり，甚だ多通の士であった．其子に彦循あり，彦循の門人に村井中漸があって，世々京都に居りて覇を称したが，江戸の数学と対抗し得るに至らなかった．

中根元圭の提撕に依って頭角を顕わしたものに久留島義太がある．極めて無頓着な人物であって，別に此れと云う師伝はないが，中根の保護の下に其学力は頗る増進し，貢献するところが甚だ多かったらしい．松永良弼と共に岩城平侯 (後に日向延岡侯) 内藤氏に抱えられ，侯の為めに数学を講じた．松永は当時の錚々たる大家であるが，久留島をば先輩として一歩を譲っていたらしく見える．松永の著述中には久留島の手に成ったものも記るされているであろう．

中根，久留島，松永三氏の教を受けて関流中最も勢力を得たのが山路主住であり，山路の門下からは安島直円，藤田貞資，戸坂保佑等が出た．戸坂は独創の能力に富んだ大学者ではないが，仙台藩の為めに関流の諸算書を伝えられて之を整理し，注解を加えなどして今に伝っているのが，著しい功績である．藤田は『精要算法』の著述を以て著われた．安島直円に至りては幾多の新らしい研究があり更に後の時代の発展に向って資するところがあった．

安島直円の門に日下誠，坂部広胖等があり，日下の門からは幾多の人物が輩出し，文化文政以後の盛況を呈するに至った．此時代の有力家は始んど日下門下の人に限られたと謂っても宜い．和田寧の如き傑出した人物もあった．此等後代の事蹟は後に説くけれども，関流が如何に盛んなものであったかは，此等の伝統を見ても思い半ばに過ぎるであろう．

第 6 章　関孝和直後の時代，円理の発達

関流の伝統を受けた諸大家中最も優れた人物の継承に就ては，前章に之を説いたが，其業績の事も亦之を説く事を要する．微細の点まで之を記す事は此短篇の能くする所でないから，最も大切な事項のみに記述を限る．其中に就きて第一に注意すべきは勿論円理であろう．

関孝和が招差法の変形らしき算法に依って，円弧を表わす方程式若くは公式を作った事は前に之を述べた．同種の公式は関の門下などの著述中にも幾らも散見する．更に多少形式を変更したものも見えている．

此種の事項に就て記るしたものに建部賢弘の『不休綴術』(享保七年，一七二二) がある．他にも之を記るしたものはあるが，此書は特に注意を要する．『綴術』の名称は『隋書』の記事によって，祖沖之の『綴術』から取ったものなる事，序文中に見える．思うに建部は此書に於て単に其算法を説いただけではなく，数学研究の方法を説いたもので，一種の数学方法論の書なりと見る事が出来よう．此意味に於て甚だ重要なりと考える．即ち帰納的に着々と推究して術理を探会しようと云うのである．建部は特に『探会』の語を用いている．勿論，不完全帰納法であるけれども，之に依って数学特に代数的処理に関する大体の研究態度を決しようと企てたものらしい．不完全帰納の方法は和算家の好んで用うる所であった．建部は和算の方法を理想的に明記した人であったと謂っても宜いであろう．其算法の一つとして前記の円に関する算法も記されている．

大阪の宅間流では円に関して内外接形を用い，辺数の極めて大なる場合まで算定して円周率を求めているが，関流の諸算家が好んで用いた如き修正方法を知らなかったものか，余り精密な結果は得られなかった．更に円弧を表わす公式をも作っているが，其算法は招差法に依ったもので，其結果は無限級数となる．後年，間重富が円理の算法を立てたものは，複雑な形式にはなったけれど，宅間流の円理の算法から脱化したものと思われる．

建部賢弘は円理に就て別に注意すべき著述があった．『円理弧背術』又は『円理綴術』と題するもので，普通に円理と称するのは即ち此書記載の算法を云う．簡単に云えば，円内に正方形を容れ，次に八辺形，十六辺形とする事は前に述べた算法と同じであるが，数字上の諸値を求むる事なく，其一辺の長さを表わすに二次方程式を用いて之を展開し，無限級数の形で表わす．次に此結果を用いて更に展開を行い，次々の級数若干を得た上で其係数を考察して一般公式を帰納し，之に辺数を乗じ，辺数を無限にしたときの極限を求めると云う仕方である．中途で不完全帰納の処理はするけれども，固より純然たる解析方法である．

建部の書は著作年代が不明であるが，淡山尚絅著『円理発揮』(一七二七) によれば，此方法は建部の発明だと云う事になっている．然るに建部の書に本多利明が記入したところに依れば，関の原稿に基いたと云うのであるが，本多の所説には疑うべき所がある．けれども関流で最も大切にしたと云う『乾坤之巻』なるものは，矢張り同種の算法を記したものであり，其作者も年代も不明ではあるけれども，『弧背詳解』の序文には『乾坤の巻』が関孝和の手で成ったもののように之を記るす．而も『乾坤之巻』は果して一種に限られたか時代に依って内容を異にしたものがあったと認むべきではないか，又何時代からあったかなど云う問題は，極めて複雑にして，私は今俄かに其真相を明らかにし難きを思う．私は普通に云う円理の創意は関であるか，建部であるかを判然断定する事を避け，問題として遺して置く．要するに確実に関孝和の著述と認め得べきものには何等の記載なく，建部等の手で記るされたものから確実に知られているのである．

円理に就て大切な書物に松永良弼著『方円算経』(元文四年，一七三九) がある．此書には算法の説明は見えて居らぬが，円に関する数種の無限級数展開の結果が示めされている．又円周率五十位まで挙げている．是より先き建部賢弘の『不休綴術』に挙げたものは四十二位であった．『方円算経』には更に角術に関する無限展開式が見える．如何なる解析方法に依って得たものであるかは記るされて居らぬが，思うに円理を応用して得たものに相違ないであろう．後の時代に属する算書記載の算法も同様である．此級数展開は二重級数である．二重級数で表わした公式は之を以て嚆矢とするが，二重級数乃至三重四重の級数は和算末期に至るまで盛んに応用されたのである．『方円算経』所載の角術の一公式と同じものにつき，後年に至りて之を久留島義太の創意なりと記るしたものがあるが，或は事実であろう．久留島は松永と共に内藤延岡侯に仕えた同僚であるが，松永は久留島の推挙に依って抱えられたのであり，松永の著述中には久留島の算法を伝えたものも多く，又久留島先生云々と記るしたものもある．『方円算経』記載の諸級数は何人の創意であるかも示めされて居らぬが，久留島の手に成ったものは必ず有るであろう．久留島は自己苦心の研究を記るした草稿で旅行の際に行李を張ったと云うくらいに無頓着な男であるから，取纏めた著述の現存するものは少ないが，蓋し数学界にも稀に見る鬼才であった事は否まれぬ．

久留島義太の円理に関する著述に『久氏弧背草』なる一写本がある．此書中には円理に関する極数術が見える．極数術は関孝和の方程式論の記載から来るのであるが，極大極小の問題として諸種の円形などに関して論ぜられたものは，久留島，松永等の手で発達した．『久氏弧背草』に記するところは，円理に開する極数術であり，其論究は注意に値する．中

に級数の反転法も現われている．円理極数術は普通は後年に至りて和田寧及び其同時代の頃から創意されたかの如く見られてきたようであるが，実は久留島も之に就て工夫した所があったのである．

松永の著述中に角術に関する無限級数で表わした公式の見えたる事は前に逃べたが，久留島及び松永乃至同時代の諸学者の手で角術が一般に甚だ開拓された事も亦認められる．関孝和の角術に於ては三角形から二十角形までに就て別々に方程式を求むるものであったが，是に至りては其諸方程式を分類整理して一般の公式を立するに至った．諸角踏轍術と称する如きはそれである．中根元圭及び其派の人々にも此種のものに関する記載があり，久留島義太の研究もあったようで，果して何人から始まるかは明瞭でないが，其結果の見るべきものであった事は，明らかである．角術に於ては次の時代に至りても多くの研究があり，和算上には多くの文献がある．

諸方程式若(もし)くは諸公式を分類整理して一般の公式乃至方程式を作成する事は，角術に於て行われただけではない．此種の算法は和算家の好んで使用したものであって，廉術又は逐索術など云うのは皆それである．有限級数の総和を求める為めには招差法を適用するが其結果に就て今云う如き考究を施し，一般の公式を求める事もある．行列式の展開方法にも此種の考究を加える．円内に幾多の円が環容された問題の如きにも矢張り同様の算法が試みられる．其適用は随分数学上諸般の事に亘るのであって，和算の発達上には極めて大切な要素を成したのである．之が適用は諸問題によって一時に始まったと云うのではなく，次第に成立する事となったのであるが，松永，久留島等の時代に余程整頓したと見て宜いであろう．久留島が逐索術の創意者なりと云われるのも，充分に明らかではないが，或る意味では，又或種の方面に関しては恐らく事実であったろう．廉術と云う名称は古く，逐索術と云うのは稍(や)や後れて使われた術語である．稍(や)や似たものではあるが，其用語の適用にも自ら異同がある．今，此等に就て深く論ずる事は之を避ける．

有限級数の総和に関する算法を垜(だ)術と様し，関孝和から始まるのであるが，松永良弼等の著書中に甚だ見るべき結果を得たものがある．此種の算法に就ては其後に至りても和算家の頗(すこぶ)る重んじたもので，其文献も亦少なくない．垜術は円理の研究に関係が少なくなかった．垜術の発達には其関係が少なからず影響したのであろう．

久留島義太が行列式に就て創意のあった事は前にも述べたが，其創意は『算法発揮』の展開方法を押し広めたようなものである．其記述は極めて簡単で又甚だ不明瞭であるが，具さに験する事によって了解し得られる．後年菅野元健も亦同様の算法を得て明瞭に之を記述した．菅野は更に関孝和が四つの場合に区別して考うべきものを単に二つに区別しただけで誤っていたものを指摘し，四つの場合に区別して訂正した．菅野の著書は寛政年中に属する．之に先だち有馬頼徸の如きは，行列式に就て精細に記述したものがあるが，関孝和の誤りを其侭に伝えている．思うに其算法の如きは理論として之を尊重したけれども，多く実地に適用する事をしなかった為めに重大な過誤があるにも拘(かかわ)らず，之に注意する事なく，幾多の年所を閲したものであろうかと思われる．行列式に関する和算家の研究は蓋し菅野元健を最後として，其後には創意の見るべきものなく，又多く説くものも出なかったようである．

関孝和は方程式論を創めたのが著しいが，其以後に至りて方程式の近似解法に就て幾多の算法が現われるようになった．関も亦此種の方面に於て算法を立てているけれども，多く行われるようになったのは，中根彦循の『開方盈朒(えいじく)術』が出てからであったろう．此書は将単吉宗が中根元圭へ暦術の問題を下したのを，中根は老年の為めに其子彦循をして解かしめ．夫解法として此近似解法を得たのである．盈朒術は支那で古来行われたものであるが，之を方程式に一般に適用し得られるようにしたのである．つまり逐次近似法である．

松永良弼の統術総括と称するものも亦類似の算法である．後には会田安明の『重乗算顆術』があり，坂部広胖の『立方盈朒術』及び『開式新法』等も皆方程式の近似解法に関する．盈朒趕趁(えいじくかんちん)術と称するものの如きも亦同一部類に属する．此種の算法に於て和算は其文献に富むのであるが．要するに算木で方程式を解くのは，理論に於ては優れたものであるに拘(かかわ)らず，随分厄介で時間を要する事も多いので，出来るならば計算に簡便な算盤で出来るようにしたいと云うのが理想であって，其理想を実現する為めに右のような諸種の算法が発達したと見ても宜いであろう．和算書中に其理想を述べたものも幾らもあり，『重乗算顆術』と云う書名若(もし)くは術名の如きも亦明瞭に其理想を語る．支那の算法に於て此種の理想の記載されたものには未だ見当らぬ．和算発達の一つの特色は此点に存した．

零約術即ち連分数に関する算法の発達した事や，幾何学的図形に関する算法が幾らも見えている事や，整数術即ち不定解析に関する諸種の問題の出た事，方陣及び円欑に関する研究の進んだ事なども此時代に関して注意すべきである．此等に就ても論究したいけれども，冗長に流れる恐れあるを以て姑(しばら)く之を省く．

第７章　安島直円と其時代

今，建部賢弘，久留島義太，松永良弼等の出た時代の事を述べたのであるが，之に継で出たのが山路主住及び其門下の

人達である．山路は天文方であって，宝暦の改暦に与った人であるが，星学よりも寧ろ数学に長じた人であったろう．けれども余り独創的の研究ある人物ではなかった．而も其門下に藤田貞資及び安島直円の如き有力家があって，日本の数学は更に一段の進境を開くに至った．山路は中根，久留島，松永三人から悉く秘伝を授けられたと云う事で，之を後進に伝えて且つ新らしい開拓の余地を作らしめた点に大きな功績があった．勿論彼れの業績に属するものも存するのである．建部，中根，松永，久留島等の時代は西暦で言えば十八紀前半に属し，山路乃至其門下の有力家の時代は其後半期に属する．厳密に言えば，久留島義太は宝暦七年 (一七五七) に歿しているから，後半にも及んでいるけれども，大体に於て右のように見ても宜いであろう．

建部，久留島，松永の時代に於ては前時代の風習を受けて，前に出た算書中の問題に解答し，新らしい問題を世に問う事が盛んに行われていた．其問題中には立派なものも多く，之に依りて数学界の風尚を左右する程の勢もあった．不思議にも建部，中根，久留島等，当時第一流の諸大家は一も其問題承継の算書刊行に関係がない．建部は少壮時代に『研幾算法』を出して問題の答術を公にしてはいるが，前章記載の年代に入りては更に関係を見ぬ．故に当時の我数学界の最高層は此習風に超然としていたと言っても宜いであろう．而も第二流以下の群少数学者に至りては，之が為めに動かさるる事が多かったように思われる．

然るに本章の主題たる時代になると問題承継の風習は頓に衰え，中絶するに至った．そうして数学の良教科書が出て風靡するようになった．之と同時に諸寺社に数学の問題並に答術を記るして奉掲する風が流行を来たした．算額奉掲の事は勿論寛文頃から行われたらしく，現に元禄年間のものが京都祇園社に現存しているが，併し未だ多く行われた形迹に乏しく，其盛行は明和，安永，天明の頃以後の事であったらしい．此頃のものになると写しの存するものも間々あり，『神壁算法』及び同続篇等もあって，多く之を伝えている．遺題継承が棄たれて，良教科書が世に出で，又算額奉納の盛んに行われるようになったのは，何うしても一つの大きな変遷を語る．数学は此頃に於て余程整頓され，又次第に普及するに至った事も亦見遁してはならない．

有馬頼徸が『拾璣算法』(一七六九) の刊行は此風潮の一つの現われを見るべきであろう．有馬頼徸は筑後久留米の城主にして数学を善くし，山路主住に就て関流を伝えられ，其著述に属する算書も少なからず，中には印章の据った稿本の存するものもある．独創の研究に長じた人ではないが，当時の数学に就て繁簡となく悉く通ずるところがあった．そうして遂に『拾璣算法』を著わし，関流の数学の大体を世に伝えた．名義は久留米の侍臣の名になっているが，実在の人物ではなかったらしく，藩侯の作である事は之を疑うものもない．当時関流では秘伝が八かましく，別して山路あたりが最も秘密を厳にしたかとも思われるのであるが，厳然たる諸侯にして敢為の気象に富んだ人であったから，敢て此書を公刊する事も出来たのであろう．数学を普及する上に大きな功績を残したものである事，言うまでもない．

『拾璣算法』に続いて『精要算法』が編纂され，刊行された事も亦注意すべきである．此書は藤田貞資の作で，算法は説明してないけれども，順序よく諸問題を排列したもので，教授の演習用として和算を修める程の人で之を学ばぬものはないと云う勢であった．従来は複雑な問題が多く行われ，之を解くには無益に努力を要する事も多かったのであるが，此書の如きは一切此の如きものを避け，多くは簡単にして効の多いものを選んだのである．故に此書一出して数学の設問は其風を一変したとさえ言われている．『精要算法』は一の教科書であるけれども，後の数学学修乃至発達の上に好影響を及ぼした功績の一通りでなかった事が思われる．

藤田貞資は山路主住の高弟にして，久留米侯に仕え，著述多く，独創の見にも乏しくない．其子藤田嘉言も亦数学を善くしたが，父に及ぶべくもなかった．藤田の門下には諸寺社に算額を奉納したものも甚だ多く，正続『神壁算法』は之を集めて刊行したものである．『精要算法』の如き良教科書の作者であり，又教授の事にも意を用いた人であり，門人も相当に多かったのであるが，何うしたものか其門中から独創的能力に富んだ人物は出て居らぬ．

有馬，藤田の二氏は君臣相続ぎて良教科書を作ったが，之と同時に関流諸算書を整頓したのが，同じく山路主住門下の戸板保佑であった．彼れは仙台の藩士，初め中西流を学びて，中西流の諸算書を整頓したと云う事であり，後に藩から派遣されて山路に師事し，関流の諸算書を悉皆伝授せられて之を整頓したものである．其諸算書は仙台伊達伯爵家に伝わり，現に東北帝大に保管されている．関流の諸算書が斯く纏まって伝ったものは，他に全く之を見ざるのみならず，他に伝わらざるものも存している．戸板保佑が之を伝えた功も亦大なりである．此諸書中には戸板が注解したものも多い，戸板は又『関流数学綱領伝』を作り．関流の諸算法に就きて解読している．数学史研究の上にも参照の価値がある．

此諸算書の整頓は勿論戸坂保佑が始めて着手したのではなく，松永，山路等も亦之を試みたのであろうが，戸坂の手で纏まったものが今に伝えられ，又最も整頓したのであった．

此の如く一方には諸算書の整理が行われれ，又一方には良教科書の作製となった．事業は異なるけれども，恐らくは同

一の機運が二様に動いた現われであったろう．

藤田貞資作の教科書が複雑な問題を避けて簡単なものを選んだ事は前に述べた．簡単を尚とぶ精神は固より此時始めて澎湃として起きたのではない．算木の複雑な計算を避けて成るべく算盤で簡便に算法を行いたいと云う理想は永く和算家の精神を支配したものであった．個々の公式からして帰納探索して一般の公式を作ろうと云う苦心も，概括的の理法を尋ねたものに外ならない．其苦心は相当に報いられている．関孝和が『古今算法記』の問題を解いたものには，千何百次と云う高次の方程式の表われたものもあり，中には何千次と云う方程式を得たと云う例もあって，此の如き高次の方程式となるべき問題は甚だ高尚なものであるかの如く考えられたようであるが，同じ問題でも成るべく低次の方程式で解き得る事を望むようになった．そうして甲某は何次の式で解いたが，乙某は之を何次の式に低下し，自分は更に何次の方程式で其解を得たと云うような主張も往々に之を見る．こうなると，問題も自然に単純にして趣味あるものを喜ぶようになる．中根彦循の『竿頭算法』などを見ても解法の単純化されているのが著しく眼に着くし，久留島義太などの遺稿の遺れるものに複雑な問題は見当らぬ．故に問題並に算法の単純化は早くから徐々に進んだものであり，極めて自然の発達をしたのであるから『精要算法』が出たので突然大変動を生じたと見る事は出来ない．けれども此書に依りて単純化の理想が確実な基礎を与えられ，数学社会一般の風を生じた事は認めなければならぬ．数学界の風潮が変遷した上の一大目標となったのである．

藤田貞資の後に於て会田安明の如きは簡単を求める事の切なるが為めに，其極遂に術文の字数の多少をすら問題とするに至った．術文に言表わした算法の繁簡と字数の多少とは必ずしも一致しないのであるから，此議論の如きは恐らく過ぎたるは及ばざるが如しとの譏を免れないであろうけれども，而も簡単化の精神が如何に旺盛であったかを語る所以であり，単に無意義の事であったとして評し去るべきではないのである．会田，藤田の二人は大なる衝突を惹起し長く争うたのであるが，其事は後に説く．

安永天明の頃に於ける我国の数学界は此の如き状態であったが，此時に当りて多く社会の表面に出ず，静かに数学の研究に当った一偉人があった．彼れは藤田と同門であり，又親しい間柄であるけれども，遂に会田との論争には更に関与する所もなかった．彼れは存生中には多く名声を博したものでもない．けれども彼れの学力は遠く時流を抜き．独創の創意多く，前代以来の発達を受けて之を要約したとも云うべき諸般の算法を立て，更に次代の進歩に向って進むの準備を整えたのであった．徳川時代二百五十年間の我国の数学発達上に於て関孝和が一つの焦点を成すに対し，彼れ亦他の焦点を成したと謂っても宜い．彼れの名は安島直円，羽州新庄の江戸詰藩士であった．藤田貞資の『精要算法』も此人の助力が多かったと思われる．

安島直円の業績中最も注意すべきものは，円理の改良である．此算法を記るした稿本は年紀を欠くが，未だ円理の伝授を受けざるに先立て之を創発し，其師山路主住に示めし，主住も甚だ驚いたと云う事である．山路は安永元年 (一七七二) に歿しているから，勿論其以前の事である．安島直円の円理が建部賢弘の著書や『乾坤之巻』などに記るされたる円理に比して異なるところは，弧内に二等弦を容れ次第に其弦数を倍する方法を棄て，弧に対する弦を若干等分し其等分の数を無限とした場合の極限を求めた事である．弧を等分する事の代りに弦を等分する事は．建部賢弘も之を企てた事あり，其著『不休綴術』中に言及しているが，未だ適当に之を処理する見当が附かなかった為めに，成功し得なかったのであった．故に安島は其思い付きに於て独歩であったと云う事は出来ない．けれども某考えの上に適当の処理を行う事が出来て，是れから円理は著しく簡単になった．安島の円理は西洋の定積分の算法に於て，変数の微分を総て等しと置いた格段の場合に相当すと謂って宜いであろう．

安島直円が円弧の代りに弦を等分する算法を立てた事に就ては，球の算法並に螺線の算法も関係があったと見なければならぬ．球の全体若くは之を一平面で截った一部分の立積を求めるには，其底に平行に若干等分し，各一片を円壔形と見て其総和を求め，等分数を無限として極限を求める事は和算発達の初期から行わるる所であった．初めは数字的の計算のみに依り，次に数字的の計算の結果に円の算法に於けると同じように修正方法を施す事が試みられ，更に進みては截口の面積従て一截片積を截片の番号数の函数として表わす公式を求め，総和の公式を作り，片数を無限にした時の極限を作るのであって，解析的に演算が行われる事になった．此原則に依れる数字的の算法は関孝和以前から行われたものであり，修正の算法は関孝和が之を行い，解析的求積法は山路主住なども説いているが，関孝和の著と云う一写本にも亦見えている．関孝和若くは其直後の頃から行われたのであろう．此算法が定積分の格段の場合に相当する事は，安島直円改良の円理も同じである．安島は其円理の創意に就て球の算法から恐らく有力な暗示を得ていようかと思われる．

又螺線の事も関係があろう．和算家の問題とした螺線は所謂アルキメデスの螺線であるが，関孝和より以前の算書中に其問題は既に現われたのであり，関孝和の著書中にも其論究があり，後にも亦解析方法を立てたものがある．安島直円も

亦之を研究した．螺線の研究に於ては之を成生する円弧を等分して其分点へ各々半径を引き，又其半径をも同数に等分して其分点を通じて円弧を画き，次々の半径と円弧との交叉点を次々に結んだものの，等分数が無限になった時の極限を畹背即ち螺線とするものであって，此成生方法から直ちに解析方法に依りて螺線の孤長なり，若くは弧積なりを求めるのである．螺線に就ては弧の弦を平行直線によって等分すると云う方法をば採らぬけれども，半径を同心の諸円弧に依りて等分するものであり，定積分の格段のものである事に於ては同一である．此算法は安島の研究を得て整頓したのかとも思われるが，半径の等分法は初めからの事であり，安島の円理の成立の上に全く関係ないものではなかったであろう．

故に安島直円の円理の改良は，円の算法が関孝和以来種々に攻究されて機運が漸く進んだのと，球の立積や螺線の研究に於て求むる所の弧以外のものを等分して算法を立てる事が試みられて其結果の簡便であった事が関係を及ぼしたのと，安島が算法簡単化の理想化せる時代に於て，最も其妙を得て傑出の独創的能力に富んでいた為めに，彼此相俟って遂に此成功をも齎らす事が出来たのであろう．

安島直円は既に円理を改良した．此の改良は更に円壔穿去積の算法を創意せしむるに至った．一つの円壔を他の円を以て其二つの軸が直角に交るように穿去して，穿去されたる立積を求めるのが，其問題である．之に関する安島の稿本は二三の異なれるものがあるが，要するに穿去された立積を平行面によりて等分し，其一つの截面の面積を求め，更に一種の積分方法を施して立積を求めるのである．初めの積分に於て一つの無限級数を得るから，第二の積分方法は此無限級数に就て行うのであり，巧みに二重級数を使用する事になる．其結果は二重定積分に相当するものなりと云われている．

此算法の成功は後に諸般の複雑な図形に関する求積問題の発達を促がす事になったのであるが．其発達を見るまでには安島の歿後若干の年所を経たのであった．安島の円壔穿空円術は其晩年の作であった．安島は他の問題にまで論究する事はしなかったようである．

安島は幾何学的の図形に関する問題の処理に於ても多く見るべき研究があったが，其事は後に一章を設け変遷の迹を叙する事としよう．

整数術即ち不定解析法に就ても亦造詣の勝れたものがあった．整数術は古来継子立などの行われたのでも其趣味の存した事を見るべく，和算初期の諸算書中にも往々之を見るのであるが，纏まった方法としては関孝和が剰一術を説き，其応用として翦管術を説いた頃から始まる．此算法の如きは支那から伝来したものであって．建部賢弘，中根元圭等の研究は其算法を推し拡めたものとも云うべきものがある．中根派の村井中漸は『開商点兵算法』に於て剰一術を用いて方程式の整数根を求める方法を講じた．『大成算経』には直角三角形に関する整数解の事につき一種の論究が見える．中根元圭は斜三角形の整数解に就ての研究があって『不休綴術』の付録に挙げられている．久留島義太なども整数術の研究があったらしいが，整数術に就て取纏めたものの出来たのは松永良弼の『算法集成』又は其一部分なる『無奇編』が恐らく初めのものであったろう．此書には直角三角形に就ても凡そ三種許りの異法を挙げ，又他の図形に関する整数解も見えているが，図形を離れての不定方程式に関した解法も見える．其後多く人の注意するところとなり，関係の算書も甚だ多く，諸般の問題及び諸般の解法が成立した．直角三角形及び斜三角形の整数解法の如きも，後の時代のものまで列挙するときは幾種類もあって甚だ面白い．不定解析上の応用の目的からして因数分解法の如きも組織立った方法が得られるに至った．安島直円は斯くも整数術の発展しつつあった中に出て，一歩進めた研究を能くしたのであった．円の内外に環容せる諸円に関する整数解や，三角形内に諸斜を容れたものなどの整数解もあるが，最も注意すべきは『冪和開方無有奇生数術』であろう．即ち

$$y^2 = x_1^2 + x_2^2 + \cdots\cdots + x_n^2$$

の整数解を求めるものであるが，蓋し前代以来の $u^2 = x^2 + y^2 + z^2$ の整数解を推し拡めたものに外ならない．其後会田安明は更に

$$y^2 = 1x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + \cdots\cdots nx_n^2$$
$$y^2 = 1x_1^2 + 3x_2^2 + 6x_3^2 + \cdots\cdots kx_n^2$$

等の整数解を求める算法をも立てた．蓋し安島の算法を見て工夫を進めたのであろう．

安島は対数の原理に関する研究や，招差法や垜積術や，零約術等に就ても簡単化したり，解説を便にしたりしているし，安島の手で数学諸般の事項が頗る整頓せられ，理論的になった事は明瞭に之を認むるに足るべく，又其創意に成った術理も相当に多数に登る．此等が後の時代の発達に向い確乎たる準備となり，基礎となった事は甚だ明らかである．

第８章　会田安明及び其時代

会田安明は藤田貞資及び安島直円と同時代の人であるが稍々後れて歿し，数学上の活動は中年以後に限り，晩年の作に出色のものが多いのであるから，藤田，安島両氏の後を承けた代表的の人物と見ても宜いであろう．厳密に言えば，稍々不穏当でもあろうが，之に依りて時代を劃するのが目的ではなく，会田が関流にあらざれば算家に非ずとの観があった時代に出て関流以外に卓立し，関流の巨頭藤田貞資と抗争して敢て譲らず，盛大な算学の一派を立てたのは，固より偉観であるから，其事情を茲に明らかにして見たいと思う．会田安明の為めに一章を立てたのは，時代上の意義よりも寧ろ此点に基づく．

会田安明は羽州山形の人，本姓内海氏，其家は農家であるが，彼れの父は長男でありながら家を出て藩士の株を買い会田氏を冒したのである．会田が覇気に富んだのは，親譲りの性格であった．会田は少時郷里で数学を修めたが，勿論言うべき程の事はない．会田は『自在物語』を作って数学専攻の生涯に入る以前の自伝を記るしているが，甚だきかぬ気の人物であった事が思われる．彼れ亦長男であるが郷里を見棄てて江戸に上り御家人鈴木氏の株を買って鈴木氏を冒し，鈴木安旦と称した．彼れは利根川の改修工事などに従事した．然るに彼れの上に立つものが人に嫉まれたか何うかと云う事で役を免ぜられ，会田も座して其地位を失うた．会田は初め之を悲んだけれども，若し此悲運に会わざれば，一生腰弁で身を終らなければならぬのであったろうものに，此れから兼ねての素志なる数学を専攻し得る事となり，全く天の助けであったのだと，後に彼自ら記るしている．彼れの数学専攻の生涯は四十余歳の時からであり，其頃までの彼れの学力は浅薄なものであった．彼れは後会田氏に復り名も安明と改めた．

会田安明が藤田貞資と衝突した動機の真相は今に判然せぬが，思うに彼れは藤田の門に入って学ぶ事を望んだのであろう．秘伝の風の厳守されたる当時に於ては，如何なる天才者流と雖も，名門に附いて其秘伝を伝えられないでは，確実な地歩を成す事が出来ない．会田が藤田から学ぼうとしたのは当然である．けれども一方は名声隆々たる学閥の権威者であり，慎密細心で，威儀を尊ぶ人であったらしいし，一方は未だ学問こそ浅いが，中年以上の年輩でもあり，豪放な天才肌で負けず嫌いのひどい人であるから，一二回の会見で忽ち意志の疎通を欠いたものと見える．問題の訂正云々の事が問題になったと云うが，相容れざる感情の阻隔が生じ得たのは，恐らく止むを得ない行掛りであったろう．全く学閥の権威と地位なき天才者流の意気とが衝突した自然の場面である．会田が全力を振って打撃を与え，論争は次第に感情の悪化を加えて，悪口慢罵に堕するようにもなったけれど，其論争の進むに従いて会田は益々名望を博し，又其努力は報いられて遂に関流と拮抗して引けを取らないまでに立ち至ったのである．傑出した人物でなくては叶わぬ事ではあるが，学閥に対抗して成功し得たものの好範例ともなるであろう．

会田安明は関流と対抗するに当って，自ら流派を立て，最上流と称した．最上の二字は会田が羽州最上の産なるを以て採ったのであろう．最上流には多く人物が集まり，流祖会田安明を尊崇する事甚だ厚かったのであるが，独創能力に富んだ人物は多く輩出せず，其流派は諸地方に広まって人物も亦多いが，傑出した算家は会田一人に止まっていたと謂っても過言ではあるまい．勿論此派の人達の中からも見るべき業績が一も出なかったのではない．比較的に少なかったのである．

藤田貞資が良教科書を著わし，教授の事にも深く注意した人で，門下に多く集まり来たものがあるに拘らず，矢張り有力家が出なかったのも，会田の場合と一般である．

会田安明が関流藤田貞資に対する抗争は『精要算法』に対する評論から始まる．会田は其甚だ良書なる事を認めているのであるが，而も次第に猛烈に其論評の筆を進めた．関流で之に当ったのは藤田貞資其人ではなく，高弟神谷定令が主として矢表に立った．藤田は論評の答書など作っても門中の人達に見せるだけで，上木しないと云うような事もある．元来神谷は会田と懇意な間柄であり，会田が藤田を訪うたのも神谷の紹介であって，事の起るに及び，神谷は随分困ったものらしい．彼れの論争中に於ける地歩は同情すべきであったろう．藤田と云い会田と云い，当時の錚々たる大家であるが，論争中の一問題解法の争いの如きは，随分議論の的確でないものも少なくない．彼等は双方共に学殖の深いに拘らず．日本の数学には元来理論らしい理論が充分に攻究されて居らぬので，適切明瞭に論断する事が困難であったと云う弱点を明々地に暴露したのであった．是を以て見ても，厳密な理論的構成の必要な事を知るであろう．

会田安明は其初めに在りては学力も多く見るべきものはなかった．而も黽勉努力，其学力も次第に高まり来り，独創的の研究も幾らも出来たのであるが，併し最も驚くべきは著述の甚だ多かった事である．刊行したものは論書の若干と，『当世塵劫記』，『算法古今通覧』及び『算法天生法指南』等の数種に過ぎないが，稿本に属するものは一千数百巻と云う多数に上る．此れほどの多数の著述は和算家中他に一人の匹敵し得るものがない．勿論此多数の著書が凡て独創研究の

結果なのではなく，各種の算法につきて得るに従い之を解説し改造し評論し，そうして其幾多の著書を作ったのである．此多数の著書中には会田の肉筆のものも多く現存し又会田の印章を押した直伝の書も亦多く見られるのである．会田は自著の諸書を伝書と称し，若干の報酬を求めて之を門人に与え，若くは写し取らしたのであった．

会田安明の著書目録並に其著書を見るに，関流秘伝の諸書も会田が之を手に入れて評論したものが幾らもある．彼れは関流の秘伝書全部を手に入れたとは思われないが，而も幾多の貴重書を得た事は疑いない．例えば『方円算経』などをも得ていたのである．何うして此等の関流諸伝書を見る事が出来たかは問題であるが，或は古本屋へ出たのを買入れたものもあろう，種々の手段を講じて求めたものであるらしい．会田は多く関流の伝書を得る事が出来たので，其学力の増進する上に甚だ好都合であったらしい．而も或る種の算法は伝らなかったらしく，此等に就て会田の研究したものも見出されないものもある．此種の事項も之を明らかにすれば，独創能力の発揮上に関する條件をも幾分か知悉するの料となるであろう．

会田が安島直円の『冪和開方無有奇生数術』に就て更に一歩進んだ研究の有った事は，安島の條中に之を述べた．会田は零約術に就ても見るべき創意があった．同一の問題に就いて幾多の解法を求める事なども考えていたし，同一の術に依りて解き得べき多数の問題を作る事も其書中に見える．此事は藤田の著書中に見るものが初めであろうが，会田の著書中には其問題の数の多く挙げられているのが眼に着く．類似の算法を集めて比較研究する等の事をも亦試みた．楕円周を求むる算法なども試みているが，まだ充分の成功は為し得られなかった．対数の原理に関する研究の如きは，安島のものとは別のものであって面白い．会田の創意に成ったものは随分其数も多いのであるが，今一々之を列挙する事は出来ない．会田の研究方法は一つの問題でも算法でも之を得れば，之に関連したものを一々調べ尽して次第に其歩を進めると云う遣り方であった．其研究調査を筆録したのが，即ち彼れの数多き著書であり，其著述の甚だ多いのは畢竟之が為めである．彼れは甚だ勉強家で外出する事も少なかった．晩年は歩行にも困難を感ずるようになったと云う事である．

会田が『天生法指南』の著のあった事は前に述べた．会田が天生法と云うのは，会田自らは神夢に依って得た新創の代数法であると云っているが，其実関流の点竄と同様のものであって，余り違ったところはない．善く見ても，多少の工夫を加えて改竄したと云うに過ぎない．けれども代数演算の説明を施し．之を公刊したのは，数学普及の上に少なからざる関係を有する．

此書と相前後して他に二種の教科書が現われた．一は大原利明の『点竄指南』であり，一は坂部広胖の『算法点竄指南録』である．大原利明は初め関流を学び会田が最上流を立てた時其門下に走り，後又関流に復帰した人で，其出所進退は感服すべきであるまい．けれども彼れの著述は点竄術を了解せしむるに於ては固より役立った．

坂部広胖の『点竄指南録』は十五巻より成り，慎密な注意を以て作られたものであり，三書中最も重きを成した．各種の算法に就て此書は可なり解り易く之を説き，問題の解も之を記るしている．三書皆文化七年 (一八一〇) の作であるが．蓋し『点竄指南』が最も早く出て，坂部の書が全部の刊行を終ったのは数年後に属する．此三書が凡そ時を同うして出たのは，思うに社会の需用が然らしめたのであったろう．以て当時の数学社会に於ける一般の趨勢を察するに足る．

『点竄指南録』に就て甚だ注意を要する事は楕円の孤長を求むる算法の見えている事である．楕円に関する此種の算法は安島直円の円理の改良が出来て以後，楕円にも其円理の算法を適用するようになった結果である．坂部若くは其門人川井久徳が研究したものであるが，川井は勘定奉行などした事のある人であり，坂部は其家に寄寓した事もあって，実は坂部の研究であるものが川井の名前になったものもあろうと考えられている．此頃に於ける楕円弧長の算法はまだ甚だ複雑なものであった．其後和田寧，白石長忠等の時になって余程簡単にされるようになった．

楕円は初め之を側円と称した．楕円の名称は西洋暦算の学が支那に伝えられた時に現われた訳語であって，漢訳暦書から暦術家が伝えたのである．側円に就ては和算家が早くから論じたものもないではないが至って少ない．藤田貞資，安島直円等が幾らか研究したものもあり，会田安明が『算法側円集』二十巻の書を作るに至って，余程整ったのである．当時側円は円壔斜截面として説いたものであり，円錐の截面として論じたものは殆んど見当らぬ．円錐の截面は稀に其問題が取扱われているのみに過ぎない．故に和算家は楕円に就ては会田以後には研究も多く，諸書に多く散見しているけれども，抛物線や双曲線の事は稀に特殊の問題中に偶然現われ来るくらいのものである．それも後の時代に属するのである．

会田は二つの焦点に針を立て線を結びて楕円を画く装置に就て述べているが，此れは外国から伝ったのであろう．星学者，間重富が楕円規を創意したものは周上の各点を求むる巧妙な装置である．其器械は現に存して居らぬが，其解説書は其子，間重新の著述が今に存する．

坂部広胖が方程式に就て工夫のあった事も亦注意すべきであろう．方程式の解法は関孝和以来，幾多の工夫があるけれども『開式新法』に記するところは高次方程式の実根を凡て適当に算出し得る方法にして，其近似の度も急速に求めら

れ，便利なものであった．此書は川井の作と云う名義で刊行されている．

坂部広胖は安島直円の高弟である．安島の高弟には日下誠もあった．日下は独創の研究に優れた人ではないが，門下の養成に努めたので甚だ顕われている．次代の諸大家は殆んど悉く此人の門下から出て造詣の深い人物が少なくなかった．日下の門下ほど多数の傑出した人物を輩出せしめた実例は蓋し稀であろう．或は他に絶無と謂っても宜いであろう．日下誠の数学専門の教育上に於ける功労亦偉なりと謂うべしである．

安島直円の歿した時，日下は安島の遺稿を集めて『不朽算法』二巻を作り，之を上本せんとしたが，故ありて果さなかった．けれども写本として関流諸学者の間に持囃されたと云う事である．勿論解法を伝えたものではなく，問題と術文とを記るしたのであった．安島直円の門人には他に傑出の人はないが，日下の門下から和田寧の出づるに及んで，頗る独創の見に富み，多くの業績を残す事となつたのである．

第 9 章　和田寧及び其時代

会田安明及び坂部広胖等の後に出て我国数学界の中心人物となったのは，和田寧であった．和田寧は播州三日月の藩士であるが，後に増上寺の寺侍となり，操行の修まらざるを以て追われ，数学並に書道を教授するの外，易者の業を営み，僅かに糊口を立てたのであった．彼れの死後，門人溝口佐兵衛が未亡人に代って阿州藩小出修喜に送った書状に拠れば，彼れは極めてささやかな生活を立てたもので，死亡の時にさえ多く顧みるものもなかった様子が，誠に気の毒なるものである．和田寧は生来甚だ酒を嗜み，発明術を売って酒に換えたと言われているが，或は無根の事ではなかったであろう．当時の諸大家は多く人に匿れて和田寧の門に遊び，其伝授を受けたと云う事である．其門人名簿を見ても其事情が察せられる．故遠藤利貞翁の如きは此事を非常に重大視し，同時代の諸大家の業績と称するものは．特に円理に関しては悉く和田寧の手から出たもののように見ているのである．此見解が如何なる程度まで正しきやは固より疑問であろうが，又決して全然否定し得べきでもない．和田寧が遠く時流を抜いた独創的の人である事は言うまでもない．

和田寧の業績中最も注意すべきは円理の改良である．円理は安島直円の改良を経て甚だ便利になったのであるが，和田寧は更に之を簡便に行い得る事にした．和田寧は其目的の為めに諸表を作った．此諸表中には円周率を表わす幾多の級数をも挙げ，又重積分を行う為めの便宜にも供した．楕円の周及び弧長を求むる算法の如きも又簡便に得られる事になった．二つの曲面の交叉して生ずる立積，表面積，若くは交りの線の長さ等に就て便利に其算法を立てたのである．此等の算法に於て積分を行うに当り，其積分の要素となるところの微分一般の形式を考察し，之に基いて表を用いて直ちに積分の算法を行う事にしたのである．是に於て円理とは円に関する算法を云うのみならず，積分の方法を用いて施すべき諸種図形に関する求積の算法を総称して円理と称するに至った．単に之を円理とも云うし．又円理豁術とも云う．和田寧の円理諸算法に就て単に之を積分の算法と云うては，勿論語弊があろう．西洋の定積分の算法と全然同一なりと見るべきやは疑わしいけれども，要するに定積分と結果に於て同様のものであったのである．唯，西洋の積分学の如く洗練されたものでないのが異なる所である．

和田寧が円理の諸表を作ったのは，対数表の便利を喜んだ為めに円理の算法に表を使用する事を思い付いたと云う関係もあったろう．対数表は支那の『数理精蘊』にも見え，支那を経て伝った事もあろうが，又和蘭からも伝ったであろう．安島直円及び会田安明が対数の原理に関して研究があった事からも，其時代に対数の知られて居た事を見るべく，坂部広胖は『点竄指南録』の中に対数用法などを述べて居る．坂部は安島直円からも学んだが，又本多利明にも師事したもので，本多は数学者たると同時に経世家として出色の人物であり，航海術の重んずべきを主張して，自ら船長と為り蝦夷に航した事もある．西洋の航海術を伝えたのは此人を以て嚆矢とすると云う．対数用法の如きも蓋し此人あたりの重んじたものらしい．其以前に於て対数に関して和算家の説いたものを知らぬ．是れより後，対数表は計算に便利なものとして数学者の貴ぶ所となった．故に和田寧は之に依って表を用うる事の便利を思い，円理表を作ったのであろうと見たい．

けれども単に此れだけの刺戟で円理表が成立したと見る事は出来ない．更に内的の直接の要求があったようにも思われる．円理の算法は級数に展開して，其各項につき総和を求めて極限を算出するのであるが，其展開も繰返し行わなければならない．一々之を行うは甚だ繁雑である．何事に依らず簡便を求めて止まざる和算家の性格は，此の如き円理の算法を何とかして簡便にしたいと云う希望なしには済まない．安島直円の時代までは単に円に関する算法のみであり，其晩年に僅かに円壔穿空円術が出来ただけで，まだ多くの問題を取扱わぬので繁雑な算法も忍び得たであろうが，和田寧に至りては幾多の問題を解く事になった．一々其計算を新たにして居れば，幾らでも同一の算法を繰返す必要にも迫られたであろう．故に前に得た結果を其侭に利用する事をもしたろう．そうして此種の結果を表に作って置けば応用上に便利な事を感じ，遂に之を試み，其便利を思うては幾様のものも作ったのであろう．私は斯く解したい．

和田寧の研究は多きが中に『異円算法』と称するものがある．円楔を斜截して得る所の曲線にして，其截り方に依って二三種のものを生ずるが，其諸曲線に就て面積及び周を求める算法を説いたのである．和田寧は之を円楔の截面とは言って居らぬ．円楔の截面として説いたものは其後の諸算書である．

和田寧は濡円なるものをも説いたが，此曲線は抛物線に相当する．

和田寧が擺線に関する研究のあった事も亦注意を要する．擺線と云うのは後に云う名称であるが，一つの円が他の円の周上を転ずるとき初めの円上の一点が画くところの曲線の面積或は弧長などの算法を立てたのである．此種の曲線を和算家は転距軌跡と称した．勿論一円上を他の円が転がる場合のみに限った訳ではない．比種の問題に就ては天保五年 (一八三四) 和田寧門人の名で芝の愛宕山に奉納した算額が最古のもののように言われているが，天保三年 (一八三二) の頃に内田五観が筑波山に奉納した事もあったかと云う．内田と和田が何れが先きであったかは恐らく問題であろう．けれども寛政年中の作なる志筑忠雄訳の『暦象新書』にも多少の論究が見えているし又九州古原氏の文政中の文書中にも説いたものがあるから，和田，内田両氏より以前既に知られていた事に疑いはない．惟うに暦法に於て諸遊星が太陽を廻り，諸衛星が遊星の周囲を廻転しつつ運行するので，転距軌跡の問題は自然に其辺の攻究から生じ来る筈であろう．和算家が果して暦の問題から擺線の研究に向って進むようになったかは問題ではあるが，必ずしも其関係がなかったではないであろう．

和田寧と同時に植松是勝なるものがあった．彼れは上総の人，嘗て日下誠に学び，円理豁術並に諸表に就て発明する所があったと云う．其後彼れの門人等は浅草観音の境内に碑を立てて此発明に関する主張をした．其碑は今も儼として存する．其発明と云うもの，和田寧と年代に於て果して何うであろうか．遠藤翁の『数学史』には其碑文を録しながら，此事に就て言及して居らぬのは訝かしい．

和田寧と同時に出た諸大家は，白石長忠，齋藤宜義，内田五観，牛島盛庸，御粥安本，岩井重遠，長谷川寛等誠に多士済々たるものであった．此人々の中，牛島盛庸の如きは年輩既に老け，其著述の刊行されたのは，ずっと以前に属するけれども，年八十余にして和田寧に就いて学んだと云うから，其意気の壮なるを見るべく，篤学誠に敬すべきである．此等の人々は各種の発明術に就て盛んに諸寺社に算額を奉納し，又此等の諸術を録せる小冊子を刊行したが，問題と術文のみにして解析方法を記るしたものはない．是れ算家は概して経済不如意にして，大部の書物を刊行するの余裕がなかったからであろう．故に円理豁術に関する諸問題も多く此等諸書中に散見するけれども，其円理の算法を説いたものはない．之を説いたのは岩井重遠の『円理氷釈』から始まる．而も此諸書によって当時盛んに行われた問題の種類や又其造詣の如何を察する事が出来る．其問題の種類は固より円理豁術に関するものも多いには多いが，其他のものも亦少なくない．

此等諸問題の中には幾何学的図形に関するものも見るべきものが多い．英国のケージーに先立ってケージーの定理相当のものを得て，且つ盛んに之を応用したのも此頃の事である．けれども此の幾何学的事項の事に就ては今之を詳述せず，章を改めて取纏め述べる事にする．

整数術に就ても亦見るべきものが少なくない．白石長忠の『社盟算譜』に記された御粥安本の術の如きがそれである．即ち

$$x^3 + y^3 + x^3 = u^3$$

の解法に関するものである．

『算法新書』の刊行も亦此時代に於て注意すべき一事象であった．『算法新書』は長谷川寛の作，文政十三年 (一八三〇) に成り，門人千葉胤秀の名を以て公にした．江戸時代の数学書は門人の名で出したものが甚だ多い．長谷川は固より有力な人物であれども，其名望の隆々として高まったのは此書が出てからである．伝うるところに依れば，長谷川は神田柳原辺で売算若くは売卜をしていたが，某書店主が之を見て彼れの数学に堪能なるを看破し，彼れに請うて此書を作らしめ，之を刊行して果して古今無比の売行きであったと云う．此書は刊行以来幾たびか版木を彫り改め，磨滅して読み難いような本が多く流布している．凡ての和算書中『算法新書』ほど多数に発行されたものは，他に全くなかったであろう．数学の初歩から甚だ解り易く記るしたものである．円理に関する解説も亦見える．安島直円や和田寧の改良を経た新式の算法ではなく，又表の使用など言っては居らぬが，併し一通り了解し得られる．数学の自修用教科書としては蓋し最良のものであったと謂って宜かろう．円理の如きは秘伝とされていたのが，其算法の公刊された為めに，関流算家の間に問題となったとも言われて居る．

長谷川寛は日下誠の高弟で，元と鍛冶を職としたが，日下が麻布日ケ窪で塾を開いた初めに入門し，甚だ愛撫された．

然るに其後関流を破門されたと云う説もあり，其破門に就いては凡そ三様の説がある．第一は日下が安島直円の遺稿『不朽算法』を出版せんとした時長谷川が破廉恥の行為があって駄目になったので，破門されたのだと云う．第二に『算法地方大成』出版が関流の規約に反し，政治に渡るものとして非難された為めだとするもの，第三は『算法新書』の刊行に依って，円理の秘伝をさらけ出したからだと云う．固より何れが真なるやを知らぬ．又実際破門されたか何うかも知らぬ．長谷川が関流の免許を諸門人に伝えているところを見ると，破門と云うのは恐らく事実ではないであろう．『地方大成』の為めに問題になった事は『地方大成斥非問答』と題する刊本の存するに依りて知られるが，『算法新書』刊行の際にも問題はあったらしく思われる．

長谷川は『新書』刊行後に於て算書若干部を刊行したが，何れも門人の名で出している．此等の諸書も相当に行われた．長谷川は数学教科書の作者としては優れた手腕の人であった．又教授にも甚だ巧みであった．独創の見に於ては固より第一流の人でないが，世に名声の高い事は恐らく及ぶものがなかったであろう．和算家の間に於ては何時も存生中に最も名声を得るものは必ず教育に巧みな人でないものはなかった．長谷川の極形術等に就ては幾何学の発達に関する條に於て之を述べる事としよう．

第 10 章　幕末の諸算家

前章に説いた如く，長谷川寛は『算法新書』を著わしてから名声一時に高く，又各種の諸算書を作り，其門派は甚だ栄えたが，天保九年 (一八三八) 五十七歳にして没し，養子長谷川弘が其後を嗣いだ．長谷川弘は仙台領の人，夙に江戸に出て長谷川寛に師事し，子養せらるるに至った．然るに故ありて九州に下り教授に従事したが，養父の歿するに及んで江戸に帰り，其流派を主宰する事になった．そうして弘化元年 (一八四四)『算法求積通考』を著わした．門人内田久命の名で公にした．円理の算法を詳説し，諸表の使用に就ても記しているもので，此書が出て円理の一通りは師伝を受けずとも了解し得られる事になったのである．円楔乃至楕円楔の截面に関する曲線の事なども此書に詳述されている．更に続篇を作って円理豁術に属する難題の問題を説く予定であったのであるが，遂に実現を見るに至らなかった．長谷川弘も亦養父寛と同じく数学の教育に長じ，門人が多かった．其著述は一も自己の名義で出したものはない．

長谷川父子と同時に門流の盛んなので顕われたものに内田五観があった．彼れは日下誠の高弟にして，少年時代から頗る頭角を顕わし，又研究する所も多かった．著述も亦多い．『古今算鑑』は彼が世に問うた最初の作である．彼れは長谷川父子の如く了解し易き教科書を作る事はしなかったけれども，門人の教育に於ては甚だ努めたものらしく，長谷川父子が数学の普通教育に達したに対して，内田五観は数学専門教育に優れていたと謂うべきであろう．彼れの門中からは有力な専門家が多く輩出した．此等の人々も亦夫々著述があり，注意に値するものにも乏しくない．而も此諸書中果して何程が内田の作であり，何程が門人等の手に成ったかは，今之を知る事容易でない．それは姑く措き，内田門下に有力な人物の多かった事は長谷川門中の人々の比ではないのである．是に於て長谷川派と内田派は競争の地位に立ちたるかの観があり，其間柄が多少面白くなかったのではないかとも思われる．長谷川寛破門説の出たのも此く云う関係の結果であったろうかとも見える．

内田五観門下の有力家は津和野の桑本正明，紀州領伊勢の人志野知卿，上州の剣持章行，名古屋の竹内修敬，広島の法道寺善，松江の藤岡有貞，江戸の人には川北朝鄰等があった．此中，桑本正明の『尖円豁通』，剣持章行の『約術新編』等の如き見るべきものに富む．法通寺善は刊行の著述はないが，諸方を遊歴して算学を教授し，其造詣の深いので知られていた．其著『観新考算変』の如きは西洋の反形法にも比すべく注意すべきものであった．其事は幾何学の條に於て説く事とする．

法道寺善は幕末の頃に遊歴の算家として顕われたものであるが，剣持章行も亦関東諸国を遊歴教授した．同じく内田の門人小松鈍齋も諸方を教授して歩いた．長谷川寛の門中に於ては越後の山口和が諸方を遊歴し，一ノ関の千葉胤秀をして長谷川へ入門さしたのも其勧めに依ったのである．千葉も亦仙台領の北部の辺を遊歴して門人が甚だ多かった．此等は幕末の頃から其直前の事情であるが，享保年中の頃にも大阪の大島喜侍の如きは中根元圭の門下から出て，近畿諸国を遊歴教授したものであった．遊歴の算家が数学を地方に普及せしめ，地方の算家を刺戟した事は多かったであろう．

江戸時代の数学は関孝和の頃から，江戸が其発達の中心であり，有力な諸大家は殆んど江戸在住の人であったが，幕末の頃には地方の出身者中に造詣の深いものが幾らも出ることとなったのも時勢の変遷であろう．長谷川門下の人で盛岡藩の梅村重得兄弟，庄内の阿部重道，越後の佐藤解記等も有力家であり，盛岡藩には尚阿部知翁等もあった．信州には武内重信，其門人小林忠良等があり，上州には斉藤宜長及び宜義の父子，其門人に萩原禎助が出た如きも注意すべく，奥州には最上流佐久間纉が居るなど，幕末の我が数学界は誠に多士済々たるものであった．

此時代に於ける我国数学界の風潮を見るに，和田寧の始めた円理豁術の算法が広く行き渡り，種々の研究が行われたのは能く大勢を語るものであろう．幾何学的の考察も余程発達した．御粥安本の如きは図形の問題を解くことを得意とした専門家と謂っても宜い．重心に関する研究の如きも誠に行き渡った．重心の事は暦学者高橋至時あたりが初めて論じたものらしく，享和文化頃に属する一二の写本も有るにはあるが，未だ多く注意を惹くに至らず，内田五観等が之を論究するに至りて学界の注意を引き着けるようになったのである．勿論和算家の考案ではなく，西洋の数学から直接に若くは支那諸書を経て伝わり，之に工夫を加えたものであった．転距軌跡の問題なども幕末には甚だ多く取扱われた．又弾道の問題も論ぜられ，抛物線をも説いたものであるが，此等は西洋の砲術書から伝ったのであろう．曲線や曲面の事なども次第に新しいものを見出したものもある．けれども余り多数の曲線類の研究が進むまでにはならなかった．是れ求積問題が主であって，曲線や曲面の性質を説く事は和算の終末になるまで重きを成さなかった事も，関係があるであろう．円環の截面に関する曲線などは，和算家の好んで取扱ったものの部類に属する．円壔の斜截面としての側円と円錐の斜截面とが同一なりや否やの如きも屡々問題とせられ，同一なりとする学者もあったが，又同一にあらずとした人もある．岩田好算が楕円に内切及び外切して且つ互に相切する四円の直径が互に比例する事を算定した如きは，面白い結果であった．内田五観は二等辺梯形に一つの楕円が内接し，其四隅に内接する四円の直径が互に比例する事を記るしているが，和算家中にも既に其誤れる事を指摘した人があった．けれども此問題の如きは普通には其真偽を批判し得なかったのであって，萩原禎助は幕末の算家として最も有力な人物の一人であるが，此人の如きすら此問題は如何ともする事が出来ないと言っていたのである．

萩原禎助は上州の人，齋藤宜義の門下より出で，古来刊行の諸算書に就て其題術の正邪を研究し，幾多の改正術を立てた人である．彼れの研究には極めて複雑な問題が多い．而も彼れの研究は維新後に属するものも少なくない．

鏡光照が垂糸即ち垂鏈線に関する研究のあった如きも，特に注意すべきであろう．

幕末の諸算書中には比重など物理的の問題も段々と現われるようになったのであるが，此種の事は未だ其研究が積んで居ないので，正確を欠いだものが幾らもある．

幕末の頃に出た諸算家中には尚記載の必要あるものも甚だ多く，其造詣に就ても尚之を説くの要あるものが幾らもあるが，冗長に流るるの恐れあるが故に，今姑く之を割愛する．けれども幕末に於ては広く諸方から多く人物が輩出し，幾多の問題を捉えて能く之を研究し，次第に其進歩の歩武を進めつつあった事は疑われぬ．若し此時に於て維新に遭遇せず，西洋の文物を採用する事にならなかったならば，我国の数学は続いて其特殊の発達を維持し，造詣は更に一段の高きを加えたに相違ないのである．人或は我国固有の数学は既に行き詰りつつあったかの如く考えるものもあるが，何等斯の如き様子のあった形跡だも認める事は出来ない．維新に際して数学も亦西洋に学ぶ事になったのは，勢止むを得ない事であり，他に探るべき道のなかった事は言うまでもないとは言え，和算発達の中道にして忽然其歴史の歩みを罷め，全然別の道程に就く事となったのは，我等の歴史的叙述に於ても其続きのあるものを途中で中断されたような気がして，物足りなくてならない．更に和算の発達が十年間も継続し，其造詣に就て深く見極める事も出来たならば，和算史としては頗る興味あるものと為り得た事であろう．思えば感慨無量である．

第 11 章　幾何学の発達

江戸時代の数学は一見甚だ代数的の色彩に勝る．図形に関する問題でも凡て代数的に之を処理する．点竄術と云うのは日本特殊の代数学であるが，点竄問題と云えば寧ろ図形に関する問題の総称と云うべき形勢であった．以て代数的の処理に非ざれば数学に非ずと云うべき状態であった事が知られよう．是れ即ち代数的の方面が著しき支那数学の後を受けて発達した関係で，誠に当然至当の事であったろう．私も和算史の研究に着手した初めに於ては，代数的の方に優れた所以を見て，日本に幾何学なしとの感がないでもなかった．けれども此れは一面観にして，和算の全体を的確に正視した見解ではない．和算には其実幾何学的の分子が極めて濃厚であり，其事情を正当に了解しないでは，日本数学の日本数学たる所以を捉え得たとは謂われない．勿論，幾何学とはユークリッドの『幾何原本』に見る如く，若干の基礎事項からして証明を厳にして構築したる演繹体系であり，其論理構成の厳密なものにあらざれば幾何学に非ずと云うならば，日本には当然幾何学なるものの発達しなかったのである．此意味では日本に幾何学なしと謂っても宜い．けれども此の如く厳密なる，又理想的に組織されたる体系をのみ指すにあらずして，一般に図形に関する論究を云うときは，和算中には幾何学的の分子が甚だ多く又一種特殊の発達を遂げたと云う事が出来る．此意味では埃及にも支那にも印度にも固より相当の幾何学はあった．決して希臘にのみ特有のものではない．けれども和算家の幾何学は希臘の幾何学に対比するには足らぬけれども，自余の諸国の幾何学に比すれば自ら特殊の色彩があって甚だ見るに足るのである．到底支那や印度の幾何

学と同日の談ではない．其発達は頗る注意を要する．私は之に就て見る所を欧文に草し彼国に紹介したいとも思っている．今日本の幾何学発達の概要を略記し，江戸時代の数学史の一章とするのも，必ずしも無意義ではあるまい．

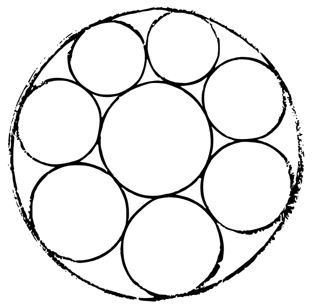
我国で発達した絵画と音楽とを見るに，両者共に支那から伝わって之を学び若くは改造したのが主であるが，絵画に於ては随分立派なものが多いけれども，音楽は謡曲などの如く特殊なものは成立したといえ，極めて単純なものであって，音楽史専門家の中にも左まで価値あるものにあらずと言う人さえある．能楽の如きものの趣味に富めるは単なる音楽ではなく，舞踊の伴う事が著しい．近代西洋の美術を輸入するに至りても，絵画は独創的の作が次第に現われるに反し音楽はまだ西洋人の手を離れて学修し得るだけの程度にもなっていない．又日本で紋章の発達した事などから見ても，日本人が形体に関して敏感な事が思われる．日本で特殊の幾何学の発達し得た事には，日本人の性情に依る根本的の要因があったろうと考えたい．

和算発達の初期に現われた諸算書にも円や正多角形や各種立体の求積問題が見えているし，求積に関する多少の証明は早くから試みられていた．円理並に角術の発達に就ては前に之を説いたので，今之を繰返す事をすまい．

和算の初期に於て図形に関する算法には主として勾股弦の関係を応用したのであり，其関係は甚だ重要なものであったので，之が証明を企てたものも幾らもある．斜三角形に就ての之に相当する関係も亦盛んに応用された．三角錐は同底同高の三角壔の立積の三分一に等しとの事も早くから証明が試みられた．和算家が其発達の初期からして此種の事項に相当の注意を怠らなかった事は之に依って見る事が出来よう．星野実宣が『股勾弦抄』(寛文十年，一六七〇) を刊行したのも，三角形に関する諸種関係等を集めて，算法の便に供したものである．其説くところは多く見るべき程のものではないが併し此種のものを集めて，整理しようと云う精神の現われた事が床しい．

関孝和は『解見題之法』に於て幾何学考究の入門を説き，『求積』並に『毬欠変形草』を作りて各種立体の求積に就て記るし，中には円弧を其平面内の一直線を軸として之を回転して得たる立積を求める事なども行うた．其算法には円弧の重心を利用している．関孝和の角術に於ては方程式を求めるのであるけれども，其準備には可なり複雑な幾何学的の攻究を試みたものであった．関孝和の此種の研究には前の時代に発達しつつあった諸問題の関係も多く入り来り，『算法闕疑抄』などの問題は余程刺戟を与えていると思われるが，併し此れだけ纏まったものの出来たのは，全く関孝和の功績であり重心利用の求積算法の如きは他人の文献中には未だ何等見聞しないのである．関孝和は代数並に円理の開拓上に偉功のあった許りでなく，幾何学的方面の分野に於ても亦同様に其功労を認むべきである．

関孝和前後の頃から始まった問題に切籠と称するものがある．球なり立方なりの諸隅を切り落して他の立体を作り，其求積を論ずるものである．切籠の事は後の時代までも和算家の好題目であり，其文献も多く，造詣も亦少なくない．多面体の求積は凡て此算法に属する．松永良弼の『求積後篇』の如きは，此種の算法を挙げたものである．



円の接触に関する問題は和算家の研究中には甚だ多いのであるが，此種の問題も甚だ早く現われたものの一部類である．『古今算法記』の一問題は一つの大円内に一中円と二小円とを互に接触して容れたもので，関孝和が其問題を解いたが，其後此問題は種々に変化するに至った．又三つの円が互に外切したものの問題なども早くから論ぜられ，一円に四つの円が環容して切する問題の如きも亦之を見る．一円に幾多の円を環容したものも見えている．此種の問題は関孝和の前既に記るされて居り，『大成算経』に於ても可なりに論ぜられた．松永良弼等の時代に至ると此種の問題が大分整頓されて来る．此種の問題を解く為めに現われ，而して後に重要視して応用される事になった関係は，三角形の三辺と形内若くは形外の一点から三頂点へ引ける三直線との関係を表わすところの関係式であった．此関係は大分前から知られたらしいが，之を重視したのは久留島義太あたりからであろう．『久氏遺稿』中には二三ケ所に之を記るす．

久留島義太が逐索術を創意したと云われるのは，委細の事は充分に判然せぬけれども，蓋し一円内に環容した諸円に関する問題の研究でもあったろう．此種の問題は後には和算家の間に甚だ好んで論ぜられたのである．一円内に環容したと謂っては稍々語弊があろう．実は内外二円に環容したと謂いたい．即ち図に示めすが如き問題を云うのである．

此種の問題に於ては内外の二円と環円中の一円との直径を知れば，此三円に切する第四の円の直径を算出する事が出来る．次に第五の円の直径を算出し得られる．斯くして次第に幾つの円の直径でも知る事が出来る．是に於て環円の数に従いて第何番目かを環円中の第一円に等しと置く事によって，環円の問題は解き得られる．久留島義太の逐索術と云うのは，蓋し此種の算法に関したものであったろう．逐索術は勿論環円の場合にのみ関するものではない．

此種の環円に関する算法は其後安島直円に至りて甚だ整頓したものになった．『廉術考草』，『廉術変換』，『環円無有奇』

等は皆安島が此の環円の問題に就て記るした稿本であり，甚だ見るべきものであった．『環円無有奇』は即ち環円に関する整数解を挙げたものである．和算家の幾何学的図形に関する解術には，大概は整数値にて其諸線の長さなど表わす事をしたもので，環円に関する場合の如きは中に就きて甚だ趣味あるものの一つであった．

環円に関する整数解につきては後に至り御粥安本の研究にも面白いものがある．

安島直円が廉術と称するものは，前に逐索術と言ったものと同一の算法である．逐索術と云い廉術と云い，勿論幾何学的図形にのみ適用すべき算法ではなく，垜術でも角術でも，行列式の展開方法などに於ても広く行われたものであるが，之を角術に適用するが如きは固(もと)より幾何学的の適用であり，早くから行われたのであった．幾何学的の適用に於ては環円だけでなく，他の図形に関するものも甚だ多い．逐索術が発達して和算家の幾何学は頗(すこぶ)る豊富となり麗はしいものになったと謂って宜かろう．

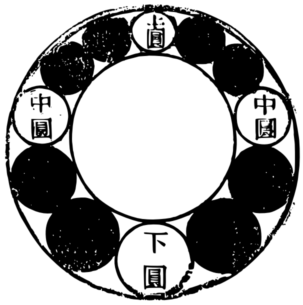
一方に於て此種の算法が発達すると同時に，三角形内に三円を内接した問題なども現われるようになった．此問題は安島直円が創めたものの如く考えられた事もあるが，実は安島以前から存し，其解法も成立していたのである．初めは三角形内に一円を容れたものや，更に一円を前の円に切して容れたものなどの問題が存したのであるが，尋で直角三角形内に三円を相切して内容した問題が現われ，其解を得るに及んで斜三角形の場合をも解く事が出来るようになった．其解法は固(もと)より代数的に試みるのであり，初めは四次方程式の形で解を得たのであるが，後には二次方程式に約する事が出来るようになった．又其三容円と三角形の内接円の直径の関係式を求むる事なども行われた．此問題の変遷の如きも，環円の問題と同じく甚だ趣味あるものである．此問題は西洋では Malfatti の問題と称するものであるが，Malfatti より先だって解せられているのは注意すべきであろう．勿論西洋では作図題として研究されたが，日本では諸円の直径の値を求むると云う形で論ぜられた相違がある．

三角形の内接円の事から傍接円の算法にも進むし，三角形に三円を容れる問題は四円以上を容れる問題ともなり．三つの円弧で囲まれた中に三円乃至四円を容れた問題も研究されるようになった．其四円中の三円は一辺に切して相並ぶのであるが．任意数の円が一辺に切して相並ぶような図形も亦研究される事となった．此場合には勿論逐索術を適用する．三つの円弧で囲んだ中に諸円を容れる場合にも矢張り同様の問題が生ずる．

円弧を回転して生じた回転体の中に諸球を容れたり球内に幾多の球を容れた問題も論ぜられ，此等に就ても逐索術が適用され，又切籠の問題なども矢張り幾何学的論究上に大切なものであり，それから球面上に画いた各種の図形に就ての研究などもあった．此種の問題にも見るべきものがある．

又三角形，四角形，五角形，…に一つの円を内接し其諸隅に円を容れたものに関する問題などもある．円に内接した四辺形の四辺と両対角線との関係，即ち西洋でトレミーの定理と称するものは安島直円の出る以前の頃から好んで諸問題の解に応用された．球の接触の問題に於ては，三つの球を相切して一平面上に置き，其上に１球を重ねたものの高さを応用して問題を解く事が屢々(しばしば)あった．此種の関係の利用されるものは次第に集積した．

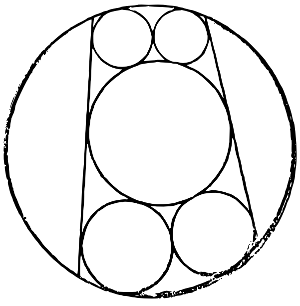
和算家は作図題なるものを論じた例が極めて乏しい．殆ど絶無と謂っても宜い．然るに藤田貞資並に安島直円が正五角形の作図法を試みたものが残っている．蓋し頗(すこぶ)る珍らしい．但し証明はしてない．



環円乃至環球の問題に就て甚だ趣味ある結果を得たものは，図に示めすが如く環円中の四つが他の若干円づつを中間に挟みて排列するとき，此四円の直径の間に簡単な関係が成立すると云う事である．某中間に挟める円の個数は幾つづつでも同じである．又図形が種々に変化した場合にも同様に成立つ．此種の事は会田安明の『算法古今通覧』が初見かと思われるが，其後の諸算書に種々の場合が散見している．其諸種のものを集めて一様に成立つ事を言ったのは，蓋し内田五観が維新後に記るしたものであろう．此種の面白い関係が知られたのは，全く環円に関する研究から来たのであった．

環円の研究に就て注意すべき一つの事は，所謂(いわゆる)傍斜術の成立した事である．蓋し安島直円の『四円傍斜術』が此術の重要なものになる初めと見てよい．安島以前から傍斜の事は多少用いられているが，安島に至って之を整頓して一つの基礎的方法と為し，盛んに応用するようになったのである．傍斜とは二つの円に共通の切線を云う．四円傍斜は二円の間に他の二つの相切する円を画き，此四円に就て二円の傍斜の関係を取ったものを云うのである．此関係を用いて多くの問題を解くのに便利になったのであるが，其後更に別の傍斜術が現われるに至った．二円の切線と此二円に切する他の一円との関係を言い表わしたもので，此関係を用いて四円六斜術即ち一つの円に切する四つの円の六つの共通切線の長さの間に存する関係を得た事は甚だ著しい．即ちケージーの定理として有名なものに相等するが，固(もと)よりケージーに先だつこと三十年前に和算家は用い始めたものである．白石長忠の『数理無尽蔵』に載せたのが恐らく

初見であろう．之を得るに用いた傍斜術も此頃から甚だ行われたもので，是れからは安島の傍斜術を用うるものなきに至った．四円六斜術も盛んに他の問題の研究上に応用され，種々の面白い関係を伝たのであった．中には図に示めす如き二円と両斜の間に切する二組の二円の間に簡単な関係の存する事を示めしたものもある．此図に於て其二円間に等数の円を容れた場合に，前と同様の関係の存することを得たものもある．此種の事に就ては御粥安本或は其門下の人達が随分達していたようである．



一つの円内に環円でなく，幾つかの円を別の仕方で容れ得るだけ相切して容れた問題も亦多く論ぜられたもので，牛島盛庸の著書などにも此種の問題が現われているが，四円六斜術が出来てから之を応用して論ずる事となり，此種の問題も頓(とみ)に進歩したらしい．此種の問題に就て最も込入ったものになったのは，平野喜房の『浅致算法』に見る所の相切する三円間に幾多の円を杉成り形に容れたものであろうが，其術は正しきや否やが問題になり，正しからざる事を指摘したものもあった．

此種の問題と関連して発達した方法に甚だ注意すべきものが一つある．即ち法道寺善の『観新考算変』に見る所の幾何学的算法にして，西洋の反形法(インバージョン)と対比すべきものが，即ちそれである．法道寺は内田五観の門人，観山と号し，此書名は観即ち自己が新たに考案した『算変』と云う事であり，安政七年 (一八六〇) の頃の作である．自ら言う所に依れば，多年の苦心の結果で出来たのである．其算法は諸円の接触せる図形に就きて，其中の二円が直線になるように一種の変形を施し，其変形されたる結果に基きて算法を立て，之を原形に還元して所要の関係を得るのである．此変形に当りては二円の共通切線は長さの関係を変ぜぬものとするが，二円の一方が全く他の中に在る場合の共通切線と云う考えも朧ろげながらに使用されている．誠に驚服に値する．法道寺は諸方を教授し回ったので，此算法を数ケ所で伝えた．

此同じ算法が果して法道寺の創意に成れるものなりやは，或は判然せぬかも知れぬ．法道寺の前に肥後の牛島盛庸が或は之と同じ創意があったように思われる．其著述は今に存せぬけれども，肥後天円子作の写本に同様の事を説いたものがあり，之に基いたと思われる一稿本は其年紀が法道寺の著述と同年のものであり，且つ牛島は幾何学的事項の問題研究に優秀な手腕のあった人であるから，天円子は牛島其人であるらしく，肥後人が牛島盛庸伝を作れるものにも之に関係ある記事が見られ，牛島の創意に基いた事は恐らく疑いなかろうと思う．法道寺が牛島の著述を見たか，若(もし)くは之れから暗示を得たか否かは不明であるけれども，其創発の功は之を牛島に帰すべく，其算法を精撰し且つ普及した功績は之を法道寺に求めなければならぬ．

法道寺は其算法に就て長谷川寛の極形術に基いたものであると言っている．是れ恐らく事実であろう．長谷川の極形術は一つの図形に関して直接に算法を施さず，之を極形即ち極限の図形に変じて始めて考察し，其上にて原形に復して考えるのである．理論としては取るべきものがあるが，異種の原形から同じ極形が生ずるので，原形に還元する場合に他の原形を取り間違えて判断を誤る事がある．従て正当な算法と看做す事が出来ない．此れ極形術の非難を受けた所以(ゆえん)であり，又多く行われるようにならなかった所以(ゆえん)である．けれども適当な注意を以て之を適用すれば，相当に役に立つ．得た結果に就て直ちに之を採用せず，吟味を加うる事をすれば其正邪を判断する事も出来るのである．故に偽術なりとして之を棄てて省みざらんとしたのは，感服した事でない．故に一層之を正当な方法に改造しようとした人もあった．斉藤宜義の如きは其れであり，立派な結果を得たと云う事であるが秘して人に伝えなかった．法道寺善の如きも極形術の真意義を了解し，之を他の有効な算法に改造する事を企てたのであり，上述の変形方法はそうして成立ったものとも見られよう．牛島が如何にして其算法を工夫したかは何等の拠るべき史料も伝って居らぬが，矢張り同様な見解に基いたのではなかろうかと思う．

極形術の発達には二次方程式の二根に相当する図形の攻究から発したもので，法道寺の稿本を見ても其事が考案中の重大な意義を成している．方程式の吟味に関する論究は関孝和以来其人に乏しからず，和算上の重大なものとされていたのであり，之を幾何学的に見る方面から極形術なり，変形術なり云うものが生れ出たと見るべきであろう．一方に於て恁(こ)う云う関係があると共に，又一方には代数的の処理を避けて直接に図形其物の考究から関係を求めようと云う要求も次第に起きたのであり，所謂(いわゆる)規矩術には其意味のものがあって，吉田重矩の『規矩術図解』や，長谷川流の『直術図解』などもそうした意味で出来たのである．斯く追々と図形の論究が進み，遂に最後の結果が牛島や法道寺の反形法に導き行ったと謂うべきであろう．和算の幾何学発達の頂点は正しく此点にあったのである．

第12章　西洋の影響

江戸時代二三百年間に於て発達した我国の数学の状態に就ては既に之を略叙したのであるが，其発達には外国の影響が何うであろう．此れ固より重大な問題である．徳川家康の顧問に英人三浦安針 William Adams があり，彼れは元と水先案内にして，造船の事などもするし，数学にも関係があったらしい．『乾坤弁説』などの西洋風の天文書も早く作られ，日本の測量術は寛永中に西洋人カスパルの伝うるところであったと云う．此時代に於て多少西洋の数学が伝った事はあるであろう．けれども当時行われた数学は支那の数学から脱化したものであり，西洋の影響らしいものが乏しい．関孝和の数学に就いても，当時日本人と称して和蘭に在りて医学を修め又数学を学んだ人があり，同時に南蛮に行って医学を学んで帰った鳩野宗巴があるので，何等か関係がありはせぬかと思われないでもないが，研究の結果，余り関係があるとは認め難い．支那訳の西洋暦算の学も亦余り影響したらしくない．

西洋の数学が伝って和算家が之を学修するようになったのは，『暦算全書』などが来て其中に見えたる西洋の数学が考究されてからであろう．三角法はこうして伝ったのであった．建部賢弘，中根元圭等が其事に当っている．籌算と称するものが支那から伝えられたのも，又西洋のものである．一種の籌を用いて行うた算法で，Nepier's rods と称するものである．

対数表は支那訳のものからも蘭書からも直接に伝ったであろう．西洋の算書が直接に伝ったのは，前野蘭化が算術書二部を西洋人から受けたと云う時からの事であるが，其書名は分らぬ．本多利明が西洋の航海法をやるので対数表などをも何うにかしたらしく，其門中から出た坂部広胖が著書中に対数の用法など挙げているのは，恐らく其関係からであろう．安島直円及び会田安明は対数の原理に就て研究する所があった．寛政改暦の時には高橋至時，間重富等が参与し，支那訳の西洋暦法に依ったのであり，又蘭書に就ても調査する事になった．高橋はラランドの暦書を学びて『管見十余開』を作ったが，中には彼国の積分の記号にも接触したのであり，其結果は日本の極数術と等しいから西洋人も正しい算法を使っているわいと云うような事を言っている．高橋は又『海中舟道考』を作り，同じ方向に向って進む船が地球面上に画く曲線を研究している．重心の事に就ても研究があったと云う．又同じ頃に志筑忠雄の訳したる『暦象新書』には擺線の事も出ている．志筑は重力の事などに就て論じたものもある．高橋，間等に続きて幕府の天文方に在った人々は外国の天文書の研究に歩を進めて随分造詣の見るべきものもあったのであるが，此等暦術家が蘭語を学び蘭書を読んで，西洋の学問に接触したに引換へ，和算家の中には蘭学の素養あるものも殆んどなかったらしく，暦術家との関係も余り密接なものがないようで，多く西洋の学問を伝えなかったようであり，安島直円の円理の改良でも何うも西洋の関係はないように思う．

和算家は天文暦術は支那西洋が優れているが，数学に至りては我が神州は世界に冠たるもので，彼れの遠く及ぶところでないと考えて居たものが多い．恐らく和算家一般の輿論であったと謂っても宜かろう．高橋至時の如き天文家には西洋の数学が立派なものである事を認めた人もいるが，数学者の中には稀であると云うよりも殆んどそう云う人はなかったらしい．是れ和算は民間のものであって，官府に関係あるもの少なく．西洋の高等数理に接触する機会に乏しかった事も関係があろうが，又和算の発達は著しいもので西洋の初歩数学書を見ても，図などから余り感服する程でなかったようの事情もあったろう．重心の問題などに就ては西洋の関係もあるが，それ等の事は洋書を読んだと云うよりも寧ろ図を見て悟ると云うような事であったろうと云う．内田五観の如きは多少蘭書も読んだらしく，其家塾を瑪得瑪弟加と称した程で，余程西洋の数学を伝えもしたろうかと考えられようけれども，其実左まで蘭学の力があったようでもなし，此人の如きも蘭書は図を見て其研究の題目にはしたろうが余り読んだものではあるまいと云う事である．内田五観ほどの人でもそうだとすれば，他の人々に至りては全く知れたものであった．故に暦学に於て寛政改暦の時以来全然西洋の天文学を採用したものに比すれば，我国の数学は余程事情を異にしたのであった．長崎の通詞で暦学の書を訳したものは本木，志筑等の人々があるけれども，数学書を訳した人もなく，数学を学んだ人のある事も聞かぬのである．

内田五観門人小松鈍斎が嘗て游歴して長崎に至り，長崎の算家と会して数学の六ケしい問題を西洋人某に示したのに，某は之を解く事が出来なかった旨を，小松自ら記るしたものがあるが，小松は之に依り西洋人は数学に拙づいものであるかのように考えていた．長崎の諸算家の著述や算額なども，当時一般の和算家の題術と同じであって，別に殊更西洋関係の算法など受入れていたらしい形跡が見られぬ．長崎に於てさえもそうであるから，外国の数学に対して関係の厚いものでなかった事が思われる．

慶応中に横浜で名古屋の竹内修敬門人の一少女が看板を出して数学を教授したものがあり，居留の西洋人中にも門人があったと云う事は，法道寺善が書いているが．此少女の事蹟に就て他に聞くところはないけれども，和算家の門人が西洋人に教授した事があると云えば，甚だ面白い事実であると思う．

西洋の算法の中にて籌算は可なり早くから伝わり，之を説いたものは幾らもあったが，西洋の筆算を説いたものは古く

は一も之を見ぬ．柳川春三の『洋算用法』並に福田理軒の『西算速知』が出てから，筆算が行われるようになったと謂って宜かろう．柳川は神田孝平と共に幕府の開成所に於て洋算を教授した．洋算の教授は長崎及び築地で海軍の教習をした時，航海術等の予備の為めに教授したのが初めで，小野友五郎，柳楢悦(ならよし)などは此頃に長崎に派遣されて学んだのである．神田，柳川の二人は和算に深い人でないが，小野，柳の二人は和算の深い造詣を以て洋算を学んだ．西洋の微積分学をも明瞭に了解し，早くから之を記るしているのは，蓋し柳である．榎本武揚，赤松則良の二人が和蘭(オランダ)に留学して海軍の事を修むるに当り，赤松の如き深く彼れの数学を学び，其学識の深いので後までも知られていた．西洋の微積分学を了解する為めには，柳等の如く和算の知識に依りて之を解得したものもあるが，又支那で『代微積拾級』の書が漢訳せられ，我国にも伝わりて，『代微積拾級訳解』が不完全ながらに作られ，之に依りて其了解を進めた事も少なくないと云う．初等数学に就て同じく漢訳の『数学啓蒙』が翻刻された事もあった．西洋の幾何学様のものを度学と称して学んだものは，大阪の大塩平八郎の塾中などであったのである．けれども西洋の書物に就て微積分学を学ぶなどは当時に於ては極めて難事であったと云う事である．西洋の数学は我国の数学者が自発的に其優秀を認めて之を採用せんとしたよりも，航海術，機械学，戦術等を学ぶの必要上から彼れの数学にも通ずるの必要があって之を修めるようになったのが当時の実情であり，純数学者は依然として和算の研究を進めていたのである．

此の如くにして維新の変革に際会し，教育の制度に於て凡て西洋に学ぶ事になったので，数学も亦彼れに拠る事になった．列国競争の大舞台に登場し，彼れと角逐する事になって見れば，何うしても彼れの文物を採入れるより外に仕方がなかったのである．誠に止むを得ない．是に於て和算は自ら廃絶に帰した．初め和算の諸大家中には洋算に対して甚だしく反抗したものもあった．高久(たかく)守静が和算を教える約束で学校の教員となり，和算の廃せられた為めに甚だ不満を感じて文相に提出した辞職理由書の如きは最も能(よ)く其事情を語る．高久は『極数大成術』の作者にして，極数を求むる算法を二重三重に適用する事を巧にし，極数術に於ては最も進歩した取扱をした人である．彼以前此種の事が全く見えぬではないが，彼れに至りて最も発達したのである．他にも尚和算上の創意があった．和算家は多くは侍の仕事であったので，維新後には安閑として其研究を続け得なくなった事も亦和算の急速に打撃を受けた一理由であったろう．和算家中には兼ねて洋算を学び．洋算の学習普及上に寄与した人も固(もと)より多かった．鏡光照，川北朝鄰，岡本則録など云う人々は即ちそれである．

維新以後には和算の諸大家はまだ多く存生した．けれども和算の研究は維新を限界として終ったと云って宜い．和算書の此以後に刊行されたものも萩原禎助の『円理算要』など云う如き有力なものも稀にはあるが，此種のものも尋(つい)で跡を絶ち，諸大家は相続いで凋落する．新たに和算を修めるものはない．否，剣持章行などの如き和算の大家が明治の初年に於てもまだ諸方を教授して遂に其游歴中に病歿したようの例もあるし，大正年中に至りても和算を教授していたものが絶えてないではなかったけれども，維新以後に和算を学んで新らしい研究をするような事は全くなかったのである．故に明治十年に東京数学会社が設立された時は当時の和算，洋算の諸大家を網羅したのであり，同会社雑誌にも和算の問題に関する記述多く，此等を洋算の方法で研究する事が流行し，西洋数学を使用しての新研究はこうした方面から進んだのである．然るに和算家の勢力は次第に衰え，数学会社の名を止めて数学物理学会と改称するに至った頃から後には，全く西洋風数学のみが盛行する事となったのである．数学書の横書きも凡そ其頃から始まる．維新以後の二十年前後の間に新研究と云うものは殆んど見られなかったけれど，今や西洋数学も大分整頓せられ，新らしい人物も次第に養成されて此頃から新研究が見られるようになり，次第に進歩して今日の盛況を呈するに至った．其初めに在りては一方には諸学校の教授が甚だ重いものであり，又一方には数学諸書の反訳や教科書の作製が極めて重大なる事業であって，第一流の諸大家は凡て其道に精進したのであった．大学の諸教授が相率いて教科書の作者になったと云う如き事も，注意すべき現象であったのである．

第２編　支那の数学

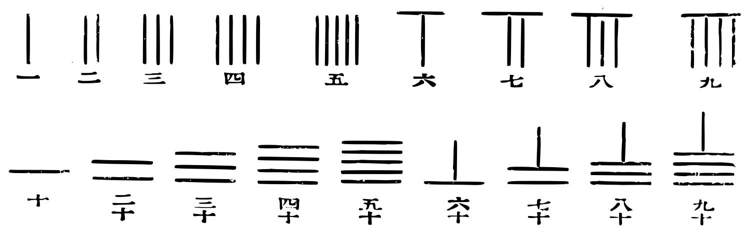
第１章　支那古代の数学

日本の数学を説くに当り，支那数学を学びて之を改造同化したものである事を明らかにしたが，日本の数学を知る為めにも支那数学に就て相当の知識ある事を要する．然るのみならず，支那の数学には自ら支那の特色があり，其発達には変遷があって，固より興味に乏しくない．今之を叙するには．太古の時代の事から始めなければなるまい．けれども支那古代の数学に就ては殆んど之を徴するに足るべき史料がない．零細なる事実に基きて推論するの外はない．然るに支那の文字は元来形象文字であるから．数詞に就て考うるときは多少の計算方法を推定する事も出来ようし，朧ろげながらに其計算法の甚だ古き事を想わしめる．

支那古来の計算器械は所謂算木である．支那では勿論算木とは言わない．算木と云うのは日本で称したのである．支那では之を筭，策，籌等と称した．此等諸種の名称があるから．其間に多少の異同もあったろうかと思われるが，明瞭でない．けれども要するに算木であって，古い時代の計算法が算木使用のものであった事は疑いはない．上記の文字が何れも竹冠の字であるのを見ても．竹製を原則としたものと思われる．

支那では算術上の計算を算木で行うた許りでなく．代数的の算法をも亦算木で行うた．そうして余程後の時代まで行われ，支那の代数演算は算木あるが為めに一種特有の形式に発達したとも見る事が出来る．算木には赤と黒との二種があって，正負を区別したもので其事は三国魏の劉徽の『九章注』に見えて居り，支那の算法が日本に伝ってからも矢張り同様に行うたのであった．支那の代数発達の事などに就ては後に説くから今は多く述ぶる事をすまい．

算木で数を表わすは一より五までは其数だけの算木を縦に並べて之を表わす．六以上になると一本の算木を横に置いたものを五の代表とし，其下に若干の算木を横布する事とする．十位の場合は横布して区別し，百位以上は縦布，横布を交互する．一位と十位の並べ方は次の通りである．



数字の欠けた場所には，算木を並べずに置けば宜い．和算家は碁石を空位に置いたものであるが，支那でもそうであったかは不明である．此並べ方の事は『孫子算経』並に『張邱建算経』に出ている．そうして和算家も亦同様に並べたのである．

此並べ方が支那で何時代からのものであるかは明らかでないが，随分古いものと思われる．『左伝』の襄公三十年の條に亥字二首六身と云う説話があるのは，二万六千六百六十と云う数の算木の並べ方を示めすものと考えられ，『左伝』の記載を信ずるときは春秋時代から算木の並べ方が行われたものと思われる．『左伝』は前漢末の偽作の書と云う説もあるし，此説話も著作年代に疑いがあると云うから春秋時代に其算木の並べ方が行われた事の証拠にはならぬかも知れない．併し如何に見ても前漢末以後に降るものではない．

是に於て考うべきは支那の数詞の事であるが，例えば五十三万六千七百二十一などと数える書き表わし方は，他の国には例の少ない便利な優れたものである．此点は支那の誇りとするに足る．万で繰り返して数える仕方は先秦時代から行われたものと思われるが，併し億以上になると其意義が充分に判然していたのではない．古い時代には十万を億としたものらしく．万万を億とするのは後の事であろう．億以上になると古い時代の事は分らぬけれども，漢代以後に於ては

二十七万三千五百六十一億七千何百万何千……

と云う風に数えたもので，中間に万を入れて八桁づつに区切るのが一般であった．純粋に４桁づつに区切り四位循環を厳重に立てた数え方は日本で行われたのである．億の上の兆に就ては右の如くして万万億を兆とするのであるが，其以上は万万兆を京とするものもあるし，又兆兆を京とするものもある．要するに此の如き大数になると，実際に使用する事はないのであるから，判然と決定し置く必要もなかったのであろう．其事は『数術記遺』，『五経算術』等に見える．印度で

普通に真の十進法即ち各桁毎に別々の名称を附したものとは，支那の数え方は大分趣きが同じくない．此点は寧ろ希臘に類する．

一二三等の単位の数詞は算木を並べた形を示めすものであろう．四も古い時代には亖と記るしたものあり，同じ原則に依る．又二十，三十等が卄卅卌と記るしたものは古い時代のものに見られる．此れ亦算木を並べた形から来たものと思われる．然るに此等の字形の表わす算木の並べ方は上述の計算上に於ける算木の並べ方とは縦横を異にするので，甚だ著しい対照を為す．数詞特に一二三十百等の文字は書契作製の初めに出来たものであろうし．其文字が算木の並べ方から来たものとすれば算木の使用が甚だ古いものである事を知るに足る．支那では書契以前に於て所謂結縄の政をした事が有ると云うし，結縄とは琉球で近年まで行われた藁算の如きものであったとすれば，算木の使用は矢張り結縄のようなものから進化したのでもあろうが，其発達の段階は姑く措き，起原の甚だ古きを知る．故に数詞の形が表わす並べ方は蓋し古代のものであって．後代に至り其並べ方に変遷があったものと考えたい．『墨子』中に「一は二により少く，五より多し．説建に在り」と云う一句があるが．此れは一位の一は二より少ないが，十位の一は一位の五よりは多いと云う事である．一と云うても建てたるものは十位を表わすからだと云う事であろう．故に此所説の成立当時にも一位は横，十位は縦に並べる仕方が行われ，書契作製時代と同じであったと見るべきであろう．『墨子』の此記載は算木の並べ方の変遷した時代を考うる上に有要な目標となるべきものである．

又一十百千萬億の諸数詞を見るに，萬字は元と虫の名であるとか云うし，万は萬の略字ではなく古い形であろうかとも云う事であるから，万字の形を取って考うる事にするが，一と百と万とは何れも横の一画があり，百は一と白の二字より成り，白は音標であるから万も亦同様の構成であろうと思われる．又十と千と億とは何れも縦の一画を有する．億字は人偏のようではあるが，意は音標で，支那の現代でも億と意とは同音であるから，人偏に真の意義があるのであり，実は人偏ではなく，縦線に真意義があるのであろうと思う．故に此等の字形は一百万の諸桁は横に並べ，十千億の諸桁は縦に並べる事を言い表わす．一桁隔きに縦と横とを交互にする事は此等の諸文字の作られた頃から行われたものと見えるのである．億字は勿論十万の意に解しての事である．後に一位を横に並べる事から縦に並べる事に並べ方は変遷したとはいえ，一桁隔に交互に縦横を変ずる事は，此変遷の為めに変らなかったのである．

籌策を運らすと云えば，謀を運らすと云う事であるが，此れ即ち籌策を用いて計算を行い，依って計謀を立てると云う事で，籌策の計算法が相当に尊ばれた事を知る．

『管子』及び『史記』などに九九の中の句を文章中に記るしたものが幾らもあって，九九は相当に注意されていたものらしい．『漢書』及び『説苑』に斉の桓公の時九九の術を以て仕を求めたものの事も見えている．支那の算書中に九九の表を記るしたものはないが，敦煌の発掘物中には九九を記るした残簡があり，九九八十一から始めたものである．『孫子算経』には問題の形で九九から始めて一一に終る順序に記るしたものがある．又日本の平安朝時代の作に源為憲の『口游』があって，同じ順序の九九表がある．支那で古くは九九表が九九から始まり一一にて終るものであった事と見るべきであろう．九九表と言っては或は語弊があろうが，九九の詩句とでも云えば宜いかも知れぬ．漢文では六七四十二などと極めて明瞭に言い表わし得るので，表の形に作るよりも句の形で示めすのに便利であったのであろう．支那では宋末元初以来の諸算書には一一から始めて九九に終る事になっているが，日本では足利時代の『拾芥抄』にも『口游』と同じ順序に見え，徳川時代初期の諸算書に至りて始めて一一から始めたものが見えるのである．

支那の古算書の存するものは，皆漢以後のものにして．先秦時代に行われた数学の事は多く其資料を伝えて居らぬ．けれども当時既に暦法も相当に発達したのであり，田制に於ても井田の法などが有るし，土木，建築，戦術等も随分に発達したのであるから．数学も亦可なり発達して居た事に疑いはあるまい．唯，史科欠乏の為めに之を明らかにする事が出来ないのである．然るに幸にして『墨子』中に数学に関する多少の記事がある．之に依れば幾何学的の考察など幾らかやっていたものと見える．墨子は孔子より稍々後れて出た人であるが，『墨子』の書は後に其流派の人が編纂したものであろうから，戦国時代頃のものと見て置けば，大過ないであろう．『墨子』には詭弁の事も多く見え，数学関係の記事も亦詭弁の関係で記るしたものが多いのであるが．支那の詭弁の発達は恐らく戦国時代の事でもあろう．そうして其中に一尺のものを半分とし，又半分とし無限に至るときは其和の極限は如何と云う如き問題もあり，数学との関係は密接なものであった．

支那の古暦法の発達に就ては近年甚だ其研究が進んだ．西洋にも之を研究する人あり，又我国に於ても新城新蔵，飯島忠夫の両君があって，其研究は甚だ精緻の域に入ったのである．けれども新城飯島両君は其所説全く相反し．一は支那固有の発達だと言い．一は希臘バビロンあたりの発達を受けて始めて成立したものであると言う．両々相対峙して下らぬ

のである．我等は今にして的確に賛否の意を表する事は出来ないけれども，双方共に所説に長所もあり短所もある．我等は其長短を言うよりも，両君の力で現に見る如き結果に達した事を我国学界の為めに誇りとしたいと思う．今勿論支那の古暦法に就て詳論する事は出来ないけれども，数学の状態を窺うに足る丈けの叙述を試みて見ようならば，大略次の通りである．

漢の武帝の時に太初暦を制定した．暦法の制定が判然と史上に記るされているのは，之を以て嚆矢とする．けれども其当時世に行われたる暦術は凡そ六家のものがあった．何れも太初暦に用いたものと大小同異である．秦の時に行われたは其中の顓頊暦であった．秦以前に於ても此暦は行われていたのであり，戦国時代中期の頃には一通りの暦法の成立して居た事に疑いはない．此れまでは両説共に一致する所で，何等の問題もない．

然るに其戦国時代中期即ち西紀前三百年頃に於て．希臘の暦法が伝ったのだと云う説は，両国の暦法の上に類似の点があり．両々別々に考え及んだものだとは想定し難いからだと云うのである．『春秋』の経にも一種の暦法が使用されて居るし，『左伝』にも亦記るすところがあるが，其暦法は後から作ったもので，春秋時代の実記ではないと唱える．如何にも『左伝』には歳星即ち木星の天に於ける運行の位置に依りて人事の預言をする事が見えているが，天文上の逆算に依るに，其当時の実測の記事でない事は明かであり，其実測の年代を決定する事によって『左伝』著作の年代も決定される訳である．其年代決定も両説に分れる．

それは兎も角，此種のものを除きて，『春秋』の書中に見るところの暦法は一方には後の逆算なりと云い，一方には当時の実際の暦法であったと主張する．若し希臘伝来説が正しいとすれば，西紀前三百年頃に於て伝ったと云う事になるのであるが，春秋の暦法が其当時のものであったとすれば，春秋時代から暦法は相当に発達していた事になるのである．春秋の暦法は中間で発達上の変遷のあった事をも認め得られるから，後の推算では有り得ないと説くのである．其他にも支那固有起原説には種々の有力な論拠がある，此等を論破し得るだけの反対説は出て居ないように思われる．此説に依れば十干十二支の如きも早くから行われた事になるのである．

希臘起原説では十干十二支も，希臘の暦法が伝った時に制定されたと見るのである．其点に強い論拠が認められるが，未だ何故に他の国にない十干十二支の組合せを用うるに至ったかを，首肯し得るだけに説き得ないのである．要するに十干と十二支とを二つづつ組合せて年をも月をも日をも紀する事になったのは，支那特有のものであるらしく，支那古代の数学に関する思想の一部分を之に依って語っているのである．周易に於て算木で八卦乃至六十四卦を表わし占筮を行う事と関連して見るべきであろう．

此の如くして支那の古暦法に就ては両説相持して下らざるを以て今的確に之を説くに苦しむけれども．暦法の存する為には相当の数学の存する事を要し．支那でも早くから数学は存したものであろうかと思われる．暦法の希臘起原説を採るにしても．西紀前三百年前後の頃からの事であり．少くも其頃から相当の数学の在った事も疑いはあるまい．暦法が伝来した事を認めるにしても，数学も亦同時に同じ程度に輸入されたか否かは，全く別の問題に属し，之に就ては殆んど何等論究すべき手懸りもないと謂って置きたい．

第 2 章　支那の古算書

支那は早くから文化の開けた国であり．又文献の極めて多い国柄であるけれども，古算書の現存するものは至って少ない．現に『算経十書』として刊行されているものが恐らく漢唐時代に於ける古算書の全部であろう．此外に『謝察微算経』なるものがあるが，未だ之に就ては多く言う事が出来ないから，仮りに之を除外する．故に手にも晴れにも単に十部の古書が有るだけで，支那の漢唐時代までの数学は此十書に依りて論ずる外はないのである．

此以外にも多く算書のあった事は明らかであるが，其多くは悉く伝を失い，十書のみ今に存する事を得たのである．此れには一つの有力なる事情がある．唐の時代に於て官吏登用法に科挙と云う制度があり，数学に関しては明算科と称して人物を養成し，又試験をも行うたのであるが，其明算科の用書が十二部ほどあった．此等の書は宋の代になっても矢張り用書として用いられた，此十二部の中にて祖沖之の『綴術』と董泉の『三等数』とは失われて今に伝って居らぬけれど，他の十部は伝ったのである．之に依って見ても，唐宋時代に於ける政府学制上の用書であった為めに伝わり得たのであって，単に十部と云えば其数は少ないけれども，唐宋時代に存した代表的の算書は大部分が伝ったものと見る事が出来る．故に漢唐時代の数学を研究する上には，甚だ都合が好いと謂って宜い．

唯，十二部中の二部が失われているのは惜しいが，其中の『三等数』は内容に就て何等の記事をも見る事が出来ないけれども，『綴術』に就ては幸に『隋書』中に簡単ながらに記事があり，記載事項の一小部分の事ではあろうけれども之を想い見るに足るのである．此れ誠に不幸中の幸と謂って宜かろう．

然らば唐朝明算科の用書十二部は何時代の作であるかと云うに，之には議論もあろうが．第一に『周髀算経』は初めに周公と商高との問答を記るし．実際周公当時のものであろうと信ぜられていた．けれども其問答は一小部分にして，後人の続記らしいものがあり，又呂氏即ち秦の呂不韋の作と云うものも出ている．故に全体としては秦漢時代の作らしく思われた．けれども此書の事は『漢書』の「芸文志」にも出て居らぬので．前漢末の頃に現に存したかは怪しまれる．「芸文志」は漢末に劉歆が朝廷所蔵の書籍を調査して作った目録に拠ったものと云う事である．而も天文の事に関して後漢時代の書籍中に『周髀』云云の事が見えているから，後漢の初めには存したのであろう．

『九章算術』は周公の時の教育制度に於ける六芸の一なりとの説もあるが，此亦容易に信ずべきでない．此書も亦『漢書』の「芸文志」に其書名を録せられて居らぬ．「芸文志」には『杜忠算術』及び『許商算術』と云う二部の算書の名は挙げてあるが，『九章』の書名は挙げてない．けれども後漢末に至りて鄭玄が『九章算術』に通じたと云うし『九章』の章名を挙げたものが現存本の章名と凡そ同じであるから，後漢末に『九章算術』が存した事は疑うべきでない．其後三国の時に至り魏の劉徽が註を作った．実に西紀二六三年の事であったと云う．『九章』の註は幾多の人が作ったらしいのであるが，皆伝らず，唐に至りて李淳風等が勅を奉じて註釈した事があり，劉註と李註とが併記されて今に存して居る．此書は諸算書中最も重要である．

『五曹算経』は或は古いものであるかも知れないが，左まで重要なものではない．

『海島算経』は魏の劉徽の撰にして，『九章』の註を作ったとき之を記るし，『九章』の後に附して其欠を補うたものである．其事は劉徽の『九章』註の序文に見える．元と『重差』と称したのであろうが，巻首に海島測量の問題あるを以て，唐代に於て之を『海島算経』と呼ぶ事になったと云う事である．

『孫子算経』は或は兵法家孫武の作なりとの説もあるが，何等の論拠もない．此書も『漢書』の「芸文志」に見えぬ．後漢時代のものかと思われるが，それにも証拠はない．西紀六世紀より以前のものであった事だけは明らかである．

『数術記遺』は後漢末の徐岳の作にして，北周の甄鸞が重述したものだと云う．偽書だと云う説もあるが，唐朝の用書であった事に疑いなく，一旦失われて宋末に道教の御寺から発見されたと云う事で如何に見ても其発見当時に存した事は明白である．徐岳云云の事は暫く措き，或は甄鸞の作であるかも知れぬ．必ずしも甚だ疑うには当るまい．

『五経算術』は北周の甄鸞が四書五経中に見えたる数学関係の記事に就て解釈したものである．

『夏侯陽算経』は何時代の作か分らぬが，甄鸞が註をしたと云うから甄鸞より前のものである．

『張邱建算経』も亦甄鸞が註をしたとの記事があり，甄鸞以前のものである．張邱建と夏侯陽との前後の事などは序文などに依って多少考え得られるけれども，実は余り判然せぬ．『孫子算経』より後のものである事は，書中の記事から知られる．

『緝古算経』は唐の王孝通の作にして，十書中の最後に出来たものである．王孝通は唐初の人であり，註も亦著者自ら作る所に係る．明算科の用書撰定の際，此書は現代人の作であるけれども．甚だ大切なものであるから，其中に採用されたのだと云う事である．

董泉の『三等数』は今日存して居らぬが，甄鸞の註があったと云うから，其以前のものである．

『綴術』は劉宋の祖沖之の作，蓋し五世紀後半に出来たのである．『隋書』の「律歴志」の中に此書に就て簡単な記事がある．六かしい書物で，学官が持て余し，廃して理せずと云うのである．此れは隋代の事を云うのであろうが，唐代になっても或は同様であったのかも知れない．此書の失われたのは誠に惜しい．祖沖之の子祖暅之も亦同じく『綴術』と云う著書があったが，其書中の事は王孝通の『緝古算経』並に宋の沈括の『夢渓筆談』中に所見がある位のものに過ぎず，此亦伝わらぬのである．

現存の『算経十書』は其著作年代が上述の如きものである．此等の諸書に依って漢唐時代の数学の状態を窺うの外なく．又大体は之を明らかにし得られようと思われる．此外には暦に関する諸本乃至記録なども亦参照の価値がある．暦書の現存するものは多くないが．歴朝の正史に「律歴志」などがあり．正確な材料を多く伝えている．而も暦術上に於ける算法の如何に就ては従来多く研究されて居らぬ事を遺憾とする．

第 3 章　九章算術

『九章算術』は周代の古算書なりと信ぜられた事もあり，劉徽の注の序にも漢の張蒼及び耿壽昌が，秦の焚書の時に失われたものの遺残を求めて刪補したのだと言っている．故に劉徽の眼にも其当時の近代語が見えていると映ったらしく，書中近語多しと言っている．其内容の何程が古来の算法に基き，何程が新らしい増補であるか，それとも後漢時代に全部

作られたものであるかのは，今之を判断する事は出来ない．けれども随分進歩した算書であって，此れだけのものが，何等前代からの準備なくして一朝に著作されようとは思われぬから，長い間の変遷を経て発達したものと見て宜かろう．故に張蒼や耿壽昌が刪(さん)補した事の有りや無しやは別として，張耿二人者の如きは数学に達した人であったらしいので，此等の人々の業績も恐らく中に這入っているものかと考えたい．二人は共に前漢時代の有力な大臣にして，同じく経済の事に精しく，耿は常平倉の事などに大きな功労があり，又天文の事にも通じた人であった．

前漢時代には杜忠及び許商の二人が算術書を作ったもののある事は，「芸文志」に見える．太初暦制定の際にも算術に通じた人の参与した事実があり，前漢時代に何程かの数学が行われ，又開拓された事は明らかであろう．唯，今にして充分に其程度範囲を決定し得ないのが遺憾である．恐らく充分に之を闡明し得ん事は，百年河清を俟つの類であろう．

後漢時代になると天文学が次第に発達した事は明瞭に考え得られる事であり，渾天と蓋天の両説が対峙して争うた如きも著明な事実である．張衡の如き有力な人物も出たのである．張衡の数学に関する著述は残って居らぬが，張衡の算法の或ものは『九章註』の中に記るされている．訓詁学の大家鄭玄が数学に通じたと云うのも亦事実であろう．後漢時代の状態も亦極めて不明であるが，恐らく前漢時代よりも数学の知識は進んだのであろう．そうして『九章算術』は少くも現存の形式に於ては後漢時代に作られたものであろう．果して然らば『九章算術』は後漢時代に於ける数学の状態を伝えたものと見て宜い．此書は随分進歩したものであるから，後漢時代には随分見るべきものになって居たのであった．此書中に見えたるものと，其以後の時代に属する事の明瞭なものとを対比するときは，魏晋から隋唐時代までに於ける数学の進歩に就ても之を知る事が出来るのである．私は之を試みて見たい．此意味に於て先づ『九章算術』の内容を明らかにする事にしよう．

『九章算術』は其書名の示す如く九章より成る．『九章』には加減乗除の算法は記るされて居らぬ．蓋し普通に知られて居るので，特更之を述べる必要はないとしたのであろう．

第一の「方田」章には簡単な直線形や円及び円弧などの面積の事が見える．又分数の加減乗除，通分，約分，最大公約数の求め方なども記るされて居る．

第二の「粟米」章は歩合算又は比例の算法である．劉徽の註を見ても比例の算法が甚だ重宝がられた事を知る．本章中最後の九問題は不定方程式

$$\begin{cases} x+y=78 \\ xu+yv=578 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y=2100 \\ \dfrac{x}{u}+\dfrac{y}{v}=620 \end{cases}$$

等に相当する問題で，比例に関するものでない．「方程」章にも不定の場合に整数解を求めた一例があり，『孫子算経』及び『張邱建算経』等の不定解析関係の諸問題と共に整数術の起源を成すものである．

第三の「衰(さい)分」章は後の所謂(いわゆる)差分に相当する．即ち差等を設けて配当を行う事に関し，租税の賦課を相当に割当てる事などに必要とされたのである．此章の終りに単なる比例の問題があるのは．「粟米」章の終りの諸問題と入り代った錯簡であろう．

第四の「少広」章は田の面積と一辺とを知りて他の一辺を求める事や開平，開立の算法を説いたものである．開平，開立の算法は算木の使用に依りて運算を行うものである．他の二三の古書にも其算法の解説されたものがある．此算法は方程式解法や後の代数演算の発達上に重大なる関係を有するものであった．本章の問題には此処に示す如きものがあって，其意味は田の広即ち横長を表わすに

$$1\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}$$

今有レ田、広一歩半、三分歩之一、四分歩之一、五分歩之一、六分歩之一、求ニ田一畝一、問ニ従幾何一。

と云う如く分子が 1 である分数の和を以てしたもののあるは，埃及(エジプト)の風習に似たもので．注意を要する．埃及(エジプト)では普通の分数を言い表わす適当の言葉がない為めに右の如き単位分数の和を以て分数を示めす事が盛んに行われたものである．此風習は希臘(ギリシア)でもずっと後の時代まで行われているが．支那では分数を言い表わす事が，十七分之九など云う如く甚だ簡単にして，何等単位分数使用の必要がないに拘らず，「少広」章に於てのみ問題中にではあるが此種のものが見えているは，注意し置く事を要するのである．

第五の「商功」章は功を商(はか)る事で，即ち城，垣，堤，溝，塹，渠等の立積を求め，之が築造の功程等をも併せ考えたも

のである．支那では築城，河渠，治水等の事が早くから大努力を要したのである．其事情を考えると．『九章』中に此種の事を説いた「商功」章の有るは，如何にも支那の古い数学にふさわしい．蓋し此種の事功が原因になって，其必要上から数学の発達を来したものであろう．

本章中には各種の立積に関する術文が示めされているのみであるが，劉徽の註には其術を得べき解義然たるものが見え，当時の数学的処理方法を窺う為めに貴重な資料である．此算法に於ては基即ち模型を造って考察を加える．此等の論究中には代数的に言えば，無限等比級数の総和を使用したものに相当する一節がある．『九章』中には勿論，他の古算書中にも斯の如き等比級数は現われて居らぬ．

第六の「均輸」章は，蓋し租税徴収上に関しての名称である．例えば粟の賦課に就て言えば．戸数に比例して之を出し．道程日数に依って平均を取るようにしているのである．即ち賦課の多寡を決定する算法であって，其算法の数学的意義から言えば，差分と比例とを併せ用いた如きものである．

第七の「盈不足」章は，後世には盈朒(じく)と称したもので，問題を解くに普通の算法に拠らず，仮りに二つの値を与え，之に依って真価を見出す方法である．一般の言い表わし方で言えば，方程式 $f(x)=0$ を解く為めに，仮りに x の値を x_1 及び x_2 と見て，

$$x=\frac{x_1f(x_2)-x_2f(x_1)}{f(x_2)-f(x_1)}$$

と置いたものである．後の和算家が開方盈朒術．統術惣括など称して立てた算法は，つまり上の公式を繰返し適用する事を工夫したものであった．此算法は印度(インド)の regula falsa に相当し，即ち複仮定法に比すべきであろう．埃及(エジプト)にても単仮定法は余程古くから行われたものだと云う．劉徽の註には等差級数に関する論究も見える．

第八の「方程」章は一次の連立方程式に関するもので，正負と云う術語は此章中に現われ，式の前頭に負算を列する如き大胆な企てさえ既に試みている．そうして其解法は之を他国の例に徴する時は，十八世紀の中葉にフランスの Bezout が考案したものと同様であり，極めて手際なものである．連立方程式は希臘(ギリシア)でも支那より稍々(やや)後れて Diophantos の書中などに見出されぬではないけれども，支那の如く整頓したものは遂に見られなかった．印度(インド)にも之に相当するものを見ぬ．方程の成立は支那の数学上に於ける一つの大なる誇りでなければならぬ．劉徽の註には方程新術なるものが見え，消去の方法が本文中のものとは異なる．

第九の「勾股」章は勾股弦に関する問題を説いたもので，中に二次方程式を使用したものも見える．測量に応用するのが本来の目的であり，劉徽の註には元と図があったのだけれど，現存本には図は失われて伝って居らぬ．劉徽の註に拠れば，凡て幾何学的に取扱ったものらしく，二次方程式になる問題でも同じ方法に依って其術文若(もしく)くは公式を得たものらしい．此点はユークリッドの幾何学など連想されるところがないでもない．帯従開平方を使用した解法は，即ち二次方程式を解く為めに開平方と同じ算法を施したものである．一つの問題に於ては句股弦の整数解法の萌芽とも見るべきものが，注の中に見える．蓋し『九章』の作者も注意していたものであろう．此種の整数術では印度(インド)の数学で深く注意を惹き，後代の和算家も亦幾重にも研究を重ねたものであるが，支那の古算書中には多く見出されぬのである．

勾股の事に就ては『周髀算経』の趙君卿註にも劉徽九章註と出入せる記載が見える．此両者を併せ考えて，支那の勾股に関する知識を明瞭にし得るのである．趙君卿の年代は判然せぬけれども，其註の中に「術は九章に在り」との一句が有るから，『九章』著作以後の人なる事は勿論である．趙註は蓋し『九章』の「勾股」章を知って書いたものである．或は『九章』の諸術中に於けるものを一纏めにして記るしたもののようにも見受けられる．そうして『九章』以外に別のものを附け加えては居ないようである．趙註にも帯従開平方の使用の事なども見えている．趙註には甄鸞(けんらん)が意見を附したものがあるが，随分説明に無理があって，唐の李淳風も甄註の無理を指摘して居る．

第 4 章　九章以外の諸書

『九章算術』に依りて後漢末から三国頃に行われた数学の様子は知られるのであるが，劉徽の『海島算経』は『九章』の欠を補う為め作ったと云う事であるから，『九章』に続いて此書から説く事としよう．此書は三国末の著である．

『九章』の「勾股」章は，測量に応用するのが目的らしいのであるが，勾股の相似を用いたのみでは測量には甚だ不充分である．是に於て重差なる算法の必要が起こる．重差とは読んで字の如く差を重ねると云う意味で，差とは相似勾股の事であり，二組の相似勾股を作ってそれから算法を立てる事である．固(もと)より二組には限らず．三組四組の相似勾股を使用しても宜いのであって，『九章註』の序に三望，四望など言って居るのはそれである．此序に拠れば，『海島算経』には著

者劉徽が自ら註解をも加えて置いた筈であるが，其註は伝って居らぬ．唐の李淳風等の註は存して居るけれども，単に術文へ数など当て嵌めただけのもので，意義ある解義ではない．隋唐時代には『九章重差図』一巻なるものもあったと云うが，是亦現存せぬ．故に術文のみに拠って解釈する外に道がない．宋の楊輝の著書中に『海島小図』なるものが見え，古来伝承のものとすれば多少の参考に値する．

『海島算経』の算法は要するに幾組かの相似勾股を使用して測量を行うの算法であるが，其測量の結果を処理するには代数的にやって見ると可なりに面白いのであるが，果して代数的に行ったのであるやは明瞭でない．『九章註』に於て勾股の取扱方が随分幾何学的に出来ているから，或は重差の場合も幾何学的の解釈が行われたものかも知れぬ．それは兎も角，『九章』の「勾股」章よりも測量の方法に於て一歩進んだものであった．古算書中に測量法の見えたるものは，此算法以外のものは見られぬのであって，角度を使用して三角法に依るものなどは全く其痕跡だにない．

劉徽は重差の算法を記述したけれども，此種の算法が前から存した事を考えたもので，決して新らしい創意だとは言って居らぬ．夏至の日中に八尺の表即ち垂直な棒を立てて其影の長さを測り，依て地平説の前提の上に南方日下までの距離を知る事は，術を以て之を推すものだと言って居る．其術と云うのが如何なる算法であるかは記るされて居らぬが，重差を説くに当りて此事が記されて居るのであり，又重差と云う名称も前からあったと云うから，必ず重差の算法を指したものであるに相違ない．即ち南北両地に於ける夏至の日の景差から重差の算法を立てるものと見たい．

劉徽の此見解に依りて『周礼』の記事を解釈する事が当れりや否やは別として，天文上の算定の必更に基きて重差の如き算法が発達した事は勿論であったろう．

天文関係の算書は『周髀算経』である．此書は暦術の事を説いたものであって．他の諸算書とは稍々趣きを異にする．此書は周公時代の古書である如く考えられたけれども，実は前漢末から後漢初には存したであろうと飯島忠夫氏が論じているが或はそうであろう．此書には趙君卿註があるが，漢の趙君卿としたものもあり，又何代の人なるやを知らずと云う説もあるが，其註の中に『九章』中の事が見え，又乾象暦の事が見えるから，『九章』の著作以後，『乾象暦』以後の人であるに相違ない．『乾象暦』は後漢末に劉洪の作である．故に趙君卿は後漢末より以前の人ではない．『周髀』の趙註は『九章』の劉註と共に古算法を発明するに足るものがある．

『周髀』の本文中には開平方の算法は見えて居らぬが，日までの距離を開平方で算出する事が言ってある．『周髀』の著者が開平の算法を知り又之を使用した事に疑いはない．

又分数の算法も出ているし，表景に依りて日高及び日下までの距離を言っている條に於ては，『海島算経』の條中に述べた如き重差の法或は之を重矩とも云うのであるが，其算法が使用されたものなる事は，趙註を見るまでもなく明らかであろう．趙註の重矩測量法は『海島算経』と共に此種の事項に就ての有益な資料である．又地平説に基きて日下の距離など算定したのであるが，後に極下の地は隆起しているものと見る事にした．而も前に得た結果を修正する事もして居らぬ．此れは一見甚だ不合理であるが，其不合理なる事を注意して居らぬのである．唐の李淳風等の註には此事を指摘して居る．『周髀』に見えたる算法に於ても，又劉徽の『九章註』の序に於ても，等しく地平説を採って居る．支那の暦法でも矢張り地平説に拠ったものらしい．南北の各地に於て表景を測る事はしたのであるが，其観測に基きて工夫を凝らすときは地平説は容易に破れなければならぬだろうと思うけれども，容易に地球説を立証し又之を採用する事にならなかったのは，著しい事実である．『周髀』の李註に見えたる記載の外に歴代の「律歴志」等に基きて之を研究するときは，支那の暦術家が此問題に関して如何なる数学上の能力を発揮しているかの限界を論証すべき一つの確実な根拠を供するのである．数学史の研究上に誠に面白いところである．隋の劉焯に至って初めて地球の説あり，唐の南宮説が子午線一度の長さを測ったことがあるが，其後は再び忘れたらしい．

『孫子算経』には李淳風等奉勅註釈と署してあるけれども，李註は亡びて伝らぬ．孫子の現存本は宋代の刊本から翻刻されたものである．『九章』等にも此種のものが多い．『孫子算経』には乗除法の解説があり，『九章』の欠を補うに足る．『孫子』の方程の算法は『九章』記載のもの並に劉徽の新術とは少しく趣きを異にする．方程の解法は種々に試みられたものと見える．等差級数の問題も出ているが，単に器械的に数えたのみに過ぎぬ．又不定方程式

$$1x + 2y + 4z = 1001$$

に相当する問題が有り，或る條件を取って之を解いている．又三と五と七とにて何回にても割れるだけ割ったときの余りが夫々二と三と二であると云う数は幾何なりやを問う所の問題があり，此種の問題の現われた最初のものとして深く注意を惹く．又和漢後世の数学に対して多大の関係を残したのである．蓋し暦術上の関係から発達したのであろう．

『張邱建算経』には等差級数に関する問題が幾らもあり，『九章』の劉徽註に見えたるものとは稍形式の異なれる公式を使用している．張邱建の百鶏術なるものは極めて有名であり，又此種の問題の記るされたる中にて印度，亜剌伯よりも古いのであるが，此れは不定方程式

$$x+y+z=100, \qquad 5x+3y+\frac{1}{3}z=100$$

に関するもので，其整数解は 1 組以上あることをも注意して居たのである．之と類似の問題は『数術記遺』の甄鸞註にも見える．

唐の王孝通の『緝古算経』は三次方程式を使用して諸問題を解いたものである．方程式の作製に就ても，又方程式の解法に就ても説明は見えぬが，術文中に言う所の術語に依りて，三次方程式を開平開立の算法と同様に処理して解くべきものであった事が察せられる．支那で三次方程式の用いられたのは之を以て嚆矢とする．三次方程式は亜剌伯の数学上にて甚だ著しいものになるのであるが，『緝古算経』の著作は亜剌伯数学の発達前の事であり，且つ用うるところの解法は後に亜剌伯で発達した処理方法とは全く同一でない．

第 5 章　円の算法

『九章』，『周髀』等を初め古算書中に用うるところの円周率は一様に径 1 周 3 であるが，漢唐時代の算家が此略率だけで満足したのではない．円周率又は円積率の算定は希臘及び印度等にても行われ，又和算家も此問題の為めに頻りに苦慮したのであって，数学の発達する以上，必ず生起する問題であり，支那でも少くも前漢末以来，多くの研究が企てられたのであった．『隋書』の「律歴志」には此問題に関係のある幾多の人名が挙げてある．けれども其人々の使用した算法は多くは知られて居らぬ．

此問題は蓋し前漢末の劉歆から始まる．劉歆の円周率を記載したものはないけれども，度量衡原器の事に関しての記事から凡そ之を推定し得られる．

後漢の張衡が $\pi=\sqrt{10}$ に相当する率を用いた事は，『九章』の「劉徽註」の中に見える．

魏の劉徽は此問題に就て『九章註』の中に記載したものがあって，先づ円内に六辺形を容れ，次第に其辺数を倍して十二辺形とし，二十四辺形とし，四十八辺形とし，九十六辺形と為して，次々に此等の内接多角形の面積を算出し，且つ其算法からして外接形の場合をも考慮し，依て周 157 径 50，即ち $\pi=3.14$ なる率を得たのである．

次に劉徽は更に其算法を進め，一種の処理方法を案出して，径千二百五十周三千九百二十七と云う率をも得たのであった．此の処理方法は和算家の算法と比較して甚だ興味がある．

唐の李淳風等の『九章註』には，祖沖之が劉徽の得た円周率は精しいものでないので，更に算定を試みた事があり，今諸家の得たものを集めて比較するも，祖沖之の率が最も精密であるから．之を劉徽の術の下に記載すると云う事が言ってある．然るに祖沖之の算法と云うものは記るしていない．又『隋書』「律歴志」の中に祖沖之の得た円周率なりとて記るされたる者も，李註の中には挙げてない．そうして其「律歴志」が李淳風等の編纂である事を思えば，李註に祖沖之云々と言える部分は伝を失うたのかと思われる．けれども上述の劉徽が一通り円周率を得た算法の後に続記せるものが，李淳風等の追加した祖沖之の算法を示めすものと見る人もあるが，此見解も全然不都合ではない．併し上述の円周率は『隋書』「律歴志」記載の円周率よりも複雑にして而も精密度に於て劣ったものであるのに，之を甚だ精密なものとして誇称してある所から見ると，祖沖之の算法ではないようにも思われる．此点は姑く疑いを存するのである．故に矢張り劉徽の得たものと見て置きたい．

祖沖之は南北朝時代の宋から齊にかけての人であった．永元三年 (五〇〇) 年七十二で卒した．其著『綴術』数十篇は宋末の作だと云う．此書は現存せぬので見る事は出来ないけれども．幸に『隋書』の「律歴志」に簡単ながら其記事がある．此記事に依れば．祖沖之は『綴術』の書中に於て円径一億を一丈として，

$$3\text{丈}\,1415927 > \text{円周} > 3\text{丈}\,1415926$$

なりとし，之れから

$$\text{密率}\quad \pi=\frac{355}{113} \qquad \text{約率}\quad \pi=\frac{22}{7}$$

なる二つの分数値に相当するものを得たのである．前者は希臘の Archimedes も使用したものであるが，後者は和蘭で一五八五年に得たのが西洋では最初だと云う事になっている．印度では一四二六年作の書中に見え，其時初めて算定されたものではあるまいと云う事であるから，西洋よりは先だつ．而も支那の方が遥かに先きに成立っているのである．私は嘗て祖沖之の此円周率は世界に先立て出来たものであると云うので，之を祖率と称したら宜かろうと，独逸で出版の書中にて提議した事があるが，茅以昇氏の『中国円周率略史』中に此事を述べ，私の所説に対して他年世を挙って喜び従う事になると，先民の苦心に酬いる所以のものとなるであろうと説いている．私は甚だ之を栄とする．

祖沖之は既に上述の如く約率及び密率を得たのであるが，何うしたものか其約率を密率と称し，密率は全く挙げられない事になったのである．後，元代に至りて趙友欽なるものありて，円の算法を試み，径一一三周三五五の率が最も正しと主張した事はあるが，此れ亦多く注意を引くに至らず，更に後世までも径七周二二が密率と称せられたのであった．そうして和算家が同じ問題を研究するに及んで祖沖之の密率は甚だ実用される事となった．

祖沖之は円周率に就て算定を行うた許りでなく，円弧の算定に就ても注意すべき研究があったらしい．其研究の委細は知られぬけれども，『隋書』の「律歴志」に円周率の事を述べた終りに略記したものは之を語るのである．其算法は深遠にして六かしいから，其道の専門の役人も解し兼ねて棄て置いたと云う事が記るされて居る．此書の伝わらぬは誠に惜しい．而も此記事以外に何等の手懸りなく．且つ余りに簡にして真意を捉え難いのであるが，幸に開差冪，開差立と云う術語が見え，之を手懸りに解するときは級数の初めの二三の項を取って算定した如きものでもあったろう．開差冪とは二次の項，開差立とは三次の項を意味するものと見るべきである．冪とは面積を云う．故に二次，三次の項が存するものとして算法を立てたのであり，後世に於ける招差法の適用とも云うべき如きものであったろう．上記の劉徽の算法に於ても前には略して述べなかったけれど，多少之に関する処理方法が思われ，『括要算法』に見る所の関孝和の算法の如きもの，若くは類似のものが考案されたのであろうかと見たいのである．

招差法は元代に於て郭守敬が授時暦に之を使用したのが三差の場合の初めで，二差の場合は唐の辺岡が用いたと云う事であるが，其以前に李淳風が麟徳暦を作った時にも招差法の関係の算法を使用したらしいのであり，更に遡って祖沖之の時代にも其算法が使用されたろうと見ても，不都合はないであろう．

円の算法と関連して想い起こすのは，球の算法である．球の立積に就ても又二三の研究がある．勿論二三に限らぬであろうが，我等の知り得るものが二三ある．此れ即ち『九章註』に見るところにして，後漢の張衡が其算法を創め，劉徽が之を改良し，更に祖沖之の子祖暅之に至りて之を完成したのである．張衡以前にも何等かの処理はあったろうが，今明瞭に之を知る事が出来ない．

張衡の球の体積に関する所説は『九章』「少広」章の劉徽註の中に見える．劉徽は其所説を附会の説なりとして手厳しく批評して居るけれども，之に依りて後漢時代に張衡が数学に就て如何なる学力の人であったかの一斑を見るに足るのである．張衡は暦法にも精しい人であり，又一種の地震計を作った事があるが，地震計は之を以て世界の記録中の最古のものとする．後に祖沖之が風力をも用いず漕ぐこともせずして行く船を発明したと同じく，甚だ発明の才に富んだ人であった．

劉徽は『九章』本文中の球の立積の算法並に張衡の算法は正しくないと論じた．其所論は勿論正しい．けれども正しい算法を進める為めの見込を附けたものの，如何にして之を処理して宜いかを工夫する事が出来ず，未完成の侭に残した．祖沖之の所説は李淳風の註の中に記るされて居るが，張衡及び劉徽の説いているだけに満足が出来ないで．新法を設けたのである．其新法と云うは劉徽が企てて成就し得なかったところを成就し得たのである．之を摘んで言えば，張衡は球に外接する円壔を作りて，

$$\text{外接円壔の積} : \text{球の立積} = \text{正方形の面積} : \text{円面積}$$

としたが，劉徽は円壔を円壔にて突き抜いた形を合蓋と称し，

$$\text{合蓋の積} : \text{球の立積} = \text{正方形の面積} : \text{円面積}$$

であるとしたので，張衡の得た結果は正しくない事を示めし得たのである．けれども合蓋の立積を算出し得なかったので，算法の完成が出来ない．故に後進の学者が之を研究して完成し得ん事を望む旨を記るしている．祖暅之は劉徽の得た比例を用い．合蓋の立積を巧みに算定し得たので，劉徽の希望通りに球の立積を立派に算出し得る事となった．其算法には一種の簡単な積分方法を使用したものとも謂うべく，推論は複雑であるけれども全く正当にして又甚だ巧妙であると

謂って宜かろう．(此種の積分方法は劉徽『九章註』に角錐の算法を説く所にも見えて居る．支那の幾何学的考察の事は之を以て最高の発達とすべく，後世に至り宋元時代の数学上にも之に比すべきものは現われなかったのである．此算法に類似のものは和算家の著書中にも一も見出されぬ．祖暅之が此算に成功し得て甚だ得意に感じた事は，張衡及び劉徽の算法を批評して，「夫豈難い哉，抑(そもそ)も未だ之を思わざる也」と言い，既に其結果を得て「心亦明晰なり」と言って居るのでも知られよう．誠に当然の感情であろう．

序に言うが，劉宋の何承天は調日法と云う暦術上の算法を立て，小数値から分数値を得べき方法を案出したらしく思われる．此事も委細の記事はないが，祖沖之が円周の小数値から分数値を作ったのも，そう云う仕方を参照したものであったろう．小数計算の事は支那では割合に早くから発達していたらしく見える．西洋で近世に至りて始めて之を用うるようになった比ではないのである．

第 6 章　印度の関係

支那で数学の発達したのは勿論先秦時代からの事であろうが，明瞭に知られて居るのは漢唐時代の古算書あるのみなる事，前既に論ずる通りである．然るに後漢の時代には印度(インド)の仏教が伝わり，仏典の翻訳には非常の努力を費やしたものであり，印度(インド)や西域の高僧が支那に来住せるもの多く，晋の法顕，唐の玄奘及び義浄等が幾多の困難を冒して印度(インド)に旅行し，仏教に関する典籍など求め帰った其熱心さは誠に感ずべきものであった．仏教と共に印度(インド)や西域の文物が多く支那に流入した事も亦勿論である．『舎頭諫経』及び『宿曜経』は共に印度(インド)の暦術に関するもので，同一原典の旧訳と新訳とである．此他にも暦術に関するものは間々之を見る．『隋書』の「経籍志」には印度(インド)の暦算書の漢訳されたもの数種の書名が挙げられている．唐代に天文暦術に関係のあった要路の人に瞿曇姓の人が四五人もあり其一人は瞿曇悉達と云う．此等の人々は印度(インド)人なるやは問題でもあろうが，瞿曇悉達と云えば Gautama Sidharta であろうから，釈迦と同名なのである．此人は嘗て勅を奉じて『九執暦』を訳した事があり．又同じく勅を奉じて『大唐開元占経』を作ったが，此人にして此作があるので，定めて甚だしく印度(インド)の影響を受けたものであろうと考えられている．又高僧一行が大衍暦を作ったので，是亦印度(インド)の影響あるものと考えられる．そうして数学も亦印度(インド)の影響が定めて多かったろうと説く人がある．一応甚だ最もである．

支那の数学と印度(インド)の数学には類似の事項も亦多く見られる．若(も)し此等が印度(インド)に古く，支那に新らしいのであれば，印度(インド)から伝ったであろうと考えても宜い．然るに事実は反対であって，支那の算書中に見えたものの方が古いのである．印度(インド)の数学史専門家 Kaye 氏が此事実を基礎として印度(インド)の数学は大に支那の影響を受けているであろうと説いたは，固(もと)より首肯する事は出来ないが，此等は凡て後の竄入であり印度(インド)から伝えたものであろうと説く訳にも行かぬであろう．今『開元占経』を見るに，其一章に『九執暦』を記るしているけれども，其他は悉(ことごと)く支那の交献から引用したもの許りであり，印度(インド)の影響云々の事を論ずべき何等の記載も見出されない．然るにも拘らず，著者が『九執暦』の訳者である事と，姓名が印度(インド)風である事から推して大に印度(インド)の影響があったもののように論ずるが如きは私は其是なる所以を見出し得ない．一行の如きも高僧ではあるが，其伝記に依れば道教の人から数学を学んだと云う事である．一行が果して何程か印度(インド)の数学を学んだかは疑問であろう．

『九執暦』には印度(インド)の筆算法を使用したものであった．印度(インド)の数学も亦記るされていたのである．之に就て『唐書』には筆算を用いて籌策を用いずと言って珍らしい事にしている．算木の算法は其以後の時代までも行われ，筆算が支那で勢力を得る事はなかった．支那の暦法は少くも南北朝の頃に於ては印度(インド)や西域の知識を伝えて幾多の進歩を齎らしたろうかとも思われるが，数学上に於ける関係は暦に於けるよりも遥かに少なかったろうかと考えたい．北周の甄鸞(けんらん)が多くの諸算書を註解した事があり，凡そ其時代に於て夏侯陽や張邱建の算書等も成立したらしく，そうして整数術に関する事項が此時代の算書中に現われ，整数術は印度(インド)でも優れたものであったし，且つ甄鸞が道教の圧迫に対して仏教擁護に甚だ努めた人である事など思い合わすときは，印度(インド)の関係が可なりにあったろうとも思われないでもないが，印度(インド)に知られずして支那で発達したものもあり．軽々しく印度(インド)の影響を論断する事は出来まいと思う．況(いわ)んや希臘(ギリシア)の影響などは勿論絶無ではあるまいが，多く之を考える事が六かしい．円や球の算法に関する比較研究の如きは今後委細に企てて見たい．

地の形が球状を成す事は希臘(ギリシア)では立派に之を証明して居るし，印度(インド)でも亦知られていたのであるが，支那では隋唐時代までは之を知り得るに至らなかったらしい．又希臘(ギリシア)や印度(インド)の暦術に於ては三角法を盛んに使用するのであるが，支那では全く其形跡をも見ぬ．此れに依って見ても支那が果して諸外国の影響を受けたにしても．甚だ部分的のものであり，決して全豹的のもので有り得なかった事は明々白々であろう．

第７章　算盤の起源

日本の算盤は支那から来たものであるが，其伝来の年代は不明であると言って宜い．支那で算盤が何時代から始まるかも亦明らかでない．けれども『数術記遺』に珠算の名があり，甄鸞重述の部分に其解説が見えているが，梁上一珠，梁下四珠であり．軸の有無は不明である．此書は偽書なりとの説もあるが．若し其記載を信ずる時は後漢末には存したと思われ，少くも甄鸞の時代即ち第六世紀には存したものと見て宜しかろう．或は甄鸞が徐岳に托して此書を作ったものかも知られぬので，後漢末にも在ったろうと見るのは怪しいが兎も角南北朝時代には在ったのであろう．晋の王戎が牙籌を携えたと云うのを算盤であったろうと見る人もあるが，牙籌とは象牙か獣骨の算木であったろうと考える方が実らしい．此れは算盤の起原に関する例証にはなるまい．『数術記遺』所載の珠算は希臘，羅馬に在ったと云う abacus の構造と原則が似ているので，或は之を伝えたものであろうかとも思われるが，勿論単純な道具の事で別々に出来たろうと見ても宜い．之に就て確乎たる断定は出来ない．後漢以来，支那と東羅馬との間には多少の交通は有ったのである．

宋の『謝察微算経』にも算盤の算法が出ている．其事は物徂徠も之を言っているし，星野文学博士も亦之を説いた．此書名は『唐書』に見え，又算経と云うから趙宋時代のものではない．恐らく劉宋の人であったろうか．若し果して劉宋時代のものと決定し得るなら，北周の甄鸞よりも以前のものとなり，算盤の歴史を考うる上には無上の経典でなければならない．けれども此書に就ては未だ決定し難きものもある．南北朝時代の頃から算盤が盛んに行われたろうと見てはならぬ．『数術記遺』には算木の事を今の常に用うる算器だと言っている．又『唐書』に『九執暦』の事を述べた條にも筆算の珍らしい事を言うのに籌策を用いずと記るして，算木が普通の用具であった事を記るし，算盤に就ての記載はないのである．算盤は既に出来はしたものの，南北朝から唐代の頃には未だ多く行われなかったのであったろう．

宋末から元代の諸算書には割算の九九を記るしたものがある．後の時代には割算九九は算盤の割算にのみ使用するものであったから此れ即ち其当時に於て算盤の行われた証拠であろうと説くものがある．私も初めは此見解に従うたが，割算九九は必ずしも算盤の割算にのみ限らないようにも思われるので，此種の判断は避けなければならぬかと考える．けれども宋代には『盤珠集』,『走盤集』等の算書があったと云うし，他に多少の証拠もあるから，宋代の頃から可なり算盤が行われるようになったと見て宜かろう．算盤の図を記るした最初の算書は明の柯尚遷撰の『数学通軌』(一五七八) 及び程大位の『算法統宗』(一五九三) であり，稍後れて一二の類書中にも図が見えている．此等の図に依れば梁上二珠，梁下五珠であって現用のものに同じく，『数術記遺』所載のものとは異なる．此変遷が何時代からの事であったかは，今之を知る事が出来ない．然るに伊勢に存する古い算盤は文安元年 (一四四四) の裏板書きあり，又右の諸図に見る如き形状のものであるから，若し之を文安頃のものと見得るならば，支那では其以前から同じ形状のものが有ったろうと思われるし，明初の頃には此形状の算盤が用いられていたと見られよう．日本へも伝わる程であるから，支那でも可なり行われたのであろう．思うに商売などの間に行われ．それから伝ったのでもあろう．明初の算書に図を記るしたものが有ったと云うが．今之を見ることが出来ないので，其形状を知る便宜にならぬ．

支那では今でも算盤が行われているし，横浜あたりの南京町へ行って見ても支那算盤で算用をしているのが見られる．其形状は『算法統宗』などの図と余り変らぬのである．支那の算盤は珠形は鈍く軸は長く，日本人の眼から見ると使いにくかろうかと思わるるけれど，支那人は此の如き形状の算盤で随分敏速に計算すると云う事である．日本の算盤は日本人の用い易いように改造したものであり，支那の算盤は支那人に便利なように出来ているのであろう．

支那では『算法統宗』などに算盤の算法を説いたものがないではないが，算書中に記述されたものは割合に少なく，和算家が甚だ之を称揚したのとは稍々事情が異なる．和算家は高次方程式の解法などにも成るべく算盤で出来るようにしようと多くの努力を費やして，各種の算法を案出する事になったけれど，支那では同様の事実を認める事が出来ない．是れ実に和漢数学上に於ける著しい異同点の一つである．

第８章　宋元時代の数学

唐代は一般に言えば支那の文化が著しく増進した時代であるが，併し数学に於ては唐初に王孝通が三次方程式を創意した事，尋で李淳風等が諸算書の註釈を作り，又朝廷の学校に於て数学教科の制度の整頓した事，僧一行の大衍暦が整数術を盛んに使用している事，辺岡の『崇元暦』に招差法の二差の場合が現われている事など見えたるに止まり，又宋代になっても余り数学上の事蹟の知らるるものなく，南北朝時代から唐初又は唐の中葉までに発達した数学も．其後は余り進歩の見るべきものがなかったか，若くは多少衰退の有様ではなかったろうかと思われる．此時代に著作された算書に就ては多少書名の記るされたものがないでもないが，全く注意すべき程の記事をも見ぬ．

然るに宋の中頃に至り沈括なる人があった．恰も儒学の大に起って人物の輩出した時に出たのである．彼亦本来は儒者であるが，博学多通，行くとして可ならざるはない人物であった．彼れは嘗て太史令となりて改暦の事に預った事もあるし，晩年作る所の随筆『夢渓筆談』には数学に関する多少の記事がある．等差及等比級数以外の有限級数の事が見えたのは，支那では之を以て初見とする．沈括は太陽暦の採用をも希望したのである．又地形の高低など表わしたる模型地図を作った事もあった．

沈括一たび出でて後宋代の数学は再び多く聞くところがないのであるが，宋末元初に至りて支那の数学は特殊の発達を現出する事となった．此頃の算書には現存のものも多く，支那数学史上の甚だ注意すべき時代に属する．

宋の秦九韶の『数書九章』は大衍求一術並に此術を用いて解くべき問題を記るしているのが著しい．大衍求一術は和算家の剰一術と云えるものと同じであるが，剰一術は支那から伝ったものであるに相違ない．剰一術を応用して解くべき問題は，之を翦管術と称したのであるが，『数書九章』には翦管術の名称は見えぬ．けれども此書より稍々後れて出た宋の楊輝の著書中に見えている．翦管と云う術名さえ伝わっているのであるから，其術が伝った事に何等の疑いもない．

大衍求一術若くは剰一術とは不定方程式

$$ax - by = 1$$

に於て x 及び y の整数解を求めるものであって，『孫子算経』に見えたる三と五と七とにて繰返し割って得た剰余を知りて其数を求める問題の如きも，此の求一術を用いて解くべきものである．翦管術と云うのは此種の解法を云う．求一術を明瞭に言い表わし，之を解説し，又応用の仕方を説いたのは，『数書九章』が現存書中の初めであるけれども，孫子の問題並に其答術の成立った頃には既に此算法も出来ていたのであろう．又唐の一行の作った『大衍暦』に於ては此種の算法を暦法上に応用したものであった．『大衍暦』以後の諸暦は凡て此方法に拠らないものはない．故に秦九韶は自ら創意して記るしたのでなく，古来暦術家の使用し来った算法を自著の数学書中に解説したのである．大衍求一術と称して大衍の二字を冠しているのもその為めに外ならぬ．和算家が翦管術の術語を用いたのは『楊輝算法』に拠ったと云うよりも『宣明暦』に関する何等かの文書から採ったものではあるまいかとも思われる．

支那で求一術や翦管術の如き算法が発達し，又暦法上に盛んに用いられるようになったのは，思うに暦術上の問題から自然に現われ来たものであるからであろう．支那の暦術上の算法が如何なるものであったかを解するときは，容易に其点に考え及ぶ事が出来る．剰一術及び其応用に関するものは印度の数学上にも存したようであるが，必ずしも印度から伝ったものであろうと見るに及ぶまい．

天元一を立てると云う事は宋元の数学に於て甚だ大切な事であるが，秦九韶の求一術の算法中に其事を言ったのが，現存文献中の最初である．

元の李冶の著書では立天元一とは算木を用いて方程式を列し，又之を解く事に関して使用されている．立天元一術又は略して天元術とは此種の器械的代数学を言う．秦九韶も此種の代数学を説いている．否之を説いたと云うよりも，之を用いて解くべき問題を挙げて高次方程式に依って之を解き，且其方程式の近似解法を述べて居る．

李冶の数学に関する著書は現存のものが二部有る．一は『測円海鏡』にして，一は『益古演段』である．秦氏の書は序文に一二四七年の年紀を記るし，李冶の初めの著書は其次年の年紀を有する．第二の書は凡そ十年の後に出た．李冶は其二書に於て天元術を説いたのであるが，天元術を施して得たる方程式の近似解法に至りては之を説述して居らぬ．其解法は秦氏の書に於てのみ之を見る．故に秦李二人は同時代に出て，同じ器械的代数学である天元術の二つの方面を別々に説いたかの観がある．凡そ時を同うして此二人の出たのは，思うに当時此種の代数学が発達しつつあったもので．二人共に之を受け続ぎ，別々に記載を試みたものであったろう．けれども季冶は其両書に於て天元術の代数式の配列の仕方が上からするものと下からするものとの別がある．秦九韶は李冶の天元術に相当するものに於て天元の語を用いず，他の整数術の算法中に天元の語を用いているところなど見ると，当時天元術の事に就てはまだ其発達の初期に属し，万事決定的に整頓して居なかった事が思われる．天元術は秦李二人より余り久しからざる頃から発達を始め，二人の手で整頓されたのであったろう．

天元術とはつまり天元之一即ち一本の算木を用いて未知数を表わし，算木を並べた上下の位置に依りて未知数の二次，三次……の乗冪を表わす事にしたものである．算木には赤と黒との二種ありて正負を代表する事は九章中の方程の算法で行われた事であり．一元方程式に於て諸項の正負を示めすにも此両種の算木が役立

つ．そうして諸項の係数を示めすには算木で数を表わす仕方を用いて列すれば宜いのである．斯くして赤黒の算木で代数式が並べられるが，之を紙上に書き表わすには色別けにするのは便利でないから，負算を表わすには斜線を用うる事にした．依て図の算式は

$$234 - 321x + 882x^2 + 15x^3 - 7x^4 = 0$$

と云う方程式を指すのである．勿論算木で並べるのであるから，諸係数が凡て数で表わされたものでなければ，此仕方で表わす事は出来なかったのである．負算を書き表わす為めに斜線を用うる事は李冶の書中に始めて記るされて居るのである．

秦九韶が求一術に於て立天元一と言うは，右の如き天元術とは意味が同じでないので，従来，全く別事に同一の術語が用いられたもののように考えられたのであるが，実は必ずしも全くの別事ではない．両者共に一本の算木を以て計算の目安とすることについて天元の一を立てると云う同一思想に属するものと謂うべきであろう．

秦九韶は初め宋朝の暦局に学び，戦乱の間に人と為りて，後に知州の官に就いた人であるが，李冶は初め金の進士出身にして知州の官に居り，元との交戦に敗れて民間に降って居たが，後，元の世祖に召されて翰林学士となり，政治上の時弊を直言したようの事もある人であった．歿する時，年八十余であった．

秦九韶が天元術で得た高次方程式の解法を説いて居るものは，英国の Horner の近似解法として知られた有名な算法と，原則を同うするものである．Horner の解法は一八一九年に発表したのであるから，Horner に先立つこと五六百年前なのである．此解法は算木を用うるが為めに成立ったのであり，古算書中に於ける開平開立の算法乃至二次三次の方程式解法を其侭に高次方程式へ押し拡めたものと見て宜い．天元術の代数演算も亦算木で之を行うものにして，其器械的の算法を紙上に書き表わす為めに試みられた代数紀法の作られた事とは区別して之を見るの必要あり，其事情を明らかにしなければ，支那代数学の発達は正当に了解する事は出来ない．

秦李二人に尋ぎて出たのが宋の楊輝である．此人の著述は幾らも現存のものがあるが，天元術に関する事項も多少は之を説く．けれども秦李二人の著書ほど数学史上に重要な価値あるものではない．唯，当時の数学の教授上の事情などは楊輝の書に依りて之を見る事が出来る．又方陣円槢に関する記載があって，此種のものの見えたる初めとする．方陣及び円槢と云う名称は．固(もと)より後世の称呼である．

方陣の最も早く現われたのは，古の洛書であろう．洛書は一より九までの数を方形に列して縦横の諸行及び対角線上の和を何れも相等しからしめたものであった．蓋し漢代の頃から此の配列の事を知っていたものらしい．『数術記遺』にも見えている．易の研究に於て洛書以外の一種の方陣に近かいものが宋代の頃には考えられたので，楊輝に至って四方陣，五方陣，六方陣等をも記載するようになったのである．明の万暦中に至り程大位が『算法統宗』(一五九三年) を著わすに及で方陣に就て記載したものは従来多く知られていたが，全く『楊輝算法』記載のものに等しく，新らしい考案ではないのである．

元の郭守敬は『授時暦』の作者として名を知られて居る．『授時暦』は支那の暦法に於ては一大革新を敢てしたものであり，明末清初に西洋の暦法を伝うる以前に於て支那暦法の最も完成したものであった．当時支那の天文台と相並びて回々(イスラム)の天文台も設立せられ，回々(イスラム)人が来て天文暦術の事に従事しているし，回々(イスラム)の天文器械なども輸入されていた事は『元史』中の記載を見ても明らかである．そうして『授時暦』の成る前に回々(イスラム)の『万年暦』を訳した事もあった．故に『授時暦』は大に回々(イスラム)暦術の影響を受けたものであろうとは，何人の胸中にも自然に想い浮ぶのであろう．甚だしきは全然回々(イスラム)暦術に基いて作製されたるかのように見るものさえある．如何にも最もな見解である．けれども『授時暦』に於て使用した代数演算は天元術であって，回々(イスラム)代数学を用いたかは不明である．又所謂(いわゆる)三差法即ち招差法の三差の場合を用いたのが有名であるが，招差法が回々(イスラム)数学上に存したかも不明であり，而(しか)も二差の場合は唐以来用い来たったものなる事も事実であった．故に『授時暦』が何程か回々(イスラム)学術の影響を受け，何程か支那固有のものであるかは恐らく甚だ問題であろう．唯，支那の暦法上，三角法を用いたものは古来嘗て見られぬのであるが，『授時暦』には球面三角法様のものが使用されているし，回々(イスラム)暦術上に於て三角法は盛んに行われているのであるから，此点の如きは其関係から学んだものであるかも知れない．又観測を厳にする事も著しいものであったが，是亦回々(イスラム)国の学風を伝えたものでないともせぬ．此等の事は支那の暦術史の上から充分に闡明されん事を望む．

郭守敬は回々(イスラム)暦算の影響を受けたるにもせよ，受けぬにもせよ，甚だ偉い人物であって，回々(イスラム)の暦を伝えた『万年暦』よりも彼れの作った『授時暦』の方がずっと優秀なものであった事も，世に伝うる所である．『授時暦』は回々(イスラム)の星学と

類似の点あるが為めに，此等のものは悉く西伝の結果なりと論ずるものあらば，それまでであるけれども，支那古来の暦法に於て次第に準備されたる諸点を考え，又郭守敬の学識を思い，且つ用うる所の代数学が支那で発達した天元術であり，新考の三差法であった事を考うるときは，西域回々国の学術によりて多大の輸入を仰がずとも，あれだけのものは構成し得られたのであろうと論ずる人もある．両天文台の対立は，場合に依りては相反目するところでなかったともせぬであろう．郭守敬は初め都水少監の位に居り河渠開鑿の事などにも功労のある人であった．当時年七十以上のものは致仕する規定であったが，郭守敬は独り致仕を許さなかったと云うような事もあり，元朝では蒙古人や色目人即ち西域人など許りが重用された中に在りて，郭守敬は甚だ重んぜられたのであった．礮術に於ては西域人が用いられて殊功を立てた人もあるが，暦算の事に就ては特に注意すべき人物が来ていた事など知られて居らぬ．

秦李二人が出て天元術が整頓して後凡そ五十年，元の朱世傑なるものありて『算学啓蒙』を作り．天元術を用いて諸問題を解いた．此書は支那では伝わらなかったけれど，朝鮮では二度ばかり翻刻された事あり，日本へも其朝鮮版の古いものが伝ったらしく，日本の天元術は此書に基いて了解されるようになり，それから日本の数学は発達する事になったのである．此意味に於て『算学啓蒙』は数学史上甚だ重要である．支那で後年反刻された『算学啓蒙』は後の朝鮮版を発見したのに基づく．日本で『算学啓蒙』の盛んに学習された頃には，支那では此書は伝本がなかったと云う事である．

朱世傑は更に『四元玉鑑』の作があった．所謂四元術と称する算法を用いて諸問題を解く事をしたもので，四元術とは天地人物の四元を用い，算木に依りて四元即ち四つの未知数を含める代数式を列する事を工夫したものであった．此四元は既知の項を中央に置き，上下及び左右に列するものであって，此種の式四つを作りて，其中から四元中の三つを消去し，他の一元の方程式を得る事が出来るのである．勿論四元が悉く備わらないでも宜い．二元の場合，三元の場合も有っても宜い．此等の場合は朱世傑以前から使用されていたもので．其事は『四元玉鑑』の序文中に見えている．朱世傑の四元術は誠に巧妙なものであって，支那代数学の最高の発達を示めすものに外ならぬ．天元術と云い，四元術と云い，全く算木を用いての器械的の代数演算を行うものであった事が，特殊のところであり，蓋し他の諸国に之と比較し得るものの存した事は知られて居らぬ．天元術に依る高次方程式の近似解法も亦他国には先立って存した事の所見がない．唯印度に於て諸未知数を表わすに色別にした事があるようであるが，恐らく四元術の四元の取扱方と同一のものではないであろう．四元術に於ては四元を別々の色の算木で表わすのではなく，算木を列する位置のみによって示めすものであった．四元術は和算家の間に伝って居た形跡が更に見当らず，支那でも後に之を祖述した人ある事を聞かぬ．其書が再び見出されて世の注意を惹いたのは百余年前からの事である．

楊輝や朱世傑の著書中には垜積即ち有限級数に関する算法なども見える．招差法に依って之を得たものであろう．

元代には趙友欽が『革象新書』を作り，円周率は径一一三周三五五とするのが最も正しいとした事がある．秦九韶は十の平方根に相当するものを挙げている．宋元時代の数学には斜三角形の面積を辺の長さで表わした公式に相当するものなどあるには有るが，幾何学的事項の論究は多く見るべきものなく，劉徽や祖沖之父子などに比較し得べきでない．円弧の事に就て沈括及び郭守敬が或る公式を用いた事などは．其主要なものであったろう．

唐の中世以後，宋末に至るまで三四百年間の長きを通じて数学が多く発達しなかったらしいのに反して，宋末元初に至り天元術，四元術，招差法等が欝勃として立派な発達を遂げたのは，如何にも著しい．而も此時代は北方には遼及び金と争うた後を受け，又蒙古が勃興した時であって，蒙古は回々国を滅し西域人をも重用するし，回々文化に著しく接触した時代である．南方からも亦回々国との海路交通が久しく行われていたのである．支那に回々文化の影響が少ないものでなかった事は言うまでもあるまい．故に数学が此時に於て異常の発達を成就したのは，回々数学の影響であろうと考える事も，一応は道理であろう．斯く主張するものあるに対し固より同情しても宜い．けれども此時に当って発達した支那の代数学は古来行われたる算木の算法の継続であり拡張であり，諸外国に行われていない種類のものであるから，之を外国数学の伝来した結果であろうと論断すべき何等の理由の存する事を認める事が出来ない．勿論，或る部分に於ては幾多の影響を受けたであろうけれども，当時の支那数学の根幹を成したものは決して外国交化の関係から来たものでなく，固有の発達に属するのである．我等は斯く解するの外はないのである．

けれども何故に他の時代に発達せずして，回々文化との接触の甚だしかった時代に発達したかと言えば，此には種々の原因が有った事であろうが，回々文化の刺戟を受けた事が一つの大きな動機になっていたかも知れない．或は大なる刺戟は与えたであろうが，直接に既成の数学を輸入したのではなくして，固有の発達の道程を辿って進ましめたものであろうと見たい．回々文化との接触は宋元数学の上に実質上の影響を与えるよりも，化学作用の上に於て直接に化合の事に預からぬけれども，而も其化合作用を生起するの要因となるべき所謂触媒作用と同じような作用を呈したものではなかったろ

うかとも考えて見たい．此う云う作用の有ったや否やは勿論想像の臆測である．

第 9 章　西洋暦算の伝来

宋元代数学の開拓は，其主要なものを言えば，秦九韶の『数書九章』の作られた淳祐七年 (一二四七) から朱世傑の『四元玉鑑』が大徳三年 (一三〇三) に成れるまでの五十七年間の業績であり，其以後に於ては長く支那の数学上に見るべき飛躍がなかった．明代の算書は現に存するものも可なりに有るが，凡て初等の教科書か，若（もしく）くは優れたものでも天元術などに就て多少の解説をしたり，応用したようのものあるのみに過ぎない．『弧矢算術』など云うものもあるが，それとて左までたいしたものではない．『四元玉鑑』所載の新代数学を更に開発したものもなく，之を祖述したものもない．天元術に就ても充分の了解はなく，『測円海鏡分類釈術』の如きは随分委細に説いているに拘らず，天元術の真意を捉え得なかったものらしい．故に明代は数学の衰退した時期であったと謂って宜い．

明代に於ても元朝の制度を受続ぎて回々（イスラム）人が天文暦法の事に当っているし，『回々（イスラム）暦』を漢訳したようの事もあったけれど，明代の暦術にも見るべきものはない．明代には『大統暦』を作るけれども，全く『授時暦』の継承にして新味を加えたものではないと云う事である．支那に在った明代の回々（イスラム）天文家は為すなきものであったらしい．

明の万暦二十一年 (一五九三) に程大位の『算法統宗』が成り，日本へ伝って和算発達の初期に大きな関係を持ったのであるが，単なる一つの教科書と云うに過ぎない．

明の皇族，朱載堉が音律の理論に就て古来行われ来たものとは全く別の原則を立てたようの事はあるが，数学に関係する事とは云え純数学上のものではない．

明代の数学が斯の如きものであった際に於て，西洋の耶蘇会士が支那へ来る．其主宰の任に当った利瑪竇即ち Matteo Ricci の如きは甚だ有為の人物であって，能く支那の国状を洞察し，布教の上に画策するところも着々其功を収めたのであるが，又数学にも堪能の士にして，『幾何原本』及び『同文算指』等をも漢訳した．此両書は夫々徐光啓及び李之藻が筆受したものであった．其他『万国輿図』，『乾坤体義』，『渾蓋通憲図説』，『経天該』，『円容較義』，『測量法義』等の作もあったのである．此等諸書は万暦二十九年 (一六〇一) 北京に在住するに至って漢訳するところである．之を西洋暦算の学が公然支那に入るの初めとする．

利瑪竇はイタリアの人，一五五二年に生れ，十九歳にして耶蘇会に入り，後，印度（インド）に派遣されて一五七八年ゴアに達し，四年の後には支那派遣を命ぜられ，初め広東に居り，一五九九年国都北京に赴いたが，此時は志を伸ぶる事が出来なかった．翌年再び国都に向い，途中抑留せらるる事半年，遂に北京に入りて時計等の献上物を齎らして甚だ珍重され，宮廷内並に高官の間に勢力を敷植し，暦算及び諸科学を教授して布教の便を図り，頗る其目的を実現したのであった．万暦三十八年 (一六一〇) 北京で病歿した．年五十九．

利瑪竇が暦算並に科学諸書等を漢訳したのは多く徐李二人の助けであった．彼二人者は共に高官にして早く耶蘇教に帰依し利瑪竇等の教えを受けたものである．『幾何原本』はユークリッドの初六巻の訳にして，幾何学の訳名は此時から始まる．『同文算指』はクラビオの書を訳したものだと云う．

利瑪竇が既に西洋の暦算の学を伝え，其優秀な事を示めした為めに．利瑪竇の歿した翌年即ち万暦三十九年 (一六一一) には熊三抜 Sabatin de Ursis 及び龐迪我 Didacus de Pantoja 等が改暦の命を受くるに至った．熊三抜はイタリアの人，一六〇九年北京に入り，利氏の歿後に北京の伝道長に挙げられたが，『五星説』を漢訳し，北京の経度を測定し，『泰西水器』の作もあった．龐迪我はスペインの人，利瑪竇に従うて北京に入ったもので『崇禎暦書』の編纂は此時に淵源する．けれども此頃から宗教の反感が起きて迫害を受ける事となり，二人共にマカオに難を避けなければならなかった．そうして龐氏は一六一八年に，熊氏は一六二〇年にマカオで歿した．

此時支那の学者には徐李二人の外に尚，李天経等がありて其局に当り．又西洋人羅雅谷 Jacomo Rho，湯若望 Adam Schall 等が改暦に当る事となり，『崇禎暦書』は出来たのであるが，事業半ばにして明朝は滅び清朝が之に代ったけれども，其事業は継続せられ，此時羅雅谷は既に歿して湯若望が主宰したのであった．湯若望は一六六六年に歿した．湯若望を助けて星暦の事に努めたものに，南懐仁 Ferdinand Verbiest がある．一六六〇年に湯氏の助手となり，一六六四年此等教僧は弾劾を受けて罪せられたが，会々（たまたま）地震と火災があって其為めに難を免れる事が出来た．康熙帝の政を親らするに及んで，南壊仁は重く用いられ，康熙帝は此人と与に星暦の学を修めたのであった．

康熙帝は身自ら数学に通じ，嘗て梅文鼎を召して三日の間，舟中にて数学を語った事もある．梅文鼎の孫梅瑴成の如きは宮中に於て帝の教を受けたのである．帝は内外の学者をして『律暦淵源』を作らしめた．即ち『数理精蘊』，『暦象考成』及び音律の書を併せて 3 部より成る．『数理精蘊』に説くところは西洋の数学が多く，対数表をも伝えている．『暦象

考成』は後に後篇も作られた．日本で寛政改暦の時に主として拠ったのは此書であり，西洋の天文書を調査研究したのは多くは改暦後の事であった．西洋の三角法の如きは『崇禎暦書』等の中に記るされ，西洋の暦算を伝うるものは皆之を用いたのである，西洋の筆算並に籌算も伝えられた．西洋の代数学は初め之を借根法と称し，『数理精蘊』中に記るしたものを以て嚆矢とする．

外国の伝道師は又支那地図作製の事にも従事した．広く三角測量を行うた結果であって，支那地図の精密なるものは今日に至るまで之を除いては作られていないのである．

支那へ西洋の暦算の学が伝えられた由来は，大体を言えば右の如きものであった．凡て西洋伝道師の仕事であり，多くは明清二朝の官業として行われたのである．支那の学者も多く之を助けているけれども，西洋人の口訳を筆受するのが其主なるものであって，支那人自ら外国の書を繙読して之を訳したり研究したりしたものある事は，何等の形跡にも接した事がない．誠に著しい事実と謂うべきであろう．梅文鼎の如き清代の前半世間に於ける最大の暦算学者にして，西洋の暦算にも通じたけれども，矢張り西洋人の訳書に拠ったものに外ならぬ．梅文鼎は著述甚だ多く，之を集めて刊行したものが即ち『暦算全書』である．

『数理精蘊』及び『暦象考成』，同後篇等が成れる以後には，西洋の暦算の学が伝えられる事は一時中絶した．杜徳美 Pierre Jartoux の事に就ては後に説く事としよう．

第 10 章　清代に於ける中算の勃興

明末から清朝の初世にかけて，西洋の暦算の学が伝来した事に就ては前章既に之を略記したのであるが，同時に又支那古来の数学も等しく学者の注意を惹き，単に西洋風の学問のみが盛んに行わるる事にはならなかった．明末に於ける徐光啓，李之藻等の人々は西洋風の数学をのみ修むる事に努めたようであるけれども，其後に出た人々は西洋の数学を修むるものと雖も，同じく古来の数学をも修めないものはなかった．支那風の数学だけ修めるものはあるが，西洋風のもののみ専修するものは無いと云う有様であった．其一例として方中通の如き人を挙げる事が出来よう．

方中通は明の忠臣にして『物理小識』の著者なる方以智の子にして，算書『数度衍』の作があった．蓋し一六六一年に成る．方中通は嘗て西洋人艾なる人に算術を学んだと云う事であるが，此人の著書は西洋風の算書ではない，全く支那風のものであると謂って宜いのである．方陣の事を説いて居るものなど．楊輝及び程大位の記るせるものとは異なり，面白い．方氏は代々易学に精しかった家柄で，其父の作なる『物理小識』の如きも，其当時の所謂物理即ち理学一般に関する幾多の事項を説いたものであるが，西洋から伝ったものの事も言っているけれども，易学風の原則と云うか，支那古来の見解に基づいて説いたのである．是れ恐くは支那理学書の好標本と謂っても宜いであろう．方中通も亦家学を受け，同じ精神を以て数学に対したらしく思われる．

梅文鼎も亦同様の精神を以て暦算の学を開拓したらしい．梅文鼎は方中通よりも甚だ該博であり，其造詣も亦深い．暦術に於ては多く西法を採った．且つ筆算，籌算．三角法等は西洋数学を記るしているのである．けれども単に西洋から伝った数学を説くのみにあらずして，招差法など云う古来の算法をも解説し，応用する事に努めたのであった．

筆算の如きは『数理精蘊』及び『暦算全書』に見えたるものなど凡て亜剌伯数字を用いたのではなく．漢字を用いて筆記運算する事にしている．

西洋の代数学は康熙帝の時に始めて伝わるのであるが，此時之を借根方と称した．借根方とは根即ち未知数を借りて既知数と同じに取扱い算法を立てる方法と云う意味であったろう．面白い訳名と謂って宜い．支那には元来，宋元時代の天元術がある．『測円海鏡』などの書は存していて，其方法を窺う事は出来るのであるが，明代に天元術の何たるやを解し得ない事になった後を承けて，其真意を詳かにし得なかったのである．此時に於て西洋の借根方が伝った．そうして之を天元術に比較して，天元術は即ち借根方に同じい事を覚った．そうして借根方は単に西洋だけのものではない，中国にもあるのだと言って，甚だ喜んだものである．西洋人等は康熙帝の歓心を買おうとでも思ったものか，此事情を見て取って，借根方の語原アルゼブラは東来法の意なりと告げたらしい．是に於て西洋人は律義正しいものだから，借根方が元来中国の算法で西洋へ伝ったものであるのを，其起原を忘れずして東から来た算法と云う術語を作って記念しているのだと思い，甚だ満足したのである．其事は梅瑴成が康熙帝から伝えられた言葉として記るしている．此事は後の学者も頗る其意に満ちたものと見え，屡々之を説いて居る．固より一些事であるけれども，支那の数学者が支那古来の数学に対し如何なる精神感情を以て之に対して居るかを見るには，蓋し屈強の資料であろう．

一方に於て西洋の暦算を伝うると共に，一方には支那古来の数学を探求し之を学修する事も亦甚だ行われたのであって，古書の探求は誠に学者の意を尽くした所であった．けれども清の初世に於ては古書が多く出ていない．多く此等のも

のが世に出たのは『四庫全書』の調査が出来た頃からの事である．戴震は其調査の任に当った一人であって，『四庫』中のものと他から見出されたものとを併せて『算経十書』を編し，刊行される事となって，漢唐時代の算書十種が普ねく知られるようになったのは，是れからであると言って宜い．中には其前に知られたものもあるが，『九章算術』の如きは此時までは世に出て居なかった．『算経十書』の刊行は実に乾隆四十年 (一七七五) の頃である．『九章算術』は和算家の間にも伝っていないようで，其事に就て論じたものは一も之を見ぬ．日本で刊行した『算経五種』の中には『九章』は出て居らぬ．戴震は『九章算術』等に就て解釈など力めている．戴震は元来儒者であり，算学の造詣は余り深いものではなかった．戴震の哲学思想に就ては我国の伊藤仁齋と之を比較するものがある．

『九章算術』に就ては其後李潢等の深く研究したものがある．李潢は『九章算術細草図説』，『海島算経細草図説』などを作った．又『輯古算経』の註釈なども二三の作られたものがある．張邱建の百鶏術に就ての研究なども幾らも出来ている．

宋元の天元術は一旦忘却せられ，西洋の借根方が伝って之と対比して再び了解し得るようになった事は前に述べた．蓋し『測円海鏡分類釈術』等の書があって，之に依りて天元術を解したのであったろう．然るに日本に於ては『算学啓蒙』の朝鮮版を得て，和算発達上の早き時代からして之を研究し，随分之が解釈には苦心したようで．初めは了解のない仕方をした事などもあるが，兎も角，幾多の苦心を経て遂に立派に了解し又応用するようになったのであった．其事は寛文年中の事に属し，支那で借根方と比較して初めて天元術が借根方即ち代数学と同様のものである事を覚ったよりも若干年数の前に在った事も注意を要する．況んや日本では西洋の代数学の伝われるものなく，従って対比すべき資料があったのでない事は勿論で．独力で其研究を進めた事も亦事情を異にする．勿論支那では『算学啓蒙』が失われているから，天元術を学んだ書物は日本と同じでないけれども，其了解を成就した成績の同じでなかった事は著しいのである．

唯，此れだけではない．日本では天元術を了解し，且つ自由に之を応用し得るようになると，間もなく更に一歩を進めて演段術なるものを作り，天元術を二重に適用するような代数演算を案出し，其目的を達成する為めには一種の筆算式の代数学を新たに構成する事になったのである．其筆算式代数学の構成には漢字の使用が記号として甚だ便利な役目を演じた．漢字は具体的の意義を有するが故に西洋で字母を用いて既知数を表わして行うところの代数記号の進歩した時の事情に比すれば遥かに手軽に成立したのであった．然るに支那の清代に於ては天元術を借根方に比較して了解したに止まり，更に進んで演段術の如き代数演算の方法をも作らないし，又漢字使用の本国たる支那に於て漢字を記号としての代数学が自由に発達する事はなかったのである．

元の朱世傑の『四元玉鑑』は和算家の間に知られた形跡もないし，又支那でも清の初めには知られていなかった．阮元が『疇人伝』を作ったときにも，『啓蒙』，『玉鑑』二書を見ざるを以て朱世傑伝は記るして居らぬ．『玉鑑』の出たのは『疇人伝』著作の後であって，羅士琳が之に就て委細の註解を作り，四元術が如何なる性質の代数学であるかをも明らかにした．羅氏の著書は『四元玉鑑』研究上に甚だ有益である．而も此書の作は十九世紀に入りて以後である．『四元玉鑑』出でて後に『啓蒙』も亦朝鮮版を見出して翻刻するに至った．

阮元の『疇人伝』は古来の暦算家の伝記を集めたものであって，一種の暦術数学史とも謂うべく，此種の著書は支那では之を以て嚆矢とする．支那には古くから『高僧伝』の諸書あり，又『医史』，『名医列伝』等の書はあるが，暦算家の列伝を作ったものは，此以前には嘗て試みられた事がない．故に『疇人伝』の作は支那の暦算学史上に於ける一つの注意すべき事象とも謂うべく，『疇人伝』と云えば甚だ著名であり，一出以来直ちに古典的価値を以て迎えられたのである．著者阮元は元来儒者であり，進士の出身にして，巡撫，総督を経て朝廷の大臣となり，政治家としても重きを成した人物であった．『疇人伝』は嘉慶四年 (一七九九) の年紀があり，阮氏壮年時代の作である．思うに其門下の少壮学者李鋭等が助力した事多きに居るのである．此書は甚だ著名なものであるけれども，僅に三四年許りの短日月間に作られたもので，決して多大の苦心を費やしたものではない．

疇人と云うのは，『史記』に見えた名称で，推歩をする人即ち暦術家を指す，依って一般に暦算家などを云うものとして，『疇人伝』の作があった所以である．阮元も亦其著述に関与した談泰も共に，其疇人の意は家業世伝の人と云う意なりと述べているが，其論証は首肯し難い．又疇人は即ち籌人なりとの説もある．けれども疇字の構造を考うるに壽は「はかる」の意で，田偏を用いたるを見れば，田地の測定など云う事から来たのであろう．若し此見解を正しとすれば，疇人とは土地測量若しくは土地丈量の意であり，それから土地に限らず一般に測量若くは丈量，従て天文測量即ち暦算の事をも云うようになったものであろうと思う．然らば幾何学の語原 Geometria 又は Geometron は地と測ると云う二語より成り，疇人と云うのと同一の構成である事が思われる．幾何学は元と埃及で起きて，土地丈量の事に起原している為めに其術名が今に伝っているのだと云うから，幾何学と云うのが，言辞構成の一致するところ，偶然とは云え誠に面白い．

阮元の頃には西洋の暦算の学が伝って既に二百年の後であり，西洋風の暦算を学ぶものも多かったのであるが，又中法と称して支那古来の暦算の事を学ぶものも多かった．其多くは儒者であるが為めに，古典諸書中の天文記事を学ぶ．従って暦法に就て闡明するの要がある．之が為には数学をも知らなければならぬ．支那の古算法に就て古典として之を学修し，或は註解を試み，其算法の性質を尋ねようと云うのが，主たる目的であって，和算家でも亦其他の諸国の数学者でも，数学其物の領分を開拓する事に力めているものに比すれば，著しく研究の態度を異にするやの感がある．西法の遵奉者と雖も矢張り同じであって，西洋暦算書の漢訳につきて之を経典とし学修するに過ぎないのである．古経典尊重の精神が数学の上にも著しく現われて，為めに数学其物の進歩の上に幾多の桎梗を作った事は言うまでもないであろう，中西両派が分れて，互に評論抗争もするが，畢竟遵奉するところの経典を同うしないと云うまでで，其根本の精神態度に至りては同一なのである．中法の遵奉者と雖も西洋の訳書に対し相当の敬意を有する事は云うまでもなく．利瑪竇等に対して其権威を疑うの論を成した人もなく，『幾何原本』.『数理精蘊』等の諸書を価値なしとした人もないのである．そうして西法の算家中には漢訳書以外のものに論究したものある事なく，自ら外国語を学び，外国書を引用したようの例は，一として見る事が出来ない．此事情は阮元の『疇人伝』著作の頃までに然りしのみならず，清末に至るまで一貫しているのである．著しい一つの事象であると謂って宜かろう．阮元の『疇人伝』に於ても利瑪竇以下の西洋暦算家の伝記を作りながら，漢訳諸書を参照するのみで，他の資料は一切参照していないのであるから，頗る物足りないけれども，独り阮元のみそう云う風であったのではない．

『疇人伝』が出て後四十年，羅士琳の『続疇人伝』が作られ，光緒年間に至りて諸可寶の『疇人伝三篇』も編纂されたが，皆『疇人伝』と同一の編纂法に拠ったものである．

李鋭が阮元を助けて『疇人伝』の著作に尽力した事は前に述べたが，李鋭は古暦法に就ても有力な研究があり，且つ『開方説』の著があって，一種の方程式論を説いたのである．方程式は次数と同数の根を有し，其諸根には正負の別があり，又正負の根が欠けた場合もある事など言っている．清代の算家中此種の事を説いたものは蓋し李鋭が初めであり，和算家の業績中に於て関孝和の諸書にも比すべきものであろうが，関孝和より後るる事百余年である．

又方程式の解法に於ても二三の有力な工夫をしたものがある．此等は有益な研究であるが，今之を省く．円に関する算法の如きも亦甚だ見るべきものがあるが，此等は之を次章に譲る．

第 11 章　清代の円の算法

支那古代に於て円並に球の算法に就き見るべきもののあった事は前に之を述べた，元の趙支欽が祖沖之の率の正しい事を算定証明した事も亦之を述べた．明代に『弧矢算術』の如きもののあった事も亦之を記るした．清代になっても円に関する算法は之を試むるものが多かった．『数理精蘊』にも一種の論究が見えている．又種々の値を得たものもあるが，中には随分精密でないものがある，阮元の『疇人伝』著作を手伝った一人であった談泰の如きも，円周率三・一六余なる事，円板を作って測って見て立証されるなど云うような事を言って居る．古い時代に後漢の張衡や，宋末の秦九韶等が此率に相当するものを用いた如きは面白いとも言われようが.『疇人伝』著作の頃に至っても尚且つ此の如き不精密の率を云々する如きは抑(そもそ)も末である．

けれども余り精密でない研究が幾らも現われたと云うだけではない．正しい見るべき研究も亦進んだのである．其研究は清代の学者の自発的であったと云うよりも，西洋人の提撕に拠った事が有力な動機になったとも見られよう．所謂(いわゆる)杜徳美の九術なるものから発足するのである．杜徳美はフランス人 Pierre Jartoux にして，清廷の命を奉じて支那の測量を行い地図作製に偉功あった教父の一人であり，康熙五十九年 (一七二〇) 支那で歿した．此人に漢訳の算書があったかは不明であるが，杜氏の術と称するものは世に伝えられている．

梅瑴成は梅文鼎の孫にして，康熙帝の宮中で教を受けた人であるから，杜徳美等の西洋人にも接したものであろうが，此人が杜氏の術と称するものを伝えたのが，世に出た初めである．梅瑴成は祖父の諸算書を編して『梅氏叢書輯要』を作り，其附録に自著二部を附したが，其一部『赤水遺珍』中に之を記るして居る．即ち円に関する三つの無限級数展開式を術文の形で挙げて居るのである．解析方法等は記るしてない．支那で無限級数が明瞭に見えたのは，之を以て嚆矢とする．

『梅氏叢書輯要』の刊行に稍々(やや)後れて，杜氏九術なるものが伝えられた．そうして之が解析方法を按出しようとするものも出るようになった．九術とは梅瑴成の記るした三術の外に六術の加ったものである．何れも三角函数の無限級数展開式である．

然るに一方に於て梅瑴成と同時に杜徳美の公式を伝えられたものが他にもあるのであって，其人は即ち明安図であり，

欽天監正即ち天文暦術の主事を勤めた人である．彼れは蒙古人であり，梅㲄成と同じく康熙帝の宮中で教を受けた一人であった．此人の事蹟に就ては委細に知りたいと思うけれども，多く伝うる所がない．けれども其著『割円密率捷法』は今に存して居る．即ち杜徳美の諸級数を伝えられたが，級数あるのみにして之が解析方法は伝えられない．是れ誠に遺憾であるから，苦心惨憺として三十年の研究を積み，遂に其諸級数の解析方法を工夫する事も出来たし，又他の類似の諸術をも創意する事が出来て，九術を成したのである．然るに不幸にして其研究を記述せる著書未だ完結するに至らずして永眠した．依って其少子明新並に門人陳際新が師父の志を継ぎて之を完成したのである．其事は序文に見える．

明安図の此書若し早く刊行されていたならば，此種の数学の開拓が進む事も或は見られたであろう．けれども単なる写本であって，専門家の間にも伝って居ない．而して杜氏の原術と明氏の新術とを併せて九術を記るし，之を杜氏の九術なりと解した如き不完全な写本若くは抜書きがあったものと見えて，杜氏九術と称せられるような事になった．阮元が『疇人伝』を作った時にも未だ明氏の書を見ないのである．明氏『割円密率捷法』が世に出るようになったのは其後である．

杜氏の九術若くは杜明両氏の九術に就ては，董祐誠の研究もあった．董氏は未だ明氏の原本を見ず，九術の級数展開の公式だけ知って，其解析方法を案出したのであり，明安図が試みたのと研究の趣意は同じであった．けれども解析方法に至りては両者同じでない．董祐誠の算法の方が簡単に出来ている．そうして明氏のように三十年と云う長い苦心を積んだものでもない．董祐誠は地誌作製の事などにも関係した人で，古蹟の考定等が正確に出来ていると云う事である．彼れは壮年にして世を終ったのであった．

董祐誠の著書と明氏の書が相尋で世に出る．それから他の諸学者も輩出して円に関する算法も進み，又楕円などに関する算法も工夫せられ，又之と相前後して各種の研究も成立する事になった．此等の事，之を詳かにすれば甚だ興味があるけれども，論じ来って既に余白に乏しきを以て凡て割愛する事にする．唯之に就て注意して置きたい事が二つある．第一は円や楕円の算法が成立したのは和算家の業績と凡そ揆を一にするのであるが，支那では西洋人杜徳美の伝えた公式が其源頭を為して，凡ての研究がそれから出発する．此れは和算家の研究が支那古来の算法を土台にしたろうかとも思われはするものの，杜氏の諸術の如く既成の公式が其研究を誘発するのではなく，主立った結果は凡て自発的に得ているのが同じでないし，又支那で主要な研究が始まるより以前に余程進んでいたのも亦異なる．楕円の研究は凡そ時を同うするが，それでも和算家の方が稍々先だつのである．そうして和算家が円理の算法を整理して諸表を作ったり，又之を簡便に応用して各種の複雑な問題を処理し得るようにした如き事は，支那では見られなかった．此等の諸点凡て和算家の成績が清代の数学に比して一等を擢んでていたと謂って宜いのである．

第二は上に云う如き諸研究の進んだ時代の事である．此事は前章に於ても稍々説き及んだのであるが，今特に之を明らかに了解し置く事としよう．梅㲄成が杜氏の三術を公にしたのや，明安図の著書の成立したのや，又戴震が『算経十書』を刊行した事など，凡そ時を同うしている．即ち『疇人伝』著作の二百三十年前に当る．此頃は研究創意に向って進みつつあった時代だとも謂われよう．それから『疇人伝』も作られるし，古算書の解釈も進みて，其結果には見るべきものもあるのであるが，同時に又前掲の如き円や楕円の研究及び他に諸般の有力な研究が幾らも見られる事になったのである．此時は幾多の有為な学者が輩出した．此等諸人の伝記を究め．其業績を検する事も固より面白い．羅士琳の『続疇人伝』六巻中，後の四巻は即ち阮元が記述した以後の時代に属する諸人の伝記にして，其業績も略々此書に依りて見る事が出来る．実に十九世紀初頭の四十年程の時代にして，数学研究の活発であった事を立証する．右の如き状態は其後にも続くけれども，それは『続疇人伝』著作以後の事であり．且つ幾くもなくして事情に変化を生ずる事になった．其事は次章に於て之を明らかにしよう．

右云う如く数学の研究の盛んであった時代は，西洋との関係は勿論有るけれども，西洋の数学の影響を受けた事が殆んど知られるものなく．恐らく自発的研究であったろうと思われる．明末清初に西洋の暦算の学が盛んに伝えられた直後の年代に於ては，明安図の如き人物が居るには居ったのであるが，併し他の幾多数学者は余り自発的の研究に豊かであったらしくない．是れ恐らく数学に就て留意するところの多くなかったが為めであろう．戴震，銭大昕等の如き人物はあるが，何れも儒学の大家であり，数学のみに多く精力を割く事をしなかったのである．『疇人伝』著作の頃から以後の諸大家と雖も，単なる数学専門の人と云うものはないであろうが，而も此時代に於ては儒学などの上に戴震や銭大昕のように傑出した人物のない代りに．数学に対する努力は一段の高きを加えたかの観がある．是れ即ち数学に於て目立って成績が挙がる事になったのであろう．私は其事を重要視したい，

第12章　西洋数学再度の伝来

支那清代の数学に就ては簡略ながら可なりに説き明かしたのであるが，右の如き変遷を経たる後に於て，西洋の数学が二度目に伝来する事になった．即ち咸豊年中の事にして，恰(あたか)も十九世紀の中頃である．此時偉烈亜力なるものがあって，若干の数学書を漢訳した．『談天』即ち Herschell の星学書が漢訳されたのも亦此時である．此時漢訳されたものは数学書が多く，明末清初に暦術書が多かったのとは事情を異にする．

偉烈亜力は英国の人，本名を Alexander Wylie と云う．一八一五年ロンドンに生れ，支那の学を独習して，伝道会から一八四七年に上海に派遣され，漢訳聖書の出版の事に当ったのであるが，其間に在りて仏独露の各国語の外，満洲語，蒙古語等をも学び，広く十八省の各地を跋渉し，深く支那の文学に通じたのを以て著われた．上海に於て妻を迎えたが，翌年一女を残して歿し．其後は孤独の生活を送った．後英国に帰り，一八八七年に歿した．其著述の中にて最も知られたものは Notes on the Chinese Literature であり，博識と努力との好記念物だと言われている．歿後，論文集も出版された．支那の科学に就て論ずる所も多く，支那数学史の研究の如きも簡は簡なれども甚だ見るべきものがある．景教碑即ち唐代に支那に入れる耶蘇教の古碑に関する研究の如きも正鵠を得たものであった．彼れは傑出した語学者にして，支那研究家たる事が彼れの本来の面目であったのである．

偉烈亜力は斯の如き人物であるが，上海に於て学校を起こし，教授した事もあるようで，数学諸書を漢訳するに至ったのは，其関係からである．其諸書は皆彼れの口授に依り，支那の学者が筆受したのである．其筆受者には李善蘭の如き有力家がある．李善蘭の研究を集めたものに『則古昔齋算学』があり，独創研究の能力を発揮した人物であった．円理に関する研究もあるが．又対数原理の研究もある．後者は数年の労苦を費やしたもので．偉烈亜力は之に就て，Napier や Briggs が対数を創意した時代であったならば．西洋でも名を馳するに足るべき業績であったろうと言っている．李善蘭は長髪賊の乱に際し戦功を立てた人である．同時に徐有壬と云うものあり，円に関する創始的の研究もあった人であるが．江蘇巡撫の官に居りて，長髪賊の乱に戦死した．

偉烈亜力漢訳の諸算書は次のようなものがある．

『数学啓蒙』は咸豊三年 (一八五三) の刊行で，算術書であり．対数の事も見えている．此書は日本でも反刻が出来た．

『続幾何原本』は咸豊七年 (一八五七) の刊行で，ユークリッド第七巻より廿五巻までの漢訳である．同治四年 (一八六五) には南京にて曾国藩が初六巻と共に之を再版した．

『重学浅説』は咸豊八年 (一八五八) の刊行である．

『代数学』は咸豊九年 (一八五九) 版で，代数と云う名称は此書から始まるのである．此名称は日本へも伝わり，書中の術語も亦多く旧本で用いられる事になった．

『代微積拾級』も同年の刊行で，Loomis の著書を漢訳したものである．解析幾何学と微積分学とを併記したもので，此学の漢訳書は此れが始めである．微分積分と云うのも此書で初めて用いたものである．書中の術語は日本でも多く行われた．日本で始めて西洋の微積分学を学修する時には余程役立ったと云う事である．

『談天』の刊行も亦同年の事であった．

微積分学に就ては後に『微積溯源』の一著も刊行されたが，同じく西洋人の口訳を支那の学者が筆受したものである．

又英人艾約瑟 Joseph Edkins は偉烈亜力の『代微積拾級』と同年に『重学』の漢訳を刊行した．初め十部を摺りたるのみにて版木が悉皆火災に罹ったが，後に再刻された．艾約瑟は咸豊二年 (一八五二) に同年の日蝕について記るしたものもある．又『地球全図』(一八六四年版) 等をも作る．艾約瑟は嘗て戴煦が対数に関する論文を見て，遠路戴煦を訪い一たび相見ん事を求めたけれども，戴煦は会見を望まず之を辞したので，艾約瑟は空しく帰って来たが，後に戴煦の書を英訳して彼国公会中に入れたと云う事である．其事は『疇人伝三篇』などに見える．支那の学者は之を以て甚だ誇りとしているのである．艾約瑟が戴煦を訪うたのは甲寅の年 (一八五四) であるが，戴煦は咸豊十年 (一八六〇) に年五十六で長髪賊の乱の為めに歿した．艾約瑟も亦本来，語学者にして広く支那の文学に通じ，支那の宗教の事などに就ても多くの著述がある．始めて支那に来たのは一八四八年にして，一九〇五年支那で歿した．

支那で西洋人の漢訳した算書は尚他にあるけれども，今多く之を説く事をすまい．唯，其漢訳書の出来たのは偉烈亜力，艾約瑟等の如き有力な西洋人が有って之を成就したのである．支那人自らは筆受したのみに過ぎない事は，明末清初の場合と同様であり，此時に於ても支那人自ら西洋の書物を読んで反訳したり，又は参照したりした事はないのである．此事情は如何にも著しい．此頃以後に於て諸学者の研究も往々之を見るのであるが，中には西洋の漢訳書を参照したものあり，西洋の公式など応用したものもある．曾紀鴻が円周率一百位を算出した如きは即ちそれである．

時代は可なりに降るが，『西学輯存』六種と題する書がある．偉烈亜力に師事した人の編集であって，自ら西学者を以て任じているけれども，西洋の語を学んだ事なく，西洋の書を播(ひもと)いた事もないとは自ら記るしているのである．清朝の

末に至るまで，所謂西学者なるものは大概はそうした人物ばかりであったのである．呉嘉善なる人は数学者であり，そうしてフランス駐剳の公使に任じた事もあるので，此人の如きは或は西洋の数学に通じ，西洋の業績を伝えていはすまいかとの疑いも存するけれども，此人の如きすらも事実の如何は保証の限りではあるまいと思われる．

支那で初めて西洋の医学書を漢訳したものも亦西洋人，合信 Benjamin Hobson，嘉約翰 John G. Kerr 等であり，諸算書漢訳の場合と事情を同うするのである．合信の漢訳書は咸豊元年 (一八五一) に成り，偉烈亜力の『数学啓蒙』よりも一年前である．是れより先き禅理哲 R. Q. Way の『地球図説』(一八四八)，哈巴安徳 Andrew P. Happer の『天文問答』等はあったのである．故に数学書のみ此時漢訳されたのではなく，大勢の赴くところであったと謂って宜かろう．明末清初の暦算書漢訳は天主教父の仕事であるが．今や新教宣教師の手で諸書の漢訳が出来たのであった．

支那人の外国語に対し，外国書に対する態度は茲に論じた如きものであって，古来終始一貫しているように思う．支那の外国語学史は未だ之を闡明した人なきを以て，委細の点まで論じ尽くす事は出来ないけれども，我等は大体に於て見当の違はないであろう事を信ずる．故に支那へ外国の学問が伝わる事に就ては之を二様に区別して考うる事を要する．一は薬品，器械，果物等の実物の伝ったものであり，一は文書に依って伝わるべきものである．前者は伝わり易いし，又多く伝っているけれども，後者は支那に於ては他の国々に於てよりも遥かに伝わり難いものがあったろうと思われるのである．此意義に於て支那の数学上には，支那が諸外国と接触した事の多い割合に外国知識の伝来したものが意外に少ないであろうと断定したい．是れ全く私の新らしい主張であるが，深く考慮の要あるべき事を信ずる．

支那には和算書の伝ったものも稀には有った．会田安明の『算法天生法指南』，加悦俊興の『円理括嚢』，佐久間纉の『算法起原集』等がそれであって，此三書の如きは翻刻もされたのである．若し和算書が盛んに伝ったならば，和算は清代の数学に対して多大の影響を成し得たろうかとも思われるけれど，左まで伝ったものでないらしい．多く其形迹に接する事がない．右の三書の中『円理括嚢』は随分六かしい円理豁術に関する問題など出ているもので，丁取忠の『白芙堂算学叢書』に之を載せて，玲瓏誠に常度を超え，甚だ珍らしいものであるから，我は之を記るして遺すなからん事を願うのだと言っている．支那の算家が和算の一著を如何に見たかの好史料であって，誠に面白いのである．而も東倭の此学は未だ泰西には及ばぬとも言っている．是れ亦甚だ面白い．

支那では二度目に西洋の数学が伝わり，微分積分学の如きも漢訳書で学ばれる事になったけれども，古算法に就ての研究は決して棄たれて居らぬ．そうして其研究は次第に歴史的になったように見える．乃労煊の『古籌算考釈』などの如き精緻な研究も世に出た．清朝滅びて中華民国の世になってからは，事情は余程変った．国内には外国人の立てた諸種の学校も多く出来る．国立や省立の大学や諸学校も出来る．日本や米国などに留学するものも多い．清末からそうであったが，民国になっては其事情が余程進んだ．そうして雑誌などに横書きのものもある．支那人自らの手で外国文を翻訳して載せたものや，外国の事情や学問の事を論じたものなどもある．けれども数学に於ては古算法の歴史的研究が最も注意を惹いているかとも思われる．李儼及び其他の専門家の著述論文には見るべきものが少なくない．此の如き事情になったのであるが，数学諸書に至りては西洋のものを直接に訳すよりも日本の数学書を漢訳したものが多いようである．数学に於てのみならず，医学に於て現に大家丁福保が日本の諸書を取って盛んに漢訳刊行している如きは，其大勢を語るものであろう．

第3編　印度の数学

第1章　緒　　論

印度は支那へ仏教を伝えた国であり，支那の数学とも関係があるので，我等は深く注意を要するのであるが，一方には上は希臘の数学に関係を有し，又後に発達した回教国の数学の上に大きな関係を及ぼしたもので．引いては現代の数学にも其系統を伝えたものがあり，重ねて等閑視する訳に行かない．故に印度数学の為めに一篇を置くこととした．けれども印度は宗教並に哲学の国であって，歴史の国でない．哲学に於ては之を前にしては六派の哲学があり，之を後にしては大乗哲学の如き深遠なものが発達したのであるけれども，印度には何等歴史を記るした書物がない．支那には二十四史の如き歴朝の正史が作られ，其他にも歴史関係の文献に富みて，年代の考定など少くも秦漢以後のものは比較的に容易なのに比すると，印度に一切此種の記録のないのは誠に天地宵壌も啻ならぬのである．支那は歴史の国であり，印度は絶対に非歴史的の民族である．此故に数学暦術に関しても，現に存するところの古書と雖も，其年代頗る曖昧にして，年代の考定には少なからざる苦心と注意とを要する．其事は予め之を眼中に置かなければ，印度の事は一切年代を抜きにして考える外はないのである．印度の歴史は誠に取扱いにくい．

試みに印度の医学に就て考えて見よう．印度の医学は随分発達したものであって，アレクサンダー大帝の印度征伐に従軍した医官の観察にも，印度の医家は毒物の療法に優れて居る旨の記録がある．又鉱物性の薬品を内服用に使用するのは印度から西洋に入り現に行われているのであるし，麻酔剤を使用して外科手術を行う事も印度から始まったと云う事であるが，印度医学の大家たる Charaka 及び S'usruta の二人の如きも，著述は現に存して歴史上極めて貴重なものになっているが，二人者の生存年代に就ては頗る異論がある．而も前者は支那の記録によって大月氏のカニシュカ王の時である事が明かにされ，此説は従うべきだと思われるが，後者に就ては専門学者の間に於て，中には之を極めて古いと見るものあり，又反対に甚だ新らしいとするものもあって，其間に凡そ一千年の開きがある．決して僅かの違いではない．実に困ったものである．

印度化学の大家 Nagarjuna の如きも，一説には高僧龍樹 (Nagarjuna) と同一人なりとし，一説には龍樹よりも後代の別人と見る．而も未だ其両説の何れに決すべきやの確証は得られぬらしい．或は支那の仏典を調査して之を決定し得る事となりはせぬかとも思う．

印度の事は凡て斯う云う風であるから，暦算の事に関しても亦同様に年代の決定が甚だ六かしいのである．けれども印度の数学は別に専門の書物が有るのではなく，暦術書中の一部分として附記されて居るのであり，暦術書は割合に年代の考定上に便利なところがあるから，医学書などのように年代に就て異説の多くないのは，もっけの仕合せである．印度暦算書の最も古いものは，所謂 Siddhanta 諸書であるが，其著作年代は凡そ西紀四百年頃以後のものであろうと云う事になって居る．此より以前の古書は今のところ現存のもの有る事が知られて居らぬ．印度は古い国であり，文化の早く開けた国であるけれども，数学に就て多く古代の事を知るに由なきは，誠に遺憾此上もないのである．若し厳密に論究するに就ては，其年代の事も問題となるべき事項がないでもあるまいが，我等は梵語の古算書を見るの機会もなく，若し其機会が有ったにしても読破し得るのでもないから，此等の事は一切之を棄て，欧洲語で記るされて居る研究結果に従うの外はあるまい．けれども我等の考うべき一事がある．即ち支那訳の仏典中に『舎頭諌経』なる一書の有る事である．此書は唐代の新訳に於ては『宿曜経』と称せられたが，旧訳は印度に存する古い暦算書の最も古いと称せられる年代よりも以前の漢訳であって，若し之に就て研究を積むときは，印度の暦算に就て多少年代を遡って考え得られる事になろうかと思うのである．而も今其年代に就て彼此れ言う事が出来ない．

此う云う訳なので，印度の数学の事は年代が極めて不確実ではあるが，兎に角，若干の書類があって，如何なる算法が存したかの事は，割合に明らかになって居る．故に唯，大ざっぱに話して見よう．

印度古代の数学に就ては殆んど手懸りはないけれども，印度の天文学上二十七宿又は二十八宿が用いられて居たと云う事である．支那では二十八宿に極まっているが，印度では二十七宿にしたのと二十八宿にしたのとがある．つまり月が天界に恒星の羅列せる間を縫うて運行するのが二十七日余，二十八日弱の周期を有するのであるから，月の行程を表わす為めにしたのである．印度での月宿使用の年代の事や又印度から支那へ伝ったのか，それとも支那から印度へ伝ったものであるかは，議論の岐るる所である．諸説紛々，固より一致するところはない．今強いて之を論ずる事が出来ない．

印度でも計算上に古くは支那の算木の如きものを使ったのではあるまいかと思われる．漢訳仏典中にも籌字を用いたものが一二あり，印度に存する古碑の刻文中に算木で一二三等の数を表わしたのと同じ形のものも見られる．印度の史料

中にも算木らしいものの使用を示めすらしい形迹が多少無いではないと云う．けれども支那で算木の使用に依って特殊の代数学が成立したようの事はなかったのであろう．そう云う事の所見は今まで見出されない．後には算木に依る算法でなく，筆算が発達したのである．

印度(インド)の古書中に S'ulva-sutra と称するものがある．此書中に祭壇の作り方などに就て多少の算法を伝えて居る．一種の幾何学らしいものもあるし，又直角三角形の整数解に関するものなどもある．其説くところは多きに渡らず，甚だ些細なものではあるが，而(しか)も支那の『墨子』所載の数学関係の記事によって先秦時代の数学の一部分を窺い得る如く，此書の記載は印度(インド)古代の数学に就て不完全ながらに多少の知見を示めす．之に依って可なり数学の発達して居た事を見るに足りよう．其著作年代は西紀前三百年頃以後のものであろう．

印度(インド)でも支那と同じく種々の詭弁を記るしたものがある．此等は矢張り数学上の知識乃至思想と深い関係を持ち．支那では先秦時代に或る程度までは論理思想も発達したが，印度(インド)では之を因明と称して高度の発達を途げた事は，支那の遂に及ぶ所でない．此事実から見ても印度(インド)では早く既に数学が随分発達して居ても宜かったろうとも思われる．印度(インド)の因明発達の年代は或は希臘(ギリシア)で論理学が発達したのよりも以前の事である如く信ぜられたのであるが，必ずしもそうではないようである．因明と論理学には可なりに密接な類似点がある．一方から他方に伝ったのではないかと云う疑いもないではない．而(しか)も其原則に於て同一でないと論ずる人も有る．私は之に就て何等の決定的論断を敢てする事は出来ないが，併し後の数学書に於ては論理的の推論を明記して之を尊重したもの少なく，希臘(ギリシア)の数学が論理法の一点張りであったのとは，全く趣きを異にするのである．

第 2 章　印度の数学諸書

印度(インド)には数学専門の人もなく，数学専門の書物もないので，現存の諸算書は凡て暦術書中の幾章をか成すもの許りである．そう云う訳で暦術の応用上に必要な為めに数学が学修され研究もされたもので，数学の為めの数学ではなかったのであろう．既に応用が主であるから，純数学の開拓が著しく進み得ないのも言うまでもないであろう．けれども印度(インド)の天文暦術には左まで見るべきものはないが，数学には可なり注意すべきものがあって，天文暦術よりも優れたものであったと云う事である．

印度(インド)の諸算書は Siddhanta 諸書を西紀四百年頃以後のものとすれば，最後に Bhaskara の著書のあった十二世紀まで凡そ七八百年間の発達に属し，其後は衰えて見るべきものはないと云う事になっている．勿論其後にも多少の数学者があり，又数学書の著作もあって最後に西洋の暦算の学が伝わる以前に，日本の江戸時代及び支那清代の数学と時を同うして印度(インド)でも随分見るべき発達があったように説く人もあり，十二世紀に出た Bhaskara の著書を以て印度(インド)数学の最終を飾るものと考えるのは，速断であろうと思う．けれども印度(インド)近世の数学に就ては多く其資料を得る事が出来ないので，僅かに此れだけ論究し得るに過ぎない事を遺憾とする．而(しか)も数年前には其僅少の資料すらも我等は未だ之を見る事が出来なかったのである．近年に至り，印度(インド)の数学史は支那の数学史と同じく其研究着々として進みつつあるが故に，久しからずして可なり細密に知り得られる事になろう事を期待する．

Siddhanta 諸書に就きては，第六世紀に Varaha Mihira の著わした Pancha Siddhantika と云うものがあり．当時行われつつあった主要の天文書五部につきて其要を摘んで著わしたものである．其五部の一は Surya Slddhanta であって，元と紀元前四百年より以前のものではないが，後には天文書中の準拠とされたのである．他の一は Paulisa Siddhanta にして，数学に関し最も大切な記事を載せ，印度(インド)の三角法に関するものは此書に見えているのである．其算法は明らかに希臘(ギリシア)の Ptolemy から伝わったものであろうと云う事である．Ptolemy の名をなまったらしく思われる名前も記るされている．けれども Ptolemy の記載よりも三角法に於ては一歩を進めたところがあり，更に Aryabhata に至りては一層の発展を途げたのであった．

Siddhanta 諸書中には Romaka Siddhanta と称するものもあり，此書名は羅馬(ローマ)の国名を冠したものであろうと云う事である．言うまでもなく羅馬(ローマ)は暦算の学の進歩した国ではないのであるが，羅馬(ローマ)領の東方即ちシリアあたりから伝ったので，此書名が用いられたものでもあろう．

此諸書中に見えたる術語などにも希臘(ギリシア)起原と思われるものがあると云う．此諸書中に希臘(ギリシア)暦算の学が随分多大に影響していたろうとは，数学史家の等しく説くところにして，恐らく何等の疑いもないであろう．而(しか)も何程か印度(インド)固有の発達があるかを明らかにする事は，我等が深く印度(インド)の数学史専門家の研究に期待するところである．印度(インド)の医学は暦算の学とは其発達の年代も同じからず，又発達の中心地も同様でないけれども，医学に於ては希臘(ギリシア)の影響は勿論有りはしようものの，左まで大なるものでなかったらしい形迹がある．印度(インド)の学術には何うしても印度(インド)固有の分子を認めぬ訳には行かない

のであって，必ずしも希臘の影響のみで説き得べからざる事は，勿論である．

印度の数学者として知られた最古の人は Aryabhata である．彼れは西紀四七六年の生れだと云う．彼れ以前には数学に就て特に専門的に説いたものは現に存して居らぬが，彼れは専門的の説述をして居る．勿論専門の数学者ではなく，天文学者としても有名な人である事は，他の印度の諸算家と同様であるが，天文の新説に対しては正教派の人々から酷に反対を受けているのである．Aryabhata の数学上の著書，否其暦算書中の数学関係の部分に説くところは，開平開立，求積，円の算法，級数，代数的の等式，一次不定方程式等に関するものがあり，其叙述は簡潔を旨として，解説も例題もないのである．之が為めに往々解し難いものがある．此事情から見ても印度の数学は希臘のように論理尊重のものでない事が思われるのであるが，併し印度では婆羅門教や仏教の経典にしても多くは暗誦に依って之を伝承し，之を紙筆に記載する事が稀なのであり，暦算書の如きも矢張り同様であるから，題術を詩歌の形に叙述して記憶の便利にしなければならなかったのである．算法の委細までごたごたと記るす事の容易でなかった事も思い見られる．

Aryabhata は印度の純数学としては最古のものであり，後に幾多の算家が輩出したのであるが，此等諸算家は多くは此人と同じ傾向に進んだのである．而も印度の諸算家の事蹟は殆んど之を知るに由なく，唯，若干の諸算書の存するものがあり，其著者名が知られて居ると云うに過ぎない．其諸算家の中にて著名なものは Brahmagupta が五九八年の生であり，Mahavira は九世紀に出で，S'ridhara は九一九年に生れた人，Bhaskara は一一一四年誕生の人であった．

此等諸大家の中にて最も名を知られたものは，最後の Bhaskara であるが，実は Brahmagupta の方が数学史上から言うときは，ずっと大切な人物なのである．此諸学者は大体から言うと，何れも同様の事計り説いていると言っても宜い．そうして Brahmagupta の著書が最も大切な根原になっていると謂われて居る．併し凡て同一なのではなく，勿論多少の相違はある．幾何学的事項の取扱方などは其相違の最も甚だしいものであって，一例を言えば，円に内接する四辺形の事などは，Brahmagupta はちゃんと正しく論じて居たのであるが，Bhaskara の時になると次第に変化して遂に理解し得べからざるものになったと云う事である．

此等諸学者の時代には不定方程式，勾股弦の整数解法等が盛んに記るされているのが特色である．勾股弦の整数解法は前代に於て S'ulva-Sutra の中にも見えているのであるが，Kaye 氏の如きは今現われたものとは発達上の階段が欠けたものであると言っている．恐らく正しい見解ではないであろう．不定方程式に関するものは印度数学上最も重大なのであるけれども，希臘の Diophantos が之に先って幾多の研究をしているものに著しき類似があるので，希臘から伝ったのではないかと言うものもある．前には数学史専門家の中に Diophantos の学問の出所が不明である為めに却って印度あたりの影響を受けたのではなかろうかと考えたものも往々に在ったのだけれども，輓近に至りては反対に印度の方が希臘の影響を受けたものであろうと考える方が穏当らしく見られるようになった．

けれども印度の数学が希臘の影響を受けたろう事は，恐らく疑いない事実であろうが，併し其影響の程度如何の如きは甚だ疑問であり，希臘に比して相違した特色の有った事なども見遁してはならない．印度で算術代数が甚だ発達して，反対に幾何学的事項が多く進歩しなかったのは著しい事であった．我々が現に学習し使用に慣らされているところの筆算は，亜剌伯数字と云うので，亜剌伯から始まったものであるかのように思われもしようが，実際は亜剌伯起原のものではなく，印度から始まったものである．印度から亜剌伯に伝わり，亜剌伯から欧洲に伝った為めに亜剌伯数字と云うのである．其事に就ては後に稍々委しく説く事としよう．

印度の代数学も亦随分見るべきものがあった．方程式には諸根のある事や，其根には正負のものの有る事，負数の取扱方などに就ても論ぜられているのである．其論究の如きは随分見るべきものがあるけれども，今委細に之を説くの余裕なき事を悲しむ．

第 3 章　印度の暦算と医学

印度の数学は凡て暦術家の著書中に記載されて居るのであるが，而も其暦術よりも数学の方が甚だ見るべきであったとは，数学史家の多く説くところである．其暦算の学は固より印度国中の限局された同一地方でのみ行われたと云う訳でもなかろうけれども，印度の暦術は Ujjaini の子午線を標準としたものであって，Ujjaini が暦算の学の中心地であったと云う事である．此地は印度の中央部よりは西方に偏したところで，Vindya 連山を限りて西方に注ぐところの Nerbudda 河の沿岸に位置し，婆羅門教即ち後の印度教の盛えた所であり，婆羅門教徒の多く巡礼したところである．仏教の勢力が何れの時代にも此地に及んでいない事は，印度の暦算史上に見遁してならない一つの重大事である．

之に反して印度の医学は仏教を信奉した諸王侯の保護下に発達した事が著しい．阿育王が病院を建てたり，病者の救

治をしたなどは甚だ著名な事であり，病院設立の事は世界史上是を以て嚆矢とするのである．印度最大の内科の名医 Charaka は仏教に篤いカニシュカ王の朝廷に仕えた人であったと云うし，又其後に至っても，仏教と医学との関係は甚だ密接なものであった．前述の如く印度で暦算の学の発達した時代の事に就て言うならば，印度の医学は恒河の河上なる Pataliputra が中心であったと謂って宜いであろう．印度の医学は仏教の関係で異常の発達を遂げたとも見られよう．S'usruta が麻酔剤を用いて腹部切開を行うたり，整形外科術を施したりする事を説いているのは甚だ顕著な事で，東羅馬にも同様の事を行った名医はあるが，印度の方が固より先って居る．後に西洋で整形外科術が起きるのは，百数十年前からの事であるが，独創的に始まったのではなく，印度の方法に基いて開始されるのであって，其事は人文史上決して忘れてならぬ事である．種痘法の如きも亦印度が始めであろう．勿論牛痘種法ではなく，人痘種法ではあるが，英国で Jenner が牛痘種法を創める前に人痘種法は西洋に伝わり，行われていたのである．現今西洋の治療法に於て盛んに鉱物性の薬品を内用に使用するのも，亦印度から始まったものだと云う事である．鋼鉄使用なども蓋し印度が始めであろう．

印度の医学は印度の暦算特に数学と相対して甚だ著しいのであるが，暦算の学が婆羅門の関係濃厚なるに反し，医学は仏教の関係から来ているのが，非常に面白い対照である．恰も我国の江戸時代に於て数学は江戸を中心として発達したが，医学乃至実験的の学問は京都を中心とし西方から起きたのと，極めて好個の類似を見る．此事実は印度の文化を考うる上に甚だ注意すべきであろう．如何にして斯の如き顕著な事象が現われたかを適当に説明する事が出来るならば，文化史の闡明上に大きな功績を建て得られる筈である．

或る西洋の学者の如きは，暦算の学は中心が西方に在るので，其地方は羅馬領との交通も多く，従て西方の影響も亦多かったのであるが，医学の中心は遠く東方に在るが為めに羅馬領の影響が及び難かったから，右云うような事になったのであろうとさえ説いたものもあるが，恐らく皮相の見解に過ぎまい．婆羅門教と仏教との暦算並に医術に対する態度並に保護の厚薄如何に依って，結果の上に著しい差違が顕われ来ったものであろうかと思う．仏教では暦算の事には至って冷淡であったらしく思われる．

第 4 章　印度の数学と支那との関係

印度の数学の発達は上述の如きものであるが，支那の古算書中に印度の数学に類似したものが幾らもあり，此等の類似は支那で古く印度で新らしいのであるから，印度から支那へ伝ったものであろうと説く事は固より困難である．支那の古算書は其実左まで古いものでなく，後の竄入があって，此等の類似は凡て後代の竄入だと言うならば，固よりそれまでである．而も必ずしも後の竄入とのみ見られぬであろう．是に於て印度の数学は上述の如く西紀四百年頃から発達を始めたのではなく，更に古くから成立して居たのであり，其以前既に支那の数学上に影響を及ぼした事があるではなかろうかとも考えられない事はない．支那に暦書『舎頭諫経』の漢訳が存し，Siddhanta の推定年代よりも古い時代に支那に伝っている事などは充分に攻究を要する．支那所伝の印度の学術関係事項の闡明は，必ず印度の学術史上に幾多の光明を齎らすに相違ないのである．我等は此意味に於ても此問題の研究に指を染めたいと思うが，今のところ未だ多く成果がないので，多く論ずる事が出来ない．此れは他日の研究に護る．誠に面白い問題である事は之を注意して置く．

然るに又支那と印度との交通は甚だ多いのであるから，支那の数学が多少は印度へ伝ったものがないともしないであろう．其事は私が嘗て記るしたところであった．然るに印度の数学史家 Kaye 氏は私の此の見解を引用し，更に私の旧著に記載した支那数学上の幾多の事項を印度の数学と比較して，印度の数学上にも幾らも支那の影響が認められると論ずるに至った．私の所説からして其見解の印度数学史上にまで進展さるるに至った事は，私は頗る栄誉に感ずるけれども，私は不幸にして Kaye 君の結論に賛同する事が出来ない．印度の学問芸術などが支那へ伝ったものは甚だ多いであろうが，之に反して支那から印度へ伝ったものは幾らも知られていないのであり，又甚だ多いとは言われぬであろう．従て数学の如き特殊の学問上に於て果して何ほどか支那から印度へ伝ったろうかは，誠に疑問と謂わなければならぬ．

今試みに両国の数学中に於ける類似事項の若干を略記して見よう．

支那の『九章算術』には勾股弦に関する問題の中で，高さ十尺の竹が上部から折れて垂れ，根幹より三尺の所にて地に着いているが，其折目の高さ幾何尺かを問うものがあり，此問題は印度では六世紀以後の諸書が何れも記載して居るのである．二人の旅行者が勾股弦の弦上にて出会うと云う問題は Mahavira の書中に『九章」と同じ形式で出ている．

『九章』に円弧を表わす公式は Mahavira も記るしているし，『九章』と同じく単位分数をも使用して居る．『九章』中の球の体積で直径を表わす術は，Aryabhata の説くところと一致する．円錐の体積を其の周にて表わせるものは，印度の各算書に見える．角台の立積の公式も亦 Brahmagupta の書中に見るところと同一である．平地に穀物を積んだもの

を円錐形と見て升目と算出する事も亦両国の算書に見える．盈朒の算法も亦同様である．

『孫子算経』に或数を三と五と七とにて割りて得る所の剰余を知りて其数を問うところの問題があるのは，印度では七世紀及び九世紀の諸書に出ている．

『海島算経』中の海島測量の問題は Aryabhata の書中にも之を記るす．

『五曹算経』に四辺形の面積を記るした術は誤まったものであるが，印度では Brahmagupta 及び Mahavira の書中に同じ誤った術が出ている．

『張邱建算経』の如きは彼の印度の諸算書に似た事項を多く記るしている．此等後代の印度諸算書は印度前代の諸算書よりも却って『張邱建算経』に多くの類似を持つと，Kaye 君は言って居る．

此等の類似は甚だ著しいものがある．又円の算法に於ても稍々類似がないでもない．而も支那の『九章算術』の如きは印度の諸算書よりも古くして且つ一層整うたものであり，印度で見出されない算法が支那に存するものもあるし，反対に印度で説述されて支那では記載のないもののある事，及び支那の算木の算法と印度の筆算法との甚だ趣きを異にした事なども，充分に考慮し置く事を要するであろう．

此類似点の研究に就ては将来多く研究を進めなければならぬ事を予告して置くが，私は今のところ未だ Kaye 君の如き結論を立てるには当らぬと思う．反対に支那の数学が甚だ印度の影響を受けたろう事も尚多く考慮の余地があると考えるのである．

第 5 章　印度の数学と希臘との関係

印度の西紀四百年頃以後に於ける暦算の学が希臘の影響を受けていようとは，種々の証迹によりて明らかである．之に就て何等疑いを挾むの余地はないのであるが，而も其影響の程度如何に至りては甚だ問題たらざるを得ぬ．Kaye 君の如きは一方に支那の影響をも多大に受けたと共に，又希臘の影響も亦甚大であって，印度数学の殆んど全部が外来の知識に依りて成立し，印度の数学に関する能力は甚だ低劣なものであると言って居る．Kaye 君は多年来印度数学史を専門に研究して居る人であり，其研究は印度の古算書を直接に調査しているのであるから，西洋の学者は其所説の為めに頗る動かさるる所があったらしい．けれども果して賛同すべきであるかは，疑わしく思われた．其後に至り印度の数学史家の中に在りても果して反対説を主張するものも往々に現われる事となった．カルカッタ大学の Datta 氏の如きは其一人であり，私は寧ろ此人の所説から学ぶ所が多いように思う．Kaye 氏の見解は恰も支那の数学に就て白耳義人 Van Hée 氏が何等天賦の能力ある事を認められないと論じて居るのと同じく，軽々しく信ずる事が出来ない．Kaye 君の議論は印度の幾何学が立派なものでない事が，一つの論拠になっている．之に就ての見解を説いて見よう．

Kaye 君の見解に依れば，印度の幾何学には第一に定義と云うものがない．第二に角を取扱う事をして居らぬ．第三に平行線及び比例の事を論じたものがない．第四に旧来存するところの誤謬が多く後までも伝えられている．第五には幾何学的の知識は初めよりも後に至るに従い次第に減退したかの憾みがある．印度の幾何学は斯の如く秩序が立たず，論理的でないものであり，希臘の幾何学が理論的に井然と構成されているのとは同日の談でない．一方には立派な三角法が成立せるかと思えば，一方には角に関しての単純な定理すらも論ぜられて居ないのである．算術の法則にしても間違ったものもあれば，又之と共に正しいものも混在するのであり，乱雑なものである．四辺形の面積を対辺の和半の相乗積に等しとする誤れる法則は，印度にも在るが，又不思議にも支那の『五曹算経』等にも存し，埃及及び羅馬等にも在ったのである．此種の誤れるものが，印度の算書中には少なくない．Brahmagupta の算書中に於ける幾何学関係の事項は，希臘数学末期の頽廃した数学を観るやの感がある．印度の暦算の学が出現した時代の少し前に於ける希臘の幾何学を按ずるに，其以前の厳密な数学が行われた時代とは違い，随分誤ったものもあるし，異様に変形されたものになっていたのである．印度の幾何学は此時代に於ける希臘の影響を受けたので，あんな変なものになったのであろう．

こう云う風に見るのが，Kaye 君の主張である．此は印度数学上に著しい不定解析術の如きも，希臘の Diophantos のものなど伝えられたのであろうとするのである．Diophantos の如き数学は希臘では如何にして発生したかが不明の点多き為めに，印度で後に同様の数学が発達したからして印度のものが伝わって Diophantos の数学が成立したのであろうと説くものも間々あったけれども，其以前の時代に印度で果して何れだけの発達があったかは問題なのであるから，そう見るは固より宜しくない．それよりも希臘のものが印度へ伝ったのではなかろうかと見た方が，時代の前後から考えても，一層妥当であろう．

けれども之に就ては一つ考うべき事がある．即ち S'ulva-Sutra の書中にも勾股弦の整数解など不定解析術に関する算

法が出ているのであって，Kaye 君は其算法と後の時代に於ける不定解析術の発達との間に何等の従属関係もないと見るのである．此点は甚だ問題であろうと思う，即ち同一の思想傾向に属する問題乃至算法は，右云う両時代に見えているのであって，後の時代のものは或は希臘の影響か若くは伝来であったとしても，それ等のものが受入れられるに就ては印度数学の傾向がそう云う風の所に向いているからであったろうと見なければなるまいと思う．且つ印度で発達した不定解析術は全部悉く Diophantos の説述したものに類するもののみであると云う訳でない事も亦認めて置かなければならぬ．外国の影響と云う事は余りに過大視して考えてはならない．

Kaye 氏は印度数学の最も発達した時代に於ける幾何学的事項は，希臘幾何学の堕落した時代のものが伝った結果であろうと云う風に説いているが，此れだけで説明充分なりと考える事は出来ぬ．印度の数学が大体に於て算術的代数的であり，幾何学的でなかったのが特色であるから，其為めに代数関係のものに比して幾何学の方が著しく劣っているのだと云う事も考えなければならない．此種の論拠からして外国の影響につき，余りに甚だしく決定的の結論を立てる事は恐らく不可能であろうと思う．氏の議論の如きは．印度の数学が支那の影響を多大に受けているだろうと説いている事の，余り信を措くに足らざると同じく，希臘起原説に就てもまだ再考の余地あるべき事を思う．

我等は斯の如く外国の関係如何を最重要の問題として議論するよりも，印度の数学には幾何学的に劣り，而も算術代数的に優れたものであったと云う特色を有して，希臘の数学が幾何学の発達に著しかったものに比し甚だしく異同ある事を指摘するのが．最も大切な点であろうと思う．

第 6 章　印度の円周率

円周率の進歩は即ち数学全体の進歩を卜するに足るものあり，且つ日本並に支那で如何に進歩したかは前既に之を説いたので，茲に印度の数学上で円周率の算法が如何に進んだかを見るのも，一興であろう．此問題に就ては幸に Datta 氏の研究ありて拠るべきであるから，之を抄録して記載する事としよう．

S'ulva-sutra に見えたる円周率は余り正しいものでない．

Aryabhata は $\pi = \dfrac{62832}{20000}$ とした，之を約すときは，$\pi = \dfrac{3927}{1250}$ となるのであるが，約す事をして居らぬ．恐らく之を得た算法の結果を其侭に挙げたからであろう．後の算家は約した形で記るしている．Lalla は自ら Aryabhata の門人と言っているが，此人も亦此率を用い，A 氏の率なる事を記るしている．此率は七七二年に印度の学者が Bagdad に行ったときに，之を亜剌伯に伝えた．亜剌伯の学者中には A 氏の率の形で記るし，印度の率なりと言って居るものもある．Bhaskara に至りては此率の約した形のものを用い，又 $\pi = \dfrac{22}{7}$ をも用いた．

円周率は十の平方根に等しとするものは，Brahmagupta が用いている．而も B 氏が Aryabhata の精密な率を用いていないのは，不思議に思われる．此率は B 氏から始まるのではなく，Siddhanta 諸書中に一般に用うるところで，其時代には広く行われたものらしい．固より Aryabhata の精率よりも以前のものである．十一世紀頃までも行われ，Sridhara 及び Mahavira 等の書中にも見え，十世紀末に出た少 Aryabhata も用いている．けれども其以後に至りては所見がない．

Bhaskara は此率が広く行われたのは，其形式の簡単な為めであったろうと言っている．一六〇〇年頃の註解家 Nrisimha 及び一六二五年頃の註解家 Rarganatha の所説に拠れば，十は円周率の平方に最も近き整数であり，且つ差違も小さいのであるから，用いられたものであろうと云う．

$\pi = \dfrac{22}{7}$ の率は印度では少 Aryabhata(九五〇年頃) の書中に見えたのが初見である．Al-Biruni の説に拠れば Brahmagupta が使っていると云う．又 B 氏が此率を避けて十の平方根を採った理由をも述べている．けれども B 氏の現存本には此等の事は記載がない．Al-Biruni より以前に B 氏の書の註を作った Prithudaka Swami も亦何等論究して居らぬ．そうして Al-Biruni は別に B 氏が径周の率を $12959 : 40980$ としたものもあると言っているし，此率は約 $1 : \sqrt{10}$ に当るのであるから，前記の所説は蓋し Al-Biruni 自身の見解であろう．百余年前に印度数学史を研究した功労者 Colebrcoke は $\pi = \dfrac{22}{7}$ の率が B 氏の書中に見えぬので．之を老 Aryabhata から始まったものであろうと論じたけれども，固より謬って居る．Aryabhata は前述の率の外には用いて居らぬ．事情此の如きものあるに拘らず，Kaye は Brahmagupta が $\pi = \dfrac{22}{7}$ の率を用いたものとしているのは宜しくない．此率は希臘では Archimedes が西紀前二二五年の頃に之を得て，其後普通に行われていたに拘らず，印度では十世紀の書物に初めて見え，一歩を譲るも八世紀以前のものに見えないのであって，此事実は希臘の影響だと見る見解を裏切るものであると，Datta 氏は説いて居る．

又印度には $\pi = \dfrac{21600}{6876} = 3.14136\cdots$ の率もある．此率は Aryabhata が記るしているのみで，他に所見がない．けれども円周二一六〇〇としたものは Bhattotpala(九六六年) もやっている事であり，少 A 氏は其径率を整数に改めたもの

に過ぎない．此周の数を用うる所以のものは，蓋し $360° \times 60' = 21600'$ 即ち円周を度数で表わし，之を分の数に改めたものに相当するからであろう．半径三四三八とする事は老 Aryabhata もやった事で，正弦表を作る事に関して用いられているのである．

地球の周径の数を挙げたものも印度（インド）の暦書中には幾らも見られるのであるが，其諸数から来るところの円周率を見るに，其諸暦書の作者が円周率として記るしているものとは，何れも異同がある．是れ誠に驚くべきであろう．従て数学史家は多く印度（インド）の学者の矛盾多き事を非難するのである．

けれども地周の測定は直接に三角法に依って之を求めるものであった．其事は印度（インド）でも其他でも現今行われているものと原則に於て異なるところはない．初めて子午線の一定の弧長を定め，此れから周の長さを決定するのである．既に地周を定めた上で，既知の円周率を用いて地径を算出する．此外に地径を直接に求める仕方はない．故に地球の大さを説くものは，地径よりも地周の方が作者の実際の所見を示めしているものと見るべきである．依て地周の値から作者の使用した円周率を用いて地径の値を出して見ると，実際此人々の記るしている値と一致する結果を得るのである．一二の場合には一致せぬものもあるが，此等は前代から知られた地理の値を用いそれから地周を算出したものと見れば説明が出来る．斯くして，数学史諸家の矛盾ありとしての非難は当らぬ事になるのである．

又 Kaye の如きは，Aryabhata の精密な円周率は A 氏自身も之を応用していないし，後の人も亦使用していないように言っているけれども．是れ全く誤りにして，A 氏自身地径の算法に応用し居るのみならず，A 氏以後の諸算家も亦之を応用した実例ある事を示めし得るのである．A 氏は其書中に四九九年の作と言っているから，此年代の頃には右云う円周率は知られていた事となる．

印度（インド）で後の時代に円周率の事を記るしたものには，一四二六年作の Tantra-samuccaya に $\pi = \dfrac{22}{7}$ 及び $\dfrac{355}{113}$ なる値を応用したものがある．此書は Narayan の作にして，勿論数学書ではない．密教の古文献に見えたる儀礼祭事其他の事に就て編纂したものであると云う，故に右の円周率も亦著者自身の創意に非ずして，古書から探ったものであろうと思われる．而（しか）も何人の創意であるかは，今之を知る事が出来ない．右の円周率は支那では祖沖之が五世紀後半に得たものであるが，他国に於ては和蘭（オランダ）で再び其率を得るまで更に知られていなかったものである．而（しか）も今にして印度（インド）に存する事の知られたのは．甚だ面白い．但し印度（インド）では果して祖沖之と同時代まで遡りて考え得られるかは，まだ甚だ問題と言わざるを得ぬ．

一六〇八年作の Tantra-samgraha には

$$\pi = \frac{355}{113},\ 及び\frac{104348}{33215}(= 3.14159265391\cdots)$$

なる値が記るされ，前者は精密であるが，後者は更に精密だと附記されている．

又一七三三年作の Karana-paddhati には

$$\pi = 3.1415926536$$

の値が見え，一八三二年作の Sadratna-mala には

$$\pi = 3.14159265358979324$$

の値が見える．

印度（インド）の近世には右の如き円周率が見えているのみならず，又円周率を表わす所の無限級数も記るされているのである．前記の Tantra-samgraha には

$$\pi = 4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \cdots \pm \frac{p/2}{p^2+1}\right)$$

なる公式が見える．但し p は最後の分母より一を減じたものである．此級数は収斂遅きゆえ，最後の分母へ一を加えたものを q として $\pm\dfrac{q^2/4+1}{(q^2+4+1)q/2}$ を加減する事にしていると云う．此最後の項を除けるもは，Karana paddhati にも出ている．且つ欧洲では最後の項のないものが，一六七三年に Leibniz の得るところであり，一六八二年には De Lagny も之を得たのである．

此他にも尚二三の級数が見える．今之に就て多く説く事は出来ないけれども，上述の如く欧洲に先って存するのであって，印度（インド）近世の数学に関する一斑は此事実から推測が出来よう．然らば支那の祖沖之の周径率と同じものが印度（インド）に在ると云うものも，恐らく余り古いものでなく，近世に現われた数学活動上に於て世に出たものであるかも知れない．そうして

印度近世の数学に就て我等の知る所は此種の僅少な事項あるのみに過ぎないけれども，而も円に就て此種の研究創意のある程であれば，他の方面も相当に開拓されていたろうとは．容易に想像し得られよう．此時代には Jai Singh の如き有力な諸侯にして星暦の学に通じた人もあったのである．印度の数学史家は Bhaskara までの時代の数学を闡明するに是れ急にして，近世の事を説いたものの殆んど見聞に触れざるは，誠に遺憾此上なしと謂いたい．印度は長く回教の支配下にあったし，回教の諸君主中には深く学問芸術を奨励したものもあったもので，印度に於ける回教治下の数学の状態並に変遷，それから回教の勢力が衰退して再び印度で独立に数学の研究されるようになった有様，之を後にしては西洋の数学が伝来した事情なども，我等は之を知りたい事を願うのである．此等の事が明らかにされて．其上で始めて印度古来の数学史の全般が正当に描写し得られるのである．十七世紀初葉に於て既に無限展開式の創意されていた事などから押しても，印度の数学は全然無力なりと謂う事は出来まい．Kaye 君が印度数学史の専門家として．印度人は数学上の能力なしと論ずるものの，未だ容易に首肯し得べからざるは，当然であろう．Kaye 君の所論に就き Datta 君は議論甚だ正確を欠くとして非難している．印度の数学に就ては将来更に一歩を進めて論じ得るの機会ある事を望む．

第 7 章　筆算の起原

今日西洋で行わるる所の算術は凡て筆算に依る．其筆算は亜剌伯数字を使用するのである．亜剌伯数字と云うから，亜剌伯から始まったものであろうと思われないでもない．普通人は兎角そう思い勝ちである．けれども亜剌伯数字と云うのは亜剌伯起原のものだからと云うのではなく，西洋へ伝ったのが亜剌伯を通じての事であったから．之を亜剌伯数字と言ったのに過ぎない．而も其頃には単に亜剌伯数字と云うのみに止まらず，又別に印度数字と称する事もあった．或は亜剌伯数字と云い或は印度数字と云い，二様に呼ばれていたのである．此二つの名称は随分其間に生存競争があったもので，後には次第に印度数字の名称が棄たれ，亜剌伯数字とのみ称せられる事になった．つまり亜剌伯数字と云う方が生存競争に勝ったのである．それと云うのは．亜剌伯の方が西洋との関係が近い．亜剌伯の文化には直接に接触し，亜剌伯の学問は盛んに伝わり，亜剌伯の書物も盛んに翻訳されたもので，亜剌伯に対しては強い感じがあるが，印度文化との接触は甚だ多からず，又亜剌伯を通じての知識に過ぎないのであるから，印度と云う感じは至って朦朧たるものであったろう．此故に数字にしても印度数字と云うよりか，亜剌伯数字と云う方がよく通じたのである．此れが聊も亜剌伯数字と云う名称の普ねく行われるようになった理由なのである．其以上に深い意味はない．

我日本でも西洋の筆算法を伝えて之を学んで居るので，西洋で言う通りに亜剌伯数字と云うのであって．是れ亦其れだけの事に過ぎぬ．

既に亜剌伯数字なる名称の示めす如く，亜剌伯でも此数字が行われ，之を使用しての筆算が用いられていた事は言うまでもない．而も其数字も筆算法も凡て印度から伝えられたのである．支那にも固より此種の算法はなく，希臘でも同様であった．ただ印度でだけ此種のものが行われ始めたのであって，亜剌伯の学問は一方印度の影響を多大に受けたので．印度の筆算法も伝わりて普ねく行われる事になったのである．印度で筆算を行うには，盤上に赤色の細粉を敷きて其上に棒切れのようなもので字を書き，計算をしたものだと云う事である．粉を敷いた上に書くのであるから，書いたり消したりするのに便利であり，筆算法が発達する上に都合が好かったらしい．印度でも始めは或種の計算器が有ったらしいのであるが，筆算法が発達するに及んで，遂に筆算が主として行われるようになったのである．

筆算の長所は九つの数字と零の記号とを用い，之を並べて書く事によって如何なる数でも表わし得る事である．其事を位置の原則に依りて数を表わすと云うのである．零の記号と位置の原則とが，即ち印度の創意であって，其為めに今日現行の筆算法が発生し長く行われ来ったのである．此二つの事は至って便利であり，甚だ重大な事に属する．希臘人の天才を以てしても斯の如き創意は出来なかった．故に数学史上極めて重大視されるのも当然である．唯之に就て注意を要する事は，亜米利加中央部の Maya 民族の間に古くから行われていた算法が同様な原則を使用したものであったと云う事である．無論印度との交通の有ろう筈もなく，全然独立に創意されたものに相違ないのであるが，不思議な暗合も有れば有るものである．類似の事項が両所に有るからと謂って，必ずしも一方から他に伝ったものと見るべからざる一つの活きた実例であろう．

亜剌伯数字を用いての筆算法は斯くして印度から起きて，亜剌伯に伝わり，それから西洋に拡まったのであるが，其数字の字形の如きは勿論次第に変遷したのである．其変遷の由来を調査するが如きも面白い事であり，之を試みたものもある．けれども此等の事の今凡て之を省略する．

亜剌伯数字の印度起原説は従来数学史家の間に一般に行われ，全く確定説であった．然るに近来に至り実は印度で起き

たものでなく，亜剌伯から起きたものののように説く人もある．又亜剌伯で印度の算術と称したものの筆算ではなく一種の盤を用いたものだと云う人もある．此等の諸説は固より傾聴の値があるけれども，未だ俄かに賛同する事が出来ない．此等は如何なる程度まで正しいものであるか，又全然異を好むに過ぎないものであるかも，我等は未だ判断する事が出来ぬ．故に此種の見解も存する事を示めすに止め，聴従する事を避ける．勿論之を無視すべしと言うのではないから，学者の誤解なき事を望む．

亜剌伯数字に表われたる原則につきて思い起すのは，支那の算木の算法である．算木は勿論筆算ではないけれども，算木を並べた位置に依りて桁数を表わす事は筆算の書き方と全く同じ原則を用いたものと謂って宜い．支那で算木が盛んに行われた事を思えば，印度の筆算に於ける紀数法の原則は支那では器械的にではあるが，遥かに以前から普ねく用いられたものであった事が注意を要する．印度でも筆算法の発達に先だって或種の算器が行われたと云うから，其算器の如何なるものであったかを知るときは，印度でも或は算器上の紀数法から筆算式の紀数法が起きたものであるかも知れない．此等の事は今之を明らかにせぬが，蓋し必ず闡明しなければならぬのである．

印度の筆算法は支那へも伝ったもので，仏教関係の方から言えば或は色々と用いられたかも知れないけれども，此辺の事は未だ何等の明らかにされたものがない．我等の知るところは即ち唐の開元中に『九執暦』の漢訳に際し，印度の筆算法も亦伝えられた一事である．其事は『唐書』の記事にも見え，又『開元占経』にも記るされている．之によれば『九執暦』の暦法では算法を行うに算木を用いずして字を以て書き，其字は九個の数字より成り，数字の欠けたる部分には一点を安んずと云うのである．即ち零の記号としては未だ丸形を使用せずして一点を打つ事をしたものであった．数字の字形も元来記載されていたのであるが，『開元占経』の現存本には既に字形を失いて見る事が出来ない．『九執暦』は開元の初めの漢訳にして，西紀七一〇年代の事に属する．此時代には印度でも未だ丸形の零の記号の行われない以前の事であり，支那の資料に依りて其事情並に年代の確かめられ得るは，誠に面白い．そうして此年代は未だ亜剌伯の数学が発達する以前の事であり，『九執暦』関係の記事は即ち印度で筆算の発達した事を立証すべき一つの有力な論拠とされ得べきものであろうと思う．数字並に筆算の印度起原説を排せんとする論者の中に，未だ此の如き有力なる支那の史料を考慮したもののないのは，甚だ遺憾である．

支那では計算器として甚だ発達した算木のあった為めに，印度の筆算は伝わりながら，字で書く珍らしいものだと云う記事を正史の上に残したと云うに止まり，実際計算上に用いられる事とはならずに終ったのである．

印度の数字並に其紀数法は印度で用いられていたのは言うまでもないが，印度以前にもバビロンで多少之に類したものの用いられた形迹があり．バビロンの六十分法は印度へも伝っているのであるから，或は印度の紀数法はバビロンの影響を受けているものであろう．其事は将来の研究に俟ちて決定しなければならぬのであるが，兎も角十進法に関して．筆算式の紀数法を完成したのは印度であったと謂って宜かろう．

印度で行われた数字は種々のものがあったが，大別して三種とする．其一は西紀前三世紀の頃から用いられ，これが現用の数字に発達したものの起原だと云う事である．

亜剌伯で印度の数字並に印度の算術が喜んで用いられたのは，希臘及び波斯等から伝った計算法に比して優秀なるものがあったからであろう．亜剌伯では印度算法と云う如き名称が屡々記るされている．

西洋で筆算が行われるようになるのは，後の事であるが，其前に Abacus と称して一種の算盤が用いられたのである．西洋の算盤は希臘，羅馬のものから系統を引いているのであろうが，支那や日本の算盤に比すると便利でない．故に亜剌伯を経て印度の筆算法が伝えらるるに及んで之を採用し，普及するに好都合であったとも言えよう．而も算盤の棄たれて筆算法が普ねく用いられるまでには幾多の年月を経過したのである．筆算法が一般に使用されるようになったのは，国々によって異同はあるが，十六七世紀頃又は更に其以後になってからの事であり，ロシアなどでは，我国の最上徳内が蝦夷で露人に会った頃までも露人は一種の算盤を携えていたもので，徳内は日本の算盤よりも便利でないと言っている．徳内の蝦夷旅行は近々百余年前の事に過ぎない．其頃までもロシアでは算盤が行われていたのである．

西洋では筆算法が全然算盤を駆逐するまでには幾多の年月を要したけれども，而も徐々に之を駆逐し尽くして，今では筆算法のみ行われ，印度の算法の優秀を立証しているのである．遠く極東の我国へまでも．西洋の手を経て印度の筆算法が伝えられ，極めて普通のものとなった．唯，我国では算盤が巧みに用いられて甚だ便利である為めに，日用の計算に於ては算盤が今も尚用いられているのである．

第４編　亜剌伯及び回教国の数学

第１章　亜剌伯の学術

亜剌伯は元と蒙昧な民族であり，別に学問の開けて居たところでも何でもない．又古くから一国を成したものでもなく，政治上の勢力があったのでもない．然るにササン朝波斯が東羅馬と戦いて疲弊せるに乗じて起り，新興宗教の威力を以て同民族を糾合し，遂に旧国波斯を破りて其国を奪い，ここに立国の基礎を成したのである．政治上から言えば亜剌伯の国であるが，亜剌伯は単なる一国家ではない．回教と云う宗教の弘布が其主勢力であって，宗教上の回教と政治上の亜剌伯国とが相俟って一つの大きな活動団体を作り，新たに世界史上に出現したのである．其宗教の弘布の極めて急速であった事も恐らく他に類例のないところであり，斯の如き宗教的国家の忽然として組織され発達した事も亦史上の奇現象であった．而も回教の成立並に其国家の組織からして百余年を経た後には，学問芸術の保護奨励に是れ急なるものが有り，亜剌伯の文化は一時に万丈の気焔を挙げ，暦算理化の学等に至るまで一世を風靡して，此等諸科学の開拓支持は全く亜剌伯回教国の掌中に収められたのである，世界の数学史を論ずるもの，亜剌伯を度外に措いては遂に発達進歩の連鎖を解する事が出来ない．亜剌伯の学術史上に於ける地歩は誠に重大である．

伝え言う，亜剌伯人の埃及を征してアレクサンドリアを取るや，古来有名であった同地の大文庫を焼棄したのであった．此説話は甚だ有名なものであるけれども，実は事実ではあるまい．此大文庫は其以前に於て滅却していたらしいと云う事であった．亜剌伯人は文庫を焼くほど無知蒙昧なものであったのに，其後久しからずして盛んに古書を探求して研究調査するに至ったのは，不思議だと考えられたのであるが，大文庫の焼却如何は事実でないまでも，斯く見られる事には勿論深い理由がある．亜剌伯の学術の勃興は余りに急速であったのである．

亜剌伯で急速に数学なり其他の学問なりが勃興するのは，国君たる教主の篤い保護があった為めでもあるが，又多く希臘の古書を求めて之を翻訳学修し，之に加うるに印度の学術を以てし，両者を融会したからの事であった．亜剌伯の学術は正しく古い系統の学問を受けて数百年間の発展を実現し，そうして之を欧洲に伝えたのが其偉大な功績であった．亜剌伯の学術特に数学に於ては，希臘，印度の両系統を融会した事に大きな意義がある．希臘では論理の厳重な幾何学が尊ばれたのであるが，印度では算術代数が重きを成した．亜剌伯では其両者を併せ学んだ．初めは両派の間に対抗もあったらしい．けれども結局之を融会したのであって，そこに亜剌伯の数学の真の意義がある．そうして亜剌伯から之を欧洲に伝えたので，欧洲近世の数学は両方の長所を併せ有するものになったとも見られよう．

亜剌伯の数学乃至其他の諸科学に就ても，近来の欧米に於ける数学史家乃至科学史家は初めは一般に余り大なる価値あるものではないかのように見たのであった．是れ一は未だ研究の多く進まなかったので，真価の存するところを看定める事が出来なかった為めもあろうが，又一には欧洲人と云うものは異宗教，異民族を見る事頗る慊焉の情を以てし，欧洲人に非ず，白人に非ざれば人に非ずと云う風に考えたのである．耶蘇教外に文明はないと云うようにも見た．異民族，異宗教の人を対等の人類として見るようになったのは僅々百余年来の事に過ぎない．而も此れすら識者の間での事に限り，一般の欧洲人の見解が如何なるものであるかは，其実情を知らば誠に驚くべきである．欧洲人のは斯の如き精神を以て亜剌伯の学術を見んとしたので，力めて之を低級視せんとしたかの憾みすらある．けれども彼等欧洲人は利害感情を離れた真摯な研究に精進するが故に，亜剌伯の数学史上，科学史上に於ける真価値は次第に認識されざらんとするも得べからず，漸次に其声価を高め来って，今では之を疑うものはないのである．

今，欧米現代の数学なり其他の諸科学なりに就き，其発達の歴史を考うるに，其正系統に於ては希臘から淵源している事は言うまでもないのであるが，而も希臘から直接に之を伝えたのではない．一旦亜剌伯の手を経て印度の学術と融会し，更に一段の進展を遂げて然る後に欧洲に伝えたもので，其段階を抜きにしては欧洲で現代の数学及び他の諸科学の発達進歩した由来を明らかに了解する事は出来ないのである．欧洲近代の理化学の如きは実験を重要視するのが一つの大きな特色であるが，其精神は単に希臘の学風を伝えただけで成立ったと見る事は出来ない．亜剌伯の学風が甚だ実験を重んずるものであった事が，非常に好感化を及ぼして居るのである．又数学に於ては希臘風の幾何学なり又論理尊重の精紳を伝うると共に，印度風の算術代数の学が亜剌伯の同化改造を経て欧洲に伝えられ，今日の解析的数学の根源を成すに至った事も極めて重大な歴史の事象である．亜剌伯は何うしても古代と近世との中間に立ちて其連鎖を成すところの大きな役目を果たしたものと見なければならぬ．上来述べ来った印度や支那，日本の如きは，学術史上から言うときは，まあ世界史上の大舞台に立ったと云うよりも，旁系に属するのであるが，亜剌伯に至っては，そう云う旁系の地位に在るものではない．希臘から亜剌伯，それから近代の欧洲と云う三つの大きな段階を成したる其第二段の優勝な地歩を占めて居

るのである．亜剌伯の学術が学術史上決して軽々に看過し難き所以は全く此に在るのである．我等は文化史的に此間の消息を考うるとき，無限の興味の湧いて尽きざる事を感ずる．

第 2 章　亜剌伯学術の勃興までの事情

亜剌伯の数学なり其他の学術の興起したのは，印度の学問も入り来っているけれども，主として希臘に負う所が多いのである．亜剌伯興隆の際には希臘の学問は既に地に落ちている．何うして古代の希臘の学問を新たに講究し得たかは甚だ問題であろう．此点は従来科学史上に於て多く閑却されていたのであるが，実は其道程を辿る事が出来る．今之に就て少し計り説いて見よう．

第一に考うべきは波斯である．波斯の歴史は三段となる．第一は古代の波斯即ち希臘と対抗した波斯であり，第二はパルチアにして，第三は其後に代って起きたササン朝波斯である．バルチアもササン朝も共に西南亜細亜に大勢力を張りて東羅馬と対抗したものである．亜剌伯は今やササン朝波斯を滅ぼして之に代ったものであり，其文化を継承したとも見る事が出来る．従って波斯の学問が其侭に存続して，亜剌伯時代になって著しく勃興するようになったのだと見ても宜い．

けれども波斯の学術に就ては古昔以来余り多くの事が知られて居らぬ事を遺憾とする．回教主の都城 Bagdad の建設に際し，波斯及び埃及の学者が測量の事に当っているから，数学に就ても波斯に相当の伝承があったろう事は容易に想像せられる．而も亜剌伯で諸般の学術に就き古書を翻訳するに当って，新旧波斯書の翻訳されたものは殆んど無いのであって，此事情から見るときは波斯，少くもササン朝波斯には多く数学乃至諸科学に就て見るべき文献がなかったものであろうかと思われる．此事は極めて有力な証拠もある．故に亜剌伯の数学はササン朝の学問を継承したものではあろうけれど，ササン朝の数学は左まで見るべき程のものでなかったろうと見て宜い．

然らば何処に主要な道程を求むべきであろうか．シリアの地は其一つである．ネストル派などの基督教が存続して其教父には医学や暦算書に通じたもののあった事が又其一つである．東羅馬帝国は余程衰えては居るけれども，古来引続いて希臘文化を継承したものであって，国都ビザンツなどには希臘の数学や学問が不充分ながらに余命を保ちつつあった事が又見遁がされない．此等は互に相関連して希臘の数学等を亜剌伯に伝うべき道程を成したのである．

シリアでは希臘の学問がずっと後までも遵奉されていたもので，勿論多く偉大な学者が出たと云う訳ではないけれども，古書のシリア語訳などのされていた事もあり，希臘古書を亜剌伯語に翻訳するに当りてはシリアの学者が貢献したところも多く，又シリア語訳から重訳したり，之を参照したりした事などもあった．基督教の人々が医学上や其他に於て亜剌伯学術の興起した頃に預って大に力のあった事は甚だ著しい．此等人々には東羅馬を追われた希臘の学者の関係なども存したのである．亜剌伯では東羅馬に使を遣わして希臘の古書を所望した事などもある．ずっと後年に至り，土耳古人の為めに東羅馬が攻陥されたとき，希臘の学者が多く古書を携えて西欧に奔り，之が為めに文芸復興時代の古書研究上に多大の便宜を与えた事もあるのであるから，其五六百年前に於て亜剌伯に対し東羅馬の関係が多大に在り得た事も勿論であろう．

希臘の古から亜剌伯へ多く古書を伝え，其学問を継承した歴史は随分興味あるところであるが，従来余り学術史家の顧みるもののなかった為めに，不明の点多きは遺憾であるけれども，近年着々として其研究を進め，余程明らかになったのである．

第 3 章　亜剌伯の数学発達の大要

亜剌伯の数学なり其他の学問が発達するのは，Al-Mansur 及び Harun Al-Rashid が教主として之を保護奨励した時に始まる．Al-Mansur は国都 Bagdad を建設した人で，其建設は七六二——三年の事であった．此時其測量に当ったのが波斯人 Al-Naubakht と埃及のユダヤ人 Mashallah とであった．亜剌伯で数学に関する著しい事件のあったのはこれが初めであろう．波斯の Jundishapur に在ったキリスト教徒の病院から医員の聘せられたのは七六五——六年の事で，此頃から翻訳事業が盛んに企てられるのであるから，国都建設の工事や医薬の事が動機になって学術奨励が起きたように思われる．印度の星学者が諸表を携へ来たのは七七二年の事で，亜剌伯語に翻訳されたのであるが，蓋し Brahmagupta の書であったろうと云う．中に印度の正弦表を含む．印度の数字並に筆算法の伝えられたのも此頃の事であろう．

亜剌伯には元来数字と云うものはない．数詞は普通の言葉で表わす外にはなかった．而も征定した諸領土の会計事務などに就て莫大な数量を書き表わさなければならぬので，諸国で行われた紀数法を採用し，シリアでは希臘風に拠り，埃及では埃及のものを用いるなどした．又数詞の略記を用いた事もあるらしい．そうして亜剌伯の二十八字母を記号に

使ったのは，希臘の風を模したのである．斯くしている中に，遂に印度数字が行わるるに至った．其初めは商用に使ったのであるが，後には諸算書に記るさるるに至った．唯，星学上では六十分法を使うので，多く印度数字を用いなかったと云う事である．

印度数字の形状に就ては，亜剌伯の暦算家として最も有力な一人である Al-Biruni(一〇三九年死) は長く印度に居った人であるが，此人は印度では地方によって種々其字形を異にし，亜剌伯では其中の最も適当なものを採ったのだと言って居る．亜剌伯で用いられた数字の事は十世紀頃までのものは明かになっている．亜剌伯に対する印度の関係は前記の印度暦家の来朝と，Al-Biruni の印度旅行の事の外には明記はないが，印度の算法と云う事は亜剌伯の算書中に屡々言われている事であり，其関係は可なり密接なものであったろうと考えられている．

亜剌伯の数学が発達するに就て希臘の関係は印度に比すれば遥かに顕著である．希臘の学問の幾分か伝えられて居たシリアは亜剌伯の領土になったのであるし，領土たるシリアから希臘の学者が招聘されて翻訳事業に当りもすれば，東羅馬帝から希臘書を贈られるような事もあった．そうして十世紀初期には希臘の哲学，医学，数学，星学の諸書中主要なものは大概は亜剌伯語の訳書が出来たのであった．而も其翻訳は並大抵の事ではなかったのである．ユークリッドの『幾何原本』の如きも幾たびか改訳されて漸く完訳が出来たのである．Ptolemy の星学書 Almagest の亜剌伯訳は更に六かしかったらしい．其他には Apollonius，Archimedes，Heron，Diophantos 等の数学書も皆亜剌伯訳が作られ，遂に希臘の数学は凡て亜剌伯語で学修し得る事となったのである．

亜剌伯の数学者も凡て星学家の兼修したもので，数学だけの専門家のなかった事は印度と同じい．回教では宗教上に暦術家の仕事が必要であり，其属領は甚だ広いのであるが，礼拝には聖地メッカの方に向いてしなければならぬので，其方角を精密に決定するのであったし，祈祷などの時間も精密に測定して施行しなければならぬのであった．そう云う訳で月の運行などに就て精密な観測が必要であった．それに古来の星占の信仰も著しいのであり，何うしても星暦の事は至って必要になり，大天文台も設立されて観測を厳にしたのであった．そう云う星暦上の学問に関与した人の中から数学の諸大家も輩出したのである．数学が医学と共に甚だ保護奨励されたのも，こう云う必要からの事であったろう．

亜剌伯では数学書だけに限った訳ではないが，諸書の翻訳に非常に莫大の努力が費やされたのは，極めて著しい事で，恰も仏典の漢訳が支那では絶大の事業であったのと対比すべきであろう．而も其翻訳は極めて困難であったと云う事である．ユークリッドの『原本』などになると幾回改訳されたか知れない程に六かしかったのであり，それほどに六かしいのは希臘語と亜剌伯語とに通ずる上に数学の力が相当にある翻訳家が容易に得られなかったからであると，或る数学史には述べているが，実際そう云う事情もあったろうけれども，単にそれだけではない．亜剌伯語は従来学問研究の上に少しも使用された事のないものであり，回教の開基以前にも亜剌伯語の詩歌が多少存したくらいの事はあるが，其以上には何等の文献もなかったのである．然るにも拘らず回教の聖典コーランは亜剌伯語を以て之を記るしたもので，他国語に翻訳する事は一切之を禁じ，ひたすら亜剌伯語の普及に努めたのである．亜剌伯の文学もそう云う関係で其存在が始まるのである．此の如き際に於て希臘古書の論理厳密なるものを探って之を翻訳しようと云うのであるから，亜剌伯語には適当な術語も何もあったものではない．術語も文句も凡て新たに撰定して記載しなければならぬのである．其翻訳の極めて困難であったのは，誠に想像にだも及ばない．日本で始めて不完全な蘭学の知識で和蘭の解剖書など翻訳したときの困難であった事に比して更に幾層倍かの困難があったであろう．而も幾たびか改訳に改訳を重ね，新たに術語や文句を創定して遂に希臘の諸数学書や医書，哲学書等の主要なものは全部之を翻訳し尽したのは，誠に偉大なる事業であったのである．

亜剌伯の数学書中，早く出たもので大切なのは Al-Khowarismi の作である．彼れは九世紀前半の人，其伝記は Fihrist と称する学者列伝中に見える．此列伝は十世紀末に出来たもので，至って貴重の史料だと云う事である．Al-Khowarismi は教主 Al-Mamun(八一三－一八三三) の命を奉じて星学書の抄録校正をしたり又観測を行いて子午線一度の長さを測ったりした事がある．其著述に算術及び代数の書物があり，印度の筆算法を説きて，其後の諸算書は皆之に拠る事となった．又印度にも在る所の盈朒及び複盈朒の算法をも説く．此算法に依えば代数の問題を代数を用いずして解き得るのである．蓋し和算家の開方盈朒術は之と対比すべきである．

Al-Khowarismi の代数書は Algebra の名称を表題に用いたものの嚆矢である．精しく言えば Algebr w'almuqubala と云うのであるが，此両語は回復及び収約とでも訳すべく，一は方程式の負項を等号の他辺に移す事であり，一は類似項を集めて括る事を云うのである．斯くして方程式の処理に関する術語である．和算家が点竄の名称を用いたのは，蓋し之に類すると謂って宜かろう．此書には二次方程式論に就て説いているが，印度の数学に見ないものや希臘の Diophantos の書中に見えない仕方なども出ている．二次方程式には二根ありとしているのである．又三角法に関する研究もあった．

尋で Musa Sakir の三人の子も亦暦算の学に優れ，同時に Tabit ibn Korra もあった．此人は多く暦算諸書を訳して，訳書中の優れたものであったと云う．整数術に関する研究や，又方陣の事なども説いている．亜剌伯には方陣を説いたものが幾らもあり，支那以外では亜剌伯が最も早く之を論じたのである．支那の古いものは独り洛書即ち三方陣あるのみにして，宋の『楊輝』の如きは亜剌伯での研究があった以後のものである．

九世紀の星学者で最も優れた人は Al-Battani であるが，此人は観測の正確なので知られている．三角法の研究があり，印度風の所を採って希臘の三角法を改めている．又希臘の球面三角法を学び，更に進んだ研究も見える．

十世紀には Abul Wefa があった．月行に就ての発見は甚だ著しいものがある．数学に於ては Diophantos の整数論の書物を翻訳した．又三角法に就ても発明があった．幾何学関係の研究もしている．併し代数に就ては Al-Khowarismi の書を註釈したもので，余り進歩が見えない．

十世紀には此外にも幾何学乃至整数論に就ての発明もある．不定方程式 $x^3 + y^3 = z^3$ の整数解は成立せぬ事なども知られたのである．

十一世紀始めに Al-Karkhi があり，亜剌伯の代数家として最大の人であった．二次方程式の解に就きて算術的及び幾何学的の証明を行い，垜積即ち有限級数の和をも求めた，又整数論に就ても述ぶる所がある．其書中には印度の整数論は少しも見えて居らぬ．彼れは印度風の算術を斥け，全く希臘風にやったのである．是れ恐らく希臘，印度の両派があって，相抗争した為めの事であろうかと思われる．

亜剌伯では二次方程式を幾何学的に解くことが普通であったが，三次方程式の幾何学的解法も亦試みられるようになった．

Omar Khayyam(一〇四五年頃—一一二三) は円錐曲線の交りを用いて方程式を解く方法を明らかにした．彼れは三次方程式を分類して，其類別に従い解く事を試みた．三次方程式は計算では解く事が出来ず，四次方程式は幾何学的にも解く事が出来ないと信じて居た．負根は之を避け，正根も凡ては求める事が出来なかった．三次方程式を円錐曲線の交りによって解く事は，亜剌伯代数学の達した最高点である．其算法は源を希臘に発したのであるが，希臘では問題が純然たる幾何学的のものであったに反し，亜剌伯では数字方程式の場合の解法をも主題としたのが同じくない．此種の研究に於ては印度の方法とは次第に遠ざかり去って，益々希臘風に発展するようになったのである．

Al-Karkhi 及び Omar Khayyam の時代には亜剌伯の数学が其発達の絶頂に達したのであるが，それから次第に下り坂に向う事となった．

十二世紀より十三世紀に亘りては十字軍の事があって，欧洲人は亜剌伯の文化に接触して数学や他の学術につき開発さるる所が多かったけれども，亜剌伯の学問は之が為めに何等の益する所もなく，唯打撃を受ける計りであった．又蒙古の勃興は亜剌伯に取りて全く敵国の出現であって，一二五六年には Bagdad の教主は滅び，其後又チムールの乱があり，斯の如き乱世の間に於て学問の発達が見られないのは当然であった．寧ろ全く絶滅しなかったのが不思議なくらいである．

蒙古のフラーグがイラン汗国を建てたとき，Nasir Eddin(一二〇一—一二七四) なるものがあって，博学多通，暦算の学をも善くし，フラーグに請いて Maraga に大天文台を建て，代数，幾何，算術等の著書があり，ユークリッドの翻訳をもした．三角法を天文の関係から離れて構成したのは此人が始めである．平行線公理の証明を試みた事もあった．

チムールも亦サマルカンドの朝廷に於て学問の保護を忽諸にしなかった．幾多の暦算家が其治下に集まったのである．チムールの孫 Ulug Beg(一三九三—一四四九) は自身天文学者であり，其時代に Al-Kashi が算書を作った事もある．東方で亜剌伯の学統を受けた最後の算家は Beha Eddin(一五六七—一六二二) であり，此人も亦算術書の作がある．東方の亜剌伯数学は衰えたりと雖も，其頃まで存続したのである．

今述べたのは東方に於ける亜剌伯系統の数学に就て言ったのであるが，亜剌伯の領土は西方西班牙まで及んだもので，西班牙でも亜剌伯の数学理学は相当に繁栄したのである．政治上では東方から早く分れたのであるが，学問の系統としては同一系内に属するのである．今西班牙に於ける亜剌伯の数学に就ても少し許り説いて置かなければならぬ．

西班牙だけではない，埃及あたりの地でも亜剌伯の学問は栄えた．Cairo に図書館並に天文台が設立されて，埃及でも盛んに研究が起きたのである．埃及に居った学者には Ibn Junos(一〇〇八年死) 及び Ibn al Haitam(一〇三八年死) などがある．前者は球面三角法に就ての研究があるし，後者は回転抛物線体の立積を求めるなどしたし，又垜積の研究もある．

Morocco から出た暦算家もあった．

西班牙で亜剌伯の学問が発達するのは十世紀以後であり，最も早く数学者として知られたのは Al-Majriti(一〇〇七年死) であった．此人の門人達が Cordova 及び Granada 等の学校を創めた．けれども西班牙で最大の暦算家と云えば，

Sevilla の Jabir ibn Aflah にして，十一世紀後半の人，普通に Geber の名で知られている．代数 Algebra の語は其名前から来たのだとの説もあるが，固より拠るべきではない．亜剌伯化学の創始者であった Geber(Jabir ibn Haiyan) と同一人ではない。球面三角法に就ての研究がある．而も平面三角法に於ては希臘風を用いて，印度風は採って居らぬ．

西班牙で亜剌伯の学問が存続したのは十五世紀末までで，Granada の Al-Kalsadi(一四八六年死) は最後の名家である．筆算に関する著書があって代数記号の使用に於て他の亜剌伯の諸学者よりも進んだものがある．代数紀法に関しては決して前代並に同時代の諸学者に劣ったものではないのである．唯之に比すべきものは印度の代数学があった許りである．彼れの死後数年にして Granada は欧洲人の為めに陥れられ，亜剌伯人は西班牙で根拠を失うのであるから，亜剌伯の学問も終局を告げるのであるが，彼れの存在は即ち政治的勢力の終末まで学問上に於ても相当の地歩を保った事を示めすのである．

本章の記述は主として，Cajori 氏の数学史に拠ったのであるが，氏は次の如き意味の論究を以て亜剌伯に関する一章を結ぶ．

> 亜剌伯人は博学なれども，創始的でなかったと言われて居た．けれども今に至りては此見解は訂正を要する．亜剌伯人は実際幾らも大きな創意を成就している．幾何学的作図に依って三次方程式を解いたり，三角法を完全にした事も著しく，又数学，物理学、星学上に於て諸他の進歩をしたものであった．云々．

第 4 章　回教の数学及科学発達に関する考察

亜剌伯で発達した数学の一般に就て既に之を述べた．亜剌伯で数学及び諸科学が興隆するまでの希臘及び印度からの伝統に就ても既に説くところがあった．亜剌伯では何うしてあれまでに科学が開発され得たかの事情に就て考察を試みる事が，残るところの問題である．亜剌伯の如く文化民族でないものが，忽然として一大国を成しそうして学問の研究に於てもあれだけの成績を挙げたような実例は誠に珍らしい事であって，之に就て具さに考察を加え，其事情を明らかにするときは，学問発達上の條件を知るべき便宜ともなろうし，直ちに以て我等の鑑戒とするに足るのである．亜剌伯の数学なり学問なりは，或る意味では我国のものに類似点があるとも謂うべく，我等日本人としては別して注意の要があろうと思う．

亜剌伯で数学諸科学の勃興したのは，保護奨励の甚大なもののあった事が至大の関係を持つ．保護奨励がなかったならば，恐らく亜剌伯で学問があれまでに発達する事はなかったであろう．江戸時代の日本で数学が何等の保護奨励を待たずして民間から起きたのとは，全く事情を異にする．

亜剌伯で学問の保護奨励をした最初の人は，恐らく Khalid ibn Yazid であろう．彼れは Umayyad 家の連枝であって，埃及に居ったのであるが，七〇四年乃至七〇八年に歿しているから，亜剌伯の学術史上に於ては最も早い時代に属する．彼れは埃及に居る希臘の学者を聘して希臘の科学書を亜剌伯語に翻訳させたのである．回教国で書物の翻訳は此れが始めであるとは，Fihrist の書中に記るされて居ると云う．彼れ自らも連枝の身を以て医学，星占，錬金等の術に通じていたと云う事である．

Khalid ibn Yazid が早くからこう云う事業のあったと云うのは，埃及の地に於て希臘の哲学者は衰えたりと雖もまだ古い学統を伝えたもののあったので，多く彼等に接触する機会のあった事も一つの原因であったろう．

けれども学問の保護奨励の最も行われたのは，勿論 Bagdad の教主朝廷に於てである．教主 Abbas 家が深く之を奨励したのであるが，特に A1-Mansur 及び Harun al-Rashid が学問の保護で顕われている．又 Al-Mamun の如きも矢張り多く保護奨励したものである．Al-Mansur は Abbas 家二代目の教主で，七五四年に教主となり，七七五年に歿したが，年六十三又は六十八であった．亜剌伯国都 Bagdad は此人の建設する所にして，七七二年に印度の星学者が書物を持って来たのも其治世中であった．政治家としても有力な人物であった．其命に依って多く諸般の書物が翻訳されたのが著しい．

Harun al-Rashid は七六三年或は七六六年の生れで，八〇九年に歿し，七六八年に Abbas 家五代目の教主となり，終身其位に居った．同家の教主としては最も偉大な人物で，有名な小説『亜剌伯夜話』の主人公は即ち此人である．諸科学及び芸術文学等の奨励をした事は最も優れて居る．其治下に於て翻訳したものには希臘の古書が多かった．八〇七年には立派な水時計をシャーレマン大帝に贈った事もある．

Al-Mamun は七八六年に生れ，八三三年に歿したが，八一三年に教主になって，七代目であった．学芸の保護に就ては恐らく Harun al-Rashid を凌駕する程であった．希臘の古書を集める為めには余程心配したもので，特に使節を東

羅馬帝 Leon(八一三――八二〇) の許に遣わし，古書の供給を求めた事もある．得る所の古書は直ちに其翻訳を命じた．Bagdad に於て学士院とも云うべきものを建て，図書館並に天文台をも之に附属せしめた．其設備はアレクサンドリアの大文庫以来最も完備したものであったと云う事である．又 Tadmor にも天文台を建てた．黄道の傾斜を精密に測定したのは此時の事である．諸游星運行に就ての表なども之を作った．地球の大さを測定する事も此人の命に依って行われた．世界の大地図をも作った．彼れが保護したのは哲学者，言語学昔，伝説学者，法学者，数学者，医家，星占家，錬金家等にも広く及んだのである．

Bagdad は Abbas 家では此等の有力な教主が数学及び諸科学の保護奨励に努めた事が実に著しいのであるが，単に教主が保護した許りでなく，Al-Mamun の頃には Banu Musa と呼ばれ，Musa ibn Shakir と云う人の三子が学問を保護した事もある．其父と云うのは Al-Mamun の時代に歿した人である．彼等三人兄弟は自身暦算の学に通じ，又奨励もしたのである．彼等は富を傾けて希臘古書の探索並に翻訳に努めた．其翻訳には当時の有力な学者を使ったもので，数学，重学，星暦の書物が其手に出来たものが多かった．其主なるものは『秤の書』があり，『球積書』があり，又角の三等分等の問題をも論じたのである．楕円を画くに二焦点に糸を結び筆で引張って行うものは，此時に創まったのである．Tabit ibn Qurra の如き有力な暦算家が朝廷に薦められたのは此三兄弟の力であったと云う．

十世紀初めになると Abbas 家は政変の為めに勢力を失うたのであるが，之に代った Buway 家は波斯の出であるが，而も星暦の学に興味を有する事前代の Abbas 家と異なる事なく，其保護奨励を続けて行うたのである。否，前よりも場合に依っては篤きを加えたと言っても宜い程であった．此王家の Adud al-Dawla(九三六――九八三) は九七五年に Bagdad に入り，諸王の王と称せられ，権力並ぶものはなかった．Bagdad に於て大病院を設け，九七九年に成る．又学芸を保護した．宗教上の関係から思想の自由があって，此時代には哲学上の主張にも大きなな発展が見られた．

其子 Sharaf al-Dawla も亦父に続いで学芸を保護し，Bagdad の宮廷内に天文台を立て，七曜の運行を観測した．其事業には多くの星学大家が関与し，Abul Wafa の如きも亦其一人であった．

こう云う事情で Bagdad を中心として亜剌伯の学問は続いて栄えたのである．

今述べたのは Bagdad を中心としての事であるが，埃及でも西班牙でも同じである．

西班牙に於ける亜剌伯の学問に就て言えば，亜剌伯の学問である事に於て固より同一系統内の発達に属するけれども，其地域が遠隔して居る許りでなく，政治上には分離して別国家を成したのであるから，思想及び学術に関する交通は意外に便利でなかったらしい．西班牙で学問が起きたのも統治者の保護奨励下に在ったのは同じであって，Umayyad 家八代目の教主 Abd al-Rahman 三世の保護の許に首都 Cordova が文化の一大中心地となった事から始まる．けれども科学的活動は一朝一夕に隆盛を期し得べきではなく，其勃興を見たのはまだ後の事に属する．彼れの在位は九一二年から九六一年に亘る．彼れに尋で位に即いたのは Al-Hakam 二世 (在位九六一――九七六) にして，極力，理学及び芸術，教育の事を保護した．回教諸王中にて恐らく最も学者的の人であったろう．国都 Cordova はコンスタンチノープルに亜での大都市と為り，国都に設けた大学は回教学術の最大中心と称せられるようになった．数学，星学及び医学等が甚だ奨励されたもので，回教諸国に広く使節を遣わして諸写本を手に入れる事に努めたのである．其大文庫には書籍四十万冊を蔵し，目録だけでも四十四冊を成したと云う事である．そうして教主自ら多数の書物に註釈を加え，東方で出来た書物の如きも東方の諸学者の知らぬに先立て教主は既に之を知っていると云う風であったのである．斯の如き教主があって，始めて学問の奨励は徹底したのである．

此種の事に就て更に多く説く事はすまいが，亜剌伯の学問が教主即ち統治者の保護奨励の許に発達進歩したものである事に何等の疑いもないのである．

亜剌伯では斯の如き奨励保護があったのであるから，自然に学問の学修研究が風を成し，非常に多数の学徒の出たのも亦甚だ著しいのである．亜剌伯には Fihrist の如き学者列伝の書物が作られていたと云うのも，つまり学者が多数に輩出して盛大であったからの事であろう．スイスの数学史専門家 Heinrich Suter が亜剌伯の暦算家伝を作ったものを見ても，其人数の甚だ多いのに驚かれるのである，多数の人が出ているから，立派な研究も余計に出来ると云う訳で，亜剌伯の数学なり諸科学なり考うるに就ては此事情も亦必ず考慮しなければならぬのである．亜剌伯の暦算家には希臘の諸大家の如き特に傑出した人物は少ないのであるが，多数者の多数の研究が集まって大を成したと謂って宜いのである．此点に於ては徳川時代の和算家が大天才と云うべき人物の出ていないに拘らず，幾多の人物が輩出して次第に其業績の集成されたのと酷似する．

亜剌伯で此等甚だ多数の学者が出たのは，特殊の地方に限ったのではなく，其領土内の各地方から出ているのである．

Bagdad を中心として東方から多くの有力家が出ているのみならず，埃及や西班牙等でも回教の拡まり亜剌伯の勢力の到達した所には到る所に数学でも其他の諸科学でも，其人数の多少は兎も角，必ず幾分かの人物が出ていないと云う事はないのである．其地方から出た人物は決して亜剌伯人だけに限っては居らぬ．亜剌伯民族の出身者にも有力家は有るけれども，ユダヤ人や波斯人にして亜剌伯の学者として名を馳せた人が甚だ多いのである．此事も亦注意しなければならぬ．故に我々は普通に亜剌伯の数学，亜剌伯の科学と云い慣らされているから，そう言いもするし，書きもするけれども，実にそう云うのは至って正確だとは見られぬのである．寧ろ回教学術と云うのが当っているであろう，回教の弘布した勢力の範囲内に於て同一系統の学問が発達したのであるから，回教の学術と云うのは最もふさわしい．蒙古や土耳古の治下に至っても，回教学術は相当に存続したのであった．

回教の数学並に諸科学に於て波斯人の傑出した人物の多かった事は極めて著しい．私は初め亜剌伯の数学諸大家には波斯の旧地から出た人が多いのを見て，其発達には波斯の関係が多いのであろうかと考えたのであるが，実際それが事実であり，波斯人の業績を度外に置いては，亜剌伯の数学諸科学は至って貧弱なものになってしまうであろう，

Omar Khayyam の代数学に就ては前に述べたのであるが，此人も波斯人であった．或は亜剌伯系の人だとの説もあるけれども，波斯人と云うのが正しい．彼れは数学の大家であった許りでなく，暦学に於ても改革をしているし，西洋で後に成立して長く用いられた Gregory の暦よりも寧ろ正確であったろうと云う事である，そうして兼ねて大詩人であり，其詩は Fitzgerald の英訳などもあって，世界の文学上最も広く読まれたものの一つだと云う．暦算の大家たると同時に又大詩人たりし事，彼れの如き人物は恐らく広い世界の歴史上に於ても他に匹儔を求める事は出来ないであろう．

Abul Wafa も亦波斯人である．

A1-Biruni(九七三年——一〇四八) は数学者として相当の人物であるが，彼亦波斯の生れである．此人の事は前に言わなかったけれども，印度に旅行して其旅行記を遺して居り，印度の数学史上幾多の好参考材料を供するのである．彼れは数学以外，哲学，星学，地理，雑纂の事に至るまで通ぜざるなく，回教学者の中にて偉大なものであった許りでなく，古今を通じての大家中の一人である．彼れは『諸国暦術志』の作があり，甚だ参考すべきである．彼れの用いた投射法の如きも見るべきものであった．地球の回転するや否やに就ての論究などもある．

此等の人をを数えたならば，其数甚だ多きに上る．今はただ其事を示めすのみで，一々数え立てする事はすまい．亜剌伯人の学者では神学，法律等の専門家は傑出した人があるが，暦算及び其他の諸科学に至りては多く人物が出て居らぬのである．

回教の学者中に波斯人が多いのは，波斯人が学問研究の能力に優れていたからと云う事もあろうが，又亜剌伯の文化、回教の文化は元来波斯の文化，波斯の学問を継承したものであり，波斯は回数国家の領土中最も主要なところであって，通商経済の事などには波斯人は甚だ重きを成したのであるから，波斯人が多く科学発達上に活動したのも怪しむに足らぬであろう．けれども回教の発祥以前に於ける波斯の学問は左までものがなかったらしいとは，前に説いた通りである．独立の大国家を成した時代の波斯に数学科学史上特に見るべきものが有ったのでないのに，回教治下の属領たるに至って始めて波斯人が数学科学の歴史上に大きな活動をする事になったのであるから，之を称して単に波斯の学問だと云う事は出来ない．亜剌伯の要素，回教の要素が加っている事は言うまでもないのである．回教教主の篤き保護奨励の有った事が大きな関係を有する事も其事情を語るのである．

回教の学術奨励は宗教乃至民族の如何に拘らず之を行うたもので，回教では其宗教の弘布に極めて熱烈であり，甚だしく異宗教を圧迫したのであるけれども，学問芸術の事になると如何なる宗教の人と雖も一切之を寛容して招聘し保護したものであった．ユダヤ人やキリスト教の人々が初期には多く関与していたのも，之れが為めである．而も一切の学問を凡て亜剌伯語に翻訳するに努めたもので，波斯やユダヤ人の学者などでも凡て自作の書と雖も亜剌伯語で書いたのである．西班牙で学問が起きる初めにユダヤ人の名宰相があって，教主の保護奨励を助けた事も亦之を忘れてはならない．

回教の学術は上の如き次第で教主の篤い保護の下に多数人が熱心に其研究に当り，亜剌伯人よりも却って他民旅のものが多く其能力を発揮したものであるけれども，而も回教信仰の熱烈な精神が数学及び諸科学研究の上にも表われたものであって，精神の熱烈であった事も非常に重大な要素を成すのである．是れ即ち波斯人の如きは波斯の国家が盛大な勢力を有した時代に科学上見るべき発展もしていないのに，回教治下に至りて非常に科学上の貢献を成し得た所以である．波斯の諸学者も初めは凡て亜剌伯語で著述をしていたのであるが，後には国民的の自覚が起きて波斯語の著述が出るようになり，十一世紀の回教諸書は多くはそうであるが，此時代に発達の最高点に達して，それからは下り坂に向うのである．此れには政治上の関係もあろう．けれども又宗教が固定して信仰の熱烈が減少した事も亦重要な一因ではあるまいかとも

思われる．回教は武力を以て信仰を弘布したような宗教であるけれども，回教の神学は欧洲中世のスコラ哲学にも比すべきものがあり，否寧ろそれよりも進んだものがあったので此種の関係が科学上の進歩の上に好結果を齎らした事も考えなければならぬのである．而(しか)も欧洲ではスコラ主義が斃れて文芸復興となり，近世の諸科学の大発展を見るのであるが，回教国では其突破が出来なかった．そうして回教の数学諸科学も亦棄たれ，欧洲近世の学術が之に代って起きたのである．

今欧洲近世の数学史を説くに先だち，希臘(ギリシア)の古代に遡って其淵源を窮めて見よう．

第5編　希臘の数学

第1章　緒　　論

希臘の数学は極めて論理的であり，系統的であって，整然たる組織を成し，頗る天才的の閃きのほの見ゆる事は，他の諸国の数学の到底比すべくもないのである．我等は之に対するとき，粛然として襟を正うしたい思いがする．誠に形の整うた希臘の古建築や古美術を見るのと同じ敬虔の念に打たるるのである．我等は既に日本，支那，印度，回教国の数学に観察を加えたのであるが，遡って希臘の数学を見るに至って，此等に比し大に撰を異にするもの有る事を覚える．即ち幾何学の論理的組織を見るのであって，他の何れの国でも之に比すべき発達は見られなかったのである．而も余りに論理に拘泥するが為めに，算術代数の方面は却って其進歩を拘束される事になったような弊害もあったのである．今希臘数学の発達した事情に就て論及したいのであるが，希臘に先だって埃及及びバビロンでも相当に数学が発達し，希臘は其影響を受けているのであるから，此二国の数学に就ても少しばかり瞥見して置かなければならぬ．

第2章　埃及の数学

埃及に金字塔 (pyramid) の大建築が今も存して居る事は何人も能く之を知る．金宇塔は極めて古い時代の帝王の墳墓であり，内部には石築の室があり，ミイラを保存している事も亦著名である．金字塔は巨石を積みて方錐形に之を築き，基底は東西及び南北に測ったもので，埃及人が早くから此種の形に興味を感じ．又巨大なものを好んだ事なども知られる．

埃及には石築の殿堂等も甚だ多く．現存のものも少なくない．石造の巨像なども好んで作ったのである．埃及人は形体に対する感じが強いから，幾何学が埃及で始まるのも理由のない事ではあるまい．幾何学とは英語で Geometry と云う．希臘語から来たのであるが，geo は地であり，metry は測る事を云うのであるから，つまり地を測る学と云う事である．即ち土地丈量法に外ならぬ．希臘の幾何学は決して土地丈量法と云う如き実用上のものではないのであるが，埃及で土地丈量法に基いて起きたものなので，それが希臘に伝わり遂に千古動かぬ名称となったのである．即ち幾何学の始祖は埃及であり，希臘に入って完成したのである．

埃及ではニール河沿岸に国を建て，河水の氾濫に依って肥沃の土壌を齎らし置くが故に農耕の事も出来るのであって，其氾濫は期日が一定しているので，其時期を天文上から観測する事が極めて大切であったと云う．其為めに埃及の天文暦術は発達したのである．エジプトでは年々斯の如き氾濫があるので，田圃の区画も年々丈量して更新しなければならぬ．其結果として土地測量法が甚だ必要であった．其土地測量法が発達して幾何学を成すのである．

こう云う事は希臘の学者が言っているのであるが．恐らく真相を穿ったものであろう．それに前言うように，形体に関する感じが深いから，益々幾何学は発達したものになったであろう．

埃及の古算書には幸に現存するものがある．即ち英国の大英博物館 (British Museum) に所蔵する所にして，其独逸訳，英訳等も出来ている．西紀前一七〇〇年より以前に Ahmes の記るしたものであるが，更にずっと古い時代の書物に基いて作ったものであろうと云う事である．埃及の数学の起原甚だ古きを思うべきである．けれども金字塔の築造が甚だ古く，其墓室内に埋蔵せる副葬品等が太古の時代から文化の甚だ発達していた事を示めす所以を思えば，恐らく不思議はないであろう．固より世界の現存数学書中の最古のものである．

此書は算術及び幾何学の問題を説いたもので，算法も記してあるが，理論的の記載はないのである．定理と云うものは固より言って居らぬ．算法の一般法則と云うようなものの記載もなく，術文が記るされて先生が之を生徒の為めに説明するものとしているのであろう．

幾何学に就ては面積の算法が主要なものである．等辺三角形の面積に就ては其術が正しくない．等辺梯形や円の面積の事なども見えているが，円周率

$$\pi = \left(\frac{16}{9}\right)^2 = 3.1604$$

を使用したものに相当するのである．可なりに精密だと言って宜い．直角三角形や梯形の辺の長さを知りて之を作る問題などもある．又比例に就ても初歩の事は知られていたのである．

四辺形の面積に関する術は正しいものではないが，西紀前百年頃の殿堂の壁に記るされた土地の面積を示めす為めの仕方よりは正確なのである．

立積に関する術の如きは見込みで作ったものらしく，証明をして得たものではないらしい．

Ahmes の書中には分数を表わす為めには，分子が一である分数のみを用いる事にしている．此種のもののみを，分数と言っているのである．現に我々の用うる普通の分数に相当するものを表わすには，此の単位分数の和を以てする．例えば $\dfrac{2}{5}$ は $\dfrac{1}{3}$ と $\dfrac{1}{15}$ との和に当るのである．唯 $\dfrac{2}{3}$ だけは記るしている．凡ての分数を単位分数の和で表わすのであるから，随分込入った事になるのであるが，其為めに予め表を作ってある．其表は二を分子とするものに就てのものであるが，二より以外の数を割る場合に於ては，例えば 5 を 21 にて割るものとすれば，

$$\begin{aligned}\frac{5}{21} &= \frac{1+2+2}{21} = \frac{1}{21} + \left(\frac{1}{14}+\frac{1}{42}\right) + \left(\frac{1}{14}+\frac{1}{42}\right)\\ &= \frac{1}{21} + \left(\frac{2}{14}+\frac{2}{42}\right) = \frac{1}{21}+\frac{1}{7}+\frac{1}{21}\\ &= \frac{1}{7}+\frac{2}{21} = \frac{1}{7}+\left(\frac{1}{14}+\frac{1}{42}\right) = \frac{1}{7}+\frac{1}{14}+\frac{1}{42}\end{aligned}$$

と云う算法を施すのである．

分数に関しては尚随分込入った算法なども見えている．埃及（エジプト）の分数の算法は非常に複雑なものであった．埃及（エジプト）の単位分数は希臘（ギリシア）へも伝ってずっと後の時代までも行われた．

Ahmes の書には等差級数に関する問題もあり，又単仮定法の算法も見える．又

$$7+49+343+2401+16807 = 19607$$

としたものもあるから，等比級数も知られて居たと言って宜い．

一次方程式に関する問題も亦見える．

Ahmes の書と凡そ同時代と思われる他の古書も近年発見されたのであるが，此書には二次方程式も見え，二次方程式に関する最古の記載である．其一つは

$$x^2+y^2=100, \qquad x:y=1:\frac{3}{4}$$

に相当するもので，仮定法の算法で解くのである．

埃及（エジプト）では太古の時に於て此種の数学が早く既に発達したのであるが，学問は僧侶の仕事で，階級制度が厳重であり，学問も固定してしまって後には発達した形迹がないのである．西紀前六世紀の頃に至り希臘（ギリシア）の学者が埃及（エジプト）に遊んで僧侶に就て諸般の学を修むるに至った頃にも，別に進んだ数学は発達していなかったように思われるのである．

埃及（エジプト）では石片を用いて計算を行うたと云う事である．

第 3 章　バビロンの数学

ユーフラット，チグリス両河流域の地も亦埃及（エジプト）と同じく文化の早くから開けたところで，数学，星学の如きも太古既に幾分の発達を見たのである．バビロンは此地に国を建てた一国であるけれども，仮りに総称してバビロンの数学として説くこととする．

バビロン地方には古くから六十進法が行われ，之に関して若干の表も作られていたのである．六十進法に関して亜剌伯（アラビア）数字に見る如き位置で桁数を表わす原則も用いられていたのである．バビロンの六十分法は印度（インド）へ伝って印度（インド）で用いられたのであるから，印度（インド）の数字使用の原則はバビロン伝来のものであったろうかとも思われる．

バビロンの六十分法は希臘（ギリシア）の学者中にも之を使用した人がある．Hipparchus，Hypsicles，Ptolemy 等の書中に見えているのであり，是より以来，星学，数学上に於て盛んに行われて近世に至ったのである．十六世紀以後小数の用いられるに至って，六十分法は余程衰えたけれども，角度測定の上には今尚行われているのである．六十進法又は六十分法が如何なる理由で行われ始めたかは不明であるが，一年を三百六十日とする事から円周を三百六十度に分ける風が出来て，そるから来たのであろうかと思われる．此見解には疑いもあるけれども，深く立入って論究する事は之を避ける．

バビロンでは算術が発達したのである．等差級数や等比級数の事も知られて居るし，比例の事も論ぜられていた．実用上の計算には一種の算器が行われていたらしいのである．乗算表，除算表，平方数表，平方根表等は瓦片に記るしたものが発掘されている．

バビロンでは幾何学的の事は余り発達しなかったようである．証明の考えなどはなかったと云う．

暦術の事は早く発達していたのであって，希臘の星学は其関係を有するのである．西洋の占星術はバビロンで発達し，希臘に伝わりて，それから後世にも及んだのである．バビロンでは暦術星占の事が重んぜられた為めに，数学の発達上にも少なからざる関係があったらしい．且つバビロンの地は世界交通の要衝に当り，世界的の地位を占めていたので，学問の発達上に好都合でもあったろうし，又其学問が他に伝った関係もあるのである．算術の発達の如きは商用の関係が非常に多かったらしいのである．

第 4 章　イオニア学派

希臘の数学が果して何時代から起きたかは甚だ不明であるけれども，其歴史の辿り得られるのはイオニア学派に始まる．此派は小亜細亜のイオニアで発達したのであり，Thales(西紀前六四〇——五四六) が其始祖にして，其門中には幾人かの大家が輩出したのである．

希臘文明の発達は勿論其起源が古い．詩聖 Homer の詩篇は是より以前の作であり，クレタ島の遺跡にも希臘の太古文明を伝えている．けれども希臘の数学に就て我等の知るところは，イオニア派からの事であり，其以前の事は多く伝って居らぬ．希臘の数学でも他の諸科学でも希臘本土から起きたのでなく，海外の殖民地で発達したのは注意すべきである．

Thales は中年の頃に商用上にて埃及に遊び，埃及の僧侶に就て数学及び諸科学を学び，其造詣は幾くもなくして師よりも優れたと云う事である．金字塔の影を見て其高さを算出し，埃及王を歎称せしめたと云う話も伝っている．又三角形の角に関する定理の撰もあったと云う．彼れの幾何学は埃及から学んだのであるけれども，埃及では単に実用計算上のものに過ぎなかったのが，彼れに至りては叙述も正確となり，抽象的の意義あるものになったのが，異同あるところである．星学も亦彼れの手で理論的のものに発達するようになった．

彼れの門人に Anaximander(西紀前六一一生) があり，又 Anaximenes(五七〇生) がある．二人共に主として星学などを修めた．後者の門人に Anaxagoras(西紀前五〇〇——四二八) があり，イオニア派の学者は此人で終る．彼れは獄中にて円面積の研究があったと云う．此問題の研究に就き史上に見えたるものは，之を以て嚆矢とする．

イオニア学派は百年許り栄えたもので，其末期には此学派以外から出た学者もあった．此時代には数学並に諸科学の進歩がまだ余り著しいものではなかったのである．

第 5 章　ピタゴラス及び其学派

イオニア学派と対立するものに Pythagoras がある．彼れは西紀前六世紀に出で，群島海中の Samos に生れ，老年の Thales の許に遊んだ事もあり，其勧めに依りて埃及に留学し，留まる事多年，又或はバビロンにも遊んだろうかと云われて居る．後，郷里に帰り学校を建てんとしたが，乱離の為めに果さず，南伊太利に移りて，Crotona に学校を建てた．ここで哲学，数学，理学を教授したのみならず，一種の秘密結社を成したのである．学派中の発明発見に係るものは之を派外に伝うる事を許さず，其業績は多くは流祖 Pythagoras の作だと云う事になっている．故に派中の個々の人々の造詣につき一々之を明らかにする事は頗る容易でない．

此派は夙に政治上の勢力を得たもので，別して秘密を主とするが故に，頗る嫌疑を蒙り，民衆派の為めに襲撃されて，学校は破壊され，Pythagoras は奔竄して遂に殺されたのである．

Pythagoras は数学上の著書の遺れるものはないが，其派では数学が甚だ重んぜられたらしく，数学が一科の学となったのも其功績の一つである．幾何学だけでなく，算術も開発されたのであって，誠に算術がピタゴラス派哲学の基礎になっているのである．幾何学に於ても算術上の関係に言い表わし得るものを好んだと云う事である．求積に関するものの多き事は，埃及の幾何学に似ている．勾股弦の関係が Pythagoras の定理と呼ばれている事は甚だ名高い．一種の証明をもしたのである．五通りの正多面体を以て四元素と宇宙とを表徴し，星五角形を用いて徽号とした．此る即ち日本では晴明の判と云うものである．

Pythagoras の秘密結社は其存生中に政治上の動乱に依って打破されたけれども，其学派は二百年許りも命脈を保つ事が出来た．そうして Philolaus 及び Arehytas の二人が此学派の人として最も顕われている．ピタゴラス派の学説が世に伝えられたのは，Philolaus の著書に拠る．

Archytas(西紀前四二八——三四七) は政治家であり，又将軍としても知られた人で，其徳行も称せられている．Plato が出た頃に於ける幾何学者として最も偉大な人物であった．重学を幾何学的に組織した人で，立方形二倍の立方形を作る為めの機械的解法をもした．比例論などに就ても発明がある．

ピタゴラス派はアテーネにての数学の学修上に大きな影響をしたものであり，詭弁家の数学はピタゴラス派から伝承したもの多く，又 Platon の如きも Philolaus の著作を学び，Archytas とは親交があったのである．

第 6 章　詭弁家の数学

希臘本土で数学が起きるのは，波斯戦争後にアテーネが希臘諸国の盟主となり，権力，文化並び進んだ時に始まる．市民は業務を奴隷に委ね，生活甚だ閑散にして，且つ政治に関与するの関係上，教養を積むの必要があるので，主として伊太利地方から学者が多くアテーネに流入して教授の任に当ったのである．之を sophist と云う．元来，智者の義であるが，又詭弁家と呼ぶのである．彼等詭弁家はピタゴラス派の学を受けたものなどが多かったけれども，ピタゴラス派とは違い．教授に対して報酬を受けた．其教授は修辞法が主であるけれども，又幾何学，星学，哲学等をも教えた．是に於てアテーネは学問文芸の中心地となり，特に数学の如きもそうであった．詭弁家時代の数学の繁栄はアテーネを中心とする．

詭弁家の数学研究には三つの大きな問題があった．即ち

(1) 一つの円弧又は角を三等分する事.
(2) 一つの立方形の二倍に等しき立方形を作る事.
(3) 一つの円に等しき面積の正方形又は直線図形を作る事.

此三者が其問題である．此中の第二は立方倍積問題，第三は円積問題と云う事にしよう．当時の数学に於て研究された諸問題は勿論此三者に限った訳ではないが，此三問題が最も有名なものであり，之に依って数学進歩の状態を支配したのであった．

此三問題は皆作図の問題である事が注意すべきである．定木と円規とを用いて作図する問題であったのである．此種の作図問題は支那や印度の数学に於ては顧みられていない．

角の二等分は甚だ容易である．直角の三等分もピタゴラス派で之を行うて居る．任意の角の三等分も容易に出来そうなものであるけれども，実は非常の難題であった．定木と円規だけ用いて其作図を行う事は出来ないで，幾多の学者が何れだけ苦心を費やしたか知れないのである．此問題を研究した初期の人に Elis の Hippias と云う人があった．Socrates と同時代の人で西紀前四六〇年頃の生れである．彼れは普通の作図的方法では目的が達せらないので，別の手段で作図する事を試みた．即ち一種の曲線を考案して，之を用いて角を三等分したのである．之に依れば三等分だけでなく，任意等分する事が出来る．此曲線は後に Dinostratus 等が円積問題の研究に応用したので，之を円積曲線 quadratrix と名づける．

立方倍積問題は伝うるところに依れば，Delos の神勅に基いて起きたものだと云う事である．嘗て Delos に於て疫疾の流行した時，現存の神壇の二倍のものを作って祭祠せよとの神勅があって，工人は稜を二倍したものを作ったが，未だ神意に協う事が出来ないので，其作法の誤れる事を知り，之を Platon に諮ったところ，彼れは門下の徒と共に研究に従事したと云うのである．此事は Eratosthenes の記るす所に係る．其真偽未だ俄かに判ずべからずと雖も，此種の伝説が生ずるのは其甚だ流行した為めに外ならぬのである．ピタゴラス派では正方形の対角線上の正方形は原形の面積二倍に等しき事を証していたから，之に尋いで立方形二倍のものに関する問題の生起するのも自然の事であったろう．

此問題に就て有力な業績の有ったのは，Chios の Hippocrates であり，西紀前四三〇年頃の事であった．此人は大医 Hippocrates と同名であるけれども，固より同一人ではない．彼れは数学者として有力な人物であるが，痴鈍と言われていた．数学の教授に報酬を求めのたは此人から始まると言われている．彼れは二線間に二つの比例中項を作るときは，立方二倍のものが作られる事を証した．即ち

$$a : x = x : y = y : 2a$$

とすれば

$$x^2 = ay \quad \text{及び} \quad y^2 = 2ax$$

故に

$$x^4 = a^2y^2 = a^2 \times 2ax = 2a^3x$$
$$\therefore \quad x^3 = 2a^3$$

となるのである．けれども定木と円規とのみにて幾何学的作図に依り二つの比例中項を求める事の出来なかったのは勿論である．

Hippocrates は円積問題に就ても研究が有った．彼れは此に二つの問題からして円の幾何学を構成する上に大きな功績が有った．此種の方面はピタゴラス派では多く考究されなかったのである．幾何学の論理法にも尽くす所が多かった．幾何学的図形を言い表わす為めに字母を用いているが，これは恐らくピタゴラス派でもやっていた事であったろう．相似形の研究に於ては幾何学上に比例を用うる事になったのである．又幾何学の教科書をも作った．ピタゴラス派で秘密を主義としたのに反し，アテーネでは凡てが公開的であった．詭弁家 Antiphon は Hippocrates と同時代の人にして，円積問題の研究で知られている．彼れは円内に正方形又は正三角形を容れ，其各辺を底として二等辺三角形を容れ，次第に其作図を継続するときは，次々に得るところの正多角形は次第に円面積に近接し，最後には之に等しくなるべき事を示めし，如何なる多角形に就ても之に等しき正方形を作り得るが故に，其最後の内接多角形に等しき円も亦作り得らるるのであり，従て円に等しき正方形が成立ち得る事を証した．此算法は即ち尽去法 method of exhaustion と称するものにして．希臘(ギリシア)の数学上では其算法の発展が甚だ重要なものとなる．

同時に Bryson なるものあり，内接形と共に外接形をも用いて円積問題の研究に一段の進境を示めした．而(しか)も円面積は内外接形の算術平均なりとしたのは正しくない．

逐次多角形が最後に円と一致するや否やに就ては，此当時以来甚だしく問題が生じた．極めて議論の正確を期するが為めに，其議論は哲学的のものとなるのであり，随分六かしいものであった．此種の議論に関連して看過し難きものに Elea の Zeno の Achilles と亀との追跡問題がある．即ち言う．

> Achilles は亀を追い越すことは出来ない．何故なれば，Achilles は先づ亀の出発した点に達しなければならぬ．此時亀は若干の距離を歩んで居ろう．次に彼れは此距離を進まねばならぬ．そうして亀は既に幾らか進んで居る．斯くして次第に両者の距離は近接するけれども，而(しか)も何処まで行っても亀は必ず彼れの前に居るのである．

此種の詭弁は幾らもあるが，何れも甚だ難解である．

第 7 章　プラトンの学派

ペロポネサス戦争はアテーネを蹶落して政治上の勢力を失わしめたけれども，哲学，文芸，諸科学に於ては此れから益々アテーネの造詣が進んだのである．そうして Platon(Plato) が出たのが最も著しい．彼れは西紀前四二九年アテーネに生れ，三四八年に歿した．彼れは大哲 Socrates の門人にして，哲学界に於ける稀代の偉人であるが，数学にも亦甚だ通じ，数学の理論的方面は此人の手で頗る進歩を現わしたのである．彼れは固より Socrates から数学を学んだのではない．彼れは Socrates の死後に広く諸方を遊歴し，北アフリカの Cyrene に於て Theodorus に就て数学を学んだ．又南伊太利(イタリア)及びシシリア島等に赴きピタゴラス派の人々とも交遊した．埃及(エジプト)にも遊ぶ．Archytas 及び Timaeus 等と親交を結んだのも其遊歴中の事である．西紀前三八九年の頃アテーネに帰り，Academia の森に学校を興し，身を終うるまで教授と著作に従事したのである．

Platon の哲学体系組織は其師 Socrates に負う所が多いのであるが，又初め詩歌など学んだ人である事も少なからざる関係を持ち，且つ数学に深かった事も深い意義があった．其哲学の真精神は数学を標準にしたものだとも謂い得られよう．彼れが如何に数学を重んじたかは其講堂の門に

> 幾何学を知らざるものは入るを許さず

と掲示したのでも知られよう．彼れは算術，幾何学を以て宇宙を開くべき関鍵と為し．幾何学は哲学に入るに必須なりとしたのである．幾何学は正確厳密な思考力を練るものなりと見做し，数学と哲学との関連を到処に顕現せしめた．

Platon の後継者 Xenocrates も亦甚だ数学を重んじ，数学の素養なきものはアカデミーに入学する事を許さなかった．此の如きの輩は哲学を理解すべき資格ないものと看たのである．

Platon の態度既に斯の如くであるから，彼れの学校アカデミーから幾多の数学者を輩出せしめたのも当然である．彼れは数学上に於て多大の創意があったと云う訳ではないけれども，幾何学に関する論理法及び研究方法等に就き顕著な貢献をして居る．一世紀前に於ける詭弁家の幾何学者たちも証明は随分厳にしたのであるが，未だ証明法の本質に就て深く考慮するに至らず，暗々裏に証明中に入り来るところの公理を明確に言い表わすような事も行われなかったのであるが．Platon は此等に就て甚だ明かにする所が有った．又点線面等の定義をも構成する事に努めた．其定義は

> 点は線の始めなり，若くは点は分つべからざる線なり．線は長さありて幅なきものなり．

など云う如き類にして．Euclid の『幾何学原本』中に見る所の諸定義は多くは彼れ及び彼れが門下中の作に係ると云う．原本中の諸公理も亦同様であろう．Aristotle の記るすところを見ても，之を察すべき記事がある．

Platon 及び其門下の業績中最も主なるものの一は数学の証明法として分解法 Analysis を用いた事である．勿論彼れ以前から無意識的に用いられていないでもないが，之を意識的に正当な方法として重要なものにしたのは Platon の力である．其方法は所要のものを既に知られたりと仮定し，之に基いて推理を行い，其結果が正しいものとなれば，仮定も正しいものであったと見る事である．此証明法は場合によりては正しくない事がある．依って疑わしい事のないようにする為めに，綜合的の証明をも併せ用いる事にされた．故に分解法は綜合的証明乃至解法を助ける為めの手段に用いられたのである．

Platon は立方倍積問題を解いたのであるが，他の諸大家の得た解法と同じく定木と円規のみで解き得たのではない．彼れは此種の解法を名けて器械的解法と称した．他の器械を要するからである．彼れは器械的の解法は貴ぶべきではないとした．幾何学的の解法即ち定木と円規とに依る作図が如何に貴重視されたかを見るべきであろう．

Platon は立体幾何学に就ても従前より優れた考究をして居る．前には球や正多面体等が多少論ぜられていたけれども，角壔，角錐，円壔，円錐等の幾何学は此学派に至りて始めて重要な研究問題となったのである．

円錐曲線の事は Menaechmus が之を始めたもので後に甚だ整頓した数学の一分科を成すに至ったのである．此人は星学大家，Eudoxus の門人にして，Platon の友人であった．彼れは直角，鋭角，鈍角三種の円錐を其一辺に直角なる平面にて截りて今日謂うところの抛物線，楕円，双曲線を得たのである．彼れは円錐曲線の交りに依りて立方倍積問題を巧みに解いている．

Menaechmus の兄弟に Dinostratus が有り，Platon の門人であるが，Hippias の円積曲線を用いて円積問題を器械的に解いたのが知られて居る．

Eudoxus は西紀前四〇八年の頃に生れた人で，初め Archytas に学び，後に Platon にも学んだ．彼れは星学の大家にして，天体の運行を同心球の理によりて解説したのが甚だ有名である．彼れはアテーネに遊んだけれども，彼れの学校は Cyzicus に在り，此地で西紀前三五五年の頃に歿した．故に彼れの星学数学は全然アテーネの学問ではない．又アカデミーの学問でもないのである．此点は注意を要する事で，此種の学問にはアテーネ以外，希臘本土以外の要素が甚大に存する事を見遁がしてはならぬのである，アカデミー派の諸学者中には Menaechmus，Dinostratus 及び其他多くの有力家が Eudoxus から学んでいたのである．当時第一流の数学者は固より此人を措いて他に索める事は出来ないのである．彼れは比例等の事に就ても多くの創意が有ったが，又立体幾何学に於ては其造詣が著しい三角錐は三角壔の立積三分一なる事などの証明もあり，尽去法をも研究上に巧みに使用したものであった．二線間の二つの比例中項を求める方法を解いたと云う事であるが，其解法の如何は知られて居らぬ．

Platon は自身に数学其物に就て多くの創意が有ったと云うではないけれども，其門下から多くの数学者が輩出した事は甚だ著しいのである．上述の諸名家の外にも尚幾多の人物が出ている．其人々に就ては今暫く叙述を省く．

唯 Aristotle(Aristoteles)(西紀前三八四——三二二) は数学に就て多く研究はないけれども，一通り述べて置く事を要する．彼れが Platon の門下から出て，別の哲学体系を組織した絶大の偉人である事は，人の能く知る所である．数学に就ては余り研究を積まなかったようであるが，幾何学上の定義など改良をするような事はあった．Zeno の詭弁などに就ての研究もあり，又重学は此人から始まったと言っても宜いのである．演繹論理学を組織したのが最も著しい．論理学の発達に就ては Platon なども貢献する所があるし，又幾何学が甚だ論理的なものであったので，希臘で此人の論理学が立派に構成された事に就て何等疑うべきものはあるまいと思われる．彼れの論理学が構成されて，其後に至り Euclid の『幾何学原本』が成りて幾何学の論理的に組織される事になったのも誠に当然であろう．其事は後に説く．

第 8 章　アレクサンドリアの数学

アテーネが学問研究の中心地であったのは Aristotle の頃まででであって，其後中心地は埃及の Alexandria に移った．アテーネはマケドニア王 Philip の為めに破られて全く勢力を失い，Philip の子 Alexander 大帝が立つに及んで世界征服の大壮図を試みたが，幾くもなくして早く歿した為めに，其大範図は諸将の間に分割せられ，埃及は其将 Ptolemy Soter の領する所となった．Ptolemy は頗る学芸文物を奨励して首都 Alexandria に大文庫，博物館，動物園等を建て，広く諸学者を招致して研究に当らしめたのである．是に於て Alexandria は学芸の中心地となり，盛んに諸般の学が勃興した．其状態は数百年間に亘りて継続し幾多の人物が輩出して居る．勿論此地以外にも有力な諸大家が出ていないではないけれども，此等の人々と雖も Alexandria の学問に関係を有するのであって，此時代を称してアレクサンドリア時代と謂っ

ても適当であろう．Alexandria で学問の栄えるは前期と後期とに分けて考える事を要する．前期は即ち Ptolemy 王家が埃及(エジプト)に君臨した三百年間であり，後期は羅馬(ローマ)領になって以後の事である．

Alexandria はナイル (ニール) 河口，地中海に面した海港にして Alexander 大帝の建設した新都会であるが，世界通商上の大中心となり，博く諸国の人々が集まって，其人口の大半は外国人であり，真にコスモポリタンの都市であった．故に思想交換の上に至大の便宜が有ったのである．支配階級は勿論希臘(ギリシア)人であり，学問文芸は凡て希臘(ギリシア)語で叙述されたのであるが，東洋風の思想も著しく影響し，之をヘレニズムの文化と云うのである．希臘(ギリシア)風の文化とでも云うべきであろう．前の古典的希臘(ギリシア)文化に対立して考えられる．

一般文化の上から云えばそうであるが，数学や星学体系の組織等から言うときは，東洋の影響もあろうけれども，而(しか)も希臘(ギリシア)の天才に侍って成立つのであり，随分偉大な業績が見られる．其中最も雄大なものは Euclid の『幾何学原本』の著作，Apollonius の『円錐曲線論』の大成，Archimedes の重学や曲線等に関する研究の三者である．希臘(ギリシア)数学の最大業績は此三者と，後に出た Diophantos の整数論の研究とであると謂って宜かろう．星学に於ては Aristarchos の如き偉人が出て居る．『幾何原本』等の事は後章に説く事とするが，アレクサンドリア時代に此等の偉績を収め得た事は看過してはならないのである．

Euclid は Ptolemy 王朝の初期に Alexandria に在りて其幾何学書を作って，論理的に構成したのである．Archimedes は西紀前二一二年に歿しているから，『幾何学原本』成りてより約百年後である．Apollonius は時代が是より少しく降る．この二人は共に Alexandria の人ではない．

Archimedes より少し年少であった人に Eratosthenes があるが，彼れは Alexandria に来りて学び，大文庫の管理者となり，甚だ博学の人であった．彼れは『善悪論』の作もあるし，詩人にして又言語学者であり，地理，星歴の学にも精しかったが，又数学にも通じ立方倍積法に関する著述もあり，此問題の歴史をも記るしたと云う．素数を求める方法の研究もあった．晩年明を失い，食わずして歿した．

Nicomedes は Apollonius に尋(つい)で出た人で Conchoid と名くる曲線を発見し，之を画く為めの小さな器械を発明した．此曲線を用いて立方倍積の問題を解く，又之に依って角の三等分も出来るのである．此三等分法は彼れの業績と云う説もあるが，又後人の作なりとの説もある．

同時の人に Diocles が有り．Cissoid と云う曲線を作って，二線間の二つの比例中項を求めた．此二学者の伝記は多く知られて居らぬ．

Perseus は西紀前 2 世紀の人であるが，Spire に就ての著述があった．Spire とは一つの円を其一弦を軸として廻転して得るところの立体即ち円環を云う．円環の截面曲線をも研究したと云う事である．此種の研究は希臘(ギリシア)数学上には随分所見がある．円環及び円環の截面曲線の事が後年の和算家の間に在りても随分六かしいものであった事を思えば，希臘(ギリシア)の古代に於て此種の研究の見えているのは多とすべきであろう．

Zenodorus は Perseus より稍々(やや)後れた時代の人で，等周図形に関する著書が有ったと云う事である，周の長さ相等しき諸正多角形の中にて角数の最大なるものが面積も最大である．円面積は等周諸正多角形よりも大である．辺数相等しき諸多角形の中にては正多角形が最大である．此種の事を記るしたもので，此以前の諸書に所見はないと云う事である．彼れの書は今伝って居らぬ．

Hipparchus は星学大家であるが, 其観測は西紀前一六一年乃至一二七年間に行われたと云う．Epicycle 及び eccentrics の説は此人の創唱だと云う．星学上の必要からして三角法を創めたのも亦此人である．弦の表十二巻を作った．其計算には算術及び代数上の処理を要したであろう．平面上及び球面上の図形に関する問題に就て算術的並に図解的の解法をも行うた，

Heron は其生存年代が不明であるが，大概 Ptolemy 王朝時代末期頃の人と見て宜かろう．此名の人は二人あるが，今言うは前に出た方の Heron である．此人の数学は測量等の実用上のもので．純正幾何学風のものではない．彼れの師 Ctesibius は水圧機，漏刻，投石機等の諸器械の発明を以て名高い．彼れは或は此人の子であろうかとの説もある．彼れも亦発明の才に富み，Heron の噴水器と称する器械などが知られて居る．三角形の面積を其三辺の長さにて表わす公式を得たが，其算法は複雑なものであった．此公式は彼れが既に得たるに拘らず，他の希臘(ギリシア)諸学者が引用していない所を見ると彼れの作ではなく，第二の Heron か或は他人の作であろうかと云う説もあるが，第二の Heron なるものは果して居ったか何うかも問題なのである．彼れは平方根の算出にも工夫があった．そうして別に平方根及び立方根を求める為め二重仮定法 double false position 即ち支那にて所謂盈朒(えいじく)の方法を使用した事もある．

Heron の著書 Dioptra は測量術の書にして，其書名と同名の器械を用いて測量を行う事を説くのが主である．二点間

の一点が近づき得ざるもの，二点共に近づき難きものの距離や，二点間の高低，遠望によりて面積を測定する事などをしている．

希臘の幾何学は元来応用を卑しみ，純理論を貴んだものであるが Heron は之に反して応用を主としたのである．そうして彼れの如き学問が成立した．此事は甚だ注意を要するところであり，彼れは決して純希臘風の学者であったと見る事が出来ない．彼れは何うしても多大に埃及風を帯びている．彼れは埃及古来の単位分数の使用なども他の希臘諸学者よりも一層多くやっているし，埃及の古算法に似たようの事をも随分に説いているのである．Alexandria に於ける希臘学術は埃及の地であるだけに，埃及風の影響を受けた事の随分に在った事を見るべき，有力な標準となるべきものである．而も希臘の学問と希臘の天才とが之を開拓したのであるから，測量術乃至応用数学に於て彼れの如き極めて重大な発達を為し得たのである．彼れの学問は此の如き性質のものであるから，後に羅馬や其他の諸国に伝わり，影響する所が少なくなかったのである．

Geminus は西紀前七〇年頃の人，彼れは数学史の記述があったので知られているが．今日伝わらぬのである．唯之を引用したものが存し，今に有力な史料と為っている．彼れは又球の幾何学に就ての作もあった，けれども大なる価値あるものではない．

上来説述した諸学者の外に尚幾多の人物が出たのは言うまでもないが,『幾何学原本』,『円錐曲線論』, 乃至 Archimedes の諸研究が有った頃から以後は幾何学に於て大なる創意発見が余り著しくないのである．そうして其間に Heron の如き人物も出たのであり，学風が余程変化したと云うべく，希臘風文化開発の初期に数学の三大家が出て．希臘数学の大成された時代が，実に極盛の時であり，黄金時代であった事を見るべきであろう．何故に此時に極盛の状況を呈したかの如きは，蓋し最も注意を要するところでなければならない．

Ptolemy 王家の埃及統治下に於ける Alexandria を中心としての数学の発達変遷は今述ぶるが如きものであったが，埃及が羅馬領となるに及びても Alexandria の学問は幸に継承せられ，尚数百年間の命脈を続けたのである．此間に於ける数学の歴史も之を説く事を要するのであるが，姑く之を後に譲り，章を改めて希臘数学の三大偉人に就き一通り論究して見たいと思うのである．

第 9 章　『幾何学原本』の著作

Euclid の『幾何学原本』は希臘幾何学の集大成されたもので，極めて組織的に説述されて居り，其体系の完備せるを以て甚だ称すべきである．此書は其後長く行われ，之を亜剌伯語に翻訳するに当って幾多の苦心を積んだものである事は前に述べた通りである．西洋で幾何学上の唯一の教科書であり，Euclid と言えば直ちに幾何学を意味するに至った其原本を廃して他の教科書を作り之を学修するようになったのは極めて近代の事に属する．近年に至りて原本に拠らざる教科書が続々出で来たけれども，原本を多少改造したと云うようなものが基礎になったのであって，其組織の体裁等は決して全然改められたと言う事は出来まい．Euclid の斯界に遺した勢力の偉大なものであった事は，誠に想像に余り有るのである．

Euclid の『幾何学原本』は十三巻より成る．今の世に伝うるものは十五巻であるけれども，終りの二巻は後人の編述に係る．

Euclid は何地の生れであるか，又其経歴が如何なるものであったか，不幸にして多く知られて居らぬ．けれども Alexandria の大文庫が建設された時，アテーネから其主幹に聘せられたのは Demetrius Phalereus であるが，Euclid は恐らく此人と共に聘せられて数学の教授を開始したものであろうかと云う事である．或は言う，彼れは西紀前三六五年頃の生れで,『幾何学原本』の著作は三三〇年乃至三二〇年頃の事であったろうと．此事も固より充分に正確ではあるまい．けれども彼れが Alexandria の学問奨励の源頭に於て此地に来り相当に数学に就て活動した事に疑いはあるまいと思う．『原本』の著作年代も之に拠って察する事が出来る．

Euclid はアカデミー派の人であって，此派の学問思想に精通した人であったろうと云う事であるが，そう云う出身の人であればこそ『幾何学原本』の如き組織的の著述も大成されたのであろう．Platon が幾何学の諸定義諸公理等の事に就き研究の有った事は前に述べた．Euclid は此等のものを基礎に取り，又新しく考察をも加えたのであろうが，つまり其定義，公理を出発点として幾何学体系を具体的に記述構成したのである．アカデミー派で哲学的に準備を整えたものが，Euclid に至って幾何学組織の上に具体的に表現されたと云うべきであった．

『幾何学原本』の著作は Aristotle が演繹論理学を構成した直後に出来たものである事も亦注意を要する．此の演繹論理学は『原本』と同じく遠く後世までも大なる勢力を及ぼしたものであり，希臘の学術史上に於て極めて大切な成果なの

であるが，『幾何学原本』は幾何学の上に演繹論理法を厳密に適用して組織を整頓したもので有り，全く同一の精神から産み出された偉大な業績であると謂って宜かろう．Aristotle は哲学者なるが故に論理学を組織し，Euclid は幾何学者なるが故に『幾何学原本』を集成したのであろう．Euclid は論理的に次から次へと諸定理を証明し，一歩も妄りに仮借するところなきを期したのである．故に之を称して演繹論理的の証明体系と云う事が出来る．故に此書は単なる数学上だけの歴史発展から来た産物ではなく，希臘の哲学思想の発展上に関連して始めて成就された結果であると謂わなければならぬ．希臘にのみ此種の大著作が成立し，他の諸国に於て嘗て類似のものが出現しなかったのも，固より当然なのである．

Euclid が『幾何学原本』を作るまでには，希臘の幾何学が相当に発達し来った歴史の存する事も亦事実であり，上来説くところに拠りて大抵明らかであろう．其発達の集積したものがなければ，Euclid が如何に論理的組織の妙に富むと雖も，原本の著作は決してあれだけに完備され得なかったであろう．且つ幾何学の組織的著作も『原本』ありて始めて存したと云うのではない．Euclid に先って其著作を試みた人もあったのである．即ち Hippocrates，Leon，Theudius 等の原本があった．而も此諸本の中にて Euclid の原本は著しく勝れたるが為めに，此書の一出以来独り行われて他の諸本は駆逐せられ遂に影を喪うに至ったのである．

Hippocrates の事は前に記るした．Leon は Platon の門人の門人であって，其の『原本』の作は従来存したものよりもずっと大部にして証明も厳撰せられ，整うたものであったと云う事である．

Theudius も同じくアカデミー派の人で，此人の『原本』も良書であったと云う．彼れは従来格段な場合のみ論ぜられていたものを一般化する事などに功のあった人である．

此等の『原本』諸書は凡て失われて今の世に伝っていないが，Euclid に先って往々其著述の試みられたのを見ても，当時の希臘数学界に於ける風潮の如何なるものであったかを察する事が出来よう．即ち個々の問題を解き，個々の定理を作り若くは之を証する事などの専心研究された許りでなく，古来の業績を集めて統一し組織する事が要求されていたのである．Euclid も亦此風潮に乗じて出た偉人であった．彼れが彼の時出現したのは決して偶然でない．

Euclid の『幾何学原本』は右の如き事情で著作されたものであり，其功績は組織的に従来の既知知識を集大成したもので，書中に説くところは殆んど著者自らの創意発見と称すべきものがないと云う事である．直角三角形に関するピタゴラスの定理の証明が．著者自らの業績として知られた恐らく唯一のものであろう．原本十三巻中の第一，第二，第四の三巻中の事項はピタゴラス派の業績に属し第六巻中のものはピタゴラス派と Eudoxus との手に成ったものであり，不可通約量に適用すべき比例論は後者に属するもの，そうして第十巻及び十三巻中には Theaetetus の業績が多いと云う事である．此等の事に就ては勿論議論の余地もあるべく，今之を精密に言う事は出来ないけれども，書中に Euclid 自らの創意発見の記されたるものが甚だ少ないと云う事は異論はない．而も Euclid は既存の材料を適宜に取捨して之を論理的に排列し，あの体系を構成したのである．勿論当時知られて居った一切の材料を漏れなく取入れたものではない．彼れ自ら記るしているもので，原本中に漏れたるものもあれば，又他の人の記るしているものに就て之を立証するに足るものもあるのである．

Euclid の『原本』は著作当時の原形其侭では伝っていないらしい．現存の『原本』は七〇〇年後に至りて Theon が校訂したもので，多少の改竄が加えられて居り，そうして過誤も見出されないではない．其過誤は Theon の改鼠の結果で生じたもので，本来は完全無欠のものであったろうと説く人もあるが，実はそう計りではないらしい．Theon は内容にまで立ち入りて改竄したのではなく，字句を修正した位に過ぎないであったろう．此書は論理の厳密を守るの点に於ては現代の諸大家に比して一歩を譲るものではないのであるが，今日よりして厳正批判の眼を以て之を見れば，随分如何わしいところがないでもない．

現存の原本に於ては初めに点，線等の定義を記るし，次に三種の公準 postulates と十二種の公理とを挙げる．公理 axiom の語は Euclid の用うるところでなく，後年 Proclus の初めて用うる所に係る．Euclid は之を普通判断 Common notion と言っている．其公準及び公理に就ては古来甚だ議論の岐るる所であった．直角の公理と平行線の公理は元来公準中に存したのである．平行線の公準は後年に至り其論究からして遂に非ユークリッド幾何学を産み出す事となったものである．重ね合わす事の公理は原本中に取り落されている．

原本十三巻中，初めの四巻は平面幾何学であり，第五巻は一般の比例論にして，第六巻は相似形の幾何学を説く．次の七巻より九巻までは算術にして，第十巻に無理数を説き，十一巻乃至十三巻には立体幾何学が論ぜられ，正多角形を説きて正多面体に及び，終末に至るのである．Proclus の言う所に依れば，Euclid の『原本』著作は正多面体の作図を論理的に行う事が理想であったとさえ言う事である．勿論必ずしもそうではあるまい．

現存の『幾何学原本』には第十四，十五の二巻が見えているが，此二巻は Hypsyeles 及び Damascius が追記したもの

だと言う事であり，立体幾何学を説く．

Euclid は嘗て埃及王 Ptolemy に『原本』を措て他に幾何学を学ぶ為めの簡易な道はないかと尋ねられ，幾何学に到達すべき王者の公道は他に存せずと対えたと伝えられている．又嘗て一青年の Euclid に師事したものが，幾何学を修めて何の益ありやと問うたので，一僕を呼び，此若者は学問に依って金儲けを欲するものなりとて，銭を取って之を与えしめたと云う．

Euclid の門人中には多く傑出の人物はなかったらしい．又其門人の事蹟も余り伝っていないのである．

Euclid は尚他に著作があるが，凡て之を略する．

第 10 章　『円錐曲線論』の大成

Apollonius の『円錐曲線論』の大成は年代より言えば，Archimedes よりも稍々後れて居るけれども，其学問の系統の上から言うときは，Euclid の『幾何学原本』の著作に続いて之を説くのが順序であろう．故に本章に於て之を説く事とした．

Apollonius は Perga の人，西紀前三世紀末の二十年許りの間に歿したと云う．彼れは Alexandria に来りて Euclid の後継者に従いて学び，又 Pergamum に遊びて Eudemus に学んだらしい．Eudemus は幾何学史に関する著述の有った人である．Apollonius の『円錐曲線論』の初三巻は此人に奉献したものであった．此書の作あるが為めに彼れは大幾何学家の称を博した．其伝記は詳かでない．

彼れの『円錐曲線論』は八巻より成り，初四巻は希臘語の原文が伝わり，次の三巻は後に亜剌伯語訳が見出されたが．第八巻は未だ発見された事を聞かぬ．初三巻に説く所は従来の諸学者の所説も多く撰ぶ所はない．Eutocius が Geminus の書を引用して言う所に拠れば，此三巻は Menaechmus，Aristaeus，Euclid，Archimedes 等の諸書に基いて説いたのであるが，余の諸巻は殆んど全く創見に係ると云う事である．初三巻は成るに従いて之を Eudemus に贈り，其死後に至りて他の諸巻は之を Altalus なる人に贈ったのであった．

Apollonius は初巻の序に於て，三種の截面の成立，共軛双曲線及び其特質等の事に就て諸先賢の著書に見るよりも委しく且つ一般的に論じたと言っている．Menaechmus より以来．従来円錐曲線を論ずるものは凡て三種の円錐を一辺に垂直に截る事にしていたのであるが，是に至りて始めて同一の円錐を色々に截って三曲線を得る事にしたのである．是れまでは鋭角錐，直角錐，鈍角錐の截面と称していたものが，此生成方法の異同に依りて最早意義を成さぬ事となり新たに楕円 ellipse，抛物線 parabola，双曲線 hyperbola と称する事になった．楕円及び抛物線の名称は Archimedes の書中にも見えるが，或は後の竄入らしいと云う．

従来は直円錐の截面のみ説いたのであるが，Apollonius は直円錐でも斜円錐でも共に取扱って居る．そうして円錐を截って得た曲線に就て一貫した原則を立てて組織的統一的の一大体系として説いているのが，如何にも立派なものである．Euclid は円錐曲線等を除外しての幾何学の体系を立てたのであるが，Apollonius は円錐曲線に関して組織的の研究を敢てしたのであるから，Euclid の事業を続いで之と対比すべき偉績を挙げたのだと見る事も出来よう．

『円錐曲線論』の第一巻は三曲線の生成などを説き，第二巻には漸近線，軸，直径等の事を論じ，第三巻には弦や漸近線や切線や其他曲線関係の諸直線の生ずる直線形の事を述べ，又楕円及び双曲線の焦点の事など説く．

第四巻には二曲線の関係を述べ，二つの円錐曲線は四点以上にて交り得ざる事なども言っている．

第五巻には一点より円錐曲線上に引ける最長最短の線の事なども見え，極大極小の論ぜられているのは，他に多く見ざる所であった．

第六巻には曲線の相似の事を説く．

第七巻には共軛直径の事が記るされて居る．第八巻は伝って居らぬが，共軛直径の事の続篇であったろうと云う事である．

Apollonius の円錐曲線の研究上には準線 directrix の事も見えず，又抛物線の焦点には想い及ばなかったようである．術語や記号の使用が行き届いていないから，叙述は甚だ冗長に流れた弊もあった．此等の欠点は固より免れないけれども，円錐曲線に関する論究は甚だ完備したものである事に異論の有るべき筈もなく，之と対比し得べきものは希臘に於ても他に求める事は出来ないし，他の諸国に於て一も見る事がないのである．支那や印度には類似のものが更にない．和算家は楕円に就て盛んに研究したけれども，抛物線や双曲線の事は僅かに論じ及んだ事が有るのみに過ぎず，彼れの如く整頓したものに成り得なかったのであるし，彼れほどの成果を挙げる事も出来なかったのである．此れから見ても Apollonius の業績の傑出し偉大であった事を想見するに足りよう．彼れは実に希臘の生んだ大天才者流の一人であって，

誠に追慕に堪えない.

Apollonius は『円錐曲線論』の外に尚他の著述もあったのであるが，多く失われて今に伝って居らぬ．中には亜剌伯語の訳書が発見されたものもあり，『接触論』と題する書には三円に切する第四の円の問題が記るされていたろうと云う事である.

第 11 章　アルキメデスの数学

Archimedes はシシリア島 Syracuse の人，Apollonius より少し時代が早い．嘗て埃及に遊び，Eratosthenes 等と親交があったと云うから，恐らく Alexandria で学んだのであろう．古来の数学に就て知らざるなく，通ぜざるなしと云う有様で，極めて博聞多通であったのは，当時の学問研究の中心地で修学した結果であろうかと思われる．けれども彼れは Alexandria に留まらずして郷国に帰り，王 Hieron の厚遇を受けた．彼れは甚だ発明の才に富み，戦具等の発明も多かったと云う．羅馬の将軍 Marcellus が水軍を率いて Syraces を攻めた時，彼れは大反射鏡を作りて羅馬の軍艦を焼棄したと云う事であるが，固より単なる伝説に過ぎまい．けれども其発明の能に優れていた事を称する為めに生れた伝説であろう．Syracusa は攻守久しきに亘りて遂に敵手に落ちたのであるが，此時羅馬の将軍は彼れの才を惜みて，彼れに危害を加うる事を禁じたけれども，此時彼れは落城の憂き目をも他処に砂盤上に図形を画いて研究していたところ，一兵卒の近づくを見て叱したので，兵卒は怒って之を殺したと言い伝えられる．事実の真偽は姑く措き，篤学彼れの如きものがあろう．敵将は彼れの為めに墓碑を建て，記念に図形を刻んだのであるが，後に羅馬の政治家 Cicero が此地に遊んだ時に其碑は荊棗の間に埋もれていたと云う事である.

Archimedes が当時に重んぜられたのは．発明能力の為めであるが，彼自らは純正学術を尊んだのである．日用の事に関する術は卑野にして重んずるに足らずとは，彼れの言う所である．彼れは純学術上の著述も多かったのであるが，凡て今の世に伝っては居らぬ．けれども今存するものも数種に上る.

『測円論』に於ては先づ円周の長さに等しき直線を底とし半径を高さとする三角形は円面積に等しき事を証し，次に円の一切線を底とし中心に頂点を有する正三角形を取りて，中心に於ける角を次々に二等分して，算法を立て，$\pi < 3\dfrac{1}{7}$ なる事を証した，更に円内に正六辺形，十二辺形を内容して，次々の周を測り，円周の長さは

$$(\text{直径}) + (\text{直径}) \times \frac{1}{7} > (\text{円周の長さ}) > (\text{直径}) + (\text{直径}) \times \frac{10}{71}$$

なる事を証した．彼れが円周率として $\dfrac{22}{7}$ なる値を得たのは有名な事実であるが，実に此研究を指すのである.

『抛物線求積論』に於ては器械的と幾何学的の二種の求積方法を説いている．両方法共に尽去法を使用しているのである．其算法は近代の微積分学発達の階梯を成すものとも云うべく，極めて貴重なものであるが，無限小分 infinitesimal の概念は之を避けているけれども『方法論』の著に於ては無限小分も随分正確に使用されて居り，甚だ見るべきである．此種の算法を用いた事が，則ち彼れの幾多の新研究に能く新機軸を出し得た所以の素因となるのである.

楕円の求積も研究しているが，双曲線の事には余り注意を寄せなかった．但し円錐曲線に関する著述も有ったようである.

『球と円壔』と題する書は，彼れが最も得意の作であり，球面積は大円積の四倍であり，球の立積及び表面積は外接円壔の立積及び表面積の三分の二になる事などをも証している.

『螺線論』には Archimedes の螺線として知られた螺線を説く．此螺線の研究は蓋し彼れから創まる．彼れは尽去法を用いて之を論じたのであるが，其論究は甚だ見るべきものがある．Euclid 及び其以前には尽去法は証明上に応用するのみのものであったが，是に至りては此算法を用いて新関係を発見開発するの用を成すに至ったのである.

又楕円を長軸又は短軸の周に回転して得るところの立体をも論じた．即ち和算家の所謂長立円及び矮立円がそれである．抛物線及び双曲線を其軸の周に回転した立体をも論じた．之を conoids と云うのである．即ち回転抛物線体，回転双曲線体である．彼れは此諸立体の立積を求めている.

Archimedes は一種の方法を創めて角の三等分等の幾何学的図形の作図を案出した事もある．此算法に於ては目盛りのある定木を使用したと云う事である.

Archimedes は重学に就ても重要な研究があって重学の事は彼れに先だちて Aristotle の業績もあるけれども，彼れに至りて甚だ整頓したと言って宜い．前には器械などの事に就て科学的に組織する事は企てられたものの未だ其目的を成すに至らなかった．然るに Archimedes は能く重学的事項の特質を捕捉し，数学的に之を解する事が出来たのである．槓桿の研究の如きも其一つである．我に支点を与えよ，我能く地球を動かさんと言ったとは，彼れに就ての名高い説話であ

る．又重心の事や液体静力学等に関する研究もあるし，比重の問題なども研究した．

比重に就ては Hieron 王の金冠の問題が甚だ世に著聞する．即ち王の為めに新たに造るところの金冠が果して純金の作なりや将た銀を混じてあるかが問題であって，之を決する事が出来なかったのであるが，Archimedes は之を攻究するの時に当り入浴中不図身体の軽くなった事を感じて俄かに其解決を思い付き，金冠と同量の金塊と銀塊とを取って之を水中にて秤量し，依て銀の混入量を論定したと云う事である．此決定方法に就ては一二の異説もあるが，兎も角，銀の混入に就ては之を看破したのである．

Archimedes の業績に就ては尚言うべき事も多いけれども，今煩を厭いて凡て之を省くけれども其研究は頗る時流を抜いたものであり，Archimedes の問題と言えば難解の問題を意味し，彼れの証明と言えば確実疑うべからざる事を意味するものとなったと云う事である．

Euclid，Archimedes，Apollonius の三大家が相尋で輩出した時代は実に希臘(ギリシア)数学の黄金時代である．彼等三大家の手に依りて希臘(ギリシア)の幾何学は大体の完成を告げたのである．更に此以上に踏み出さんが為めには恐らくは後代の解析幾何学や微積分学を要したであろうが，此等の新学術は希臘(ギリシア)では起きなかった，そうして三大家を最高発達の記念として其以後に幾何学の上に著大な発達を認める事は出来ないで，寧ろ算術代数の発達が希臘(ギリシア)数学後期の獲物であったとも言えよう．其事は後に之を説く事としよう．

此三大家以後に於ける Ptolemy 王朝治下の Alexandria の数学に就ては前既に之を述べた通りである．

第 12 章　アレクサンドリア後期の数学

Ptolemy 王朝治下の Alexandria の数学に就ては前既に之を説くところがあった．此王朝の滅びてより埃及(エジプト)は羅馬(ローマ)の所領に帰した．妖艶の女王クレオパトラが Caesar と Anthony を翻弄したのは其時の事である．Alexandria は既に羅馬(ローマ)領となっても，東西の商業交通の大中心としての地位は更に変る事なく，益々世界的大都市として発展した．世界諸国の人々が多く在留している．一方に基督(キリスト)教が拡まり，又一方には新ピタゴラス派並に新プラトン派の哲学も発達した．此等の哲学諸派は希臘(ギリシア)の古典哲学に負う所の多きと共に，又東洋思想の関係も少なからざるものであった．そうして数学並に諸般の学術も亦永く此地に於て存続し開発する事を得たのである．勿論希臘(ギリシア)古来の学風を伝えているから，幾何学が甚だ重んぜられたのは言うまでもないが，而(しか)も単に幾何学のみ特殊の発達をしたものでは決してない．代数学が古典時代並に Ptolemy 王朝時代に比して遥かに優秀なものとなった如きは，著しい実事であった．Alexandria の後期の数学発達に就て今之を説き，前期の状態との比較の便に資する事としたい．後期の学問が存続したのは数百年間に亘るのである．

Menelaus は後期の幾何学者として名を知られた最初の人で，西紀後一世紀の終りに球面学の著があった．希臘(ギリシア)語の原文は伝わって居らぬが，ヘブライ訳及び亜剌伯(アラビア)訳が現存する．球面上に書ける三角形の事に就て『幾何学原本』中に平面三角形を論ずるが如き態度で説いて居るのである．球面三角形の三辺の和は大円周よりは小にして，三角の和は二直角よりも大なる事を証し，平面並に球面三角形の三辺を截る線に就ての関係なども説いている．

Claudius Ptolemy は二世紀初年の人，星学大家として名を知られている．其星学書並に地理書は今も伝わり，甚だ著名なものである．星学書は亜剌伯(アラビア)訳名によりて Almagest の名を以て知られている．旧来の学説を集めて著述したもので，近世に至るまで長く行われて斯界を支配したものであった．其説に依れば地は宇宙の中心に位し，日月諸星は之を周遊するものなりとしたのである．之を Ptolemy の宇宙体系と云うのであり，是より先き Aristarchos の如きは太陽を以て太陽系の中心なりと説き，Seleuchos も亦其説を唱えているが，固より多く行われなかったのである．Aristarchos は絶世の大家なるに係らず，其名さえ旧来多く伝うる所がない．

Ptolemy は星学用の為めに三角法を著しく完全なるものにした功績があった．星学大家 Hipparchus が三角法を創めてより，是に至りて大に整うたものになったのである．三角法の事は Almagest 十三巻中の第一巻及び第九巻に記されている．円周を三百六十度に分ち，六十分六十秒に分つ事を用いている．弦の表の計算法をも説く，此の六十分法はバビロンから伝ったもので，前から知られていたのであるが，弦の表の計算法は Ptolemy の創意に基づくと云う．其三角法は平面並に球面共に論じているが，主として後者に精しい．希臘(ギリシア)の三角法は三角法其物の為めに開拓されたのではなく，星学上の必要から来たのであるから，平面よりも球面の部が著しく進んだのも不思議はないのである．

Ptolemy は幾何学に於ては平行線公理を自明のものとは見なかったと云う事である．之に関する研究は幾何学史上極めて大切なものであり，遂に非ユークリッド幾何学の樹立に到達するのであるが，最も其先を為したものは即ち Ptolemy であった．固より更に其先を為すものもあるが，先づ之を以て最も著しいものとするのである．

Ptolemy は地球面上の地図並に天球図を平面に描写する為めに一種の投射法を用いた．其投射法は Hipparchus の創

むる所にして，眼を一極に置き，赤道面上に投射したるものを用いたのである．又別種の投射法を用いて天球を三つの正交平面上に表わす事をもした．之を用いて星の出入などを定めたのである．又之に依りて球面三角形に関する図解的解法をも得た．そうして其算法は印度や亜剌伯から欧洲の近代までも行われ来たのであった．

Ptolemy と時を同うして Nicomachus 及び Smyrna の Theon があった．二人共に整数論に長じで居た．後に Diophantos の代数学が成立するは，此れから発しているのである．けれども幾何学に於ては此頃から以後随分長く知名の大家が出て居らぬ．

幾何学に於て此後に出た大家は Pappus である．彼れは西紀三四〇年頃 Alexandria に居った人であるが，幾何学の大家としては此人を以て最後とする．而も彼れの天才は Alexandria 初期の三大家には固より比すべくもない．けれども当時幾何学の衰退した時代の事であるから，彼れの業績は遥かに時流を抜いたのである．彼れは『幾何学原本』及び Almagest 其他の諸書の註解もあったと云うが，今日伝って居らぬ．其著『数学論集』八巻は残欠しながら現存する．書中に記るすところは，希臘幾何学の諸大家の作に就いて有益な記載を残したものが多いのである．又 Pappus 自身の創意に属するものも記るされているのである．

Pappus が平面図形の重心を用いて，此図形を回転して生ずる立体の立積を説いている事は甚だ著しい事である．所謂 Guldin の定理と称するものは之を指す．Guldin 以前に彼は早く既に之を説いていたのである．

又円積曲線に就ても有益な研究があった．球面螺線の研究も有る．

Alexandra の Theon は Pappus と凡そ同時代の人であるが『幾何学原本』の校正をした，今の世に伝うるところの原本は即ち是れである．又 Almagest の註解をもした．其中に希臘の算術に関する記述がある．

Theon の娘に Hypatia がある．哲学並に数学に通ずるを以て名を知られていた許りでなく又有名な美人であったと云う事である．Diophantos 及び Apollonius 等の諸書の註解の作があったと云うが，伝って居らぬ．キリスト教徒の迫害を受けて西紀四一五年に悲惨の最後を遂げた．Alexandria での数学は先づ此時に終ったと言ても宜い．此時以後には見るべき程の事はないのである．キリスト教が甚だ勢力を振うようになって，学問の開発は望まれなくなったのである．キリスト教は学問の発達上には極めて不利な状態を呈したものであった．

アテーネに於ても古典時代以来勿論学問の伝統は続いていたのであるが，此地からは最早多く数学の大家は出なかった．然るに Alexandria の学問が勢力を失うに至りても尚アテーネの学校は存続し，Proclus の如き人が出た事もあった．彼れは『幾何学原本』の註を書いている．現存の部は第一巻のみであるが，幾何学史に関する有益な史料を載せている．

又 Damascus の人に Damascius があり，原本第十五巻の作は此人の手に成ったと云う事である．

Shimplicius なるものは，円の求積問題に関する歴史上の作があり，有益な史料となっている．又 Zeno の詭弁に関する有益な論究もあった．

アテーネの学校は羅馬帝 Justinian が五二九年に閉鎖してから，遂に其存在を断ったのである．此以後に於てビザンツ即ちコンスタンチノーブルに於て希臘の数学は他の学問と共に多少伝えられて居り，亜剌伯の学術勃興の時にも大きな関係を持つのであるけれども固より特に論ずべき程の業績が有ったろうとは知られて居らぬのである．

Alexandria の後期に於て最も傑出した数学大家は固より Diophantos であり，整数論及び代数学の上に偉功があった．此人の事は本章に於て論じなかったけれども，次に章を改めて希臘の算術代数に就て説く事としよう．

第 13 章　希臘の算術及び代数学

希臘の数学に就て述べ来ったところは主として幾何学の発達の事であり，算術及び代数学に関する方面は多く之を閑却したのである．希臘の数学が幾何学を主としたものであった事は言うまでもないが併し算術代数とても全く欠如したと云う訳ではない．今，本章に於て之を説く事とする．

希臘でも計算には小石を用いたり又一種の算器を使用した事もある．加減並に乗法など多く算器で行うたものであろうと云う．又別に記号を使って計算する仕方もあった．此種の算法の見えているのは，希臘の数学としては早き時代のものに属するのである．除法並に開平方の如きも随分複雑で面倒なものであったらしい．

Archimedes の『砂算』は極めて有名なものであるが，或る仮定の下に宇宙間に充満し得べき砂塵の数を算定したものである．其数は第八番目の八桁の数に当ると云う．即ち 10^{63} に当るとしたのである．彼れの此計算は紀数上の記号を改良するの意志から試みたものであろうと云う事であるが，其改良を成し得たやは知られて居らぬ．

此計算に於て八桁づつに切って考えているのは，支那で万より以上の数を数うる為めに万万を億とし，万万億を兆とし，八桁づつで進む命名法の存したものに似ている．希臘では万 myriad で繰返して数えたのである．近代の西洋で千

thousand で繰返して数えるのとは違っている．

Apollonius は数を書き表わす仕方に改良を施したと云う事であるが．如何なるものであったか知られて居らぬ．印度(インド)で発達した亜剌伯(アラビア)数字の如き便利な紀数法は希臘(ギリシア)では遂に成立しなかったのである．

希臘(ギリシア)では数の学と計算法とが厳然区別されていた．前者を Arithmetica と云い．後者を logistica と云う．前者は数学にして後者は算術と言えば宜いのである．支那で算術，算法，算学，数学等の名称が凡て数学全体を意味するものであったのとは，甚だ事情が同じでない．此点にも希臘(ギリシア)数学の論理的なところが見える．希臘(ギリシア)では何処までも理論と実用とを区別したのである．詭弁家などは好んで計算の術を修めたものであったが，Platon になると理論的の数の学を重んじ．計算の術は卑近なりとして貴ばなかった．希臘(ギリシア)で計算法が余り見るべきものでなかったのは，此種の態度で之に臨んだ事も一因であったろう．

数の学は恐らく Pythagoras から始まる．彼れは埃及(エジプト)の僧侶に就て学び又或はバビロンにも遊んだであろうと云う事であるから，彼れの数の学には外来の関係も無いではないであろう．彼れは数を以て宇宙の根本と為し数に神秘的の意義を附した．此点は支那に於ける易の宇宙観と似通うたところもある．

ピタゴラス派では数の奇偶を別ち，一より始まれる諸奇数の和は必ず一平方数なる事などを説く．6，28，496 等の如く其数の各因子の和に等しき数を完全数 Perfect number と名ける．此種の事が甚だ重要視して説かれているのである．又，比例の事なども好んで之を説いた．算術的，幾何学的，調和的，音楽的等と名づくる諸種の比例をも論じた．

ピタゴラス派では数の学と幾何学とには対立の関係あるものと見做し，勾股弦の関係につきては之に対する整数解を考える事などやっている．無理数の事なども論究されるようになった．不可通約の比が論ぜられるようになったのも，これからである．不可通約量の事は Euclid が能く之を論じ，其後は多く進歩を見ずして近世に至った．

二次方程式に関する事項は幾何学の関係上から早く現われている．西紀前五世紀に於て Hippocrates は面積の問題に関して二次方程式

$$x^2 + \sqrt{\frac{3}{2}}ax = a^2$$

に相当する事を説いているが，幾何学的の解は『幾何学原本』の成るに及んで作られている．此書中に二次方程式の幾何学的取扱方とも見られるような事が幾らも出ている．又第七，八，九の三巻は数の学にして，二数の最大公約数を求める算法や，素数の事なども見えているのである．

『幾何学原本』の一出以来，数の学は多く進まなかったのであるが，唯，Eratostenes(西紀前 275–194) は素数を求める考案があり．Hypsicles(西紀前二世紀の人) は級数などに関する研究があった．此後長く数の学に関しての所見はない．

然るに西紀後百年頃に至りて新ピタゴラス派の学者に Nicomachus なるものが出た．此頃からして数の学が好んで研究される事になって，幾何学は廃止されたのである．彼れは『数論概説』の著があり，当時甚だ著聞したものである．後に此書の註解をしたものも少なくない．幾何学の関係を離れて数の学を説いたものは，蓋し之を以て嚆矢とする．『幾何学原本』には数を説く為めに線を用いているが，是に至りて数を以て説明を試みる事となった．説くところは勿論古来の算法を集成したもので，多く著者自身の独創研究は認められない．其創始と思われるものの中に，立方数は必ず次々の奇数の和に等しき事が見える．即ち

$$8 = 2^3 = 3 + 5,\ 27 = 3^3 = 7 + 9 + 11,\ 64 = 4^3 = 13 + 15 + 17 + 19$$

等となる．此関係は後に立方数を求める為めに用いられる事となった．

Smyrna の Theon は各平方数若くは，之より一を減じたるものは．三若くは四若くは両者にて割り得られる事を述べている．

三世紀初め頃に伊太利(イタリア)に居った Hippolytus は九と七とを除去して検しを行う事を創めた．

代数関係の事項は Nicomachus，Smyrna の Theon，Thymaridas 等の著書中に散見する．中に未知数と云う意の語も見え，代数学の成立すべき状況の近づきつつある事を見る．有名な『家畜問題』と称するものの如きは，七方程式より八種の未知数を定めんとするもので，不定の問題であるが，つまり不定の二次方程式に帰着するのである．此問題は Archimedes の作だと云う．

又，四管より桶に水を満たす問題もある．此種の問題は幾らも見えているのであって，代数的に之を解けば甚だ容易なものであるが，此等のものの行われた結果として遂に Diophantos の手で代数学が発達する事となったものであろう．

Diophantos は Alexandria の数学者中最も後に出た偉人であるが，其伝記は詳かでない．又彼れの年代も異論が多い．蓋し二世紀中葉若くはそれより早からざる時代の人であったろう．彼れの著書は希臘(ギリシア)語で書いてあるけれども，他の希臘(ギリシア)

学者の如く幾何学に関しては何等説く所なく，頗る趣きを異にしているのである．彼れあるが為めに希臘の代数学は立派な成立を見たと言っても宜かろう．彼れの著書は世に伝わらぬものもあるが，其大著『数論』は大部分現存し，之に依りて彼れの造詣を窺う事が出来るのである．

此書には代数的の記号に依って代数方程式を表わしたものがあり，其解法も解析的にして幾何学的の方法を用いていない．彼れは減ずべき数へ減ずべき数を乗ずる時は加うべき数となる事を言っている．即ち負数と負数との乗法を云うのである．けれども独立した負数なるものの事は更に見えて居らぬ．又記号をも用いていると云うものの盛んに之を用いる事はしていないのである．多くは言葉で言い表わして居る．

連立一次方程式の解法は支那の方程の算法とは大分趣きを異にする．

又二次方程式の解法も見える．『幾何学原本』中などには此種のものは幾何学的に処理したのであるが，Heron 等は多少代数的に取扱うた事もあったと云う．Diophantos は解法を委細に述べたところがない．解だけは凡て記るされている．諸所に記るしているものから見るときは．方程式の諸項は凡て正になるように置いたもので，従て

$$ax^2 + bx = c,\ ax^2 = bx + c,\ ax_2 + c = bx$$

の三形式を取りて，夫々之を解いたのである．何れの場合にも一根だけしか探って居らぬ．希臘の数学者中に二根又は其以上の根を求めた人はない．又負根や無理数の根をも記るしていないのである．

Diophantos は上述の如き方程式をも論じているけれども，其論究は初巻に記るされている許りで，二巻以下には不定方程式

$$Ax^2 + Bx + C = y^2$$

や其他此種の形式の連立不定方程式など論じている．数種の解を求めた場合もあるが，有り得る丈けの一切の根を凡て求める事はして居らぬ．

Diophantos は取扱う所の方程式を既知の形式に変形して之を解く事が頗る巧みであった．其論ずる所は甚だ種々の場合に及ぶ．而も分類は試みていない．解法も亦雑多であり，一般解法と云うものはやって居らぬ．各問題に就て別々に解を試み，他の問題には適用し得べからざるものが多い，

Diophantos の算法は他の希臘諸学者が幾何学を貴び且つ証明を厳にしたものに比して頗る色彩の同じからざるを以て，彼れは東洋風の影響を多大に受けたものではなかろうかとの疑いもないではない．けれども印度の整数論や代数学の発達は時代が稍々後れているようであるし，印度の影響であろうとも思われぬ．故に他国から伝来したものではないであろうが，併し埃及乃至西南亜細亜地方で算術が行われていた学風の少なからず影響している事に疑いはないであろう．そうして希臘の天才を以て斯の如き影響を受けて新たに開発したので，ああ云う成績の挙げられる事になったものであろう．こう見るのが恐らく最も適当であろうと思うのである．

第 14 章　希臘数学の回顧

希臘数学の発達に就ては以上十余章を設けて説述したのであるが．更に其発達に関して観察を試みて見たいと思う．我等の第一に感ずる事は．希臘は他の諸国とは異なりて幾何学が甚だしく発達した事である，そうして其幾何学は論理的に構成されたのである．作図方法のあれだけ厳密に考えられた所が，果して何処にか有ろう．埃及の学問を伝えて，幾何学的事項の重きを成した事は，固より一因で有ろうが，併し単にそれだけであれ程の発展は到度望むべくもなかったであろう．

此事に就て適当に観察せんが為めには，希臘文化の性質から考える事を要する．希臘の建築は荘厳にして甚だ優雅なものが有る．是れ恐らく埃及の建築から学ぶ所の多かったからの事もあろうが．美術上から見て固より新味に乏しくない．又彫刻の極めて優れているのは，蓋し独特の域に入っている．是亦埃及の彫刻に負う所も多かったであろう．優美な大理石の良材に富める事も関係が有ろう．けれども形体美に対する憧景の厚かった事にも深い源由を認めなければならない．オリンピア競技の盛んに行われたのも，体格の優美を誇る精神が含まれていたのである．希臘人の形体に関する観念は誠に特別なものである．此の観念あるが為めに，之を数学の上に移すときは彼れの如き幾何学の発達となったのも，固より当然であろう．何等の怪しむべきものがない．

けれども彼れ希臘人にして論理思想に富み研究に精進する事がないでは．如何に形体の観念が強烈であっても幾何学体系の組織にはならなかったであろう．然るに希臘人は極めて理屈っぽいものであり，何事でも理で推さなければ気が済まぬのである．故に論理学も立派に構成されるし，哲学も雄大な組織を成したのである．其同じ精神が幾何学の上に働

き，論理的の構成を成すに至ったのである．希臘の幾何学は何処までも希臘精神の理想的に表現された産物であると謂われよう．他国に嘗て類例のないものの造り出された理由は全く玆に存する．

希臘の星学が他の古代諸国に於て主として暦術の発達に過ぎないものであったに反し，暦術は大なる価値を認められずして却って幾何学的に宇宙体系の構成に向って全力を傾注し，其結果も亦甚だ見るべきものありて，Aristarchos が太陽を以て宇宙の中心と為し，地球も諸星も皆太陽の周を回転すると考えた如きは，全く近代に於ける Copernicus の学説を希臘の古代に於て既に樹立して居たのであり．彼れの如きは古今東西を通じて星学史上の第一人者たる事疑うべくもないのであるが，希臘の星学が斯の如きものになったと云うのも．つまり幾何学的に練磨された精神で研究したからの事に外ならぬ．地球の球状を成す事の幾何学的証明なども勿論甚だ称するに足るものが有った．支那の暦術史上隋唐の時に至るまでは遂に地の球形なる事を覚り得ず，そうして其後再び之を忘れた事情に比すれば，雲泥も啻ならぬであろう．

希臘では甚だ幾何学を重んじた．故に算術代数の事は其発達が却って遅れたかの観がないでもない．幾何学に於ても作図は必ず定木と円規とのみを用いて行うものと考えているから，作図不可能の問題が続出し，種々の器械的の工夫や諸曲線を用いて作図する事も多く案出されながら，之を器械的解法と称して厳に幾何学的作図と直別し，美しく貴ぶべきものとはしなかったのであった．之が為めに諸曲線の研究等は当に進むべくして多く学者の研究を集注せしめる事にならなかったように思われる．是れ即ち著しい長所が却って邪魔になり，進歩を妨ぐる事になった適例とも謂えよう．

算術の如きも亦厳密に之を論ずる事を願うからして，整数に関する算法を整数以外のものに及ぼす事が不合理と解せられ，ここに同じく発展の途を遮るような結果になった事もある．円の算法にしても多く幾何学的にのみ取扱うからして，円周率の算定上に甚だ精密な結果を得難かったような事になった．若し之に関して算術的代数的に処理する事が今少し自由に行われたならば，遥かに数歩を進めて無限級数の展開法を樹立するとか，又は積分方法の上に便宜な考案が創められるとか云うような事も有り得ないでもなかったのであろうが，此等は凡て実現せずして終る事になったのである．

けれども希臘でも後には算術代数の発達をも見るに至った．此れには恐らくバビロンや其他東方の学問が影響していたろうかと思われる．バビロンの関係は星学上などに多かったようで，希臘で占星術が行われるようになったのはバビロンから伝ったのだと云うし，円周を三百六十分する事などもバビロンから来たのである．そうして算術に関係のあった人物には西亜細亜出身のものが随分に有るようであるし，そう云う事も考えて見なければならぬであろうと思われる．遂に最後の頃に至って整数論や代数学の成立するのも，そう云う関係を度外に措いては正当な観察は出来難いであろう．

希臘の数学哲学乃至諸科学は初め希臘本土で起きたのではない．諸方の殖民地から起きた．そうして其関係者には医家などが多かった．然るにアテーネの文化が燦然として起こるに及び，哲学や数学もアテーネで開拓される事になるのであるが，アテーネの文化は其以前の殖民地文化とは稍々色彩が同じでない．アテーネでは文学，芸術，哲学等が異常な発達を途げるのであり，医学や諸科学はアテーネでは大きな発展を見なかった．数学の如きもアテーネで開拓されはするが，アテーネ人は多く関与せずして，外界から来た人に功績のある人が多かった，けれどもアテーネの哲学に依って甚だしく理論的のものにされたのは著しい．

然るに Aristotle の出づるに及び，彼れは哲学に於ても絶世の偉功を建てたと共に又博物学等に尽くすところが多かった．彼れはアテーネで学び，アテーネで研究もしたけれども，アテーネの人ではない．彼れの父祖はマセドニア王家の侍医であり，彼れも亦其道に精しく，彼れは生物学の研究などに素養があったのである．そうしてアレクサンドル大帝が波斯地方を征して幾多の材料を得て彼れに送った許りでなく，東方の実際的学風が彼れに伝ったのではなかろうかとも思われる．彼れの科学史上に於ける造詣はそうして成立ったのであろう．

此時代に尋で『幾何学原本』や『円錐曲線論』及び諸曲線の研究，星学体系の完成，三角法の成立，此等の事が盛んに出現したのは，勿論希臘人の天才に俟って成就するのは言うまでもないけれども，又一方には眼界の拡まった事や，東方の思想乃至学風が伝って好感化を及ぼした事が関係していないであろうか，勿論其事情を的確に立証する事は六かしいであろうけれども，全く何等の関係もなかったであろうと考える事は六かしいように思われる．我等が斯く考うるのは，決して学説や成果を東方から伝えたろうと云うのではなく，精神的に一種の良好な影響を受けたものが有るであろうと見たいのである．其完成は勿論希臘の天才に待って始めて成立ったと見るの外はあるまい．

けれども羅馬治下の時代にもなると，時勢は余程変化する．希臘人古来の意気は再び求める事が出来ない．故に幾何学の如きは多く発達する事が出来ないのであるが，東方や埃及本来の感化影響を受ける事が極めて大にして，玆に算術，代数の方面に於て発達を見る事となったのであろう．然るに今やキリスト教が次第に勢力を得る事となり，其教儀を拡める事に熱心にして，之に接触するもは必ず抑圧せざれば止まないのである．是に於て自由研究の精神は次第に其跡を潜め，

羅馬（ローマ）が滅亡して諸蛮族が勢力を振うに至っても，基督（キリスト）教が彼等の間に伝播して長く諸科学の勃興を許さなかった．基督（キリスト）教が科学研究上に大なる妨害を与えた事は実に言うべからざるものがあったのである．

思うて是に至れば，希臘（ギリシア）の盛時に於て宗教の信仰が左まで熱烈なものがなく，思想や研究の自由を拘束する事のなかったのは希臘（ギリシア）の数学や科学の発達上に誠に仕合せであったと言はなければならぬ．勿論こう云う拘束が絶無であったとは言われぬが，至って乏しいものであったのである．

希臘（ギリシア）の数学発達に関し尚多く考察して見たいところもあるが，冗漫に流るるの恐れあるを以て，今は凡て之を省く．

第６編　羅馬の数学

第１章　端書き

我等は既に希臘の数学を説述した．是れから欧洲現代の数学に向って論歩を進めるのであるが，其中間に於て何うしても羅馬の介在したことを忘れてはならない．我等が茲に羅馬に関して一篇を設けたのは，羅馬の要素が歴史の道程から除き去られぬからである．実は希臘の記述中に一章として入れようとも思った．否，一章として筆を執って見もした．けれども之を抹消して，再び羅馬の為めに一篇を割く方が適切であろう思われたので，其積りで此篇を作ることにした．

第２章　羅馬の数学

実を言えば．羅馬には数学らしい数学はない．希臘の組織整然として造詣の極めて深遠なるものあるに反し，羅馬の数学が余りに貧弱なのは，其対照が如何にも著しい．

希臘では諸方の殖民地から幾多の数学者が輩出して，碁羅，星の如く，百花の咲き乱れた中に遊ぶが如き心地がするが，羅馬の大帝国には一人として希臘の数学者に比較し得べき数学者が出て居らぬ．記憶さるべき価値ある数学者は唯の一人だも出ることはなかったのである．

何うして希臘と羅馬と云う，凡そ同じ時代に繁栄して，其国も相接続して居るし，又民族も相類して血縁関係が遠くないであろうし，そうして大文化を建設した事に於て相対立すべき位置に在りながら，数学に於て斯くも天地宵壊の相違を生じたであろう，思えば此れだけ奇々怪々な現象があったものではない．誠に千古の不思議であろう．何が不思議と云うても，此れほど甚だしい不思議はあるまい．

斯の如き事象は果して何に基づいて発現したのであろうか．恐らく永遠に解き得べからざる不思議であるかも知れないけれども，若し満足に其間の真消息を伝うる事を得んには，我等の鑑戒とするに足る事も少なくないであろう．数学史家，科学史家は若し文化の発展の淵源にまで遡って闡明することを欲するならば，必ずや此種の問題に向って指を染めなければならぬ．

支那の歴史は長く，其文明は大なるものであるが，而も支那の数学は比較的に貧弱だと云われる．国家としての羅馬は支那に比すべきものもあるし．或点に於ては似たところもあるが，而も支那の数学が貧弱なりと雖も，決して羅馬の甚だしいものと同日の談ではない．支那人の数学に関する能力が問題になる程であれば，羅馬の事は一層問題とならざるを得ぬ．羅馬人は数学の能力が絶無であったと云い得られるであろうか．或はそうであるかも知れぬ．けれども或る科学史家は，羅馬人は科学開発の能力がなかったのではない．之を開発する意志がなかったのだと言ったことがある．真相に中ったものであるや否やは，容易に判断し得ないけれども，確かに一半の真理は道破し得た叙述であるかと思う．勿論，今此種の問題に深入りする積りではない．

第３章　羅馬の科学

羅馬の数学は甚だ見るに足らぬのであるが，独り数学だけではない．科学一般に羅馬は希臘より劣って居る．劣って居ると云うよりも，比較にはならないのである．けれども数学に比すれば，他の諸科学に於ては稍々優れたもののあったことは，言うまでもない．

羅馬の科学として注意すべきことが，恐らく二三はあろう．其一つは Pliny(Plinius) の博物書であり，其一つは Vitruvius の建築術書である．尚他にも言うべきことはあるが，それは後に譲り，此二つに就て瞥見して見よう．

Pliny の博物書は極めて著聞する．Pliny は種々の事を記録して居るので，此書を見れば歴史の参考になる事が多い．此書が今に至るまで貴ばれるのは此意味での事であろう．けれども科学上の事に至りては正しいことも正しからざることも雑然として之を記るし，科学的価値に於て乏しいとの評あるのも，止むを得ないであろう．

Pliny は海軍提督として今の Napoli(Naples) 湾に舟師を碇泊したとき，恰も Vesuvius 山の大噴火に遭遇し，危険を冒して其調査に赴き，噴出物の害する所となって，学術探険の為めに貴重な犠牲を払ったことは，二千年後の今日に至るも学界の美談として伝えられて居る．誠に西紀後 79 年の事であった．

如何にも Pliny の研究や記述には至らぬ所もあったであろう．けれども此人が海軍提督の高官に居りながら，科学研究の精神に燃えて居たことは，此一事からでも明白に判断し得られる．況んや其当時の情況や，其伝記など読んでは，此尊貴の人に対し，満腔の敬意を寄せずには居られないのである．私は羅馬人が必ず研究心に欠如したものでなかったことを

信ずる．

Vitruvius の建築書は恐らく此類のものが希臘にもない良書であったろう．建築書と云うけれども，建築だけの書物ではない．器械などの事も記るされて居る．此等の事の歴史を知らんが為めに．必ず参照しなければならぬ貴重書である．

羅馬では投石機など云う武器が著しく進歩したことを看よ．

建築に丸屋根を用うることなども希臘にはないもので，羅馬では好んで用いられた．これは Etruria で使用されたのが継承されたのでもあろうが，兎も角，希臘と異なる所であった．

要するに希臘の万事理論的なるに反し，羅馬では実際的なのが著しく眼に着く．

羅馬の測量術なども著名なものである．其算法が優れたのでもなく，新らしい創意と云うでもないが，実地の測量に盛んに利用されたので，頗る著しいものであったのである．

希臘人の中に Heron の如き測量術に関して有力な書物の作られたことなども，羅馬の影響がありはせぬかと思われる程である．

第 4 章　暦法の制定

現に西洋でも，又我国でも用いられて居る暦法は，太陽暦である．我国のは勿論西洋暦を採用したのであり，製暦の上に之を参照したのは寛政暦でも天保暦でも，江戸時代の後半期には多く行われて居たが，単なる参照でなく，其物を採用したのは明治五年からであった．

此の西洋でも，今では我国でも行われて居る太陽暦は，羅馬から始まったのである．即ち英雄 Caesar が其改革を行う所であった．勿論其太陽暦の知識は埃及の地で前から知られて居たものであり，又其改革には Alexandria の星学者 Sosigenes が任に当って居るけれども，Caesar の力に依って之を実行の上に現わすこととなり，遂に今日までも其余栄を及ぼすことになったのである．羅馬人は科学的知識の開拓に於ては欠くる所有りと雖も，実行能力の点は何処まで優れたものであり，科学の上にも其影響を遺したと謂って宜い．

Caesar の暦法改革は，後に Gregory 暦の制定となって，一たび変改せられ，それが現に行われて居るのである．

第 5 章　羅馬の計算法及び幾何学

羅馬には手の指で計算することや，一種の算盤の用いられたことや，計算用の表を使用したことなどがある．羅馬の算盤は一種ではないが，其一つは支那の算盤の前身とも云うべきものと稍々似通うたところがある．

羅馬では所謂羅馬数字が用いられた．今でも時計の盤上に記るされたものなどある．

羅馬では測量を行うので，計算も可なり必要であったろうし，幾何学的の事項も多少必要であったに相違ない．其測量家は Agrimensores 又は gromatici と呼ばれて居た．彼等使用の教科書用の書物も作られて居た．けれども希臘の幾何学のように立派なものではなく，極めて粗略なものであった．希臘よりは一時代前のものと謂っても宜いようである．其術の或ものは Etruria から継承したものがあるらしい．羅馬の学問，文化の上には Etruria の関係は浅くないのである．術の或るものは Heron の公式に似たようなものもある．埃及の数学から来たものも少なくない．

第 6 章　羅馬と希臘との関係

羅馬は希臘と其国は相近かい．希臘の諸国は南イタリアや Sicily(Sicilia) 島地方にも散在して居るし，イタリア半島に国を建てた羅馬は直ぐ目 睫 の間にあるのである．通商上や又軍事上でも接触することが多かった．後に羅馬の手が次第に東に延びて希臘の諸国を蚕 食 し，希臘は遂に全く羅馬の属領になってしまった．埃及や Syria から其辺の地域も凡て羅馬領に帰する．政治上では希臘は羅馬の為めに征服された．然るに文化の上に於ては全く反対の現象を呈し，羅馬の文化は希臘の文化の為めに圧倒されて，全く其支配下に帰したのである．

羅馬では初めから名医と云うものは出て居ないが，是に至りては多く希臘の医家が用いられ，羅馬人で医学上に大なる貢献をした人は輩出することにならなかった．名医 Galen の如きは希臘人であり．羅馬での富力に飽かせての設備に助けられて，あれだけの業績を挙げ得たのだとは，医学史の書籍中に説く所がある．

羅馬の劇は希臘の劇から転化した．羅馬の文学は希臘の文学の為めに何れだけ影響されたか．希臘の哲学が羅馬を風靡したことも周知の事実である．羅馬の芸術も希臘を師として盛大を来たした．けれども其発達の極点に於ても遂に希臘を凌駕する事は出来なかった許りでなく，凡ての点に於て希臘の下風に立たなければならなかった．

以上は即ち此等の方面に於ける羅馬の状態であった．固より羅馬の文化には他に希臘の上乗たるべき方面あるを以て，

直ちに一般文化の上に於て羅馬は希臘の下にありと云うことは出来ないけれども，要するに学問芸術に就ては到底希臘の敵ではない．

故に数学に就ても希臘に及ばぬは，当然であろう．而も羅馬が希臘文化の洪水の中に汎濫するに至っても，希臘の数学の粋を抜いて之を学ぼうとしなかった許りでなく，何等其真精神を学ぶことをしなかった．希臘の数学の影響を受けたとか受けないとかの話しではなく，希臘の数学は羅馬人の実際的精神に取っては何等の意義をも成さなかった．全く之を学ばなかったと言って宜い．故に希臘で証明を重んじた幾何学も羅馬人の手に移ると，其証明は全然棄て去られて，一種異様のものに堕してしまう．此れほどに甚だしい例が他国に嘗て存したであろうか，恐らく絶無であったろう．

之を回々国の諸学者が熱心に古書を探索しては幾度でも改訳に改訳を重ねて我物にすることに日も是れ足らざるが如きもののあったのとは，何れだけの相違であろうか．言わずして明らかである．

此の如き状態であるから希臘の古書は羅馬からして欧洲の中世乃至近世に伝えられる事なく，一旦亜剌伯を経て伝ったり，又東帝国の希臘人から伝えられる事になったのも，是非ない事であった．

第 7 章　羅馬の諸学者

羅馬には勿論数学者らしい数学者はない．けれども数学に就て羅馬の諸学者が如何なる業績をして居るかにつき多少瞥見するのも，全く無益ではあるまい．

Lucretius は西紀前五五年に歿した人で，哲学的詩人として著名な人物である．其著 De rerum natura は『自然界』とでも言おうか，誠に面白い見解を叙したものであるが，中に無限と云う観念が見える．而も抽象的に考えずして．実質的の分子から成るものと見る．

基督教会の長老 St. Augustine(西紀三五四——四三〇) は高僧として極めて名高い人であるが，Elea の Zeno の事などに就き論ずる所があった．人は身体が動くとき精神も亦動きて，身体と其に処を移すや否やなど云う事を論じて居るのである．此人の無限に関する見解は Alexandria 教会の Origenes とは全く反対のものであった．

Victorius は算術の表など作ったものがある．中世の欧洲に於て広く行われた．其著書は四五七年に成り，耶蘇復活祭の正しい時日を見出す為めの術など記るす．

五世紀には西羅馬帝国は滅亡して，其後に中世並に近世の欧洲諸国が成立するのであるが，此頃に於て却って羅馬の盛時よりも熱心に希臘の学術を学ぶこととなり，希臘の学問に依拠した教科書なども作られたのである．勿論立派なものではないが，十二世紀の頃に至るまで西欧で行われたのは此等の諸書あるのみなので，歴史上固より大切である．

Boetius は此諸書の中にて最も注意すべきものを作った．其書の羅馬の諸書中では優れたものであるが，希臘のものに比すれば及びも付かない．Nichomachus や Euclid などから翻訳又は抜萃したものであるが，幾何学を説くにも証明は略してしまった．Boetius の記るした算盤は旧来のものとは違い，亜剌伯数字に似たような符牒を用いたものであった．

Boetius は高官にあった人であるが，謀反の罪に誣られ，獄に下りて，遂に斬罪に処せられた．西紀 524 年の事であった．

Cassiodorus は百科全書の中に算術，幾何等を説いて居る．有理数 rational，無理数 irrational と云うのは此人が記るしたものが初見である．

第 8 章　羅馬学術の伝承

羅馬の数学に就ては，其自身多く価値あるものでないに拘らず，我等は之に就て可なりに長く叙述論究したのであるが，更に後代に伝承した事を述べて結ぶこととしよう．

其伝承は羅馬の国語であった羅典語が広く行われたことが一つの要因である．

羅馬は一時は世界統一の大帝国を成したけれども，後に東西の両帝国に分れる．西帝国は五世紀 (四七六年) に至って滅亡するが，東帝国は Byzanz 即ち Constantinople に都して，希臘民族の多く分布し，希臘文化の普及した地方を領し，希臘文化の代表者となる．故に東羅馬帝国であるけれども，事実に於ては希臘帝国であって此の東帝国は其土地柄として西方よりも東洋諸国の方へ多く交渉を有し，Parthia，Persia 等との和戦は歴史の最も重大な事象であり，文化の性質に於て羅馬の継続ではないのである．

東帝国は西羅馬の滅後も長く存続し，イスラム教勃興の時にも依然として存して居たが，国力固より振わず，1453 年に至って難攻不落を誇った其国都の堅城も遂に土耳其軍の砲撃に依って奪取せられ．全く其跡を断ったのである．

東帝国は斯く文芸復興期の直前まで命脈を続けたが，而(しか)も西欧の文化，西欧の数学の上に何程の関係を有したようでもない．東帝国の希臘(ギリシア)数学は今之を説くの要はない．西欧に関係を有するようになるのは，国の滅亡後に諸学者が西欧に走って，所蔵の希臘(ギリシア)古書を伝え，多少の影響を与えたことの一事に存する．

西羅馬(ローマ)は早く滅びた．而(しか)も羅典(ラテン)語は西欧の諸国に於ける伝統的の文語となった．欧洲中世には学問らしい学問はないけれども．多少之を伝えたるものは皆羅馬(ローマ)の諸書で羅典(ラテン)語の書物であった．欧洲近世に至っても，専門学術の諸書は凡て羅典(ラテン)語で作られたのであり，諸国の近代語が使用されるようになったのは，極めて新らしい事に属する．Newton や Leibniz の著書は悉く羅典(ラテン)語の作であり，それから百年後の Gauss にしても羅典(ラテン)語を用いた．羅典(ラテン)語の使用が一般に棄たれたのは十九世紀になっての事である．勿論十九世紀中にも初めは羅典(ラテン)語の作が往々にある．

羅典(ラテン)語の勢力が西欧に於て如何に偉大なものであったかは，容易に察し得られよう．

第 9 章　基督教

羅典(ラテン)語が西欧諸国で偉大な勢力を及ぼしたことについては，基督(キリスト)教の関係が著しいものであった．基督(キリスト)教の諸教父が羅典(ラテン)語を用いているし，其為めに宗教中心の時代に於ては広く学術上にまで基督(キリスト)教の用語が国語にされることになったと云う関係がある．西欧中世の諸学者は基督(キリスト)教の僧侶であって教会以外に有力な人はない．

此の如き有様であるから，欧洲の中世から近世にかけての期間に於て数学でも他の諸科学でも勃興するのは，基督(キリスト)教層の関係の為めであるが，併し基督(キリスト)教が学問の開発上に有益なものであったとのみ断定することは出来ない．基督(キリスト)教は自由の研究に対して随分妨圧する所も多かったのである．其事は後の事象を見ても明らかである．

基督(キリスト)教は猶太(ユダヤ)人の基督(キリスト)から始まる．希臘(ギリシア)の信仰とは頗る同じくない．基督(キリスト)教は羅馬(ローマ)治下に於て始めは圧迫されるけれども，羅馬(ローマ)の統一的精神と一致する所あるが為めに羅馬(ローマ)で勢力を張ることとなり，皇帝の帰依をも受けることとなった．基督(キリスト)教が羅馬(ローマ)の国教になるのも所以ありである．

其後西羅馬(ローマ)は滅びる．基督(キリスト)教は羅馬(ローマ)の後を続いだ民族間にも弘布するようになり，其勢力を維持した許りでなく，全く統治者と対立の地歩を占めて羅馬(ローマ)法王の出現ともなった．

中世の欧洲では羅馬(ローマ)皇帝の名称は有力な諸王侯に依って継承された．当時の羅馬(ローマ)皇帝と羅馬(ローマ)法皇とは其権力の消長が中世史の中心を成すのであるが，共に羅馬(ローマ)帝国の統一思想の延長であり，対立するに於ては相争う所なきを得なかった．而(しか)も実は両者合して統治支配の中心となるのであって，其間に一長一消はあるが最後には両者の勢力は相共に衰退することとなった．

羅馬(ローマ)教会は斯くの如く社会上の大勢力である．そうして信仰に依りて立つのである．是に於て聖典を尊重するの精神が極めて旺盛であって其同じ精神は数学でも其他の諸科学でも凡て同様に取扱われるのであって，用うる所の古典諸書は経典として尊崇せられ，一字一句だも改竄することを許さざるものとなる．然らば其間に自由探究の精神は発露し得べくもない．枯渇萎微して生命のないものになるのも当然であろう．基督(キリスト)教の広まった西欧で長く数学も他の科学も自由に発達を途げることの出来なかったのは，此種の事が大きな原因であった．

西欧の歴史が中世の所謂暗黒時代を以て始まるのは畢竟之が為めであり，決して数学及び科学の開発に向ってて天賦の能力が欠けた為めではない．故に後代になって事情が一変し精神状態に変化を生ずるに至っては遂に前古絶て見ることを得なかった大建設も出来るのである．

中世の西欧は全く元来文化の花の未だ開かざる民族の活躍であり羅馬(ローマ)の数学らしい数学のない文化を受けたこと，希臘(ギリシア)の影響からは遠ざかったこと，基督(キリスト)教の大勢力に依りて自由の精神が束縛されたことが相待って遂に実際見るが如き世態を造り出したのである．

我等は上述の如く羅馬(ローマ)の数学を観察する．此観察は同時に西欧数学発達を観察する為めの序説となるのである．言うこと勿(なか)れ，何の故に価値なき羅馬(ローマ)の数学の為めに，貴重なる幾多の紙面を割いて長々と談議したかを．一は以て将来の進歩を図る為めの鑑戒とするに足るであろうし，一は以て次節に進むの便宜を供することを確信する．

羅馬(ローマ)を考え．又西欧諸国の発達した初期の事を明らかにして，翻って支那や日本の江戸時代以前の事など見るときは，自ずから発明する所が少なくないであろう．歴史研究の妙味は此辺から混々と涌いて出る．

第7編　欧洲中世の数学

第1章　文芸復興

文芸復興——ルネッサンス——此言葉は如何に我等を引き附ける言葉であろう．欧洲の文化に取り，欧洲の歴史に対し，文芸復興の意義は極めて鮮かであった．此の思想の大変動を抜きにしては近世欧洲の発現は得て望まれなかった．文芸復興を突破し得たので，近代的の西欧諸国が生れた．そうして我々極東の日本に於ても．其影響を多大に被ることとなり，現今の我国の数学をも見るに至ったのである．文芸復興に際して数学が如何なる状態を呈したか，変動があったか，無かったか，此等は能く知ることを要する．

文芸復興は大勢上の顕著な事象であり，普通の歴史に於て固より尽くされて居る．数学や科学の発展が如何に其事象の上に働いたか此れは数学史に取りても甚だ興味ある問題であり，等閑に附することは出来ない．我等は今之を明らかにせんことを期する．

文芸復興の出現を見るには Scholasticism の字義から言えば学校精神又は学校主義と云うのであろうが，普通に之を煩鎖主義と云う．其煩鎖主義若くはスコラ哲学と云う方が宜いかも知れないが．そう云う思想若くは学風と云うか，それが行われて，それから進展又進展して遂に文芸復興と云うことになるのである．其スコラ精神とも云うべきものは．支那でも印度でも亜剌伯でも皆現われて居る．然るに此諸国では進展して文芸復興を見るに至らなかった．独り西欧の天地に於てのみ之を見た．此れ即ち西欧諸国の一種特異な点であって歴史上に無限の意味を賦与する所である．

「スコラ」主義は何うして起きたか．研究心の進展であった．既に教義に絶対信頼が出来なくなったことを語る．其精神が進み又進めば，自由研究の精神を攫得することとなるのも自然の勢であろう．

恩師箕作元八先生嘗て言う．欧州の中世は信仰の時代であった．其信仰心の最も高潮した時は，即ち十字軍の事あらしめた所以である．熱い信仰に燃えたが為めに十字軍の壮挙は試みられた．けれども之が為めに其信仰心は燃え尽くして十字軍の終る頃には宗教の勢力は著しく失墜することとなった．従て信仰心の束縛を打破して文芸復興の大変動をも醸成することになったのである．

此れ実に事情の真相を穿ったものであろう．此間に於て数学や科学の進展が如何に働いたか．又それが互に因となり果となって，如何なる結果に帰着したか，其点が数学史の上に於て興味津々として尽きざる所でなければならない．

第2章　中世紀間の数学の状態

西欧で文芸復興期に際し，数学や数学的諸学科の発展が主要な一因になるのであるが．固より之に先って中世紀の間を通じて西欧の数学は如何なる状態にあったか，文芸復興の数学史を理解する為めには．此辺から明らにして進まなければならぬ．

我等は羅馬の数学を説いたとき，羅典語や基督教の関係が中世に如何なる関係を及ぼしたかにつき，一通り了解する所があった．要するに中世は信仰の時代であり精神の拘束が大にして，自由進展の気分に乏しかった．数学などの意義ある研究は未だ多く望まれ得べきではない．

一般に言えば，そうであるが，又時に一消一長なきにしもあらず．歴史は自ずから次第に進展する．宗教上でこそ拘束も大であったろう．之れが為めに暗い気分が横行する．建築でも天井の低い，薄暗いような，頭から押し附けられるようなものが好みであった．暗黒時代とは能くも言ったものである．けれども之を反面から見る時は，宗教上に於て極めて明るい時代であったとも言い得られる．姉崎文学博士の所説は此間の真相を道破して居る．

宗教信仰の上に於てのみ光明があったと云うでは，固よりあるまい．武士階級の活躍など，決して寝入ったものではなく，至って新興の元気に乏しくないことが思われる．我国の中世の宗教と武士との状態を想い見るとき，余程似たものがあるように思われてならない．社会的には活動的のところが見られる．

欧洲中世の数学は斯の如き雰囲気の中で育くまれた．故に時折り彗星の如く新人物が現われて数学書を作るようの事もあった．

Boetius 及び Cassiodorus 以後には伊太利での数学の活動は中絶した．北方から来た民族の中で始めて科学の芽ばえを見たのは，Isidorus の百科辞書式著述である．彼れは Seville の監督にして，636 年に歿した．固より羅馬風のもので，中には所謂七科目が見える．其中の四科目は算術，音楽，幾何，天文である．

其後に出たのが英国の Bede 尊者 (672–735) であった．復活祭日の算用及び指の計算法など説く．手指の計算法は当

時広く行われたのであろう．復活祭の時日決定の事は教会儀式の執行上に甚だ大切であって，各教会に其算法に堪能な人物を抱えて置く必要があった．此事は数学の学修に多少にても好感化を及ぼしたであろう．

Alcuin(735–804) は Bede の歿した年に生れ，愛蘭(アイルランド)で成長した．此時恰(あたか)も Frank 帝国の Charlemagne 大帝が出て文物の開拓を図った時であった．学問も之を保護する．Alcuin は大帝に聘せられて教育更新の任に当った．学校を建てて教育をもしたのであるが，中に算術も課せられたのである．当時の算法が如何なるものであったかは不明である．数学は神学と結び付いて，異様のものであったことも，固よりであった．

Charlemagne の大帝国は帝の死後に瓦解して，乱離の世となった．

十世紀の終りになると，再び数学の学修が始まる．此頃には大分元気が附いて来たようであった．

Gerbert の出現は最も注意すべきであった．仏蘭西(フランス)の人，寺院内で教育を受け，後に西班牙(スペイン)に留学して主として数学を学んだ．帰って Rheims(ランス) の学校で数学を教授すること十年，国王の崇敬も浅くなかったが，後に監督となり，遂に法王の位に即いて Sylvester II. と称した．其生涯には政治上，宗教上の争いがあったが，1003 年に入寂した．当時の数学者として群を抜いたとの事である．Gerbert は多く珍本を集めて学んだとも云われて居る．数学上の著述もあった．其説く所の算法は算盤の算法であるが，其算盤は印度(インド)の算法が伝わる以前に欧洲で行われたものであった．但し Alcuin は知らなかったものかと云われ，起源の事は充分に判明しないようである．

Gerbert の時代には羅馬(ローマ)の数学は多く見出されて我物とせられ，十一世紀には熱心に学修された．当時幾何，算術の書は幾らも作られたが，まだ其知識は甚だ幼稚なることを免れなかった．羅馬(ローマ)起源の数学が貧弱なのは言うまでもないのである．Gerbert は西班牙(スペイン)に学び，数学上一代の最高知識と仰がれたけれども，回教国の学問に通ずること，まだ恐らく余り深いものではなかったであろう．

Gerbert は算盤の本をも書いた．其説く所は印度(インド)の数学が行われた以前に於ける算法であり，之に依って如何なる性質のものであったかを知るに足る．

Gerbert の弟子に Bernelinus があった．当時の算盤は平盤の上に，細粉を撒いて其上で図を引くものであったことを説く．計算用には 30 桁に分けて，其中の三桁は分数用のものであり，分数の事も又此人の書中に説いているが，勿論羅馬(ローマ)風の十二進法の分数であって，計算は容易なものではなかった．

十一世紀には此種の計算法が行われて居る．而(しか)も羅馬(ローマ)から伝統を引いた数学は誠に内容に乏しいものであった．

十一世紀にも幾人か数学の学者は出て居るが．余り知られた人はない．事情の変化を生ずるのは十二世紀になっての事である．

然るに十一世紀頃から行われた遊戯に Ritmomachia と云うものがある．将棋盤のようなものに数を並べて行うものであって，希臘(ギリシア)風の数論に関する簡単な知識がないと，出来ないようなものだと云う．而(しか)も此種のものが行われた．此事の如きは数に対する趣味を語るものであって．恰も我国で平安朝の末期以後，まだ数学は殆んど存在するかしないような状態でありながら，継子立(ままこだて)の算法が行われたのが，後に事情の許す世の中となれば，数学の著しく進む事となった事の，隠れた能力の表徴として見られると同じく，矢張り西欧でも機会さえ得れば数学の勃興せんとした機運の前徴とも見られよう．

西洋でも我国の継子立と類似した問題は十世紀の頃から知られて居る．日本では継子と実子十五人づつ，西洋では土耳古(トルコ)人とクリスチャン十五人づつ，日本では相続の問題であるが，彼れでは難船の時に犠牲になるものの問題である．斯く問題の叙述は同じくないが，原則を同うする者なることは至って注意を引く．而(しか)も凡そ時を同うして極東と極西で現われたのは面白いことであった．此問題が日本にあって支那で見出されて居ないのも，注意すべきであろう．

第 3 章　東方の基督教関係，回教学術の影響

今説く所は西欧での数学の状態であるが，東欧地方で西羅馬(ローマ)の滅亡後には余り数学上に著しい事象はない．Byzantium の Justinian 皇帝 (527–565) は羅馬(ローマ)法の制定を以て甚だ知られて居るが，其治世に於ても別に言うべきことはない．唯，此時 532 年には大火災に見舞われ，十年後には悪疫流行して，欧洲東端の海峡地方は学問の発育に適すべくも思われなかった．

是れより先きアテーネの学校は勅命に依って閉鎖され，希臘(ギリシア)本国の地に於ても学問の伝統が六かしくなる．Alexandria も回教勢力の勃興に依って奪取せられ，回教徒の拠る所となって，最早回教領内としてのみ存続する．

けれども東方にも此頃は基督(キリスト)教が拡まって居るが，時折り東方から基督(キリスト)教の学者が出ないでもなかった．其一人は Anthemius(534 年死) であり，St. Sophia 寺院の建築を以て顕われた人であった．其建築の壮麗なことは固より定説が

ある．此人は円錐曲線に関する著述もあった．

Alexandria でも回教浸入以前には多少数学に通じた人がないでもなかった．而も再び勢力を伸べることが出来ない．

此れから回教の勢力は阿弗利加の北岸を西に伸び，遂に西班牙に入って，将に西欧の天地をも席巻せんとしたのであるが，Charles Martel の勇戦に依って辛くも喰い留められた為めに，幸に社稷を存することを得たが，数学でも諸科学でも回教国は遥かに欧洲諸国の比ではないのであるから，其知識の優れた，そうして新興の元気に燃えた回教人に南方をずっと圧迫されては，西欧と云わず，東欧と云わず，回教人の影響を受けずには済むまい．

其影響は東欧に於てよりも西欧の方が甚だしかった．東欧では前には希臘の伝統を引いた学者もあり西欧に比して優れても居ろうが，寧ろ保守的になって新知識を取入れざるに反し，西欧では回教の文化に依って著しく思想の改造せらるるものあり，数学などの如き学問も亦一変することとなる．

回教の影響が甚だ大なるものであったことを度外視しては，西欧の学術史は到底適当に了解することは出来ない．

回教人は既に西班牙に国を立て，八世紀初から十五世紀末まで八百年の久しきを通じて，此地で文明を誇ったのである．数学も諸科学も西班牙で繁栄する．近接した西欧諸国へ著しい影響を及ぼし得たのは自然の勢であった．

第 4 章　翻訳時代

回教興起の時，熱心に希臘の古書を索めて，幾多の辛酸を嘗めつつ之を語彙もない亜剌伯語に翻訳したのは，著しいものであった．西欧の天地に於ても亦同様の時代があった．十二世紀が即ちそれである．今や其翻訳は亜剌伯語から羅典語に翻訳するのであった．此頃には西班牙の回教人は芸術科学が著しく開拓されて，西欧のキリスト教国では之が為めに圧迫を感ぜざるを得ない．仏蘭西，伊太利，英吉利等の国々がそうであって，其結果，西班牙に留学するものが跡を絶たない．既に亜剌伯語をも学ぶ．亜剌伯の学問を了解し，之を自国に紹介せんとする熱望が生じた．其事は如何にも有りそうな事であろう．

此時回教国から又亜剌伯語から学ぶものは，数学や科学であり，其文学ではなかった．此れ恰も亜剌伯で希臘の学問を翻訳学習したのも全く同じである．

此両国で同じである許りでなく，日本で始めて西洋の諸書を翻訳したのも医書や暦書等が多く，支那で西洋の学問を取り入れたのもそうである．此事実は誠に著しい．外国の科学の威力に依って圧迫せられ，之に対抗せんが為めの真剣正銘の活動であるから，事是に出づる所以のものは決して無視してはならない．私は我国に於ける維新の変革を以て，西洋との科学上の関係が多大の要素を成すものと見たいのであるが，西欧十二世紀の事情も亦我等に比較の料を与える．宜なる哉，維新後の歴史は西洋の科学を摂取することが最も急務であり，着々と其目的を貫徹したのであった．

十二世紀の西欧翻訳家は，星学，算術，星占，幾何，医学等から Euclid の原本までも羅典訳を試みたのであった．其翻訳は希臘の原本からではなく，亜剌伯語からであった．

けれども希臘語からの翻訳が全くないではなかった．Sicilia 島で Ptolemy の Almagest が翻訳されたのは希臘の原本からである．蓋し島の学者が希臘の一写本を Constantinople から Palermo へ持って来て居たのであった．Palermo は有名な医学校の在ったところである．

英吉利の翻訳家 Bath の Adelarde の如きは，遠く東方に遊び，或は亜剌伯の地へも行ったであろうと云う．そうして数学書をも持ち帰った．希臘語にも通じたと云うが，Euclid の翻訳をしたのは亜剌伯語からであった．

Chester の Robert の如きは，Al-Khowarismi の代数書をも羅典語に訳した．彼れは英吉利の人であるが，伊太利から希臘へ旅行した．

今，当時の数学書翻訳諸家に就て一々詳述することは出来ないが，此等の人々は多く西班牙に遊び，それから東方へ旅行するものもあって，希臘の原本も時折り注意に触れ，希臘語の必要も追々と生ずる傾向がほの見えて居る．そうして代数や幾何や三角法，星学等の可なり有力なものが，羅典訳で読まれることになりつつあったのである．

第 5 章　Pissa の Leonardo

欧洲中世の数学は既に亜剌伯書の翻訳に依って可なり見るべきものになりつつあったが，十三世紀になって注意すべき一人物が出た．先輩諸学者はみんな僧侶であるが，此人は僧侶の出身でない．商家から出たのであった．此点が稍々事情を異にする．それに中世の数学者として最も偉大な人物であるから，大分世間の風潮に変調の来たことに気附くであろう．此人は伊太利 Pisa の人 Leonardo である．

Leonardo は 1170 年の頃に Pisa で生れ，1250 年頃に歿したと云う．又 Leonardo Fibonnacci と云われるが，Fibonacci

とは Bonnaccio の子と云うことである．Leonardo が生れた頃の Pisa は Venice 及び Genoa と共に伊太利(イタリア)で最も有力な通商中心地であって，其商業は自由に地中海を乗り廻して諸外国と貿易を営むものであった．十字軍の海路輸送の如きは，全く此等の海港都市の仕事であった．其繁栄と殷富は驚くべきものであり，頗(すこぶ)る大勢力を振って居った．此時に当ってアフリカ北岸の Bugia と云う所に Pisa の貿易家の建てた役所と云うか，公館と云うか，そう云う物資集散の設備の監理をして居たのが，Leonardo の父であった．然らば随分重要な職務を取って居たことは明らかである．従て Leonardo が教育を受けたのも此の Bugia での事で，回教人の先生に就いたのであった．初め算盤の術を学んだと云うが，早くから数学に深く趣味を感じた．長ずるに及んで Egypt，Syria，希臘(ギリシア)，Sicily 島，南仏蘭西(フランス)等の各地を広く周遊し諸般の算法を見聞したのであるが，此に就て印度(インド)の筆算法が最も優秀にして其他は同日の談に非ざることを見た．是に於て Pisa に帰って，1202 年には Liber Abaci の書を作った．『算盤之書』と云へば宜かろう．1228 年には校訂本も作られた．

此書は十五章より成る．数字の読み方及び書き方，整数の乗法，加法，減法，除法，整数へ分数を乗ずること，分数其他の算法，物価，歩合，混合，雑題仮定法 (盈朒)，開平開立方，幾何及び代数等を説き，幾何と云うのは，求積に関する．

此書の著作は従来の諸書とは形式を異にし，自由独立の精神を以て作られた．此書も亦他の著作も単なる編纂と見るべきではなく，当時の算書が凡て形式を墨守した模倣の作であったのとは頗る選を異にする．勿論 Leonardo が使用した資料が凡て知られて居るのでないから，果して何れだけ独創的のものであったかは判断し兼ねる．Abul Kamil の代数書や，Barcelona 在住のユダヤ人 Savasorda の著書などに多く依拠したことは疑われぬ．

Leonardo の書は他書とは趣きを異にするを以て，当時の諸学校では未だ之を採用するようなことにはならない．諸学校での学科は科学的のもの少なく，数学の如きは多く省みられなかった．Leonardo は全く曠野で猛虎の嘯(うそぶ)いたようなものであった．

而(しか)も Leonardo の Libar Abaci は其後の幾世紀間に亘りて，数学知識の宝庫となり，徐々に影響する所は少なくなかった．Leonardo は二次方程式に二根あることを認めたが両根は探らなかった．

Leonardo が 1220 年の著書には幾何学及び三角法を説いて居るが，蓋し集め得た一切の知識を包括したものであったろう．中に三角形の面積を表わす Heron の公式を立派に幾何学的に証明して居る．Leonardo が豊富な材料の取扱方は甚だ巧みであり，独創的な所もあるし，Euclid 風の正確を期したものであった．

Leonardo が皇帝 Frederick II に謁見したとき，Palermo の John が提出した諸問題を即座に解き得たことは有名であるが，其一つは同時に x^2+5 と x^2-5 とが平方数なるものと，一つは方程式

$$x^3+2x^2+10x=20$$

の解とであった．

此れまで三次方程式の代数的解法は試みられたことがない．Leonardo も容易に之を解くことが出来ない．止むなく処理方法を変換して，此方程式は Euclid の無理数を以てしては表わし得難きことを示めし得たのであった．即ち定木と円規(コンパス)のみで幾何学的の解法は不可能なことを示めしたのである．そうして別に近似的の方法に依って所要の根の随分精密な値を算出することに成功した．

Leonardo に就ては可なり細論したが，あの時代に此人の如き有力な人物が出て．あれだけの業績を挙げ得たと云うのは，私は独り Leonardo 一人の問題ではないと思う．又一都市 Pisa 若くは伊太利(イタリア)だけの問題でもないと思う．即ち西欧人が後来数学の開発に就て果して何れだけの能力を発揮し得るかの先きぶれと言っても宜い．此意味に於て我等は深く此人の事蹟を究めなければならぬ．

私は試みに Leonardo を以て関孝和に較べて見たい．関孝和以前の日本の数学と Leonardo 以前の欧洲の数学とは其優劣果して何うであったろう．委しく論ずる時は多少の高下はあろう．けれども大体に於て余り甲乙がないとも見られぬことはない．此時に於て彼れに於ては Leonardo が出で，我に在りては関孝和が出た．時流の上に卓立したことは先ず同じであると言っても宜い．ただ関孝和の同時代には随分人物が出て居るが，Leonardo は或は孤立して居たかも知れない．そうして其業績は何うであろう．私は関孝和が決して Leonardo の下風に就くものでなかったと思う．況んや Leonardo は遠く諸外国に旅行して，多く外国の知識を集めて来た．関孝和には其便宜が乏しい．遠く時流を抜くの一点に於ては関孝和と Leonardo とは或は伯仲の間に在ったろう．而(しか)も関孝和の業績は恐らく彼れより勝る．

然らば Leonardo を以て欧洲将来の数学開発の能力如何を示めすものであったとすれば，我国に関孝和のあったは，我等日本人の能力の甚だ優秀なことを立証し得て余りあるではあるまいか．日本人に取っては興味ある比較であろう．

けれども Leonardo があれだけ時流を抜いて，時代に先きだった業績を立て得た其特殊の地歩を思うとき，我等は欧洲

の数学が機運さへ熟し来たらば，容易に偉大なる発展を遂げ得るであろうことを予想し得る．

第 6 章　亜剌伯数字の普及

Leonardo の大著『算盤之書』は書名こそ算盤云々と云うけれども，実は印度風の数学を採用して筆算を説いたのであった．此種の数学が西洋で始めて用いられたのは，Leonardo からだと云う説もあるが，それは正しくあるまい．其前からも多少伝来しつつあったであろう．けれども此書に於ては立派に其事が説述された．数学大家の著書中に之を見るのは是れから始まる．零の記号を用いることなど，此前の欧洲では見られない．

此書が世に出てから，亜剌伯数字は次第に普及し，段々に従来の算盤を駆逐して取って代るようになるのであるが，其変遷は決して一朝一夕には成就しなかった．始め之を採用したものは学者の階級ではなく，商家などから拡まったのである．伊太利の商家は十三世紀にも既に使用して居るものがあるが，僧院内などでは未だ旧式の算盤を用いて居る．1299 年即ち Leonardo の Liber Abaci が出てから凡そ百年後に至りて，Florence では商家で簿記用に亜剌伯数字を使用することを禁じ，羅馬数字に依るか，それとも文句を其侭に記載することになった．此禁令が出たのは，必ずしも亜剌伯数字其物，若くは其計算法を排しようと云う精紳ではなかったであろう．当時は字形もまだ固定せず，色々な形に書くので，曖昧なことも生じ，為めに詐欺が行われるようなことになったので，之を防ぐ目的からでもあったろう．

亜剌伯数字の事に就ては，不用意な人は随分其起原に就て古写本の誤読から其起原の年代に異説をも生ずるのであるが，実際十世紀頃から亜剌伯数字の事は記録に見え始める．けれども広く知られるのは十三世紀初めからの事であった．広く用いられるのは 1275 年頃から始まる．初めて墓碑に之を刻したのは 1371 年及び 1388 年のものが初見であり，通貨に用いられたのは瑞典で 1424 年，墺太利で 1484 年，仏蘭西で 1485 年．日耳曼 (独逸) で 1489 年，蘇格蘭で 1539 年，英吉利で 1551 年であった．暦に始めて出るのが，1518 年のものである．

亜剌伯数字が貨幣に使用された年代を見ても，其伝来の時から随分年所を閲みしたことが知られよう．

数字の為めに算盤が全然跡を絶つようになるのは，更に後れて居る．西班牙及び伊太利では十五世紀で終るが，仏蘭西ではまだ其後までも用いられ，英吉利及び日耳曼では十七世紀中葉までは終りを告げない．

斯の如きは即ち事実の真相であって，亜剌伯数字が用いられ始めてからも．旧来の算盤は可なりに長く其命脈を保ったことを見るに足るであろう．

けれども亜剌伯数字は西欧に於て遂に全く算盤に代り，現今では計算は一切亜剌伯数字の筆算に依る．便利な計算器械が出来て銀行や会社で行われることになったのは別であるが，一般には筆算のみ行われ，我々にしても筆算と云えば，西洋のものだと思うようにさえなった．而も今云う如き変遷を経たのであって，其起原は全く東洋の産物である．

亜剌伯数字が印度起原のものであることは，印度数学の條に於ても之を述べた．印度の数字であるものを，何故に亜剌伯数字と云うか．それは全く印度から直接に伝ったのでなく，亜剌伯から伝った為めである．亜剌伯と言っては語弊があるかも知れないが，回教国若くは亜剌伯文化の手を経て伝ったからに外ならぬ．それも始めは印度のものなることを知りて，印度数字と称することもあった．而も印度は間接にして亜剌伯は直接なるを以て，欧人の両者に対する感じは格別であったろう．故に亜剌伯数字と云う名称も亦起きて来た．印度数字と亜剌伯数字と云う名称の間には随分生存の競争も行われた．そうして遂に印度数字の名称は棄たれて，一般に亜剌伯数字と呼び做すことになったのである．西洋から日本へ筆算が伝えられた時にも，単に亜剌伯数字として伝えられ，日本では印度数字と云うものはない．

けれども今日に至りては歴史の研究が進んで，印度起原のものなること明らかなので，少くも数学史家の間では単に亜剌伯数字と言わずして，印度亜剌伯数字と云うことになって居る．

西洋で此の印度亜剌伯数字が普ねく行われて居るのは，西洋文明の上に東洋の要素が如何に根強く入り込んで居るかの，一つの良い記念物であろう．

第 7 章　十三世紀の数学

十三世紀の初めには既に説く如く，Leonard が出て風潮の頗る変じ，将来の進歩も著しく其曙光が見えて来たのであるが，此世紀間に西欧の数学は如何に変遷したであろうか．是れ誠に興味ある問題である．

Leonardo が出た時は，恰も高僧 St. Francis の出た時であり，彼れは宗教界の偉人であって，二人相並んで出たのは決して所以なきではあるまい．

十三世紀には各地の諸大学も漸く存立することとなり，教化の上に大勢力を及ぼすこととなる．初めは寺院内の学校から発足するのであり，多くは正確に設立年代を明らかにすることは出来ない．而も国君から何程かの特権を許されるこ

ととなって，其許可の時が設立の時代と見られて居る．場合に依っては国家からと教会からと二重の許可もあった．教会の許可と云うのは学位所有者が宗教教師たるの特権を認められたことである．例へば巴里大学の如きは，国家の許可は 1200 年に与えられて居るが，羅馬法王の許可は 1283 年であった．Oxford 大学は 1214 年と 1296 年とに其二つの許可を受け，Cambridge 大学は 1231 年と 1318 年とであった．伊太利の Padua 大学は 1222 年に設立され，Napoli(Naples) 大学は 1122 年の設立であった．十四世紀から十五世紀になると他の諸大学も多く作られたのであるが，大学の起原は先ず之を十三世紀に求めて宜い．此時に於て数学は未だ多く大学では注意に上らないけれども，将来の発展に向って既に其方便を開いたものと言って宜い．

既に斯の如き機運に際会したのであるから，十三世紀の一百年間には随分数学も進歩を示して宜かったであろう．而も未だ多く傑出した人物の輩出を見ることとはならなかった．

十三世紀の数学者としては Campanus がある．1260 年頃の人であった．其伝記は明らかでないが，固より僧侶である．Euclid を訳したことがあるが，其前に少くも三種の訳はあった．此等は何れも亜剌伯本からの翻訳であり．Campanus の訳本は刊本が出るようになってから長く定本とされたものである．他にも数学の著述があった．星多角形のことなども説く．角の三等分の問題にも指を染めた．故に単なる編纂者と云うだけの人ではない．僧侶としては地位の高い人ではなかった．

十三世紀の伊太利諸学者は星学を主としたものが多かった．

英吉利には Michael Scott が居り，彼は占星術を以て皇帝 Frederick 二世に仕えたが，亜剌伯本の翻訳などもした．Leonardo も此人に師事したことがあると云う．

Sacrobosco も亦英吉利の人，後に巴里に遊び，巴里の大学で数学と哲学を講じた．歿したのは 1256 年の頃である．球に関する著書の如きは此時までに出た最良書であり，印度亜剌伯数字の普及にも努めた．其著書は三百年間も普ねく行われた．

Robert Grosseteste(1253 年死) は London の監督になった人であるが，主として数学を物理学及び星学に応用することを企てた．

Oxford の数学者の中には Athene に遊んで希臘語を学んだ人もあった．

英国には偉人 Roger Bacon も出たが，数学上に多く業績はない．

十三世紀には仏蘭西から有力な数学者は出なかった．

日耳曼には Jordanus Neniorarius が有る．数学諸般の事に就て幾らも著書があった．字母を代数の記号に使ったものは注意を要する．

Albertus Magnus も亦此国から出た著名な哲学者であるけれども，数学にも亦通ずる所があった．

西班牙 Castilla の王 Alfonso 十世 (1223–1284) の如きも数学に通じた人であった．遊星表などの作がある．

十三世紀の数学は大体に於て今云うような有様であるが，其世紀の初頭に於て Leonardo が出た後を受けての一百年間としては，如何にも物足りない感じがする．十三世紀は Leonardo を別にしては，数学に於て余り恵まれた時代ではなかったのである．

西欧十三世紀の文化的使命は数学よりも別の所に存したのであった．

第 8 章　十三世紀の使命

十三世紀は数学が欧洲の天地に於て将に飛躍すべくして，而も余りに見るべき発展を遂げなかった．此事情は果して何者に起因するであろうか．其原因の真相を確める如きは，専攻の人と雖も或は六かしいかも知れない．我等は今得て之を明らかにすることは出来ない．けれども数学よりも寧ろ他の方に機運が向いて居たのではないかとも思われる．

十三世紀には Albertus Magnus も出れば，Roger Bacon も出た．前者は日耳曼の人，後者は英吉利で生れ嘗て Magnus に師事したこともあった．Magnus が哲学者として偉大な人物であったことは別として，此人は物的科学の事に深く通じたものであった．Bacon の如きは数学に就ても多少の造詣はあるが，而も特に数学者と称すべき人ではない．数学者としてよりも科学者であった．暦法や占星や煉金術や物理の事などが，Bacon の主として学修し研究し，唱導する所であった．Magnus でもそうであったが，Bacon に至りては特に実験研究の精神が盛んであり，其研究は魔術を行うものとして甚だ圧迫をも受けた．Bacon はフランシス派の僧であるが，教会の圧迫に苦しんだのである．Bacon は評論酷烈なるを以て，時人の憎悪を買ったことも圧迫の来る一因であったろうが，科学的の精神に燃え而も同時に予言者の性格を具え，熱烈火の如きものがあった．それに当時はスコラ主義の哲学全盛期であって，哲学の鍛錬も浅からぬので，其研究的

精神は組織せられて帰納研究法は此人の手で余程整頓したと謂ってもよい．4 世紀後に至りて同じ英国の地から，而も同姓の Francis Bacon が出て帰納論理学を大成したのも亦宜なりである．

Magnus でも Bacon でも数学に関しては，数学其物の事よりも寧ろ無限とか，連続とか云う如き哲学思想に関しての事を多く論究したのであるが，固よりスコラ主義の学風から来た結果に外ならぬ．

スコラ哲学が十三世紀に発達したことに就ては，世紀初に Assisi の聖人 St. Francis があり，中葉には Thomas Aquinas が居るし，Bacon の出たのも其頃であった．少し後れて Duns Scotus も出た．大詩人にして大哲人なる Dante は世紀末に出現した．宗教，哲学，思想，文学等の方面に於て如何に人物に富んだかを見よ．スコラ哲学は此等の人々に依りて盛んに論ぜられ．盛んに進展し，そうして遂に哲学は宗教の覊絆を脱して独立の地歩を成すことになるのであるが，今や一歩一歩中世から近世に向って進んで居るのである．

此の如き時代に於て文学，芸術，音楽，建築等皆一として大に起きないもはなく，十三世紀は誠に偉大な世紀であった．然るにも拘らず，数学に於ては Leonardo を除いては殆んど之に比すべくもないのは，機運が未だ熟さなかったと云うのであろうか．或は他の諸般のものに圧倒されたとも見られよう．希臘の数学史上に於て文化の燦爛たるアテーネが却って数学の為めに恵まれたものでなかったのと，同様の事情を経験した世紀であったとも謂うことが出来る．此等の事は深く其由来する所を探り，事情を明らかにするときは，必ずや趣味津々として尽きないものがあろう事を信ずる．

第 9 章　外国の関係

既に十三世紀までの数学に就て説く所があったが，其発達にはイスラム教国の関係が甚だ多く，又希臘学術の影響も絶無ではなかったのである．其事は前掲の記事中に折に触れて幾たびか述ぶる所があった．

亜剌伯数字が採用されて，筆算の為めに旧来の算盤が駆逐された如きを見ても其事情は大概察せられよう．

亜剌伯数字が採用されるようになったのは，回教の文化，回教の学術との接触の結果であり，一方には西班牙の回教人が数学や他の諸科学を開拓して居るので，それと接触したのが一つである．西班牙内にも欧洲人の基督教国もあるし，此狭い国土での接触は甚だ密接なものであったろう．

一方には欧洲中世の大事件と云えば，十字軍の事であるが，十字軍は遠く地中海東岸の聖地に向うのであるから，相手は回教人であり，又中途で東帝国の地をも通過する．之が為めに広い世界を見て眼界の開けた許りでなく，回教国の文化と接触し，又希臘文化の残存するものにも接触したであろう．其当時に於ては欧洲は新興の勢に乗ぜんとし，回教国は既に下り坂に向いもするが，併し回教国が欧洲から学ぶ所のないのに引替えて，欧洲では見聞皆新たならざるはなく．次第に之に依って新興文化を開拓されたと言ってもよい．

Bacon が実験研究の精神に篤かったと云うのも，つまり回教国の実験重視の学風を受けたものに外ならぬ．

十三世紀には蒙古が興起して西南アジアの地方は蹂躙されたが，其後までも回教の学術は命脈を保もつ．西班牙の回教はただ二三百年間も存続する．

十三世紀には Marco Polo が遠く支那へ旅行した如き例もあるし諸学者が回教国に入れるものも少なからず，欧洲新興の数学，科学が外来の感化に依って構成されることは誠に著しい．人は能く我が日本の頗る模倣的で独創の見に乏しい事を言うが，之を十三世紀頃の欧洲，中世の欧洲と較べて果して何うであろう．西欧諸国の数学の決して独創のみで成立したのではない．是れは決して忘れてならないのである．

数学ではないが，有名な Dante の Divina Comedi(天界喜劇) は，回教文学中に其扮本と認むべきものが幾らもあり，Dante と佳人 Beatrice との恋愛物語までも回教国に其恋愛様式の先例があるとは，近頃西班牙の学者の精細な研究に依って明らかにされたのであるが，此れは独り Dante に関するだけの問題ではなく，西欧中世の文化が如何に回教文化の影響を受けたことの甚大であったかを示めすものであろう．今後研究の進むに従って，其影響は益々確められるに相違なかろうと思う．

Constantinople にも時おり学者が出て居る．回教国の数学に比して同日の談ではないけれども，多少存続するものがあった．1097 年に十字軍の為めに荒らされ，1330 年にはトルコ軍に破られて，其中間の頃には殆んど聞ゆる所もないが，其後再び活気を恢復し，maximus Planudes の如き人物の出たこともある．1340 年頃に存生であった．1327 年頃には Venice への使節として派遣されて居たこともある．勉強な人ではあるが，天才者ではない．併し Diophantos に関する著述などもあるし，又羅典語の諸算書を希臘語に翻訳したこともある．

其後 Moschopulus もあった．方陣を説いたのが著しい．

又 Rhabdas なるものもあった．此二人は十四世紀の人であるが，此頃には希臘の数学は筆算の影響を受けるように

なった．又希臘(ギリシア)語其物も次第に真意義を失うようになる．

けれども 1342 年と云う年は Petrarcha が Constantinople の僧侶に就て正式に希臘(ギリシア)語を学修し始めた年であり，1397 年より 1400 年の頃には Florence で希臘(ギリシア)語の講義をする人もあった．降って十六世紀になると盛んに希臘(ギリシア)数学の原本を索めて研究することも行われるようになったのである．

回教国は其勢力も衰え，其学術も亦振わなくなるが，回教国の亜剌伯(アラビア)訳からして，次第に希臘(ギリシア)の原本をも直接に探索することとなり，亜剌伯(アラビア)の学風に依って実験研究の重視された外に，希臘(ギリシア)の純数学の精神も亦摂取せられ，之を打って一丸と為し遂に欧洲近世の数学を作り上げることとなるのである．

第 10 章　十四五世紀の数学

十三世紀には数学は兎も角，他の実験的の科学や宗教哲学の講論は盛んなものであった．尋で Dante の如き偉人も出る．此人の思想の如きは既に半ば近世的のものであった．事情が許すならば，十四五世紀の頃に文芸復興は成就され得たかも知れない．けれども其成就は実は十六世紀まで待たなければならなかった．斯く後れたことには事情がある．

十四世紀から十五世紀に掛けて，西欧諸国で数学が行われなかったではない．数学者は各地方から随分に出て居る．けれども左まで注意すべき程の人はない．Pisa の Leonardo が出て一旦曙光が見えたものの，其後の三百年間は余り見るべき発達もないで空しく過ぎ去ったとも謂うべきであろう．

此時代に欧洲の数学者と云うものは，単なる数学者ではない．寧ろ哲学者である．哲学者と云っても，宗教家であり僧侶であって，哲学を修め，哲学と云うよりは神学と云う方が宜いかも知れないが，先ずそう云う方の人達なのであって．それが数学をも修めて居るのである．数学は固より其余技に過ぎない．此事情は余程数学開拓の上に不便であったろうと思う．私は支那で従来数学の大に起るべくして起きなかったのは，支那の数学者は儒者の仕事であり，真の専門家と云うものの殆んど無いことが一因かと思うのであるが，西洋でも矢張り同様な事情であったものらしい．諸大学は有るけれども，数学は殆んど多く講ぜられて居ない．

欧洲の中世に於ける哲学は所謂スコラ哲学である．煩瑣主義とか煩瑣哲学とか言われる程に煩瑣なものであった．針頭に天使が何人立ち得るかと云うような問題を真面目腐って論究して居るのである．其弊が数学の発達を妨げる要素にならないでもなかったろう．況んや煩瑣哲学は其勢力が余りに大にして拘束する所多く，何うも学問の進歩に有利なものではなかったと見たい．此れが又一つの原因を成す．

併し此等だけの事であれば，之を打破して進運に向う事も可能であったろうけれど，社会上の事情が頗る不利に陥ることとなった．

日耳曼(ゼルマン)では皇帝 Frederick 二世の崩じて後 (1254)，乱離の世となる．日耳曼(ゼルマン)皇帝と羅馬(ローマ)法皇とは甚だしく相争う間柄となり，其結果として伊太利(イタリア)は長年間の激しい修羅場と化し，英吉利(イギリス)と仏蘭西(フランス)とは有名な百年戦役を始める．仏蘭西(フランス)の国土は其戦場であるから甚だしく荒らされてしまう．英吉利(イギリス)でも之に続いて薔薇戦争の乱がある．此等の諸役に依って西欧の天地が何れだけ禍害を受けたか知れたものでない．殆んど学問の研究に没頭するの余裕はなかったであろう．

斯くの如き戦渦に苦しむ上に幾たびか黒死病の大流行があった．其流行に依って欧洲の人々は三分の一若くは半ばに滅じたろうと云う事であるから，如何に激烈な流行であったかを知るに足ろう．此れ又甚だしく学問の発展を妨げたに相違ない．

此等種々の事情が相依り相助けて，数学及び諸科学の進歩を妨げたのであるが，それは全く止むを得なかったと云うの外はあるまい．斯の如き中にあって，多少でも数学の開拓されたのが寧ろ不思議である．特筆する程の数学者は輩出しなかったが，而(しか)も全く注意すべきものがないではない．

英吉利(イギリス)には Canterbury の大僧正 Thomas Bradwardine(1260–1349) が居った．星多角形などの研究がある．此人や又他の学者の作中に西欧で最初の三角法が現われる．Bradwardine は又等周図形の研究などもあった．

仏蘭西(フランス)からは十四世紀に Nicole Gresme(約 1321–1382) が出た．Normandy の人で監督の地位に登ったが，分数指数と云う観念もあるし，函数と云う観念も亦之を有し，図解的の表示さえも試みたのであった．即ち座標幾何学の企ては既に此人の手で成らんとした．又無限級数

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\frac{4}{16}+\frac{5}{32}+\cdots\cdots$$

の和をも求めた．

此人の如きは時代が時代であるから，其業績は余り大きいものではないけれども．思想に於て甚だ優れたもののあったことは之を認めなければならぬ．

Cresme は其時代の経済学者としても，思惟の明瞭なので著しい人であったと云う．

十四世紀に此人の如き人物が出たは，勿論将来の発展を語るべき予告の標準となる．私は前にスコラ主義哲学が学問の進歩に有害であったろう事を記るした．而も哲学者なるが故に深遠に思惟する．其思想が豊富になる．Cresme の如き哲学の造詣を以てして数学を学んだので，思想的の獲物を数学界に齎らし得たとも見たい．西洋の近世初期に於ける数学諸大家が皆哲学者に非ざるはなく，そうして偉大な業績を建て得たのは固より偶然でない．理論的の研究の進んだ所以である．

此時代には伊太利に Luca Pacioli(1445–1514) が居った．美術大家 Leonardo Da Vinci 及び Francesea とも関係のある人であった．其著述には当時の知識を集成した編纂物があるが，余り独創的の業績は見られなかった．此人の著述中には随分間違いが多いと云うことで，後に Cardano は一章を割いて之が指摘訂正に当てたこともあった．Pacioli の著書は広く行われたと云うことである．

和算家の著書には過誤が非常に多いのであるが，此点は独り和算家にのみ求めらるべきではない．

日耳曼からは Regiomontanus が出た．本名を Johann Mueller と云う．Königsberg の人である．Regiormontanus と云うのは出身地の名称を羅典風にして呼ばれたのである．1436 年に生れ 1476 年に歿した．三角法の研究などに功労の多かった人で，希臘の数学に精通した．余り独創の業績はないけれども，学問に熱精のあったのと人道主義の立場から学問の研究に従事したのが著しい．新時代に進む為めの準備は此人などの手で次第に調うたのである．

第 11 章　文芸復興期の出現

西欧の数学は十三世紀に稍々其曙光を見てから二百年の間，種々の事情の為めに著しい発展を遂げることが出来なかったのであるが，十五世紀末になると Regiomontanus の如き博学な人や，Cresme の如き思想に富んだ人物も出た．其事情から考えても大に飛躍すべき時機の近ずきつつ有ることが思われる．今や即ち文芸復興の時代に入らんとするのである．西欧の思想は茲に一変し，自由奔放の精神を以て社会は改革され，学問文芸も全く更始一新することとなった．其事は十六世紀に出現するのである．文芸復興時代は普通に之を近世の初めに置くし，数学としても其時代のものは近世の数学の冒頭を成すのであるから，本章に於ては文芸復興に導き到るべき事情に就て，此時発達した数学者の活動や数学の実質は次の篇に譲ることとしよう．欧洲の中世は固より文芸復興に到るべき準備を整えたのである．

十四五世紀に於ては戦乱や疫病や種々の事象に依りて活動力が鈍ったとは云うものの，経済の状態は次第に進展した．其の為めに一種の活動力が養成されて来たこと言うまでもない．

スコラ哲学は次第に発展して，初めは教会の奴隷として進んだものが，中途で希臘哲学の助けを籍るに至り，遂に神学を棄てて独立自主の哲学を尊重するに至った．思想に於て教会の羈絆を脱せんとするのである，此れと同時に独逸皇帝と羅馬法皇との衝突は遂に法皇の権力を失墜せしめて，羅馬を見棄てて仏蘭西の Avignon に遁竄しなければならないような有様となる．此れは固より一法皇の問題ではない．社会人心の変化が之をして然らしめたのである．

希臘の古書も次第に探求される．これまでは亜剌伯訳を通じてのみ学ばれたものが，直接に希臘の原本から学び得ることにもなる．其機運は可なり長く開けつつあったが，1452 年には土耳其人の為めに Constantinople が奪取されて東帝国は滅亡する．希臘の学者は身を措くに処なくして，古書を携えて西欧に奔るもの多く，これから希臘の古書は多く西欧人の手に渡った．之が為めに古学の復興は急速に進む．是に於て Euclid の原本の如きも直接に希臘の原本から翻訳が作られることとなった．

印刷術の発明も亦知識の拡布を助けること多大なものがあり，文芸復興の一原因となるのであるが．数学書の印刷も出来るようになって，之れが為めに数学が如何ばかり普及されたか知れない．印刷術は支那では唐の頃から行われ，五代以後は甚だ盛んであって，宋代には活版も発明されたが，西洋では支那の印刷術を伝えたのではないらしい．西洋での発明は 1450 年の頃であって十五世紀後半には諸国で数学書の印刷も見られたのであった．印刷術の進歩には支那の製紙術が回教国を経て西洋へ伝ったことも亦重要視しなければならぬ．

土耳其が東方に勃興して西欧と東洋特に印度地方との通商を遮断したことは，地理発見の大活動に入る所以であり，其目的の為めに天文地理の学が如何に応用されたか，之に関して数学も大切な役目を演ずる．そうして益々開拓さるべき必要を生じた．之と同時に数学天文学等が予め開発されて居た為めに，探険旅行家を如何に援助したかは著しいものであった．

此れは一例であるが，数学や科学の発達が文芸復興の出現の上に活躍したことも少なくないのであり，文芸復興が成就して，其関係に依って数学の歴史が顕著な変動を生ずるのも亦自然の勢であった．西欧諸国の数学が真に価値あるものとなるは是れからである．

第8編　欧洲近世の数学

第1章　文芸復興の数学

我等は既に欧洲中世の数学が如何なるものであったかを見た．其発達の事情に就ても多少見るところを披瀝した．固より管見に過ぎず真相を去ること恐らく遠いであろう．けれども具さに欧洲中世の数学が発達した過程並に原因，其特質等に就て研究する時は頗る趣味津々として尽きざるものあるべく，之を我国の和算に対比し，和算の歴史的価値を批判することも同じく有用の業たることを思わしめる．若し之に拠って数学史研究の興味と意義とが了解せられることもあらば，我等の望みは足る．

我等は今，欧洲の近世に向って観察の歩みを続けることとしよう．

近世の源頭は或は 1453 年の Constantinople 陥落に置くものあり，或は 1492 年の新大陸発見に置くものあり，而も此等は要するに便宜な目標を供するものたるに止まり，人道主義 humanism の精神が伸張して社会の上にも，思想の上にも，学芸の上にも大変動を生じたのが，文芸復興の出現であった．其変動は短期間に成立った．恰も我国に於ける維新の変革の如きものであったと見ても宜い．

宗教に対する反抗と開放は独逸から始まる．Luther が独逸から出て法皇庁と争い，新教を立てた事情を見よ．此種の運動には科学探究の精神の起きたことが伴って居る．故に当時の数学は暫らく独逸を主として開拓された．

Regiomontanus が独逸から出たことは前に述べた．勿論宗教改革が独逸で始まったよりも大分以前の事である．

此頃独逸ではハンザ同盟の諸市が勃興して商業が盛んであるし，物質的に繁昌して居るから，科学開発上にも好都合であったのである．宗教改革が独逸から起きるのも，つまり独逸の富が教会からの誅求の的になったからの事に外ならぬ．物質の繁栄なくして科学の開発は望まれぬと言って宜い．

Regiomontanus は十五世紀末の人であるが，続いて Copernicus，Rhoeticus，Kepler 等の諸大家が独逸から出たことを見よ．Copernicus は十六世紀初半の人，固より Poland 人であるが，独逸の学問の系統に属する．太陽系の学説は甚だ著名である．

Rhoeticus(1514–1567) は三角函数表の作製で有名である．Kepler は稍々時代が後れるから後に説くこととしよう．Pitiscus(1561–1613) の星学用表の作製は古来嘗て無い精密なものであったと云う．独逸で星学が盛んに起こり，それに関連して三角法の表など精細なものが作製されたのであった．

伊太利から Pacioli の出た事は前に説いたが，其後伊太利でも幾多の大家が輩出した．伊太利の復興期に於ける数学は独逸とは事情が同じからず，主として方程式の解法が進歩したのであった．

文芸復興期の伊太利の数学を考えるに就ては，第一に Leonardo Da Vinci に注意しなければならぬ．Da Vinci が画家として極めて著聞することは，人の能く知る所であろう．画家としては古今東西を通じて第一流の人たるのみならず，彫刻家としても，建築家としても非凡の人であり，科学の研究に於ても其達眼は驚くべきものがあった．此人の如く多芸多通にして．行く所として可ならざるなく，而も到処に常人の企て及ばざる識見技能を発揮したものは，蓋し多く索めることは出来ない．而も Da Vinci は実際に其八人芸を遂行して綽々として余裕があったのである．

Da Vinci は此の如き人物を以て，又数学にも其天才の指を触れた．幾何学に於ては曲率の事など論じ，星多角形を研究し，円規を一定の広さに開いたのみで作図を行うこと，並に正多角形の作図法などのことを企てた．又重学，視学，透視法等の事も多く研究があった．物理学の研究も少なくない．

Da Vinci が此等の事を研究し，創意する所のあったのは，此れだけでも一代の泰斗とするに足りよう．而も美術家の余業であるから誠に驚かされる．純数学の上に於て Da Vinci の業績は左まで偉大でないかも知れないが，併しながら斯の如き鬼才を有する Da Vinci をして数学を専攻せしめたならば，其造詣は恐らく計り知ることは出来なかったであろう．之が為めに伊太利の数学は全く別の道程を歩んだであろうし，欧洲の数学も其発達の過程を一変したかも知れないのである．Da Vinci の出現は全く我等の驚異である．

Da Vinci は Florence 近傍の Venice の人で，1452 年に生れ，初め伊太利の諸市に在住したが，晩年仏蘭西王に聘せられて其国に居ること三年，1519 に仏蘭西で歿した．

伊太利は既に斯の如き人物を出した．美術家としては Da Vinci に稍々後れて Raphael 及び Michel Angelo が出るし，更に後れて Tintoretto もあった．此等諸大家が相尋で輩出したことから見ても，伊太利人の美術に天才のあったことは頗る明瞭である．数学の方面に於ても，Da Vinci と同じ道程を進んだ訳ではないけれども，幾多の人物が輩出し，ここ

に方程式解法に於て新生面を開くに至った．

此方面の研究が進むのは．Luca Pacioli(1445–1514?) が大きな代数書を作って，方程式

$$x^2 + mx = n, \qquad x^2 + n = mx$$

を解くことは今のところ，円積問題も同じく不可能なりと称して，其記載を結んだことに始まる．

続いで出たのが Scipione del Ferro(1465–1526) であった．Bologna の人で，此地の大学の数学教授であり，幾何学では円規の既定の開きに依って作図を行うことなどしたが，代数学に於ては三次方程式 $x^3 + mx - n$ の格段の場合に於て解くことが出来た．当時の風習として之を公にしなかったが，1505 年若くは 1501 年に門人 Floridas(Fior とも書く) に伝えた．一説には約十年後の事とも見える．此頃には発明術は之を秘して人に伝えず．数学の仕合と云うことが行われて居るから，其時敵手の及びも付かぬ虎の巻にしようと云うのであった．其風習は此後に百年も続いて居るが，斯の如き事情あるが為めに発明創意の先後に就て数限りもなく争議が惹起されると云う悲しいことになった．

Floridas は Venice の人，此解法を数学仕合に使ったこともある．此人の伝記は明らかでない．

Brescia の教師に Coi(羅典風には Colla 書く) と云うものがあって，問題の解を好んだのであったが，1530 年に仕合の意味で，二つの方程式

$$x^3 + 3x^2 = 5 \text{ 及び } x^3 + 6x^2 + 8x = 1000$$

に関する問題を Tarrtaglia へ提出した．Tartaglia は初め之を解くことが出来なかったのであるが，既にして解法を得るに至った．

Tartaglia は Brescia の人，本名を Nicolo と云う．1499 年頃或は数年後に生れ，1557 年に歿した．年甫めて六歳にして．仏蘭西兵士の為めに傷けられ，之が為めに生涯言葉使いが自由でなかったので，Tartaglia と呼ばれたのである．即ち「どもり」の義である．而も今に至るまで本名を言わずして，「どもり」で数学史上に其名が高い．夙に父を失い母に養われたが．家貧にして学校に入ることも出来ないで，羅典語，希臘語，数学等を自習したのであった．而も天分の優れた人であるから，早く数学教員になったのであった．

Tartaglia は前記の三次方程式の不完全な解を得たが．秘密にして居た．併し其事を公開の席で話したことがあるので，Florida が之を聞いて自分も $x^3 + mx = n$ の解法を知って居ることを主張した．Tartaglia は之を大言壮語ではないかと思い，公開の談議を申込んだ，日は 1535 年二月二十二日と決った．然るに Tartaglia は Floridas が亡師から学んだものと聞き，或は仕合に負けを取ってはならぬと思い，一生懸命に研究して仕合と云う日の十日前に一般の解法を解し得たのであった．其事は Tartaglia 自身記して居る．二月十三日には $x^3 = mx + n$ の解をも得た．二十二日の仕合には双方から三十題づつ出して，五十日内に之を解き得た数の多いのを勝とすることになった．Tartaglia は其三十題を二時間内に解いたが，Florida は一題も解き得なかった．Tartaglia は是れから専心三次方程式を研究し，1541 年には $x^3 \pm px^2 = \pm q$ を $x^3 \pm mx = \pm n$ の形に変形して，其一般解法を得た．其数学仕合の事は欧洲全土に伝えら，Tartaglia の評判は高いものになった．Tartaglia は其解法の仕方を発表するように励められたけれど，代数書の大著を作って居るので，其中へ出すのだと言って応じなかった．

然るに Milan の人 Cardano(1501–1571) は切に Tartaglia に請うて，秘密を厳守することの誓約を立て，無理に其解法の算法を伝えられた．此人の名は普通に Cardan と云う．

此時 Cardan は Ars Magna と題する書の著作中であった．其書中に三次方程式解法を記るすことは，洛陽の紙値を高からしむる所以なりと感じ，1545 年に公にするとき其方法をも出してしまったのである．所謂 Cardan の公式として知られたものは即ちそれである．

従来の所説に依れば Cardan は自分の創意として出したと云うことであるが，必ずしも左様ではないと云う．併し Tartaglia は激怒した．自分の著述を飾る料にもと思ったものが，鳶にさらわれて了ったのである．Tartaglia は Cardan 並に其の門人 Ferrari に対して数学の仕合を申込み，三十一題づつ出して十五日内に解こうと云うのであったが，Tartaglia は七日間に其多くを解いたけれど，敵手は五ケ月余までは解答がなく，それも一問の外は凡て誤りであった．是れから長く仕合が続く．双方から幾ら問題を出し合ったか知れない．次第に悪感情は増長し，心は燃え立って来た．それに Tartaglia は不仕合せなことがあって，誠に気の毒なものであった．けれども 1551 年には一番奮励して兼て計画の大著を書き上げようとしたが，遂に方程式のところまでは書き得ずして歿した．Tartaglia 及び Ferro が三次方程式解法に就て果して如何なる程度まで成功したものであったかは，今遂に其委細を知ることは出来ない．

三次方程式の解法の歴史に就ては，今言う如く甚だ苦るしい説話が附随して居る．之を筆にするのも我身を切られるような思いがする．けれども単に秘密の風習の馬鹿馬鹿しかったことを笑い，不徳の行われたのを責めるだけで，済まされるものではない．此の方程式解法の仕合だけから見ても，如何に知識慾が旺盛であり，如何に研究に熱烈であったかを知るに足りよう．全く生命までも打込んだものであった．其熱精の駢る所を看抜かなければならぬ．ここに歴史の生命がある．斯くして一見馬鹿らしいような数学仕合の一駒も歴史の上に活躍するのである．近世欧洲の数学が四五百年間に如何に変遷発展するかの原動力は全く其精神の中に宿されて居たのである．

三次方程式の解法が成立してから，四次方程式の解法も亦研究された．1540 年に Coi が提出した問題中にも四次方程式が存した．之に就ては Cardan は研究する所があり，其一般の解法は門人 Ferrari(1522–1565) が之を得た．其結果は Cardan が大著 Ars Magna(1545 年) の中に記るして居る．Ferrari の解法は時には Bombelli の解法として知られて居るが，実は Cardan が三次方程式解法の作者なりと言われると同じく，事実ではない．

Cardan の著書は代数学進歩の上に貢献する所が多かった．

Cardan は人物としても誠に珍らしい人である．Milan の法学及び医学教授をして居た人の隠し子であって，其性行と云い学問と云い．矛循撞着の掃き寄せとも謂って宜かろう．研究は正確であるが，正直な人ではない．一方に真面目の学徒でもあり，又占星術にも通ずる．賭博もすれば，其子は人殺しをして其弁護をしたこともあった．熱烈の信仰があるかと思うと，不信者にもなる．借金の為めに入牢したこともあるし，法皇庁の年金を与えられたこともある．数学の外に哲学，医学にも精しく，物理学者としても有力なものであった．マキアヴェリズムの行われた国の天才者流としては，恐らく適わしいものであったろう．極端から極端に奔り，極った主義のない人であったのも著しい．

Ferrari は貧家の出身で初め Cardan の家に書生に置いて貰ったのであるが．Cardan は其才気を愛して教授した．けれども人と為り磊落不羈にして，手におえないので，とうとう Cardan と衝突して十八歳の時には Cardan と手を切り，教授で生計を立て，次第に世の認むる所となって一家を成したのであった．Cardan が解を得なかった四次方程式は此人の手に移され，美事に成功したのであった．Cardan は之を 1545 年に其大著の中で公にした．此時 Ferrari は正に二十三歳である．

英国には Tonstall，Robert Recorde 等が居って，其著書もあるが，伊太利の諸学者の如く天才の流露したものではなかった．

代数の方面に於て独逸の学者中にも Stifel など人物があったのであるが，此等の人の事は今凡て省略しよう．

第 2 章　Vieta

文芸復興期に於ける独逸及び伊太利の数学に就ては既に之を明かにしたが，十六世紀後半に仏蘭西から Francois Viète の出たことは見遁がしてならない．1540 年に Poitou に生れ，1603 年巴里で歿したと云うから，伊太利の諸学者よりも其年代は稍々後れる．けれども Viète も亦一個の天才者流にして，其事蹟は甚だ興味を惹く．其名は普通に半ば羅典風に改め，Vieta として知られて居る．

十六世紀の仏蘭西は同じ時代の伊太利の如く数学活動の上に多士済々たりしと云うことは出来ない．けれども独り Vieta が出たのは，仏蘭西の為めに甚だ誇るに足るであろう．仏蘭西には十四世紀には Nicole Oresme の如き天才を産んでいる．仏蘭西の数学は何うも天才風の所が見られる．

Vieta は十六世紀の人であるが，伊太利の諸学者よりも年代が少し後れただけある為めか，数学の発達上に於て一新時代を画すると言っても宜かろう．そうして次の十七世紀の数学に接続するのである．

Vieta は数学者として偉大な人物であるけれども，数学を以て生業とした人ではない．数学を教授したのでもない．生涯，国王に仕えて国政の要路に立ち．後には枢密議官に登ったけれども生来甚だ数学を好み，閑暇あれば即ち数学の研究に従事したのであった．そうして其造詣は遥かに時流を抜き，史上に卓立する．

Vieta は仏西戦争の際にスペインの文書の暗号で記るされたものを解読して成功したことがある．此種の事には余程長じたものと見える．スペインでは之を魔術の仕業であろうと考えた程であった．

Vieta は数学の研究に就ては日夜殆んど寝食を廃するようなこともあった．当時政治上にも宗教上にも甚だ多端であって，心を労することも多かったであろうが，其中に居ってそう云う様子であったのは，真に学を好むものでなければ出来ないことであったろう．

Vieta は 1600 年に公にした書に於て，一種の方程式解法を試みた．三次，四次の方程式は前に伊太利で一般に解かれることとなり．又仮定法に依る解法は Cardan 及び独逸の Bürgi 等も使ったのであるが，Vieta の解法はそれとは同

じくない．高次の数字方程式に就て普通の開方に似たような方法で之を解くものであった．其解法は英吉利(イギリス)の Harriot, Oughtred, Wallis 等が讃歎する所となった．そうして此等諸学者は夫々(それぞれ)の小改良を加えて居る．

三角法に就ても功績が多い．三角法に代数学を応用したのも此人から始まる．

嘗て Netherland の大使が仏蘭西(フランス)王 Henri 四世への談に，ベルギーの数学者 Romanus の出した問題即ち四十五次方程式

$$45y - 3795y^3 + 95634y^5 - \cdots\cdots + 945y^{41} - 45y^{43} + y^{45} = C$$

を解き得る学者は，仏蘭西(フランス)にはあるまいと言ったことがある．王は Vieta を召して之を示めしたが，Vieta は兼て此種の問題を研究したことがあり，此の恐ろしい大きな方程式は実は

$$y = 2\sin\frac{1}{45}\phi$$

を用いて $C = 2\sin\phi$ を表わしたものに外ならざるを看破し，且つ $45 = 3\cdot 3\cdot 5$ なるを以て，角を五等分し，又二度三等分すればよい，こうして此れは五次方程式及び三次方程式に帰着することを思い，唯一根にあらずしてに二十三根を求め得た．

又三次方程式の解法に於ても，Cardan と同じく，変形に依って試みたが，Cardan の変形不可能の場合 (irreducible) をも三角法を用いて処理することが出来た．

Vieta の代数学では諸係数と諸根との関係を認めたらしい形跡がある．又未知数を表わす為めに字母を使用したのが著しい．其前にも Cardan, Stifel 等が字母を用うることはして居るけれども，Vieta に至って之を代数学の主要部分たらしめたのが，先輩諸学者より一頭地を抜いた所であった．

加減の符号，等号等が用いられるようになることは独り Vieta だけの功労ではなく，独逸(ドイツ)の学者なども与る所があったが，併し Vieta が之を用いて一般に行われることにした功労は否まれぬ．伊太利(イタリア)の諸学者はまだ多く用いなかったのであった．

Vieta は又円周率を無限乗積で表わしたり，

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}} \times \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \times \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}} \times \cdots\cdots$$

なる公式で表わしたりした．

Vieta が随分優れた数学者であったことは，此等の業績に依って窺い知られよう．

第 3 章　星学と数学

西洋の中世に於て数学者と云えば，寧ろ天文学者のことであった．数学と天文学とは同意義を有したと謂っても宜い．それ程密接な関係にあった十六世紀から十七世紀の頃になると，数学も発達すれば，天文学も亦異状に発展する．是に於て数学者と云うのが直(ただ)ちに天文学者を意味することにはならなくなる．両者の間に自然に分界線が作られるのである．

けれども元来斯(かく)の如(ごと)き関係の密なるものがあった為めか，西洋の数学は天文学の発達に依って影響される所が多いし，又反対に数学に依って天文学の理論化されたことも亦少なくない．

独逸(ドイツ)の学者は Copernicus が太陽は太陽系の中心なりとの説を立ててから以来，天文上の関係で頻(しき)りに三角法の表など作った．Stifel Bürg など云う人が出て小数のことを始めたりなどするのも，此方面の研究から間接に刺戟のあった為めかと思われる．

尋(つい)で Kepler(1571–1630) が出る．Copernicus の天文体系を改良し，天体運行の事に就て数学上の理法を立てたのが有名であるが数学にも達した人であった．所謂(いわゆる) Kepler の法則と云うのは，円錐曲線論の応用によりて天体の運行を説いたもので，円錐曲線論が斯(かく)の如き応用を見たのは之を以て嚆矢とする．此頃から数学の天文学に対する関係は微妙なものとなるのである．

伊太利(イタリア)には Galileo Galilei(1564–1642) が居るが，数学にも貢献して居るけれども，数学者と云うよりも物理学者であり，天文学にも通じた人であった．

Galilei は Copernicus の天文学説を主張するが為めに，羅馬(ローマ)法皇の忌諱に触れ，甚だ圧迫を受けたことは極めて有名である．西洋で学説に対し，学問の研究に対し，基督(キリスト)教の圧迫の甚だしいものがあり，学者は之に反抗して次第に学問の

尊信を高め，遂に現に見る如く学問が尊重され，学者が敬慕されることになったのであるが，其歴史は誠に面白い．西洋の基督教が学問の開発上に良好の関係のみ有したと見てはならないのである．

天文学と数学との関係によって数学の開発されることは後まで継続して其事実を見るのであるが，今之を説くことをすまい．

第 4 章　伊太利，Cavalieri

十六世紀に伊太利から諸大家が輩出して，方程式解法の上に成功したことは前に述べた．然るに其後伊太利から多く数学の上に見るべきものがなかった．寧ろ Galileo の如き物理学の大家が出現し，其門下には Toricelli があり，Viviani があり，皆物理学者であった．

此事情から見るときは，伊太利の学風は数学よりも物理学などに多大の因縁があったらしい．大美術家 Leonardo Da Vinci が数学にも貢献はして居るものの，数学よりも実験的の科学に関して著しく秀越の人物であったような事情も，一百年後に至って実際の上に顕現して居るとも見られよう．

けれども Galileo が出た頃から伊太利の数学でも他の科学でも振わなくなる．伊太利の学問芸術の発達は諸都市の勃興に帰因するのであるが，其諸市が勢力を失墜するので，学問開拓の余地もなくなるのである．

此間に於て伊太利の数学者に注意すべき一人物があった．Cavalieri(1598–1647) が即ち其人である．Galileo の門人であって，ゼスイットの僧侶であるが，Bologna の数学の教授もした．1635 年に不分法 (method of indivisibles) の作があった．つまり無限小に関する思想であって，元と希臘の学者及びスコラ哲学者も之を考えないではない．従て必ずしも独創とのみ見ることは出来ない．けれども Newton 及び Leibniz の微分積分学が成立するまでの一新算法として重視さるべきものであった．其見解に依れば，線は無数の点より成り，面は無数の線から成立するなど見たもので，級数の和を求むることに依り，線の長さ，面及び体の積を求めることを工夫したのである．

此方法は Galileo の推賞する所となった．

Cavalier は之に依って Kepler が提出した多くの問題を解くことが出来た．Cavalieri の算法は其原則に於て正しいものではないが，併し正しい結果を得べきものであった．中世以来の哲学に依って其理論を構成したことなど注意すべきであろう．凡そ五十年間も世に行われて便利として，難問題の解には少なからず役立ったのであった．

伊太利からは此外に長く偉大なる数学者は出ないのである．

第 5 章　仏蘭西の数学

Vieta が十六世紀の終りに仏蘭西から出た天才数学者であったことは前に述べた．Vieta に続いて仏蘭西には幾多の偉人が輩出した．一時は欧洲数学界の中心になったと謂うべきであろう．

先ず仏蘭西の数学者として Descartes(1596–1650) を挙げよう．Descartes が哲学の大家であったことは，固より著名であるが，数学者としても亦第一流の人物である．物理学上の貢献も亦著しい．

Descartes は門地ある家に生れ，早くから充分に教育を受けることが出来たが，既に数学を修むるに及んで，望みに依って Orange 侯 Maurice の軍隊に属することとなった．而も既にして軍隊生活に飽き，去って諸方を歴游すること四年にして巴里に帰った．其交友中には後に有力な数学者として知られた人が多い．けれども巴里に居ることを好まず，和蘭に赴いて瞑想及び研究に没頭すること二十年，1649 年瑞典の女王 Christina の聘に応じ Stockholm へ行ったが，居ること数月にして翌 1650 年 2 月に歿した．

Descartes の哲学書 Discours de la methode が発表されたのは 1637 年であるが，其中に『幾何学』の一篇一百六頁があった．此の『幾何学』は読み易くないが，之に依って解析幾何学が誕生の声を挙げたのである．勿論何等諸先哲の準備のない所に驚天動地の出現を見たと云うのではない．Dcscartes の幾何学を産み出す為めには，其前に種々の研究や試みが現われて居たことは言うまでもない．又同時の人 Fermat の如きも同じような組織を企てたものもあった．今其穿鑿はすまい．Descartes の解析幾何学が成立して代数の方程式を以て曲線を代表せしめ，其性質を研究し得ることとなったのであるから，将来の数学の発展に向って何れだけ恩恵を及ぼしたか，殆んど計り知るべからざるものであった．

Descartes に尋で考うべきは Fermat(1608–1665) であろう．Fermat も亦天才数学者であった．初め法律を学んで 1631 年には Toulouse 議会の顧問になるが，数学を好んで修めたのは年三十を過ぎて以後の事であった．而も頗る熱烈に之を愛好した．Descarte や Pascal とは違って激しい気象の人ではなく，平穏な生涯を送った．其造詣は数学諸分科に於て天才の閃きを見せて居ないものはない．而も其業績は之を公にすることをせずして，Descartes，Pascal など云う諸

友人へ手紙で報じたくらいのものであった．それと云うのも天才の現われの一つであったろう．

Fermat が解析幾何学の考えを立てたのは，Descartes の著作以前であったが，考えた許りで構成記述することはなかった．

曲線の求積，切線のこと，極大極小等に就て微分の考えも持ったのであり，Cavalieri の研究よりも以前であったかと思われるが，其創意の時日は不明である．

Fermat は此等の創意があるが，併し最も其名を知られたのは整数論の研究であった．Diophantos の著書は 1621 年に Bachet の訳した本があるが，Fermat は此書を学んで多く註をしたり，又手紙に記るしたりした．此等は其死後に註解として公刊された．中に $x^n + y^n = z^n$ は n が 2 より大なるときは整数解がないことを示めして居る．此れは Fermat の定理として頗る有名であり，今日に至るも其証明には幾人の多数者が苦しめられたか知れない．此事の如きも Diophantos の書物の余白に記るして居たのである．Fermat の手で近世の整数論は築き上げられたと云っても宜い．

Fermat の如きは数学を好むが為めに学んだと云うに過ぎないであったろう．ここに Fermat の人物が躍如として居る．

整数論に関しては Bachet(1581–1638) の名も之を挙げなければならぬ．

Mydorge(1585–1647) 及び Desargues(1593–1662) の二人は透視法を使用したり，幾何学に就て新らしい研究が多かった．近世幾何学は此二人と Pasca1 とから始まったとも認むべきであろう．

Pascal(1623–1662) は天才として恐らく Fermat にも匹敵し得る人であったろう．幼にして父の教育を受けたが，父も亦数学者であった．Pascal は二歳の頃から幾何学の天才がほの見えたと云う．而も父は幾何学を学ぶことを許さず，先ず古典語を学ばしめんとした．而も Pascal は図を書いては証明を行い，何等の用書もなくして開拓する所があった．父は遂に其子の天才を認め，是れからは抑圧せずして進んで之を学修せしめた．所謂神秘六辺形の創意は十六歳の時の事であった．有名な計算器械の発明も十九歳の時である．此頃既に諸般の科学に造詣があり，此人の将来は測るべからざるものがあった．けれども天は此少年天才に幸せずして，不治の疾患に罹り，自ら言う所に依る十八の時から一日として疾苦を遁れたことはないと云う．二十四歳の時から宗教の研究に没頭し，他の諸学科は放棄したのであるが，時おり従前の造詣に帰って考慮するこもあった．擺線の事に就て創意する所のあったのは，歯痛の為めに睡むられなかった一夜の中に次から次へと考えが起きて出来たのだと云う．確率論は Pascal と Fermat との文通に基いて創まるのだと云う．Pasca1 が数学者，物理学者として令名を馳せたのは，二十四歳若くは二十五歳にして宗教及び哲学に入る以前の事に属するのである．Pascal は其後病勢次第に重って，三十九歳で永眠した．

Roberval(1602–1675) も亦仏蘭西の学者として述べなければならぬ．巴里の仏蘭西大学に数学教授たること四十年，曲線論の研究など著しい．曲線の切線作法に関する問題は伊太利の Toricelli 等の研究が初めを成すのであるが，Roberval は頗る其攻究を進め，其方法からして後の微積分学に近かいものになったのであった．Roberval は不分法を自ら発明したと称して居るが，Cavalieri が先って発表したのは事実であり，二人の研究の間に於ける相互関係及び前後如何は容易に決し難いであろうと云う．兎も角，Roberval 及び Pascal の研究に依って不分法の基礎の理論の整ったことは否まれぬ．微積分学発達の歴史上に固より重要な地歩を占める．曲線論の研究など此算法から進んだのであった．

第 6 章　英吉利の数学

十六世紀初頭から半ば過ぎまでに於ける仏蘭西の数学が，多く天才者流を輩出せしめて偉観を呈したことは既に述べた．誠に仏蘭西の国力が伸張して国民の元気旺溢たる時であるから，如何にも自然の勢であったろう．而も其余りに天才風なのに驚かされる．

此の同じ頃に当って仏蘭西とは一葦帯水の英吉利の事情は何うであったろう．十六世紀後半は即ち女王 Elizabeth が君臨した時であり，通商航海は発達する．スペインの大艦隊 Armada を破って，スペインの国勢は再び振わぬこととなった．其後英吉利の政治は Cromwell が出たりなどして，幾多の変動があるが，国力も経済も次第に進んで，海上の大権力となるのである．千古の文豪 Shakespeare は Elizabeth の治下に出で，帰納論理学を構成した Francis Bacon も亦其時の人であった．其時代の英吉利には数学の諸大家も輩出したが，教科書の整理などに忙はしく，未だ天才者流を出現せしめるまでにはならなかった．けれども十七世紀になっては，幾多の偉人が相尋で現われることとなった．

先ず Harriot(1560–1621) を挙げよう．アメリカに派遣されて測量に従事し，地図を作った人であるが．天文学に於ても亦造詣が深かった．数学上の事蹟としては 1611 年の頃に代数教科書を著述したことがあり，歿後に至って公にされた．其後長く標準教科書とされたもので，方程式の理論に関し見るべきものが少なくない．

Napier(1550–1617) は蘇格蘭の人であるが，貴旅の家に生れて初め神学の書を作ったことなどもあった．甚だ機巧に

富み．焚焼鐘掃蕩砲，装甲破壊車，潜水艇等の製造を試みたと云うことであり，夢想家なりと思われもしたが，世界大戦の時には大概理想が実現されたと謂って宜い．

Napier は対数を創意したのが，数学史上で甚だ顕われて居る．其著書の公にされたのは 1614 年であり，対数の性質を説明し，若干の表を附したものであった．1619 年，Napier の死後に，他の一著が公にされ，対数計算の方法を説いた．Briggs(1556–1631) は London で数学の教授であったが，Napier の発明を聞いて深く注意する所あり，其拡布，完成に努めた．十を対数の底とすることは，二人の談話に基いて企てられることになったと云うが，Napier も前から之を考えて居たのであった．Briggs は是れから全力を挙げて対数表の作製に従事した．其著書は 1624 年に出版された．其表にはまだ足らない所があったが，それは和蘭の Blacq(1600?–1667) が補うことになった．対数表の作製に就ては瑞西の Bürgl(1552–1632) なども之を企てた．此等の委細は今之を説くの余裕がない．

対数表が成立して，星学用の計算は著しく簡単に出来るようになり，星学者の生涯は延長されたことになったと謂われて居る．

Oughtred(1574–1660) は英国教会の牧師であって，数学を職とした人でないが．Harriot と同じく当時の数学諸教授よりも数学の造詣が深かったと云う．大学在学中にも殆んど夜を徹して数学を考えることあり，後にも数学研究の為めには二夜も三夜も寝ないことが続き，一体余り睡らないことが能くあったと云う．こう云う風の勉強をしたけれども，八十四歳の高齢を保った．

Oughtred は計算尺の発明があった．又代数記号の使用に頗る努めた．学校の教授にはならないが，生徒を集めて無報酬で教授したことがあり，Wallis 及び Wren の諸大家が其門下から出て居る．Wren は建築の大家であって，又数学の造詣も深かったのである．

Harriot や Oughtred 等に依りて代数学が大に整頓して．其後に仏蘭西から Descartes が出て代数学を幾何学に応用して解析幾何学を組織したのも所以ありであろう．

Wallis(1611–1703) は初め神学を学んだが，数学及び物理学に興味を有して，後に Oxford 大学の幾何学教授になった．一時王室附の牧師をしたこともあった．博学にして又著述の多い人であり，数学上の創意も少なくない．指数を押し拡めて負指数をも用うるようになったのは，Wallis も其最初の一人であった．Cavalieri の算法の価値を認め，之を用いて曲線の求積を研究した．まだ二項法が出来て居ないので，円の求積に於て十分の成功を見ることが出来なかった．希臘の数学に同情を持つと同時に，円錐曲線を二次曲線と見て代数学的に研究することをもした．其業績中には重学，物理，星学，生理，音楽其他に関するものもあった．其大著は 1655 年版の Arithmetica Infinitorum であり，微積分学の歴史の上に於ても重要な地歩を成すのである．

Gregory(1638–1675) は蘇格蘭の人，数学及び物理学を修めた．此両者を兼ね修めたのは，其当時普通の事である．反射望遠鏡を発明したが，製作はしなかった．数学に於ては無限級数の研究などあり，収斂発散の区別をもした．

Barrow(1630–1677) は希臘学者として当時第一流の人であり，神学者としても亦令名あり，後に Cambridge 大学の副総長にもなった人であるが，数学者としても甚だ有力なものであった．説教家としても論客としても優なるものであった．物理学及び天文学にも造詣が浅くない．初め数学の教授になったが，Newton の天才を認めて職を譲り，神学の教授に転じた．其創意の業績は一般の講義中や視学及び幾何学の著述中に見えて居る．切線決定に関して新方法を用い，微積分学に近いものとなる．Differential triangle 即ち微分三角形と云うか，之を用いたのは，今日でも微分を行うに当って使用する方法に外ならぬ．Barrow の手で微積分学の開拓が頗る近づき来たことは誠に著しい．

Newton が出る前の英吉利には上記の諸大家が輩出したのであり仏蘭西に比しては稍々一籌を輸するかも知れないけれども，而も甚だ有力なものであったことは否まれぬであろう．若し Newton をも加えて打算すれば，互に兄たり難く弟たり難しではないであろうか．今必ずしも両者の評値をすることを要せぬ．

序に附記して言うが．此時代に和蘭に Huygens(1629–1695) があった．物理学者として最も著聞する．振子の研究，振子時計の発明，落下物体の法則等が其業績であり，微積分学の建設にも関係があるし，曲線論などに功労が少なくない．数学を物理学に応用する上にも得る所が多かった．此人の事は和蘭の数学の代表として，尚委しく述べたいけれども，其余裕なきを以て暫く割愛する．光の波動説を唱えたことなどは注意し置くべきであろう．

第 7 章　Newton 及び Leibniz．微積分学の建設

十六世紀の英仏両国の数学が甚だ発展して，微積分学に近かいものになりつつあった事情は既に之を語った．伊太利や和蘭の学者も亦関与する所があった．独り独逸は Kepler の如き人物は出たが，三十年戦の如き大戦があって国土は荒廃

に帰し，此時代に数学など修めて居る暇がない．独逸から有力な数学者が出なかったのも止むを得まい．

此時に当って我等の注意を怠るべからざる二大人物が時を同うして，英吉利と独逸とから出た．Newton と Leibniz がそれであり，英吉利から Newton の出たのは当然であろうが，あの時代の独逸で Leibniz が生れたのは，驚異とも言うべきであったろう．

Newton は 1642 年 Lincolnshire の農家に生れ，出生に先きだって父は歿し，母に育てられた．初め学業などに注意することはなかったが，年長の子供に蹶られたことがあって，これから発憤して学業にいそしみ，級中の首席に登るようになったと云う．少年時代から器械の発明などすることを好み，水時計や，風車や，車中の人形が運転する車などを作ったこともある．Cambridge 大学に遊ぶに及びて数学の天才は漸く発露するに至り，初等幾何学を学ばずして初めから Descartes の幾何学を読破したのであるが．後には初等幾何学を無視したことを甚だ悔いたと云うことである．其頃には当時の諸大家の諸書をも学んだが，特に Wallis の『無限の算術』は最も愛読する所であった．又 Barrow の教を受けたのも其天才を発揮する上に少なからざる関係があった．此二人の研究から暗示を得たこと幾何なるを知らない．Wallis は曲線の求積に就て研究があるが，まだ不充分な所がある．Newton は其弱点を補正せんことに努めた．其結果として二項法の定理を立することが出来て，為めに求面積の問題は容易に実行された．是れ二項定理に依て無限級数を展開した上で，算法を施し得るからであった．

此種の研究からして，所謂流数術 Method of fluxions の発明となった．是れ実に 1665 年乃至 1666 年の事であり，之を曲線の求積に適用したのであった．けれども 1669 年まで人に告げたこともない．此年作る所の論文を Barrow に示めした．此論文には流数術は説いてはあるが，まだ不充分なものであった．Newton は此論文を公にせぬので，世に之を知る人はなかった．

1671 年には『流数術』と題する一書を作り，一科の学として之を組織することを企てた．而も刊行するに至らなかった．Newton の流数術は即ち後の微積分学である．其算法の性質並に発達の由来など説けば面白いけれども，凡て之を略さなければならない．

Newton が Cambridge に在学の頃に，郷里に帰省中，林檎が枝から落ちるのを見て，宇宙重力の大法則を発見したことは，極めて有名である．此大発見が成立した為めに，天文学が数学上から研究される上に何れだけ便宜になったか知れないのである．

Newton は 1687 年に其大著 Principia を刊行した．此書は題して『自然哲学数理原論』とでも言うのであろう．普通に略して Principia と呼ぶ．宇宙重力則を基礎として，宇宙の構成を説いたのである．

Newton は其後『曲線求積論』(1704 年),『一般算術』(1707 年) 等の著があり．三次方程式の分類などもして居るし，数学に対する貢献は誠に少なくない．

今 Newton の研究創意に就て多く説くことが出来ないので，凡て省略するのであるが，Newton が光の分子説を立て十九世紀初まで行われた．視学に就ては随分実験をもしたのであり，反射望遠鏡を作ったり．六分儀 sextant を考案したり，音の速度，電磁気，其他多くの研究をしたことは忘るべからざるものであった．

Newton の研究は其前半生で終る．晩年名声は弥が上に高まり，敬慕の目標となるけれども，最早研究らしい研究はしなかった．見るに足るだけの創意もない．其後の発表に係るものも，皆以前の研究の結果に外ならなかった．Newton は神経を害した為めか，大天才としての生涯は傷けられたのであった．

Newton は 1727 年に八十四歳の高齢を以て永眠した．

Leibniz は Newton と同時に出た．そうして Newton と同じく微積分学を創意して，端なくも Newton と論端を開くに至った．此論争は誠に激烈であり，それに両国間の争いであるから，益々偏見に捉われるような事もあったであろう．数学史上の一大不祥事であるが，又反面に於てあれだけ熱烈に相争うたと云うのは，如何に之を重視したかの活きた証拠であり．如何にも精神を打込んだ真摯な仕事であったことを充分に立証するのである．之れで見ても当時西欧の諸学者が学問の開発に熱中したのは，決してなまやさしいものでなかったのである．

羅馬法皇庁の圧迫に対する反抗と共に，其真意の在るところを充分に了解して戴きたい．之を了解しないでは，欧洲の学問が驚くべき発展を遂げた真相は遂に捉え得られないであろう．

Leibniz は 1646 年独逸の Leipzig に生れ，1716 年に歿した．独逸には Kepler は出たが，其後有力家は居なかった．Tschirnhausen の如き人は居るが，殆んど言うに足らぬ．Leibniz が出なかったならば，独逸には十七世紀に有力家を持たないことになったであろう．三十年戦役後の独逸から此人の出たのは，特に異様の事であった．

Leibniz は少年時代から数学を好み，二十歳頃までに諸大家の著述は大概読破したと云う．けれども法律を学んで外交家になり，諸国に歴游して，各地の数学者と交りを結んだ．後に Hanover に赴き，図書係となる．此地に於ける Leibniz の住宅は堂々たるもので今は博物館になって居る．

Leibniz は二十歳の時に一論文を公にした．勿論見るべき程のものではないが，数学的論理の案を立てたのが著しいものであった．記号に依って思考を省約しようと云うのである．草稿中には今少し進んで論じたものもある．此時代の作は形而上学や，法律関係のものが多い．

Leibniz は二十六歳の時，某男爵の為めに巴里へ派遣されることになり，当時の諸大家と識ることを得たのであるが，中に Huygens があり，Leibniz は此人から振子論の論文を贈られ，是れから高等数学の研究に入るようになった．翌年即ち 1673 年には London に赴き，正月から三月まで滞在した．其滞在中に新発明の計算器械を Royal Society(英国の学士院) に提出した．又級数の総和の事につき数学者 Pell に語ったことがあり，又 Pell から此種の研究が既に存したことなど聞かされた．巴里に帰るに及んで，級数展開の事などに就て多く研究する所があった．

Leibniz は此れから曲線の求積などの研究を進め，之に関して作った論文もあった．併し発表はしなかった．

Leibniz が微積分学を組み立てたのは此研究に関しての事である．そうして Leibniz 自ら言う所によれば，其考えは 1673 年に始まるのであって，Newton が流数術を得たよりも幾年かの後であった．二年の後には考えが大分爛熟した．1684 年に至り，始めて雑誌 Acta Eruditorum の中に於て，其算法を極めて簡単に発表したのである．

Leibniz は Descartes の幾何学を学んで，切線の問題を研究し，曲線と切線との極少部分を取って攻究することに依って，微分の考えに進むこともしたらしい．此等の事も委しく説明したいけれども余りに略し過ぎて或は要を得ないであろう．

要するに Leibniz の微積分学は巴里滞在中に成立したのであった．Leibniz は 1676 年十月に巴里を去って，London 及び Amsterdam を経て Hanover に帰った．

Leibniz は 1677 年には和，積，商，乗冪，根等の正しい微分を行うことを得た．Leibniz が始めて微分学の論文を公にしたのは 1684 年であり，僅かに六頁であって，証明もなく，最も解し難いように記るしたのであった．積分学の発表は 1686 年であった．

Leibniz は既に微積分学の創意を発表したけれども，記述甚だ簡にして，殆んど解するものなく，独逸には全然絶無であった．ただ蘇格蘭の John Craig と瑞西の Jacob Bernoulli があったのみであった．Bernoulli の一族は父子兄弟叔姪相率いて数学を修め，貢献する所の多かったので顕われて居る．微積分学の発達に就ても頗る功労があった．

Leibniz は 1678 年に行列式のことを述べて居るが，是れが此事の見えた嚆矢である．行列式は日本でも凡そ同時に論究されることとなった．

Leibniz の書状及び雑記中には，将来の発達上に於ける暗示が甚だ多い．頗る思想豊富にして，決して凡庸でない．Leibniz の業績に就ては尚言うべき事は多いが．凡て省かなければならぬ．

Newton の流数術と Leibniz の微積分学とは固より結果に於て一致する．けれども其立論の趣意は頗る同じからず，又其記号なども異同ありて，後代に行われたものは Leibniz から出たのである．故に Leibniz が Newton の算法から学ぶ所があったか，何うかは，随分議論もあった事であるが，今では互に独立して得たものであろうと云う事になって居る．勿論 Newton でも Leibniz でも Barrow や其他の人々の見解が進みつつあったものから多大の影響を受けたことは言うまでもないのである．

微積分の発見に就ては激しい争論が起きた．而も其争論は初めから起きたのではない．ずっと後になってからの事であった．今此争論の事に就ては説くことをすまいが，此争論の有った為めに．英国では大陸の学風を嫌うようなことになり，独仏等で微積分学が進展して停止する所を知らざらんとするに当って，殆んど之れと没交渉となり，為めに甚だしく数学の進歩を妨害されるような状態となった．誠に悲痛の極であった．

英吉利では Newton の後に Cotes(1682–1711) があり，Taylor(1685–1731) があり，Maclaurin(1698–1746) があり，まだ他に幾多の人物が出て居るし，Taylor 及び Maclaurin の公式の如きは甚だ有名である．けれども其発展は遂に限局されたかの観がないでもない．更に其後に至って John Landen(1719–1790) の如き偉大な人物も出た．而も此人の如きは寧ろ大陸の数学と気脈相通ずるものあり，英吉利風とは甚だ懸隔あるを以て，其思想の発展は頗る限局されざるを得ず，又後継者もなく，称揚是認されることもなく，空しく孤独の侭に打ち去ったとも謂うべきであったろう．是れ程に言っては余りに誇張であるかも知れないが，何うもそう云う様子の有ったことは否まれぬ．

Newton より以後の英吉利の数学は誠にみじめなものと云うか，遺憾此上もないことであった．単に争論の悪感情から

大陸の数学を排し去ったと云うだけの結果でもあるまいが，何うしても此事は将来の勧戒として注意し置かなければなるまい．

第 8 章　十八世紀の数学

十七世紀には幾多の天才者流が輩出して，新思想が盛んに構成せられ，解析幾何学，微分積分学及び其他諸般の新数学も生れ出たのであった．そうして Descartes 及び Leibniz を始め，哲学の大家にして同時に数学の大家たりしもの多く，又物理学，星学等にも造詣が頗る深いのであり，単なる数学の専門家と云うものはなかった．そこに著しい特色が存する．一方に於ては此等諸大家をして数学の為めに専心研究せしめたならば，更に其業績は雄偉なものになったであろうとも考えられるが，又一方に於ては哲学者なるが故に其考案工夫に深刻なところがあり，物理学者なるが故に幾多の問題並に解法を提供し，数学進歩の上に頗る有利であったろうと云う事情も存する．此事は江戸時代の日本の数学とは全く事情の反する所であり，其事情の異なることは，日本の数学に取って甚だ不利であったろうと考えたい．

十七世紀には既に解析幾何学並に微積分学が成立した．代数学も整頓した．曲線論も次第に進まんとする．誠に前途旺洋たるものであった．宜なる哉，十八世紀に於ては微積分学の完成並に応用などが，数学研究の主要題となり，星学研究上の応用の如きも尋常ならざる発展を遂げることとなった．此発展は瑞西の Bernoulli 一家や仏蘭西の諸学者の手に成り，独逸からは有力家は出なかった．

仏蘭西で Leibniz の微積分学を修めた最初の有力家は L’Hospital 侯爵であったろう．Jean Bernoulli から之を学んで，研究する所があった．侯爵にして彼れの如き人物が出たのも注意を要するであろう．1661 年に生れ，1704 年に歿した．著述は歿後に公にされた．

尋で Maupertuis(1698–1759) が出た．主として天文，測地の学に功績があり，普魯西王 Frederick 二世の聘に応じ，伯林の学士院に赴任したが，後郷里に帰って歿した．

此人の門人に Châtelet 侯爵夫人 (1706–1749) があった．19 歳で侯爵に嫁し，それから数学を修めて，Newton の Principia を翻訳したりなどした．又物理学上の著述もある．余り独創的の人ではないが，貴婦人にして数学者が出るようになったのは，仏蘭西に於ける機運を語るものとして看遁すべからざる一事象であろう．

婦人の数学者としては伊太利の Agnesi(1718–1791) も注意すべきであろう．数学者と云う外，語学，哲学等にも通じて居り，父は Bologna 大学の数学教授であったが，父の病気中に代理をした事もあった．Aguesi の witch と称する曲線の創意などあった．Agnesi 嬢は睡遊家であって，睡遊中に問題を解いたことなどあると云う．

Clairaut(1713–1765) は数学者の多く輩出した一族中から出た人であるが，幼少の頃から数学の才能を顕わし，L’Hospital の微分学書等を読んで幾何学上の一論文を作り学士院に提出したのは十三歳の時であった．十八歳の時には曲線論の作があった．其作中の切線の問題並に求積方法の如きは，今に至るも諸教科書中に散見する．後には主として天体力学の開発に努力した．其弟は十六歳で夭折したが，同じく数学の天才であって，著述が残って居る．

D’Alembert(1717–1783) は有名な百科全書の作を以て其名が高い．微積分の書を作って普及したこと著しい．微分方程式の著もあった．

十八世紀の仏蘭西は此等の諸大家を輩出したのであるが，此時に当って最も注意すべき人物は瑞西の Euler(1707–1783) であった．牧師の家に生れ，早く数学の教育を受け，Jean Bernoulli の秘蔵弟子となる．初めて論文を作って仏蘭西学士院から受賞したのは十九歳の時であった．Bernoulli の二子 Daniel と Nicolaus が露西亜学士院に聘せられて St. Petersburg に赴任したとき，女帝カザリン一世に勧めて Euler を招致せしめたのは，1727 年であり，Euler は二十歳であった．1735 年には学士院から提出した問題を解いたが，他の諸学者が数ケ月の労を積んだものも Euler は新創意の方法を用いて三日を要したのみであった．而も此時病を得て，一眼の明を失った．1741 年には Frederick 大王の聘に依りて伯林の学士院へ行く．蓋し D’Alembert の推薦であった．1766 年無理に伯林を辞し，再び露西亜へ行く．其後幾くもなく全く盲目になったが，研究創意は引続いて続々と現われ．著書論文は口授筆記せしめて世に出したのであった．

Euler は著書論文の多いのが頗る著しい．解析数学は此人の手で一新されたと謂っても宜い．其著述中には新らしい思想や新らしい算法などの萌芽が無数に含まれて居ると云われる．1770 年の『代数学入門』は基礎事項を堅実に組立てた最初の企てだと云われ，『無限解析概論』は 1748 年に成り，解析数学革新の作であったと称せられる．今まで斯くも一般であり組織的であった作は見えなかったのである．1755 年には『微分学概論』を作り，1768–70 年には『積分学概論』が作られ，当時最も正確概括の書であった．曲線の極大極小に関する研究は 1744 年に成り，極めて創意に富んだ作

であって，変分学 (calculus of variations) の研究は此中に見えて居る．変分学の成立には Newton 及び Bernoulli 兄弟などの研究からして出発するのであるが，物体落下の曲線，等周曲線等の処理からして，遂に一科の学を組織することとなったのである．Euler の数学上に於ける発明創意に就て今一々之を列挙することは出来ぬ．

瑞西からは Lambert(1728–1777) も出たし，此人の業績も注意すべきであるが，今之を略する．

Euler の後に出た最も優れた人は仏蘭西の Lagrange(1736–1813) である．血統は仏蘭西人であるが，其父は Sardinia 王の軍事会計主任をして居た人で，富裕の中に伊太利の Turin で生れた．けれども父は投機に手を出して悉く産を失った．Lagrange は之を仕合せであったと言って居る．此事がなければ数学を専攻することもなかったろうと云うのである．初め羅馬の古文学を好んだが，既にして数学に興味を感じ，主として古代の幾何学を修めた．それから更に解析数学に注意を転じ，遂に此方面に於て著聞するに至ったのである．Turin の兵学校で数学教官になったのが十七歳の時であるから，早熟であった事が知られる．此れから先輩の指導があったのでもないが，二年の後には其造詣を以て第一流諸大家の中に伍するに至った．十九歳の時，等周問題の論文を Euler へ送ったが，此れ即ち変分学の名称を以って知られたもので，Euler は深く其才能に感じ，暫く自分の同じ事項に関する発表を差控へて Lagrange が研究を完成するのを待った．故に変分学は二人の手で成立したと謂って宜い．こうして Euler の研究に比して Lagrange の論ずる所は其基礎も徹底し有力なるものであった．変分学の名称は 1766 年に Euler が初めて用うる所で，又改良する所もあった．Lagrange の之に関する研究は数回に発表されて居る．

又音の伝播の研究があるが，部分的微分方程式に依ったものであった．

Lagrange が其名声の隆々たるもののあったのは，二十六歳の頃である．けれども元来蒲柳の質であった上に，過労の結果，甚だ健康を害し，爾後遂に回復せずして，憂欝に沈むことが多かったと云う．

1764 年には仏蘭西学士院の懸賞問題によりて月の運行を研究し，此れから天体力学に就て多く造詣を見ることとなった．

1766 年 Euler が伯林を辞して露西亜に再遊した時，後任として Lagrange を推薦した．D'Alembert も亦之を薦める．是に於て Frederick 大王は特に人を遣わして，「欧羅巴の最大の王が最大の数学者を其朝廷に有することを望む」旨を請わしめた．Lagrange は聘に応じて伯林に移り，留まることに十年に及んだ．

Lagrange は大著 Mechanique Analytique を作る．又方程式解法なども研究する．五次方程式が公式で解き得られないことの研究もあった．其研究中には群論の初めを為すようなものもある．整数論に就ても研究する所があり，微分方程式の研究も見るべきであった．函数論の萌芽も亦 1772 年の論文に始まる．微積分学も此人の手で余程整頓したものになった．其先輩 Euler は思想豊富又創意の業績が多いに拘らず，冗漫多作の風があったが，Lagrange は之に反して整頓緊縮して，理論の井然たるを以て称せられる．Euler が無やみに手を拡げて，Lagrange が之を整頓して一般にし概括したとも謂われよう．此二人は誠に順序能く世に出たのであった．

Lagrange は Frederick 大王の崩御，Louis 十四世の聘によりて巴里に来り．其後神経の疾患が良くなかったのであるが，仏蘭西革命の頃から新設の学校で教授し，再び元気を恢復した．

此時に至るまで，十八世紀の数学は学士院の事業が主となるのであり，大学の関係は殆んど認め難い．Euler でも Lagrange でも皆伯林や St. Petersburg の学士院の関係が浅くない．又仏蘭西学士院も其懸賞などに依って貢献する所が多かった．独逸や露西亜には自国に専門大家のないに拘らず，有数の大家を聘して高度の開拓をしたのも，皆学士院の仕事である．

Lagrange と同時に仏蘭西には Laplace(1749–1827) がある．微賎の出身であるが，早くから数学を好み，陸軍の学校の教官となり既にして D'Alembert に其才能を認められ，是れから栄達の機会を得た．解析数学に精通し，主として天文学並に天体力学を研究したが，又確率論，微積分学，微分方程式，測地学等の著述もあった．天体力学に就ては此人の功績に勝るものはないと云うことである．今 Laplace の業績に就て多く語るの余裕のないのを遺憾とする．

Laplace は数学者としては如何にも才気煥発，天才の縦横に流露したものがあった．そうして思う存分に之を発揮し，能く一世を風靡して，高名並ぶものはなかったのであった．天体力学の研究に於て Lagrange と互に其先を争いつつ新業績を立てたのも偉観であった．Lagrange と同時代に出て，そうして Lagrange が謙譲温厚の人であったのと，人物の相違すること天壊も啻ならざるが如く，其対照は余りに目立つ．

Laplace は独り数学の大家であった許りでなく，政治の事にも関係し，野心満々たるものがあった．Napoleon の時には内務大臣となったが，微分学のように行動するから困ると言って職を罷められたが，其不快を買わんことを恐れて枢密議官に挙げ，又伯爵を授けた．Louis 十八世の時に侯爵となる．政治上でも殆んど節操の何たるを解しない人であったら

しい．若し夫れ彼の品性を言わば，操行の修まらざる仏蘭西の婦人にも比すべきであったろう．Laplace の天才と業績は尊重すべく，而も我等は彼の為めに頗る之を惜しむ．

革命時代の仏蘭西の数学者で政治家であったものは，独り Laplace だけではない．Carnot(1753–1823) の如きは政治家として上乗の人物であった．初め工兵の少佐であって，築城及び兵学の大家であるが，革命の時には頗る努力したもので，革命政府の要路に立ち，諸外国の侵入軍に対する防備の作戦は全く此人の手から出たのであった．Napoleon の勢力を得るに及んで其の逐う所となり，露西亜征伐の敗軍後に陸軍大臣に挙げられ，旧王室復辟の時に又逐われた．Laplace とは違って，節守の堅きを以て知られて居る．Carnot が数学の作のあるのは，国外の遁竄中であった．微積分学の哲学的考察の如きは史上に其名が高い．位置幾何学の著も亦近世綜合幾何学に対する大きな貢献であった．

Monge(1746–1818) も亦同時代の一大天才であって，十五歳の時には消火機械の発明をしたことがあり，早く数学教官になったが，Napoleon のエジプト遠征には幕僚に加わり，後に枢密議官となり，伯爵を授けられた．王室復辟に際して，栄爵を没せられ，幾くもなくして歿した．Monge は画法幾何学の創意が最も著名である．

凡そ同じ時代に Legendre(1752–1833) が出たことも見遁してはならない．

斯の如く十八世紀の数学は主として仏蘭西人の業績であり，如何にも天才者流の輩出に依って構成されたのであった．此時代は微積分学の継承整頓された時代であり，Newton の宇宙重力則などから発して天体力学の盛んに論ぜられたときであり，研究は最も解析数学の全盛を誘発したのである．

然るに Monge や Carnot 等の業績にも見る如く，此期の終りに近づくと純正幾何学の方面も亦注意に上る．そうして函数論などの研究も亦次の一時代の開発に向って其歩を進めたのであった．

第9編　十九世紀の数学

第1章　十九世紀に於ける一般の趨勢

我等は西洋に於ける数学発達の流れに沿いて十八世紀末の頃まで進み来たのであるが，今や更に進んで十九世紀の数学に就き其概要だけでも知りたい事を思う．而も十九世紀は数学と言わず，諸科学一般に著しく進展した時代であり，西洋の科学的文化は此一百年間に其固有の色彩を遺憾なく発揮したと言っても宜い．西洋の文化が若し科学的の文化であると言い得られるならば，十九世紀は即ち西洋文化の完成された時機であったとも見られる．

西洋の文化は科学的文化なりと称して，悉く其真相を捉え得たものであるかは，固より問題である．けれども東洋諸国に比して特異な所と言えば，科学の異常に進歩し発展した事が頗る其趣きを異にするのであり，西洋の文化が覇を世界に称し，世界の到処に波及し風靡した所以のものは，全く科学の力であり，若くは科学の発展に基づいた思想に外ならぬのである．

固より西洋の科学的文化が東洋に伝播し，又之を圧迫した歴史は十九世紀になって始まるのではない．けれども十九世紀になって頗る著しくなる．故に之を称して十九世紀に於ける顕著な傾向であったと言い得られよう．我が日本が極東に於て西洋文化の流れの中に入り込み，世界の活動舞台に登場する事になるのも此の十九世紀中からの事である．此れ又西洋の文化を採り入れ，西洋の科学，西洋の数学をも摂取して其歴史発展上の一員となったからに外ならぬ．

十九世紀に於ては斯の如く科学的文化が著しく増進し，其果を結ぶのであるが，長き以前から其種子が蒔かれ，頻りに耕耘せられ，肥培せられ，又其花を開き，そうして其結果が茲に収められる事になったのである．

数学に於て上来説述した所のものは，既に甚だ整頓し又頗る進歩した者であった事，固よりである．けれども十九世紀になって数学に於ても亦幾多の国々から幾多の人物が輩出し，新奇の諸分科が多く開拓されて，其範囲も著しく拡められ，益々理論の精到な者となり，深遠にして高尚，殆んど名状すべからざる大組織を我等の眼前に展開するのである．遠き永遠の過去から十八世紀末の頃までに作り出された数学の文献は，固より極めて多数に上るのであるけれども，十九世紀の一百年間に於ける諸文献は，其全体に比して更に数層倍の多きに登ると云う事である．文献の多寡のみで，業績の精粗若くは実質の如何を判断する事は言うまでもなく不可能であるけれども，而も一般の傾向若くは状態が如何に動いて居るか，之に依りて想い見るに足る．

此れは独り数学だけの事ではない．諸科学に就て凡て同様である．而も其の諸科学の発達には数学の進歩が著しく関係する．数学に依って天文学や物理学などが如何に井然たる秩序ある者となり，又なりつつ有るかを思うときは，我等は畏敬の念に打たれざるを得ぬ．数学の力も亦偉大なる哉と叫びたい．数学に依りて諸科学を統合し，純粋にし組織化しつつ有るのである．十七八世紀以来，此組織は益々進んで来たが，十九世紀に入りて愈々其組織を強固にし，遂に二十世紀の学術界に進入する事となった．

此の如き時に当りて此偉大なる魅力を有する所の数学を修め，之を開拓し，之を利用して，益々其趨勢を鞭撻するの衝に当らんとする人々は，何と云う幸運に際会したものであろう．我等は其努力に期待を持つ．故に今や進んで十九世紀に於ける数学発達の大勢を観察し，以て之を後進の士に伝え，其胸底を鼓舞するの料を供したいと思う．是に於て本編に於ても亦若干の項目を掲げて我等の看る所を披瀝し，二十世紀初頭の状態にも一瞥を与えて筆を擱く事としよう．

第2章　十八世紀末から十九世紀初頭に掛けての仏蘭西の数学

十七世紀に於て Descartes が解析幾何学を創め，Newton と Leibniz が微積分学を樹立した事は，西洋近世の数学を組織立った者にする上に絶大の効果を齎らしたのであるが，此三人が仏英独の三か国から出て居るのは奇蹟のように思われる．Descartes が出た以前から其頃になるまでは，数学と云えば主として仏蘭西の者であった．Descaltes も亦其仏蘭西から出た．然るに Newton も Leibniz も共に仏蘭西人ではない．そうして一時仏蘭西から第一流の数学者は見えなくなる．けれども此れは一時の趨勢であった．Newton の出た英国から十八世紀中に左まで数学上の発達が現われて居ないし，Leibniz の出た独逸からは英国ほどの人物も業績も得られなかった．そうして幾多の諸大家が輩出して頻りに Newton 及び Leibniz が基礎を据へた微積分学を改良し進歩せしめ，又其応用を計った者は，殆んど仏蘭西の諸学者であった．瑞西から Bernoulli 一族の人々や Euler 等が輩出したようの事も勿論有るけれども，其後を承けて出たのは D'Alembert でも，Clairaut でも，Lagrange でも，Laplace でも，又 Carnot や Monge や Legendre 等の人々が皆仏蘭西から出たのであった．十八世紀末に於ける仏蘭西の数学界は誠に多士済々たるものであり，其頃に於ける数学とし言え

ば，仏蘭西だけで壟断して居たかの観がある．此事情は十九世紀の初頭にも持続する．

此時に於ける仏蘭西は斯の如きものであったが，恰も此時に当って Baillie が天文学史を作り，又 Montucla が数学史の大著を完成するのも，決して偶然ではなかったであろう．

Baillie は仏蘭西革命の時に際し，巴里市長の職に居ったが，其戦栗政治の犠牲となり，命を殞とした．

Montucla の数学史二巻が出来たのは，1758 年であるが，其二巻の再版は 1799 年に作られ．第三巻は Montucla が作って既に印刷に着手し，此年中途で歿した．年七十四．故に星学者 Lalande(1732–1807) が其印刷を行い．且つ第四巻を作り，主として星学史を記るした．此四巻の数学史は数学史が立派な成績を以て作られた嚆矢とも言うべく，極めて著名なものである．

仏蘭西の十八世紀末に於ける数学者の中には，十九世紀に入らずして歿した者もある．数学史家 Montucla の如きも其一人であり，Condorcet 侯爵は 1794 年革命の際に獄に投ぜられ毒を仰いで歿した．

Vandermonde は 1796 年に歿する．

老大家 D’Alembert は更に先きだって世を去る．

此等の人々は既に去るけれども, Lagrange, Laplace などの第一流の諸大家は十九世紀初めにも尚存生した．Arbogaste は 1803 年に歿するが，Lagrange は 1813 年に歿し，Laplace は 1827 年まで生き永らえる．

Legendre の如きは 1752 年に生れて 1833 年に歿する．

Carnot の歿したのも 1823 年である．

十八世紀末の諸大家は十九世紀に入りて，多く其数学上の活動を続けた．其後継者の中にも Poncelet や Cauchy, Galois などあり，十九世紀になっても仏蘭西の数学は衰微の色を見なかった．

Legendre は Lagrange 及び Laplace と共に三大数学者と言われた一人であるが，年少の頃から数学を好み，其師 Marie 及び D’Alembert に助けられて早く巴里の兵学校の数学教官となり，既にして伯林学士院の懸賞論文に当撰した其功績の主なるものは楕円函数論の研究などに在った．最小自乗法も亦其業績の一つである．晩年政府の意志に反する事ありて，為めに年金を失い，此以後に於ける彼れの書状を見るに甚だ失意であった事が思われ，国家から其真摯な目的と優れた能力を認めらるるを得ずして失意の中に世を去ったのである．

Fourier は 1768 年に生れ 1830 年に歿した人であるが，八歳にして孤児となり，知人の尽力にて郷里の兵学校に入り，特に数学に優れて居たと云う．砲兵科を希望したけれども．仕立屋の子で身分がない為めに，其出願は受理されず,「Fourier は貴族の出身でないから，第二の Newton であろうとも，砲兵科に入ることは出来ぬ」と言われたと云う事である．尋で兵学校の数学教官となり，後に高等技芸学校の教官となる．Napoleon の埃及遠征にも従軍した．Monge なども同じく従軍したのである．仏蘭西に帰るに及んで地方の知事たること十四年に及んだ．Fourier の級数と名くる研究は甚だ名高い．

Poncelet は軍職に居った人であるが，数学者としても亦優れたものであった．Napoleon の時代には軍人で数学者であった者が幾らもあるが，Poncelet の如きも其一人である．Poncelet は高等技芸学校に於て Monge に師事し，1812 年に十四歳にして陸軍に入りて工兵士官となり，Napoleon の露西亜侵入軍に従い，其の退却の時に Krasnoi で重傷を受け戦死者として委棄されたが，未だ死せずして敵軍に捕えられ，Saratoff に幽囚中，固より書物が有るでもないが嘗て郷里 Metz の学校や又高等技芸学校で習つた事など想い起こし Monge，Carnot，Brianchon 等の著書を学んだものに基づいて，数学の初歩から勉強したのであった．そうして創意の研究もあった．1814 年 Metz に帰って，其思考の結果を取纏め，発表するようにした．即ち射影幾何学に関する理論が其れであり，1822 年の刊行に係る．之に依って Poncelet は学界に其名を為すに至った．

Poncelet は其後も陸軍に居って，将官に登った．けれども閑暇には即ち数学を修め，力学などの研究もあるが，最も幾何学に於て得る所が有った．其学問は仏蘭西でよりも独逸に影響を与えることが多かった．

仏蘭西で Poncelet の貢献が重要なる者なることを明らかにし，其天才を認めるようになったのは Chasles の力であった．

Gergonne(1771–1859) も亦砲兵士官から出て，後に数学の教授になった人であった．Gergonne は Poncelet と創意の前後に関して争論を生じた事があるが，其争論からして新らしい発見をも齎らすような事もあった．

Gergonne は 1810 年から 1831 年まで『数学年報』と題する雑誌を発行した事がある．数学上の研究を記るす雑誌としては世界唯一のものであったが，Gergonne は著者の意志を無視して添削改竄する事が多かった．1831 年には Gergonne

の転任に依って廃刊の止むなきに至ったけれど，而も此時は既に白耳義で Quetelet が発刊した『数学物理学通信』があり，又独逸には Crelle の雑誌が作られて，其効果は充分に継承したのである．

Cauchy も亦仏蘭西の学者として挙げなければならぬ．Cauchy は 1789 年に生れ 1857 年に歿した．十六歳で高等技芸学校に入り，後に土木学校に入る．高等技芸学校の力学教授になったが，政治上の関係からして 1830 年には伊太利及び Prag に行き，数年の後に仏蘭西に帰った．Cauchy は畸矯の人であり，又政治上の地位が屡々変動した為めに，其身辺は頗る不安危険の者であったけれど，而も一生中に公にした論文の数は七百篇以上に達し．数学の諸分科に亘って造詣が深かった．

又仏蘭西の数学者として Galois の名を逸することは出来ぬ．Galois は 1811 年に生れ，巴里の師範学校に学び，急進共和主義であり，其政治上の意見の為めに二たび獄に下り，恋愛事件の為めに決闘して死んだ．此時 1832 年にして，日本風に数えても二十二歳に過ぎなかった．而も数学を研究すること少年時代からの三四年に過ぎないが，其造詣は天才学者として永く数学史上に才名を遺す事となった．Galois は知力の優れた人物であるけれども．肉体的にも政治的にも亦道徳的にも凡て失敗であった．

Galois は斯の如き人物であるけれども，群論に関して極めて重要な創意があり，高次の代数方程式の理論は此れから多く出来て来るのである．其最も重要な論文は死んだ年に書いたものであるが，1846 年に至って公にされた．

此の不思議な青年数学者に就ては，今少し悉しく記す事が大切であろう．Galois が数学の才能を著しく顕現したのは十五歳頃からの事であるが，高等技芸学校に入学する事は許されなかった．Galois は試験の條件に適しないので．二度共，はねられたのであった．

Galois は其試験はつまらないものだと言って居る．此の試験では勿論 Galois の天才を認めるに足らなかったのである．

此故に Galois は 1829 年に師範学校に入学した．師範学校と言っても日本の師範学校のようではないが，高等技芸学校のような立派な学校ではない．自負心の強い Galois は普通の悉しい説明が必要であるとは認める事が出来ないので，師範学校に於ても円満には行かない．1830 年の革命には其騒動に加って学校を去らねばならなくなり，数ケ月間も入牢したが，其後婦人の事に関して決闘して殺されたのである．

Galois は数学書をも小説と同じようにさっさと読み下だしたと云う事である．

決闘して死んだ前夜に Chevalier に当てて書き遺した書状には，自己の得た数学上の結果を述べて，此書状は公表されんことを依頼し，且つ正しいか正しくないかの事でなく，重要であるか無いかに就て，Jacobi か Gauss かの批評を望む旨を言って居る．

此のような Galois の事であるから，一体に其諸定理を充分に証明する事はして居らぬ．故に後人が之を解説するには随分苦しんだものである．

Galois に就ては此れだけ記るせば充分であろう．Galois が如何に天才肌の人であったかが，此れで充分に窺はれる．仏蘭西の数学は長き以前からして天才風の閃きが多いのであるが，Galois の如きは其最も代表的の一人であったろう．Galois の如く磊落不羈にして道徳の拘束をも無視せんとする如きものを讃美することは固より出来ないけれども，仏蘭西の天才数学者の標本は誠に立派に Galois の伝記に依って提供される．仏蘭西にも勿論 Carnot の如き操守堅固の学者あり，Cauchy が国王に尽くした熱誠の如き又誰か感歎せざる者があろう．而も一方に Galois の如き人物の出る所以のものは如何にも仏蘭西らしい．仏蘭西の学問は明らかに其長所を此処に有し，而して其短所も亦此処に伏在するのである．仏蘭西があれだけの天才を流露しながら，其割合に発展することが出来ないのも．亦此れから禍されるのであろう．道徳的行動は何処までも最良の進路を示めす所以なりと知らなければならぬ．

第 3 章　仏蘭西革命及び Napoleon の帝政時代と数学の発展

十八世紀末から十九世紀の前半に亘りての仏蘭西の数学諸大家に就ては可なり詳述する所があった．けれども革命時代並に其直後に於ける Napoleon の帝政時代に数学の諸大家が多く輩出した事に就ては尚一応の説明を要する．

此時代の諸大家は勿論其前から居った人が多く．此時代になって始めて其才能を現わしたと云うではなく．必ずしも其時代の社会相から産み出されたと見る事は出来ない．故に革命時代を産み出し，又 Napoleon の如き英雄児を産んだのと同一の雰囲気の中から数学上の偉人が多く産み出されたとも見ることが出来よう．

仏蘭西の数学者の中には陸軍将校出身の人が幾らもあった．Carnot でも Poncelet でも，まだ其他の人でも軍人であっ

て数学の大家であったのである．此れは軍人の養成に数学の教育が重要視されて居た事が一つの原因を成すのであろう．Napoleon が少年時代に数学に優れた人であったと云うが，数学に優れたるが為めに砲兵将校となり，それから立身の基礎を成した．Napoleon は戦術に優れた人であるが，其の得意に運用した所の各個撃破の戦術の如きは，Frederick 大王の戦術から学んだのであるけれども，而も新意を出した事も亦少なくない．各個撃破とは敵軍が諸方に散在した場合に主力を一方に集めて其方面を破り，急速に軍を転じて第二の方面を破り，更に他の方面に転ずる事を云うのである．神速機敏に妙を得たる Napoleon が此戦術の巧みに運用し得たのは，不思議でない．Napoleon は又平行追撃の法を創めた．平行追撃とは敵の退路とは別の通路を取って，平行して追撃の軍を進める事を云う．騎兵の大部隊を用いて強行偵察を行う如きも此時から始まる．此等は数学的の思考に慣れて居ることから，戦術上にも幾多の巧妙な工夫が凝らされたのでもあろう．仏蘭西人は数学に長ずるが故に戦術にも亦長じたとも謂われる．

仏蘭西革命の時に高等技芸学校が作られる．当時の諸大家は皆其教授に挙げられ，此学校の学会に於ける勢力はすばらしいものであった．此れから後に出た諸大家は殆んど此学校の出身者でないものはない．高等技芸学校と云うけれども，数学の如きも専門の教育を施すのであり，其教育を受けたものが軍人にもなる．Poncelet が此の学校の出身にして，工兵士官になった事は前にも述べた通りである．

高等技芸学校の設立を見るまでは，学士院が数学研究上の重要機関であったが，其機能は懸賞問題に依って奨励した事にある．十八世紀の諸大家は学士院の懸賞に当撰するのが凡て其登竜門であったとも言うべきである．其の学士院の懸賞は固より巴里が中心であった．伯林並に露西亜の学士院も亦数学諸大家を聘して研究をも進めた．けれども此頃の諸大学は左まで数学の上に有力であったとは見られぬ．

然るに巴里に高等技芸学校が設立されてからは事情が一変した．此以後に輩出した諸学者は殆んど此学校の門をくぐらぬ者はないと云う有様となった．

十九世紀になって数学教育の制度が整うてから，幾多の人物が出たのは云うまでもないが，而も数学の研究は仏蘭西だけの者ではなくなる．他の諸国からも多く天才者流が輩出する．幾多の研究が現われる．此れは諸方で多く大学が発達し，制度が整頓し，便宜が増した事も関係が有るであろう．けれども国力の伸長と云う事も亦甚だ関係するのである．

仏蘭西革命の頃から Napoleon 時代の頃に懸けて，あれだけ多士済々を誇った仏蘭西の数学界も，十九世紀になっては次第に数学の中心である地位を失わなければならなくなった．前には当時の列強を相手に引受けて殆んど引けを取らなかった仏蘭西が，其国勢の伸張に依って数学界からも幾多の人物を輩出せしめたに引換え，後には仏蘭西の列強間に於ける勢力は前日の如く振わぬ．そうして数学界に於ける其地歩も亦大体に於て之に比例して変動したように見える．此れは必ず注意すべき現象であろう．

十八世紀の数学は微積分学の発明に継いでの発展であった．従て微積分学の完成が其主要な事業であり，又成果であった．是に於て解析数学の発達を以て特色とする．故に Lagrange でも Laplace でも其説く所は凡て此の色彩を有する．Lagrange の名著に『解析力学』と題する者があるが．力学を説くに凡て解析的に之を試み．幾何学的の方面は頗る閑却せられ，書中に一も図形を用いぬと云う程であった．此れは極端の一例でもあろうけれども，而も此書の説き口に依って一般の趨勢が察せられよう．

其後に至りても仏蘭西の数学は此趨勢から支配されて居る事が少なくない．Cauchy などの研究も多く此方面に関する．

けれども幾何学の方面も亦仏蘭西から再び其の発展を始める．Monge が図法幾何学を創め，其の門下から出た Poncelet が更に一般の進境を打開するが如きは，其の現われである．仏蘭西には前に Pascal 及び Desargues 等が出て近世幾何学の成立を見たのであるが，其開拓は一時中絶に帰し，是に至って再び史上に顕現することとなった．

仏蘭西の数学が此の如き傾向の変遷を経て来たことも亦注目に値するであろう．

此変遷が Napoleon 時代に出現したのも，何かの原因があったであろう．

第 4 章　Gauss と独逸

独逸は近世の初めに於て数学上の活動に目星しいものがあった．而も不幸にして独逸には三十年戦があった．独逸は之れが為めに長い間の修羅場と化し，其人々も著しく死滅して減少し，数学などの開拓さるべき余地はなかったのである．此時に当って独り Leibniz が出たのは，異数であった．

Leibniz の後には Wolf などがあるが，多く言うべき程の人物ではない．十八世紀の独逸は数学の上に見るべき貢献がない．

けれども普魯西王 Frederick は学士院の事業として数学をも奨励した．Euler や Lagrange が伯林の学士院に聘せられた事は著名である．

普魯西でも又其他の独逸の各地でも，数学者らしい数学者は出ないけれども，伯林学士院の事業から見ても数学の開発が企図されて居る事は否まれぬ．後に数学者の輩出を見るに至ったのは偶然ではない．

十八世紀の独逸には有力な数学者はなかったけれど，併し独逸の哲学者に Kant の在った事は見遁されない．Kant の哲学が今日に至るまで如何に重きを成すかは言わずとも明らかであろう．Kant は数学にも造詣の深い人であり，空間に関する所説など，其数学論は今尚重要の地歩を占める．数学の哲学的基礎を論ずる者は之に賛すると否とに拘らず，Kant を度外に置くことは出来ないのである．

Decartes や Leibniz の如き哲学第一流の大家が同時に数学に於ても亦第一流の大家であったのは，過去の事実であるが，Kant も若し其先蹤を追うたならば，亦数学でも第一流の人とすべきであったろうけれど，Kant は数学の造詣が深いに拘らず，特に数学に就て特殊の研究をすることをせず，数学に関する関係は余程前とは事情を同じくせぬ．此以後数学と哲学とに於て同時に第一流の大家となった人は出ない．此れは恐らく数学が頗る発達して，専門の研究を必要とする事になった為めの結果でもあろう．

今哲学者の Kant に就て説いたので，序に記して置くが，英国の哲学者 Berkeley は其認識論に於て Kant の先駆者とも言うべき人であり，微積分学の根柢に就て論ずる所があった．Berkeley の見る所を以てすれば，積分法には理論上に甚だしき欠陥があり，正しいものと認めることは出来ない．而も結果が正しいのは，誤差が埋め合わされるからだと言って居る．後，仏蘭西の Lagrange や Carnot が数学者の側から，此見解を進める事となった．

日本の数学に於ても儒者の物徂徠が数学に就て論ずる所があったのは，必ずしも盲人の垣のぞきとして排すべきではないのである．

独逸からは如何に人物がないとは言え既に哲学者の Kant が出た．Kant の後継者も亦続々と有力家が現われる．数学に於ても亦有力家が出ても宜さそうな時代に向いて居たのである．是に於て忽ち Gauss の如き一大家が生れたのも偶然ではない．

Gauss は Braunschweich の人，1777 年に生れた．貧しき煉瓦職工の子である．小供の頃から計算の能力が非常に強かった．自ら言う所に依れば，まだ物を言わぬ頃から物を数えたと云う事である．其異常の能力は或る学者の注意を惹き，其薦めに依って Braunschweich 公から教育の便宜を与えられた．Gauss は早くから数学の外に語学の能力も亦著しく優れて居た．Göttingen の大学に入学した頃にはまだ語学と数学と何れを専攻するとも決心が着かなかったのであったが，1796 年に円内へ正十七辺形を内接する作図問題が出来て，此れから数学の専攻を決心したのであった．此事項は極めて有名な者である．

Gauss は大学在学中にも多く教師の指導に依頼せず，自分で創意の工夫に力を注ぎ，其業績中の優れたものが幾らも此時代に作られたのであった．

Gauss が最も傾到したのは整数論であるが，併し数学の諸分科に亘って指を染めざるはない，星学，測地学，電気学等から曲面論なども多く研究する所であった．

Gauss は言う．数学は諸学の女王であり，整数論は数学中の女王であると．如何に整数論を讃美したかが知られよう．

Gauss は天体力学の研究に依りて Laplace の認むる所となり，欧洲最大の数学者なりと称せられ，此れから其死に至るまで一般に最大数学者と考えられたのであった．Kronecker は Gauss を評して，我現世紀 (十九世紀) の数学が産み出した創始的の観念とも云うべき者は殆んど凡て Gauss の名と関係ないものはないと言い，Wolfgang Bolyai も亦 Gauss は数学の巨人にして，高台の上に立ち，天界から地の底までも一瞥の下に抱括すると言って居るが，必ずしも無稽の誇張ではない．

Gauss は Göttingen に学んで後 Braunschweich に帰り，又 Helmstadt の大学に游びて図書館を利用したりなどしたが，1807 年には露西亜の学士院に聘せられた．けれども星学者 Albers の注意に依りて之を辞した．Albers は Göttingen に天文台新設の計画あり，Gauss を台長に推薦したい積りであったのである．其実現に至りて予期の如く台長となる．Gauss は数学の講座を担当するよりも台長の位置を欲したのであり，努力の全部を研究の為めに捧げたいのが其本望であった．此れから一生を Göttingen で送った．

此後 Gauss は 1828 年に．一度伯林へ行って学術上の会合に列した事があるが，此外には 1854 年に鉄道の初めて通じた時を除く外未だ嘗て Göttingen の地を出た事がなかった．

独逸(ドイツ)から既に Gauss が出た上は，最早仏蘭西(フランス)の諸大家に比して多く遜色あるものではない．Gauss を産んだ独逸(ドイツ)は数学の研究に於て決して人後に落つる所はない．Gauss に続いて続々と諸大家が輩出することとなった．此等の人々には Gauss の門下から出た人もあった．

先ず Möbius を挙げよう．Möbius(1790–1868) は Leipzig，Halle，Göttingen 等で学んだ人であるが，初めは法律学に志を有した．然るに Gauss の影響によりて遂に数学及び天文学を専攻するに至った．1816 年 Leipzig 大学の教授となり，此地の天文台は此人の設計で作られた．主として天文学を研究したけれども，又幾何学に於ても創意があった．

幾何学者としては Staudt(1798–1867) もあった．Staudt は初めは中学の教授であり，地位を得なかったのであるが，後に Erlangen 大学の教授になった．其大著『位置幾何学』(1847 年より 1860 年刊) は，早く其価値を認められなかった．

Plücker(1801–1868) も亦幾何学者として其名を知られた．初め解析幾何学の著書があり，又代数曲線論があり．最も知られたものは近世純正幾何学に関する．

Gauss と同時代の人には Crelle(1730–1855) があった．元と土木及び建築が専門で，独逸(ドイツ)で最初の鉄道即ち伯林(ベルリン)から Potsdam への線路は此人の設計で敷設された．又文部省にも関係があった．数学書は幾らも書いたけれど，天才の閃きは見えない．最も知られたのは乗除表であった．けれども 1826 年に Crelle の雑誌と呼ばれた数学雑誌を発刊し，之に依って其名は頗る高い．

Lejeune Dirichlet(1805–1859) は仏蘭西(フランス)の血統であるけれども，独逸(ドイツ)の Düren に生れ，Bonn 及び Köln で教育を受け，1822 年には巴里(パリ)に Laplace，Legendre，Fourier，Poisson，Cauchy 等の諸名家があるので，其威力に引かれて巴里(パリ)に游んだ．此時独逸(ドイツ)には数学界の偉人と云えば独り Gauss があるのみで．固(もと)より仏蘭西(フランス)の敵ではなかったのである．故に Dirichlet が巴里(パリ)に游んだのは賢明な事であった．而(しか)も巴里(パリ)に於て Gauss の大著 Disquisitiones Arithmeticae を読み，讃歎して措かず，終身之を学んで止まなかったと云う．Dirichlet は此書に就て改良する所多く，解し易くした事も少なくない．

Dirichlet は Fourier を識るが故に，Fourier の級数に就て研究する所あり，得る所もあった．

1829 年には Breslau 大学の講師となり，翌年伯林(ベルリン)大学に転じ，1855 年 Gauss の歿するに及んで，其後任として Göttingen に移った．Dirichlet は整数論の研究が多かった．

Jacobi(1804–1851) は Potsdam 生のユダヤ人であるが，初め Euler の書物を読んで数学は興味を感じたのであり，そう云う人は随分にあった．伯林(ベルリン)大学に学んだけれど，大学の講義とは別に数学を修めて，1825 年に Doctor の学位を得た．伯林(ベルリン)で二年許り講義をした上で，Königsberg 大学の教授となる．Gauss は教授することを好まなかったのであるが，Jacobi は之に反して教授が頗(すこぶ)る巧みであった．Jacob は広く数学の諸分科に研究があり，而(しか)も楕円函数論，整数論，行列式，微分方程式等に最も造詣する所が多かった．

函数論に於ては Riemann 及び Weierstrass が最も傑出する．Riemann(1826–1866) は初め神学を修めたが，又数学の講義をも聴き，数学の深きが為めに遂に神学を棄てたのであった．Göttingen に於て Gauss に師事したが，伯林(ベルリン)に Dirichlet，Jacobi，Steiner 等のあるを以て一旦伯林(ベルリン)に赴き，又 Göttingen に帰って，1851 年にドクトルの学位を得た．其論文は一虚変数の函数論に関するものであり，Gauss は極めて之を妙としたと云う事である．又尋(つい)で私講師の試験に提出した論文も幾何学基礎論にして，此亦 Gauss が其霊妙を許したものであった．

Riemann は Gauss 並に物理学者 Weber に学びて，物理学上の見解から純数学の研究に影響せらるる所が多かった．

Riemann は天才的の学者であるが，其講義に当っては随分気が引けたらしい気配が見える．そう云う気象の人であったのである．

Gauss は Göttingen 大学に在って，1855 年に歿し，Dirichlet が其後任になるが，Dirichlet も亦 1859 年に歿し，是に於て Riemann が正教授に挙げられた．

Riemann は壮年の頃から肺患を病み，屢々(しばしば)伊太利(イタリア)に転地などしたが，遂に此地で歿した．

Weierstrass(1815–1897) は Riemann と同じく函数論の大家であるが，Riemann とは其研究態度が同じくなかった．そうして Reimann よりも十一年の年長者であるけれども，其数学上の活動は Riemann より後れた．且つ Riemann が中年で永眠したに反し，Weierstrags は八十三歳の高齢を保ち，十九世紀の後半に於て其名声甚だ高く，独逸(ドイツ)の国内は勿論，諸外国からも此人の許に集まり来る数学者は甚だ少なくなかった．露西亜(ロシア)の女流数学者として有名な Kowalevsky 夫人の如きも亦其一人である．此時代に於ける独逸(ドイツ)の数学は誠に隆々たる者があったと言われる．

Weierstrass は中学校に在学の頃から Steiner の幾何学上の研究に興味を持ったのであるが，Bonn 大学に入学して法

律及び経済を修めた．けれども数学に就ても亦自習する所があり，特に Laplace の著書を研究した．此時 Bonn 大学には Diesterweg 及び Plücker が数学を教授して居たが，Weierstrass は其影響を受ける事はなかった．然るに嘗て Münster 大学の教授 Gudermann(1798–1851) の楕円函数に関する筆記の写しを見て，甚だ之を喜び，1839 年の一学期間を Münster に赴きて Gudermann の講議を聴く事にした．其聴講者は Weierstrass が唯一人であったと云う．Weierstrass が函数論の研究に進んだのは Gudermann の影響に外ならぬ．

Weierstrass は初め中学校の教員になったが，理科の外に体操と習字を受持った．此頃に Abel 函数の研究を始めたのであった．

Braunsberg の中学校での事であるが，Weierstrass は或日の事，朝の授業時間に出て来ない．校長は校宅へ行って見ると，Weierstrass は灯りをともした侭で，一生懸命に勉強して居る．前夜からの研究を徹夜して続づけ，まだ夜が明けた事をも気附かずに居たのであった．そこへ校長が来て尋ねたので，現に大きな発見を為しつつ有る所だからと言うと，校長とがめもせずに立去って，研究を完成させたと云う事である．

此逸話は Weierstrass が如何に研究に熱心であったかを示めす者であるが，又校長が寛大に取扱った事も研究を保護する精神を見るに足りよう．斯の如き精神有ればこそ即ち独逸の学問が著しく進展したのも当然だと云われよう．此れは独り Weierstrass と一校長との問題ではないのである．

若し夫れ之を我国の現状に照らして見るときは，熱烈に研究の為めに精進する学者はあろう．而も学術の保護若くは奨励の機関ですらも，時に或は専門家の研究を抑圧するが如き事が往々に見られるのは，甚だ悲しむべきである．此れは必ず心すべき事であろうと思う．

Weierstrass は Braunsberg の中学教員たりし日に其研究に依って Königsberg 大学から名誉学位を贈られた．

1855 年に Kummer が Breslau 大学から伯林に転任したとき，Weierstrass は Abel 函数に関する有力な論文があるけれども，此れで学生を教授する能力の保証にはならぬと称して後任に推薦しなかったので，Joachimsthal(1818–1861) が其後任になった．けれども Kummer は其翌年に Weierstrass を伯林の一学校に推薦し，同時に大学でも講義をさせることにしたが，而も Weierstrass が伯林大学の正教授になったは 1864 年であり，四十九歳の時であった．此年 Kummer と Weierstrass とが伯林大学で数学の Seminary を始めた．此前から Dirichlet が自分ではやって居たのであるが，公に始めたのは此れが最初であった．伯林大学には前に Dirichlet，Steiner．Jacobi があり，尋で Kummer，Weierstrass，Kronecker が在って，其名声は甚だ揚がった．

Weierstrass は証明の厳密を心懸けたのが，従来に比して甚だ著しく，数学の算術化も亦 Weierstrass と Kronecker との重きを置く所であった．

独逸にはまだ列挙すべき数学の諸大家が少なくないけれども，茲に一々之を述ぶることをすまい．

独逸で Gauss が出た後を承けて，幾多の偉人が続いて輩出し，能く数学の開拓に努めた事は十九世紀に於ける独逸の事情を語るに充分であろう．

第 5 章　幾何学の開発

十九世紀に於ける仏独二国の数学に関し如何なる偉人が輩出したかに就て略々之を明らかにしたから，今進んで数学の一分科を取り幾何学が如何に開発されたかを見る事としよう．

十八世紀の数学が主として解析数学の方面に伸びて，幾何学の開拓は殆んど見るべきものなく，其極，Lagrange の解析力学の書中には唯一つの図形すら記るされなかった程であった事は前に述べた．

けれども Monge や Poncelet 等の如き人々が出て幾何学を新たに開拓した事も既に之を述べたのである．Monge の画法幾何学は幾何学史の上に一転機となったこと誠に著しい．

先ず概要を言えば，Monge の画法幾何学に続きて Poncelet の射影幾何学が成立し，更に Steiner 並に Staudt の近世綜合幾何学が作られ，一方に於ては Plücker の近世解析幾何学も現われたのであった．又非ユークリッド幾何学の出現も注意しなければならぬ．

画法幾何学が一科の学として始まるのは Monge からである．Monge の大著 Géométrle Descriptive が刊行されたのは 1794 年であるが，三十年も前から其所説は出来て居たと云うから，二十歳前後の頃に思い着いたものと見える．其発表が後れた所以は，陸軍の当局者が秘密を欲したからであった．其着想の或るものは勿論 Frézir，Desargues，Lambert 等の諸先輩も既にやって居るけれども，一科の学として評論したのは Monge を俟って初めて出来上ったのである．

Monge は Beaune の人にして，少年時代に其町の製図をしたのが某工兵佐官の注意に触れ，Mezirières の工兵学校で

地位を得ることとなったが，生れの卑きが為めに陸軍に入ることは許されない．併し学校附属の科に入って測量や製図を学ぶこととなった．此頃には城砦の製図が凡て長たらしき算術的計算に依って行われて居るのを見て，幾何学的の方法で代用することを工夫したのであるが，長官は之を一瞥することをも省みなかった．けれども此方法に依れば極めて簡単に出来るので，一度見て貰うと乍ち称讃された．Monge は益々之を完成して遂に其画法幾何学が成立したのである．此頃には仏蘭西の幾多の兵学校の間には競争が激しかったので，Monge は学校外へ知らしてはならぬと厳命されたのである．

Monge は 1768 年に Meziéres で数学の教授になるが，1781 年に Paris で其門人 Lacroix 及び Vemon と談話したとき，今私が計算でしたことは定木と円規とでも出来るのであるが，其秘密は両君へ報ずる自由を持たぬと告げたと云う事である．

併し Lacroix は其秘密が何者であるかを自ら研究して，之を看破し，1795 年に之を公にした．此年 Monge も亦其方法を公にした．此れは高等師範学校での講義筆記であった．師範学校は 1795 年に設立されて四ケ月後には閉鎖されたが，同じ年に高等技芸学校が設立せられ，Monge は画法幾何学を教授した．

Monge の発表があって後に，其門人 Hachette も亦画法幾何学に改良を加うる所があった．

Monge に続いて其門下から出た Poncelet が射影幾何学を創めたのであるが，其思想は固より前から存する所であった．或る意味では希臘時代から存したと言っても宜い．けれども一科の学として成立を見るのは後の事に属する．そうして近世の意味での発達は Desargues から始まると言って宜い．Desargues は 1639 年に四つの調和点の論を発表した．又極と極線の事をも説いた．

其翌 1640 年には少年 Pascal が円錐曲線に関して所謂神秘六辺形の説を出した．

十七世紀末に至り Newton は三次方程式の研究に於て，中心射影に依って五種の基本のものから得られることを示した．

十八世紀には多く見るべき研究もないが，其終りに至りて Monge の画法幾何学が出たのである．之れ又一種の射影幾何学であるが，普通に射影幾何学と称するものではない．

Carnot は主として図形の計量的関係を論じたのであるが，其著『位地幾何学』(1803 年) 及び『截線論』(Transversals 1801 年) の如きは注意すべきであった．Carnot は此書に於て普通の幾何学上に負量を用い，又一般四辺形なども説いた．

Monge 及び Carnot の後に出たのが Poncelet である．今日普通に言う所の射影幾何学は此人から始まる．即ち Crasnoi の激戦に重傷を負うて捕えられ，Volga 河畔の Saratoff で幽囚されたときに書物もなく，便宜も得ずして，腹案を作ったのが，此の射影幾何学であり，其大著は 1822 年に公にした．中心射影を証明上に用い，連続の原則を研究上に大切なものとしたのは，此時から始まる．Poncelet の基礎的観念は射影的性質の研究であり．根本原則として非調和比を用いた．

Poncelet と並んで又仏蘭西に Gergonne があった．双対原理 Principle of duality は Gergonne が完全に示めし得たもので．連続原理に亜いで近世幾何学上に最も大切なものである．

高次曲面を近世幾何学の眼光を以て研究したのは Gergonne と Chasles であった．

Steine は瑞西の幾何学者であるが，点列，束線等の射影的関係を充分に論究して，後の純正幾何学の発達上に基礎を置いたのは此人の力であった．

Steiner(1796-1863) は瑞西の貧家に生れて，十四歳の時までは読書も全く出来なかったのであるが，名高い教育の大家 Pestalozzi に見出されて十七歳の時に其学校に入り，Pestalozzi の指導に依って数学上の能力を顕わすに至り，遂に有数の幾何学者たるに至った．Pestalozzi は初等算術の教授方法を改良する事に於て，其当時に此人ほど功労あった者はないのである．

Steiner は Pestalozzi の学校を去りて独逸 Heiderberg の大学に入り数学の能力も次第に進んだのであるが，初め伯林で数学の家庭教授をして生計を立て，1834 年に伯林大学の教授に任じた．此頃からは幾何学に就て発表する所も多かった．晩年は郷国瑞西に帰った．嚮きに Berlloulli 一族や Euler を出した瑞西から Steiner の出たのも偶然ではあるまい．

Steiner の後に独逸の von Stand が出た．1847 年から 1860 年の間に於て計量的関係から独立なる純正幾何学の体系を完成した．一切の射影的性質は全く数量上の関係から離れて之を立することを得たのであり，反対に数をも幾何学的に之を定め，虚の要素をも幾何学の側から組織的に導き入れることにした．其射影幾何学に於ては一切の射影及び双対的の変換を包含する所の群なるものを基礎として之を構成し，且つ虚の変換をも論じたのである．

Staudt の位置幾何学は長く認められないで居たが，其理由は蓋し非常に簡略に書いてあったからであろう．然るに Culmann が 1864 に Staudt の幾何学を応用して図解的静力学書を作ってから認められるようになった．

Reye は 1868 年に『位置幾何学』と題する書を作り，Staudt の幾何学は解説されたと言っても宜い．

第 6 章　非ユークリッド幾何学

既に射影幾何学の成立を記るしたので，之れと並んで非ユークリッド幾何学の成立を説くのも興味があろう．非ユークリッド幾何学は Euclid の平行線の公理の吟味から始まる．

此の平行線の公理は如何にも公理らしくないので，Euclid の原本が出て以来屡々問題にされたものであった．此に関する文献は頗る多い．其中最も注意すべき者は伊太利の Saccheri(1733 年) の研究であるが，世の注意を惹かずして遺されたのであった．

Saccheri に尋いで研究のあったのは瑞西人 Lambert(1728–1777) が 1786 年に刊行した『平行線論』であった．

Legendre も亦研究があるが，余り進んだものとはならなかった．

平行線公理は如何にも公理らしくないので，之を証明しようと云う企ては随分盛んに現われたのであるが，一も成功を見たものがない．是に於て証明するよりも別に其研究を試みようとの企てが起きて来た．そうして平行線公理に関係のない一種別の幾何学が組織されることになったのである．此新幾何学は Euclid の幾何学とは全然別種のものなるを以て，之を非ユークリッド幾何学と云うのである．非ユークリッド幾何学の建設は Lobatchevski，Bolyai 及び Gauss の三人を挙げる事が出来る．Gauss は言うまでもなく独逸人であるが，Lobatchevski は露西亜人であり，Bolyai は匈牙利人であった．露西亜や匈牙利から有力な数学者が出る時代になったのは誠に注意を惹くべき事であり，それが従来にない新数学であるから一層驚かされるのである．

Lobatchevski(1793–1856) は露西亜の Nizhni Novgorod の農家に生れ，早くから天才が現われたと云うが，Kazan の大学に在学中は悪戯暴戻の為めに入獄したこともあり，学士試験には其品性が問題となり，将来慎むと云うので試験を許可されたと云うことである．

けれども二十一歳にして Kazan 大学の教授となり，後に学長になった．

1826 年其講義中に於て始めて平行線公理に関係なき幾何学の事を述べたが，其原稿は伝って居らぬ．1829 年に至って公にする所があった．其後にも引続き同じ問題を研究して居る．1836–1838 年に『平行線論に関しての新幾何学』を公にした．けれども露西亜語で書いてあるので，外国人の之を学ぶ者なく．露西亜でも亦注意を惹かなかった．

1840 年には伯林にて短篇に記るして公にする所があった．

Lobatchevski の新幾何学の特色は，一平面上の一点を通じて一つの直線を截らざる直線が無数に引き得られると云う事である．

同様の幾何学体系は又匈牙利の János Bolyai も同じく独立に之を論じたのであった (János は英語の John に当る)．Bolyai が匈牙利から出たのは注意すべきであり，其父 Farkas(Wolfgang) Bolyai も亦有力な数学者であった事も之を記るさなければならぬ．

Farkas Bolyai(1775–1856) は匈牙利の Transylvania の人であるが，初め独逸の Jena に学び，又 Göttingen に学んだ．此地で当時十九歳の Gauss と親交の間柄となった．Gauss は自己の数理哲学を解するものは Bolyai の外にはないと言って居た．Bolyai は独逸に在ること三年，1799 年には帰郷しなければならぬ事情になった．1804 年に Maros-Vásárhely の学校教授となり，数学，物理及び化学を教へて，1851 年まで四十七年間も其職に居った．従って Transylvania の後継数学者は大抵其門下から出たのであった．

Farkas Bolyai は初めは劇や詩を作ったこともあり，常に昔しの農家の服を着用し，其私生活も奇抜であったが，思想も亦創始的の所がある．

其著述には 1830 年に著した算術書があり，又 1832 年には初等数学書を作った．

Bolyai が 1804 年と 1807 年とに Gauss へ送った二通の書状が遺って居るが，此書状に依れば平行線の事に注意して居た事が知られる．そうして初等数学書に於ても亦平行線公理の事を言って居る．其書中に等値形式永久性の原則が見えて居るが，英吉利では Peacock が 1830 年に立したものとし，独逸では 1867 年に Hermann Hankel から創まるとされたものである．

Farkas Bolyai の初等数学書 (1832 年) には其子 János Bolyai(1802–1860) の著わした『空間の絶対科学』と題する一篇を附録にした僅に十六頁の短篇であるけれども，非ユークリッド幾何学の歴史上に於て今は極めて著名である．

János Bolyai は父に似て数学の才があるけれども，軍人たるの教育を受け陸軍将校になったが，剣道の達人であり，又ヴァイオリンの名手であった．或る時，十三人の士官から試合を申込まれて一勝負毎にヴァイオリンを奏することを条件

として之に応じ，其十三人を悉(ことごと)く打ち負かしたことが有った．

János Bolyai は前記の一篇の外は嘗て著書論文を公にしたことがない．けれども草稿に属するもは．千頁許りも現に保存されて居ると云う事である．

János Bolyai が数学に優れた才能を示めしたのは少年時代からであり，其父が 1816 年に Gauss へ送った書状に依れば当時十四歳の János は一通り微積分学に通じ，之を力学や擺(はい)線の問題等に応用する事も出来るし，ラテン語と天文学をも習って居たと云う事である．十六歳で工兵の学校に入り，二十一歳で少尉になるが，平行線論の研究を始めたのも此頃の事であった．即ち 1823 年十一月の書状中にも其研究に関する所見がある．併し之を書き下だしたのは 1825 年にして，1832 年に公にされた．

而(しか)も匈牙利(ハンガリー)で之を理解し得たものは其父が一人あった位のもので全く世に認められなかった．Lobatchevski の研究と共に忘れられて居たのである．1867 年 Baltzer が其価値を認めてから，世に知らるる事となった．

少 Bolyai は陸軍大尉で身を終った．此人の事蹟は非ユークリッド幾何学の建設以外に関する所がない．

老 Bo1yai は妻は死ぬる，子息の少 Bolyai とは間柄が思わしからず，其晩年は不仕合(しあわせ)であった．けれども尚他に著述もあり，詩なども作った．

Gauss も亦同様の研究をして居たのであるが，Bolyai 及び Lobatchevski の論文が発表されるに及んで，引続き研究する事をしなかった．Gauss が 1824 年に Taurinus と云う人へ与えた書状に，非ユークリッド幾何学に関係ある事項が見え，Taurinus は二年後の 1826 年に一部の幾何学書を作って，其中に非ユークリッド式の三角法を考えた事の証左がある．Gauss は 1831–2 年に Schumacher へ与えた書状には，ポーランドの一青年士官が非ユークリッド幾何学に就て書いた論文を匈牙利(ハンガリー)から送られたが，記るす所は自分自らの観念及び結論を甚だ立派に論じて居ることが知られ，其士官は我が旧友の倅(せがれ)であるが，父なる人とは 1798 年に其事を論じた事があった．併し此青年の独創的の思索に依って完結したものとなり，其人は第一流の大家と見えると云うような事を言って居る．

Gauss は此書状中でも非ユークリッド幾何学と云う事を言って居るが，此名称は全く Gauss の始めて称する所であった．

少 Bolyai の父は Gauss の旧友であり，Lobatchevski が Kazan 大学で師事した Bartels(1769–1838) も亦 Gauss の友人であった．故に非ユークリッド幾何学の真の創始者は Gauss であり，Gauss の勢力に依って露西亜(ロシア)と匈牙利(ハンガリー)の両学者は其思想を得たのであろうと考えられた事もあった．両学者が其研究を筆述する以前に Gauss が其思想を有した事の証左は明らかであるが，其影響如何は固(もと)より不明である．

Taurinus(1794–1874) の事は前に述べたが，此人の著書は勿論注意を惹く所なく，全く落胆して残本を焼棄したと云う．

此頃に Wachter(1792–1817) なるものも亦研究する所があったが，此人は Gauss の門人であった．

上記の人々は純正幾何学的に非ユークリッド幾何学を開拓したのであった．然るに其後に至り解析的に建設する企てが現われて来た．Riemann，Helmholtz，Lie，Beltrami 等の企てが其れである．其研究は微分幾何学を用いたものであった．

Riemann(1826–l866) は Gauss の門下から出た人であるが，1854 年に其試験講義に幾何学基礎論を講じ．Gauss も驚歎したと云う．Riemann は勿論 Bolyai 並に Lobatchevski の研究を知らなかったのである．Riemann は n 層体と云う如きものを考へ，窮(きわま)りなきこと (unboundedness) と無限の拡がり (infinite extent) とを区別し，そうして之を空間に応用するときは n 次元の空間となり，其空間は無限の場合と又有限のものとを考え得るのであるが，現実の空間は凡て Euclid 式の空間なることを経験に依りて知るのだと説いて居る．

Riemann の論文は直ちに公にされず，其病歿の翌年即ち 1867 年に公にされた．

n 次元の思想は Riemann より前から説く人があった．Plücker や Grassmann の如きも其れであった．

Helmholtz(1821–1894) の論文は 1868 年に出で，其後屡々(しばしば)論ずる所ありて其思想を普及する上にも功労が少なくなかった．

諾威(ノルウエー)人の Lie(1842–1899) は Riemann 及び Helmholtz の思想を群論に依りて組織した．

伊太利(イタリア)からは Betrami が出たし，英国には Clifford が有り，此種の研究は益々進んだ．

第 7 章　解析幾何学

独逸で Steiner 並に Staudt が綜合幾何学を開拓しつつあった時に当り．Plücker(1801–1868) は近世解析幾何学の基礎を植え付けたのであった．其著は 1828 年と 31 年とに二巻の形で作られた．此書中には簡略紀法を用い，従来の如く厄介な代数的消去を避けて幾何学的に行うことにした．下巻には双対原理を解析的に行うたものである．

Plücker の『解析幾何学体系』は 1835 年に出た．三次平面曲線の類別を完全に行うて居る．1839 年には『代数曲線論』を作り，四次曲線の類別をもする．

Plücker の解析幾何学は固より大に見るべきものであるけれども，独逸では未だ行わるるに至らぬ．Steiner 及び Poncelet 等の綜合的方法に比して効果少なしと見られたのである．

Plücker は Jacobi との関係が面白くなかった．其の為めに Jacobi は Plücker が Crelle の雑誌へ寄稿するなら，自分は書かぬと言った事もあった．是に於て Plücker の論文は多く外国で発表される事となり．其結果として独逸でよりも英仏にて能く知られることとなった．又 Plücker は物理学の講義を持ちながら物理学者ではないとの非難を受けた事もあり，此れが為めに殆んど三十年間も数学を棄てて物理学に全力を用いなければならなかった．Fresnel の波動面，磁気学，スペクトル分析等の研究をもした．けれども晩年に至りて再び好む所の数学に復帰し．発明する所も多かった．空間は線から成ると見て，空間の新幾何学をも作った．此等の事に就き 1865 年に英国学士院へ提出せられ，其遺著は病歿の年に Klein の手で刊行された．

Plücker の解析様式は Lagrange や Jacobi 等の如く荘厳なものではない．そうして長い間，幾何学の進歩と歩調を同うしなかったので，最後の著書に於ては論ずる所のものが却って他人の著作中に一層一般のものがあると云うようなことがないでもなかった．而も尚，新奇独自のものを包含する事少なくなかった．

Hesse(1811–1874) も亦解析幾何学に関して功労者であった．Plücker は代数的消去を避けることをしたが，Hesse は行列式を用いて容易に代数的消去を行い得るようにし，之に依って三次曲線の研究などした．

Hesse は Königsbelg 大学にありて，其名望は次第に高くなったけれども，収入は生計の資に足らず，止むを得ずして屡々諸方に転任した．

Plüker や Hesse が出て後，諸方から幾多の人物が輩出し，解析幾何学も亦次第に進む．今凡て之を略し独り Darboux(1842–1917) の名のみ挙げることとしよう．Darboux は仏蘭西の人で，解析幾何学並に微分幾何学に就ても貢献する所が多かった．其著述には 1887–1896 年に出た『一般曲面論』などがあった．

Darboux は幾何学的の想像が豊富な上に解析数学の手腕に秀で，其両者を併せて非常の才能を発揮したのであった．Darboux は幾何学的の問題を研究する為めにも単に幾何学的の推理のみ用ふることを喜ばず，全然解析的方法のみ重用する者にも亦同じく同情しなかったと云う．Darboux は Monge と同じく，単に発明創意の研究のみに没頭せず，門下の養成も亦同様に大切だとしたのである．故に其門下からは幾多の人才が輩出した．

第 8 章　英吉利の数学

幾何学の発達に就ては可なり明らかにしたので，次に Hamilton の四元法の事を記るしたいと思うが，Hamilton は英人であるから，前に仏蘭西や独逸の数学は説きながら英吉利は数学の事は述べで居ない関係もあるし，茲に英吉利の数学を叙述して Hamilton の四元法にも説き及ぶ事としよう．Hamilton は大英帝国の人ではあるが，実を言えば愛蘭人であった．

十八世紀末から十九世紀初めに掛けて仏蘭西には幾多の人物が輩出して数学の進歩は誠に著しいものであったが，此時代の英吉利には之と匹敵し得べき数学上の偉人は出なかったのである．Napoleon の欧洲統一事業が成就しなかったのは独り英吉利あるが為めと謂っても宜いのであるが，其英吉利から数学上の人物が出て居ないのは不思議な程である．それも前には Barrow，Wallis，Newton の諸大家が輩出して頗る伸長した国柄であるのに，今や此始末になったのは余りに不思議である．其事情の如きは充分に闡明を要する事であるが，我等は未だ適当に説明された者あることを聞かぬ．

嚮きに微積分学は Newton と Leibniz とが各自独立に創意する所であった．其創意に就ては前後の如何に関して激しい論争も起きたのであるが，今では互に独立の発見であったろうと云う事になって居る．けれども此論争は頗る数学上の国際的感情に影響する所ありて，英国では大陸風の数学から遠ざかる事となった．此れは英吉利に取りて頗る不利ならざるを得なかった．大陸では侵々として進んだけれど．英吉利では之を摂取することなくして，時代の進運に後れる事になったのである．

Newton の創意も固より微積分である事には相違ない．けれども Newton の所謂流数術 (method of fluxions) なるも

のは，Leibniz の微積分学とは紀法も同じからず，其点に区別なき事を得ぬ．そうして大陸で進んだのは Leibniz 風の微積分学にして英国の流数術ではない．此れが為めに益々隔たりを生じた．

英吉利には Newton の門下に Cotes(1682–1716) があったが，Newton の甚だ望みを嘱したに拘らず早く歿した．

尋で Stirling(1692–1770) があるが，嘗て伊太利に居って，級数の微分学的論究などもしたけれど，後には鉱業会社の支配人になって成功したと云う事である．

Taylor(1685–1731) と Maclaurin(1698–1741) の級数展開式の事は人の能く知る所である．

英吉利には此等の人々があり，相当に其能力を発揮して居るし，又 Newton の流数術は解説せられ，世に普及するに至った．Saunderson(1682–1731) の Methods of Fluxions と題する書の如きも其一つであった．此書は著者の死後 1751 年に刊行された．

斯くして英吉利では大陸風の微積分学とは別に流数術が普及されて居たのである．故に Landen(1719–1790) の如き有力な人物も出るけれども，其思想は寧ろ大陸風のものであったので，多く世に容れられずして終ったと云うことである．此人の『剰余解析』と題する両書は 1758 年と 1764 年とに出た．Newton の流数術に比しては簡単に諸問題を処理し得べき者であったと云う．

Landen は独習の人であったことも，其大勢力とならなかった一つの事情であったかも知れない．

斯く一方に於て大陸の数学進歩の大勢と隔離したことが，英国の数学上に一大不利益となった事情であろうが，又純幾何学的の事のみ主として興味の多かった事も一原因となるであろう．

Simson(1687–1768) の名は初等幾何学の関係上甚だ著名であるが，此人は希臘の幾何学を貴び，幾何学上に代数の応用を嫌った人であった．

Stewart(1717–1785) の如きも矢張りそうであった．

十八世紀の英国数学には此種の傾向が著しいが，而も左までの発展はしなかった．

英国では経験学派の哲学が発達する程あって，数学よりも寧ろ物理学や化学の如き実験研究の学問が一層重きを成した事も亦一因ではないかと思う．十八世紀から十九世紀に亘って英国で此種の学問上の造詣は甚だ著しいものがあった．

尚他に重大な原因も必ず伏在する事であろうけれど，今俄かに之を探索する事が出来ない．要するに十八世紀末から十九世紀初めの頃に当りて英国には有力な数学者は居なかったのである．

十九世紀初めの英国数学者としては Woodhouse(1773–1827) を挙げる事が出来る．Cambridge 大学に学んで其教授になった人であるが，英国流の流数術の代りに微分学を採用することに努め，且つ科学的に根柢ある者にすることに努め，少なからず其努力は報いられた．

Horner(1786–1837) も亦此頃の数学者として挙げなければならぬ．Horner は数学者として左まで優れた人ではないが，数字方程式の近似解法に就て所謂 Horner の方法なるものが有るので，之れが為めに広く其名を知らるるに至った．Horner は Bath で教員をして居って，此方法の発明があったのであるが，1819 年に英国学士院にて其論文を報じ，此年に公表された．此時以来英語の代数書に於ては広く用いられたのである．

Horner の数字方程式近似解法は其前に伊太利の Ruffini(1765–1822) も亦之を工夫して居る．此人の事も此処に序に記るす事としよう．Ruffini は医師にして又数学をも教えた人であるが，方程式論の研究多く，之れと関連して群論の源頭を成したと言われる．

Ruffini が Horner に先きだって Horner の解法を得たのは，1802 年に伊太利科学会が数字方程式解法の改良に就て金牌の懸賞をしたので，Ruffini は之に応じて 1804 年に其賞与を得たのであった．其解法は Horner の処理よりは簡単であった．

Horner も Ruffini も共に其解法の解説は高等解析術に依ったものであり，後には初等代数学に依って試みた．けれども Horner の論文は解説が込入ったものであったからこそ，公刊の便宜を得たのであった．其公表の時にも初等の性質のものだからと云うので，随分議論があったと云う．

Ruffini の論文は世の注意を惹かなかったのであるが，Horner の解法は Young(1799–1885) と De Morgan(1806–1871) との識る所となり，爾来英米 2 国にて広く用いらるる事となり，独墺等にては稍々行われ，仏蘭西では用いられない．

Horner は Ruffini よりも後れて其解法を得たのであるが，全く知らずして工夫したものであろうと云うことである．此解法は即ち支那で宋元の際に見えたものと同じく，日本の和算家は盛んに使用したものであった．けれども此二人が其解法を支那や日本から得たのであろうと疑う者はない．

Woodhouse が大陸の微分学を採用することに努めたのは，英国で此種の運動の起きる初めであるが，此頃に解析学会

なるものが組織せられ，流数術の紀法を放棄して Leibniz の紀法を用うることを主張することになった．即ち 1813 年の事で，Peacock，Herschel，Babbage 及び其他の Cambridge の学生等が企てたものであった．此運動の結果として Cambridge でも Newton の代りに $\dfrac{dy}{dx}$ を用うるようになった．理論上から言えば，たいした事でもないけれども，之れが為めに大陸での数学が直ちに英国で用いられ得ることとなるので，其利益は莫大なものであった．

けれども Thomson 及び Tait は両種の紀法を併用するのが便利だとした．

解析学会の連中は 1816 年以後 Lacroix の著書など英訳した

Peacock(1797–1858) は主として代数学の研究が多く，記号的代数学の原理につき得る所が多かった．初め Cambridge 大学に学び，1836 年に其教授になるが，三年の後には Ely 天主堂の監督になった．

記号的代数学の造詣あるものには Peacock と同時に Gregory(1813–1844) もあった．

Babbage(1792–1871) は計算器械の発明があり，Pascal の器械よりも優れたものであった．けれども政府との了解が出来ず，又後には資金の募集も出来ないで，其侭になった．天文学会の設立などに努力した事もある．

John Herschel(1792–1871) は解析数学の開発に尽くす所が多かったけれども，天文学にも精通し，後には主として天文学者として顕われた．三角函数に就て $\sin^{-1} x$ など書くのは此人から始まる．

Ivory(1765–1842) は解析学会設立以前から大陸風の解析数学に注意した人であった．此人は独学者であるが，楕円体の引力などの研究が著しい．

Barlow(1776–1862) は整数論の研究に於て英国では顕われて居る．磁気学，光学等の研究もあり，又数学辞書の作もあった．

Salmon(1819–1904) は解析幾何学の著を以て知られて居る．

De Morgan(1806–1871) は数学者として極めて該博であり．教授に巧みにして著述多く，数学を普及するの功が少なくなかった．新種の代数学や又論理上に開発の功も認められる．若し此人にして研究範囲を限り努力したならば，恐らく大成し得た人であったろうと思われて居る．

Boole(1815–1864) は論理学の数学的理論を開拓したので著名である．Boole は貧家に生れて，適当な教育を受ける機会が無かったのであるが．希臘(ギリシア)語及び羅典(ラテン)語を自習して之を教えて生計を助け，数学を学んだのは二十歳以後であった．而(しか)も数学的論理学の樹立に成功したのは，甚だ称するに足るであろう．

第 9 章　四元法と広義の量論

英国の十九世紀前半の頃に於ける数学諸大家は前章に紹介したのであるが．之を仏蘭西(フランス)並に独逸(ドイツ)の数学に比して恐らく稍々(やや)物足りないかの観があろう．十八世紀に於て遜色があった許りでなく，此時代になっても矢張り大陸の数学を凌駕する事の出来なかった．

然るに愛蘭(アイルランド)の Dublin から Hamilton が出て，四元法 (quaternions) の新数学を建設したのは，頗(すこぶ)る多とするに足る．

Hamilton の四元法の建設が著しい許りでなく，其伝記は数学者の標本的性格とも言うべく．天才数学者の養成を期するならば甚だ参照するに値がある．恐らく詳述する事を要するのであるが，今は簡単に記るして置こう．

Hamilton は Dublin で生れたけれども其血統は蘇格蘭(スコットランド)から出て居ると云う．英吉利(イギリス)の学者の中には蘇格蘭(スコットランド)人が極めて少なくない．此れは充分に注意すべきであり，Hamilton も血統に於て亦其流れを見る．而(しか)も Hamilton は愛蘭(アイルランド)で生れ，愛蘭(アイルランド)人たる誇りを有したと云う．愛蘭(アイルランド)から出た偉人は極めて少ないが，Hamilton の如きは其随一であった．

Hamilton は生れながらの天才であった．幼にして家庭の教育を受けたが．其教育は主として語学に在った．十三歳の頃には既に年齢と同数ほどの諸外国語を熟知したと云う．其中には梵語(サンスクリット)，亜剌伯(アラビア)語，波斯(ペルシャ)語，馬来(マレー)語なども包括したのである．

此の如き語学の天才は数学に於ても亦早くから其天才を流露した．Newton の「一般算術」や Principia，それから Laplace の「天体力学」などを得て之を読んだのは十三歳の頃であり．矢張り十三歳の時に代数の一書を作ったと云うが．発表されなかった．

十六歳の時には『天体力学』中の証明の誤りを指摘して之を発表した．或は十八歳の時であったとも云う．

1824 年 Dublin の大学に入り，1829 年まだ卒業しない前に天文学教授に登用された．

1835 年には勲爵士の称号 (Sir) を賜わる．

1842 年に大英理学奨励会に於て独逸(ドイツ)の Jacobi が，Hamilton は此の国の Lagrange なりと称揚した事もあった．

Hamilton は初め光学や動力学の研究に功を成す事多く．又 5 次方程式などの研究もあった．

四元法の創意は 1843 年の事であった．此れ即ち Hamilton の最大業績であった．けれども初めて之を発表したのは 1853 年であり，第 2 の著述は死後に至りて 1866 年に刊行された．

四元法に就ては少し許り説明しよう．

Hamilton が四元法を樹立したのは，代数学の研究から進んだのであった．Theory of Algebraic Couples と題する論文の発表は 1835 年であるが，Hamilton の見解に依れば，代数学は単なる術でもなく，言語でもなく，元来から量の学と云うのでもない，寧ろ進行 (progression) の順序の学である．時間は斯の如き進行の図式とも云うべく，従て代数学は純粋時間の学である．

代数学に就て既に斯の如き見解を有する Hamilton は，互に垂直なる二線の乗積は何を表わすかを考えた．而も適当な考えが得られぬ．之れが為めに如何許り苦しめられたか知れない．1843 年十月十六日の事であったが，夕景に夫人と其に Dublin の市中を散歩した際，Brougham 橋の上で忽ち新らしい考えが浮び上った．それが即ち四元法の原則であり，其原則は

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

としたものに外ならぬ．Hamilton は歓喜に堪えず，石の欄間に其事を刻したとか，若しくは刻みたい思いがしたとか云うことであり後に彼れの愛児等は此橋を四元橋と改名したと云う．

Hamilton は此発見を成すに先きだち，食事の時には必ず其愛児等をして線の乗法が出来たかを問わしめ，何時も憔然として未た出来ない旨を答えるのであったと云うから，其苦心の程も思われよう．其動作の甚だ劇的なことも思われる．Hamilton は詩をも作ったと云うから，其性格の然らしめた所であったろう．

此一例を見ても西洋の学者が，如何に研究に熱心であるかが知られ，学問の著しく進歩するのも無理からぬのである．

Hamilton は其創意の一ケ月後に之を愛蘭学士院に報じ，刊行公表したのは翌年であった．Hamilton は四元法に就て委細に詳論し 1852 年には『四元法講義』を公にした．『四元法原論』は完成に至らずして，其歿後 1866 年に刊行された．

Hamilton 存生の時から Tait は其有効なるを見て之を学び，物理学者の Maxwell も亦物理学上の応用に便利なことを認めた．

四元法は英国では初めから称讃を博したけれども，独仏等では認められなかった．

英国では Cayley，Clifford，Sylvester 等の諸大家も四元法に就て研究があり，四元法が注意すべき有数の大発見なることは言うまでもないけれども，Hamilton や其後継者等が期待した程に数学界を風靡するに至らなかった．

四元法の乗積に於て一つの線分の平方を負とすることは不自然なりとも見られ，物理学の泰斗 William Thomson(Lord Kelvin) の如きも，四元法は誠に麗わしく巧妙なものであるけれども，四元法に関係したものは，Maxwell の如きでさえも，必ず魅せられたような事になると言って居る．

後に Macfarlane(1851–1913) 及び Gibbs 等が四元法の紀法の改良を企てた．Heaviside が電気学に応用した事なども注意を要する．独逸並に伊太利の諸学者は更に別の改良を企てた．

1895 年にオランダの Molenbroek 及び当時 Yale 大学に留学中の木村駿吉が四元法の国際的学会の組織を企てた事は Cajori の『数学史』にも記載して居る．Macfarlane は 1913 年に歿した頃には此学会の会長であった．

Hamilton の四元法と並んで注意すべき者は Grassmann の広義の量論 (Ausdehnungslehre) であった．

Grassmann(1809–1877) は独逸 Stettin の人，其父は此地の中学校の数学及び物理学の教授であった．Grassman は幼時此中学校に学び，後に伯林の大学に遊んだ．Grassmann は神学を学んだのである．けれども趣味の広い人で，神学の外に物理学も学べば，数学をも学ぶ．そうして語学にも頗る堪能であった．言語学の研究もあれば．印度の古典を翻訳し，其辞書をも作る．又宗教や政治に関する論述もあった．

Grassmann は斯の如き人物であるが，郷里 Stettin の中学教員として数学，理科，宗教等を教え，1834 年に Steiner の後任として伯林の工業学校に転じたこともあるが，1836 年には再び Stettin の学校へ帰って来た．

此頃までに Grassmann が数学に就て有した知識は父から学んだ位のものであったが，此頃から仏蘭西の Lacroix, Lagrange，Laplace 等の諸大家の著書を見るに至り，Laplace の所説は父の著書中に記るされたる算法を用いて簡単に求められ得ることを解し，其算法の研究を進め，之を潮汐の事に応用した．そうして新しい幾何学的の算法を考案する事になった．1840 年頃には余程其考えも進んだのであるが，Schleiermacher の新著が出るに及んで再び神学の研究に移った．

1842 年には復た数学の研究を始める．そうして自分の新見解が甚だ重要なものなることを確信し，之を完成せんこと

を希望した．

是に於て大学教授の地位を得たいと思うたけれども，此の望みは遂に遂げられなかった．

其大著『線的広義の量論』(Lineale Ausdehnungslehre) は 1844 年に刊行を見た．其所論は新奇異様のものであり，一般で抽象的で，解説の仕方も普通のものではなかった．故に世の注意を惹く事は出来なかったのである．Gauss や Grunert や Möbius 等は此書を見て讃歎したけれども，其異様の術語や哲学的の論究を受納れることが出来なかった．全部之を通読したものは八年後に Bretschneider が一人あったのみだと云う．

Grassmann は其新数学を用いて任意の代数曲線を幾何学的に書く方法を Crelle の雑誌に記るしたけれど，其方法は当時の諸学者の用うる所のものに比し遙かに優れて居るに拘らず，此れ亦注意に触れなかった．

Grassmann は其偉大な業績が学界に承認されざるを見て晏然たる事能わず，数学を棄てて Schleiermacher の哲学や，又政治及び言語学等の方面を主として研究するようになった．けれども数学に就ても Crelle の雑誌で時折り発表することは止めなかった．

其『広義の量論』の第二部と云うか，二度目の作と云うか．其大著は 1862 年に出た．前著に於ては幾何学的の算法であったが．此後著は其制限を除き去りて，代数的のものとしたのである．即ち e を別々の単位とし，

$$a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 + \cdots\cdots + a_ne_n$$

なる一種の量を作り，其乗除加減から微分積分の事までも説いたのであり，e_1 が実数の単位，$e_2 = i$ なるときは普通の複素数となり，e_1，e_2，e_3 を互に垂直な三直線とすれば，空間上に於ける方向ある一つの線を表わすこととなる．従て Hamilton の四元法と同様の意味を持つ．

此の如き量を広義の量若くは拡がりある量と云うのであり，其乗除は諸因子の順序を変換することに依りて別の意義を持つ者となる．此点は四元法も同じい．Grassmann は乗積に就て外積，内積，開積と云う三種を区別した．こうして数学上に未だ嘗て知られざる一新分野が開かれたのである．

此の第二の著書も亦世の注意を惹かずして，不問に置かれた．

Grassmann は此時五十三歳であったが，新数学の認められざることを悲しみて，遂に全く数学の研究を廃棄し，梵語や言語学の研究に没頭するに至った．此種の研究に於ても驚くべき業績を立て，其名望は主として此方面に係って居たのである．

四元法並に広義の量論と類似あり若くは関係ある算法としては，Möbius(1790–1868) の『重心解析』(1827 年) や Saint-Venant(1797–1886) 及び Cauchy の研究，それから伊太利の Bellavitis(1803–1881) の研究などもあった．Bellavitis は独習の人であったが，Padua 大学の教授となり，又郷里 Bassano の市で公職を辞して学問の研究に全力を注いだこともあった．今云う所の研究は 1835 年及び 1837 年に公にされて居る．故に四元法や広義の量論は単に Hamilton と Grassmann との手で成ったと云うだけではなく，此種の研究が成就する為めには他の方面からも其準備が作られつつあったと云うか，若くは其機運が開けつつあった事が思われる．

Hankel(1839–1873) 及び Schlegel 等は Grassmann の学問を解説する所があり，追々と其思想が拡まることになった．Schlegel は Stettin の学校で Grassmann の同僚であった事があり，其思想を学んだのであった．

米国の Benjamin Peirce(1809–1880) も亦此関係に於て記載の要がある．米国は固より新開の国にして数学並に科学史上に多く貢献する所はなかった．Franklin が紙鳶を挙げて空中の電気を研究した事の如きは異数に属する．然るに今や Peirce の如き偉大な数学者が出る事となった．

Peirce は Massatusetts 州の人，Harvard 大学に学び，在学の頃から課程以上の数学を修め，Bowditch が Laplace の『天体力学』を翻訳したときには手伝いなどして 1833 年に Harvard の教授となり，終身其職に居る．海軍暦の作製や海岸測量の監督をしたこともあり，天文上の研究もあった．数学教科書の作も幾らもあった．けれども其業績の最も顕著なものは，Linear Associative Algebra の作である．初めて其論文を公にしたのは 1864 年であるが，矢張り注意する者は多くなかった．其代数学は多重代数学 (multiple algebra) と称せられ，其乗法には組合せ法則が成立つ者とする．そうして種々の種類を展開したのである．

Peirce の子に Charles S. A. Peirce があり，数学的論理学に於て造詣頗る深きを以て顕われた人であるが，父の多重代数学に就ても深く研究する所あり，其本質に就て説く所もあった．

Sylvester(1814–1897) も亦 Johns Hopkins 大学に於て多重代数学の講義をしたことがあり，諸雑誌に論文を発表したものも少なくなかった．Sylvester は英国生れの猶太人であるが，猶太人である為めに大に志を伸ばす事が出来ないので，

1841 年には米国 Virginla 大学の聘に応じて数学の教授になった．而も其翌年には一学生との争論が原因になって職を退き，英国に帰って法律を修め，弁護士になったのは 1850 年であった．1855 年には Wolwich の陸軍学校の数学の教授になったが，1869 年には年齢の為めに退職を余儀なくされて，1877 年に米国の Johns Hopkins 大学に聘せられ，米国の為めに数学研究の道を開いたこと，此人の右に出るものはなかったのである．『米国数学雑誌』も此人の設立に係る．1883 年には Oxford 大学の教授になった．米国に居った期間は数年間に過ぎないけれども，此間に米国の数学者を養成した功労は多いものであった．米国の学問が開けて来るのは，凡そ 1880 年頃を界として其以後の事であるから，Sylvester は恰も其転廻期に於て幾多の人物を養成したのであった．

Pierce の多重代数学は英国には Sylvester や Cayley などがあって，好感を以て迎えられたが，独逸では漠然として分類の原則も勝手なものだとして非難したものもあった．

独逸で此種の研究をした人人には Study 並に Scheffer などがあった．

第 10 章　十九世紀後半と英国

十八世紀から十九世紀前半の頃に於ける，英国の数学に就ては既に明らかにする所があった．Hamilton が四元法を創意した事も亦之を記るした．Sylvester の事も記るす所があった．

然らば Sylvester などと同じ頃の英国に於て其他に如何なる数学者があったかを見るのも，亦一興であろう．

Sylvester と名を等うする者に Cayley(1821–1895) があった．Cayley は露都に居った英国商家の子であるが，英国の Surrey で生れたのである．父は其子が家業を継ぐ事を願い，其目的で教育したのであるが，十四歳で London の学校に入り，数学の才能が甚だ顕われたので，Cambridge 大学に入りて数学を学ぶ事になった．在学中にも屡々論文を公にした．そうして最優等で卒業した．けれども収入を計らなければならぬので，更に法律を学び，弁護士になった．勿論其当時に於ても数学の研究を棄てたのではない．法律を学んで居る頃に Salmon と其に Dublin に赴き Hamilton の四元法の講義を聴いた事もあった．弁護士時代にも閑暇には数学の研究を進め，幾多の立派な論文が出来て居る．

Cayley は弁護士を業とすること十四年，名望隆々として栄え，収入も莫大であったけれども．1863 年に Cambridge 大学で新設された数学の講座を担当することになった．弁護士では数学研究の余暇が得難いので，罷めたのだと云う事である．

Cayley は大きな書物としては『楕円函数論』の一著が有るのみに過ぎないが，諸雑誌へ出した論文の数は甚だ多く，殆んど千篇も有ると云う．1889 年に Cayley 自身の手で其全集の刊行に着手し，存生中に七巻だけ出た．そうして其歿後に Forsyth が他の六巻を編輯刊行した．

Cayley の諸論文は斯の如く多数であり，其範囲も亦至って広い．数学の諸分科の中にて指を染めないものはないと謂っても宜いであろう．中に就て最も重要なのは楕円函数，不変式論，解析幾何学等であり，其中にても不変式論は Cayley の力で開拓さるることが最も多かったのである．

不変式論は元と Lagrange や Gauss，別して Boole の所説中に其萌芽が見られるのであるが，Cayley が 1841 年に此問題を論じてから，Boole も研究があり，又 Sylvester も其研究に着手し，長足の進歩を遂げる事となった．此頃に Cayley も Sylvester も共に London に在りて，共に弁護士をして居たので，屡々相会し，其研究に就て語り合う事も多かったと云うから，其談話に依って思想は交換せられ，著しく研究が発展したように思われる．

Cayley 及び Sylvester の手で主として英国で創始された不変式論は独仏伊等の諸国に於ても熱心に研究される事となった．Hermite，Brioschi 等の研究は固より注意に値する．

Stephen Smith(1826–1883) は Cayley や Sylvester ほどに名高くないけれども，其才能は之に劣るものではなかった．研究範囲の限られたるが為めに，名望が挙がらなかったのである．Smith は London に生れ，其母が優れた婦人であって，母の教育も亦優れたものであったと云う．Oxford 大学に学び，又健康の為めに仏蘭西などに遊んだ事もあった．数学に於ても亦古典に就ても共に其学力甚だ優秀であり，どちらを専門にして宜いか迷ったので．くじで決めたと云う事である．一生を独身で過ごし，家庭の係累はなかったけれど，経済向きには最も無頓着にして山仕事などに手を出し収入を浪費した事もあった．

Smith は 1861 年に Oxford 大学の教授になったが，公職が多くして研究時間に乏しかった．其主要の業績は整数論及び二次形式論等であった．英国は倫理学史の上から見ても功利主義の発達したのが著しいものであるが，而も Smith は反功利的に数学を解し，純正数学は何人にも嘗て実用あるものでないと言って居る．

Clifford(1845–1879) の名も亦英国の数学者として逸する事が出来ぬ．Clifford は Cambridge に学びて London 大学の教授となり応用数学を担当した．其数学の天才は大学在学中から発露し．十九世紀に於ける英国の数学諸大家中最も天才的であったとも言われるけれども，壮年にして逝き，中途で終ったのが甚だ惜しまれる．此頃まで英国では解析数学が主として行われたのであるが．Clifford は Möbius 及び其他の独逸(ドイツ)の学者の図解的方法を英国に伝えることに努めた．軌跡の分類やグラフ論などの研究があり，Riemann 曲面の研究なども名高い．力学原論は完成に至らなかった．Clifford の幾何学的研究は伊太利(イタリア)の学者中に続いて研究する者が多く出たのであった．

Clifford の『正確科学の常識』は数学基礎論に関するクラシックとも見るべく，此書は菊池大麓博士が『数理釋義』と題して邦訳したものがある．此書中には物理的測定上に於ける相対性の観念を暗示するものであったと云う．

Todhunter(1820–1884) の名は我国でも能く知られて居る．此人は数学教科書を多く作り，我国では一時は甚だ行われたもので，我国の先輩数学者の中にて Todhunter の書物を学ばなかった人は恐らく少なかったであろう．そうして我国の Todhunter とも言うべき長澤亀之助が多く其数学教科書を翻訳して我国の数学界に供給したのであった．Todhunter は英国だけでなく我国へまでも数学を普及した功労が少なくない．而(しか)も Todhunter は単なる教科書作者と云うだけではなかったのである．

Todhunter は少(わか)い頃 London 大学の夜学科に学びて，De Morgan の影響を被り，卒業の後に Cambridge 大学に入り，此地に留まること 1864 年までで，多く教科書を作って収入を得たと同時に，英語の通用する諸国に教育上の大勢力となったのであった．

又 1865 年には『確率論史』を作り，1873 年には『重力論史』を作った．両書共に古典的価値を以て見られて居る．Smith は Todhunter を評して，大数学者ではないが，立派な数学者であり，又優秀な語学者にして，学者として穏健なものであったと言って居る．

第 11 章　方程式論及び群論

三次及び四次の方程式が一般の形式で解き得られたのは，Tartaglia 及び Cardano 等の伊太利(イタリア)の諸学者の力であった．方程式論は Descartes 等の手を経て次第に進んだ．解析数学の進歩も亦甚だ著しきものがある．けれども五次方程式は其一般の形状に於ては，之を解き得べき方法が見出されない．此れは学者の長く苦しむ所であった．

愛蘭(アイルランド)の学者 Jerrard(?–1863) が其著『数学研究』(1832–1835) に於て五次方程式を三次の式に変形したのは著しい事であった．此変形は是れより先き瑞典(スエーデン)の学者 Bring(1736–1798) が 1781 年に得たのであるが，其事は 1861 年まで注意されずに居た．Bring も Jerrard も独逸(ドイツ)の Tschirnhausen(1651–1708) の変形法に拠ったのである．Bring は此変形に依って五次方程式が一般に解き得られる事の主張はして居らぬが，Jerrard は之を主張したのである．1836 年に Hamilton は Jerrard の方法の正しいことを述べて居る．Hamilton も Sylvester も五次方程式や高次方程式の変形に就て研究があった．

方程式論に於て各方程式は必ず実か虚の一根を有すとの定理は，Lagrange，Argand，Gauss 等の証明がある．Abel が五次又は其以上の高次方程式は一般の形に於ては根式を用いて解き得べからざる事を証明し，之を Crelle の雑誌第 1 巻 (1826 年) にて公にした．此事は誠に著名である．

Abel(1802–1829) は諾威(ノルウエー)の人で，僅かに二十七歳で歿したけれども，驚くべき天才の閃きを見せた事は仏蘭西(フランス)の Galois にも比すべきであろう．Abel は初め数学に興味を持った者ではないが，十六歳の頃に其師 Holmboe の教授を受くるに及んで．俄かに興味を感ずるに至り，此れから創始的の研究に着手したのであった．Abel が初めに手を着けたのは，五次方程式を代数的に解こうと云う企てであり，此点に於て Jacobi や其他の人々と同じ轍を踏んだのであった．1821 年に Christiania の大学に入り．Euler，Lagrange，Legendre 等の諸書を研究し，楕円積分の反函数を考えたのは此項の事であった．其造詣の著しきが為めに政府から独仏二国に留学して研究を成就せしむる事となった．

Abel は 1825 年に Hamburg の天文学者 Schumacher の許に至り，伯林(ベルリン)でも数年を費やしたが，Crelle 及び Steiner と交わりを結んだのは此時であった．Crelle が 1826 年に雑誌を発刊したのも，Abel と Steiner の助力があったからである．

Abel が一般の五次方程式は根号のみにては解くべからずとの証明は初め 1824 年に発表したのであるけれども．略記したのみで解し易くないのであった．然(しか)るに今や再び之を細論して発表することにした．此れが其雑誌の第 1 巻を飾ったのである．

又如何なる方程式が代数的に解き得べきかを研究し，重要な諸定理をも立する事が出来た．此等の結果は死後に至りて

発表されたが Galois も亦其間に新らしく研究する所があった．

Abel は又無限級数及び函数論等の研究がある．従来の研究では解析方法は粗雑であり，其為めに不明なものが多かったのに対し，Abel は其研究の各部分に亘りて其不明を一掃せんことを試みて居る．

Abel は一時伯林から Freiberg に遊びて，世の交渉を避け研究する所があって，此時超楕円函数及び Abel 函級の研究が出来たのであった．

Abel は 1826 年七月に独逸を去って巴里に遊んだが，独逸に於て Gauss には会わなかった．それには理由があった．Abel は初め 1824 年に五次方程式の代数的解法の不能なる事を証明して，其論文を Gauss に送ったのであるが，注意さる所とならなかった．Abel は之れが為めに Göttingen に赴きて Gauss に会うことを潔しとしなかったのである．Abel は其後に Cauchy に対しても同様の感情を持ったことがある．Abel は十ケ月間巴里に滞在し，Dirichlet，Legendre, Crelle 等に会ったが，巴里では余り認められなかった．Abel は此れまで Crelle の雑誌で多く発表したものがあったけれども，此雑誌は仏蘭西では未だ殆んど知られず，且つ Abel は謙遜家にして自分の業績を語るような事がないので，知られなかったのである．其後再び伯林に赴き，経済上の都合にて帰国しなければならなかった．帰国後私講師になったが．Crelle の尽力で伯林にて地位を得ることとなった．而も Abel は其報を得ずして歿した．

Abel は思想極めて豊富にして，其諸論文は後継者に対し研究問題を供給したことが極めて多い．

Abel は不幸にして早く歿したけれども，諾威の如き国から Abel ほどの天才が出たのも，注意を怠ってはなるまい．

五次方程式は一般に代数的に解くこと不可能なることは Abel が之を証明したのが甚だ有名であるが，其事は実は伊太利の医家 Ruffini(1765–1822) が Abel に先きだって之を説いて居るのである．其著『一般方程式論』(1791 年) に見え，其後も亦論ずる所があった．矢張り伊太利人の Malfatti(1731–1807) は其証明を批評したと云う事であり，Carnot，Legendre，Poisson は 1813 年に Cauchy の論文に関する報告中に Ruffini の証明に関して説く所あり，其推理が甚だ漠然たる者であり，一般に許容すべきでないと言って居る．Abel，Ruffini の推論は何時も厳密でないようだと評したが，Cauchy が 1821 年に Ruffini へ与えた書状には，四次より以上の一般の方程式が代数的に解し得べからざる事は完全に証明されて居ると言って居る．Hecker が 1886 年に論究する所に依れば，Ruffini の証明は大体に於ては正しいのであるが，個々の部分的に多少の欠陥があると云う．Ruffini の証明が完全なものでなかったのは勿論であろうが，此証明に最も早く手を着けたところは偉い．Ruffini は其他に於ても先鞭を着けたもの多く，伊太利の数学者として注意を惹くのである．

Wantzel(1814–1848) も亦同様の証明がある．其証明は一部は Abel の証明に拠り，一部は Ruffini のと同じいと云う．けれども Wantzel は任意の角を定木と円規とのみにて三等分することの不可能を初めて厳密に証明した人である．Wantzel は数学と語学とに才が有り，不規律な生活を送った人で，阿片をも喫する．そうして人に勝れて健康であったものも，遂に中途で斃れたのだと云う事である．

Ruffini の研究中には群論の萌芽が見られるのが著しい．群とは云わずして permutation と云って居るが．実は後に言う所の群の事であり，其種類の区別などもした．之に就て Ruffini の定理として知られたものが有名である．Ruffini の全集は 1915 年に伊太利で作られて居る．

五次方程式を超越函数の助けに依りて一般的に解くことは．Hermite が 1858 年及び其以後に成就する所であった．Kronecker は 1858 年に Hermite の公表後に手紙を送って，第二の解法に就て記るした．

又如何なる形の方程式が代数的に解き得らるるやの研究も，Abel の論文の発表以後に次第に進んだのであった．仏蘭西の天才青年 Galois の如きも方程式に関する研究に見るべき者があった．

Galois が 1830 年に group(群) と云う術語を使ったのは．正確な意味で用いられる事になった初めである．Galois は単純群と複合群とを区別し，変換群 (group of substitutions) なども研究し，之に依って代数的に解き得べき方程式に関しての論究もあった．此種の事は Abel も亦論ずる所があったが，此二人の論究からして群論の厳密な開拓が始まるのである．

群論に就ては Cauchy の研究も亦有力なものであった．其研究は 1844 年から．1846 年の頃に出来て居る．Cauchy はまだ群と云う名称を用いて居らぬ．

群論に就て初めて講義をしたのは，Serret が 1848 年に巴里で試みた事であったろう．1866 年に出版した代数書の三版には其解説が見える．

英国でも Cayley 並に Hamilton が群論の研究あり．抽象群に就ても述ぶる所があった．抽象群の事は其前に Cauchy も言って居るが，其所説の完成は後に Kronecker(1870 年)，Weber(1882 年)，Frobenius(1887 年) の手に俟ったのである．変換群から抽象群の論ぜられるようになったのは，漸次に行われたのであり，有限次の群論が発生したに就ては

凡そ二つの源流があった．一は Lagrange，Ruffini，Abel，Galois 等の代数方程式論の研究から来たものであり，一は整数論から来たのであって，Euler や Gauss 等の研究から始まる．近年の研究に依れば，群の観念には幾何学的変形 transformations の考えが関係があり，Euclid の証明に基づく所があると云う事である．

群論に就ては其以後の発達も之を説く事を要するのであるが，今姑く之を略し，諾威から偉人 Lie が出て，其有名な変形群論を作ったことを述べて置く事としよう．Lie の前には先輩 Sylow のあった事も忘れてはならぬ．

Sylow(1832–1918) が Christiania 大学で変換群の講義をしたのは 1862–3 年の事であり，Lie(1842–1899) も其講義を聴いたのであった．Sylow は三十年前に Cauchy の得た定理を拡張して，Sylow の定理として知られたものを得た人である．更に十年後に至り伯林の Frobenius(1849–1917) は一層押し拡むる所があった．Lie は諾威人であるが，先輩 Sylow の門下から出て群の観念を用い，連続群の説を創唱し，重大な進歩を齎らしたのであった．Lie の業績は有限連続群論の樹立完成にあった．

Lie は 1851 年に Christiania 大学に入学したけれども．数学に興味を感じたのは 1868 年以後の事にして，他の諸大家の如く早熟の人ではなかった．Poncelet 及び Plücker の著書に依りて興味を開かるる事が多かったと云う．1869–70 年の冬に伯林に遊びて．Klein に会い，論文を共著したこともあった．1870 年の夏には二人は共に巴里に留学し，Jordan 及び Darboux 等と交りを結んだ．Lie が直線を球に変ずる接触変形を発見したのは此時であり，此れから一般の変形論を研究するに至った．

此時普仏戦争が勃発し，Klein は巴里を去った．Lie は仏蘭西から伊太利へ徒歩旅行を試みたが，間諜の嫌疑で捕えられ，一ケ月後に Darboux の救解に依りて解放された．

1872 年には Christiania 大学の数学教授となる．

Lie は 1871–2 年に微分方程式を研究し，1873 年には有限変形群論の研究があり，微分方程式論への応用などもした．而も其群論並に積分論の研究は学界の承認を得ざるを以て，1876 年には幾何学の研究に移った．即ち曲面論等を学んだのである．1884 年には Klein と Mayer との勧告によつて Engel が諾威に赴き Lie の研究を助ける事となり，そうして Lie の『変形群論』の著述は 1888–1893 年に成った．

Lie は 1886 年に Leipzig 大学の教授になったが，三四年の後には過労の結果として神経衰弱に罹り，病は癒えたけれども，其性格は一変した．

1891 年には Engel の助けを籍りて無限連続変形群論を作った．

1898 年に諾威へ帰り，其翌年に歿した．

第 10 章　確率論及び統計

白耳義から Quetelet(1796–1874) が出て統計学の祖と称せられて居る事も，十九世紀には諸国から人物の輩出した一例である．統計学の発達は固より確率論 (或は公算論 probability) の歴史と関係する．確率論の起源は蓋し 15 世紀に伊太利の諸学者の論究から始まる．其問題は博奕又は類似の事項から来て居る．Benvenuto d'Imola が Dante の『神曲』の註の 1477 年版に於て説いたものや，又は 1494 年版の Pacioli の Suma の所説などが其源頭を為し，十六世紀になると Cardano 及び Tartaglia などの著書中にも論究せられ，それから Fermat が 1654 年に Pascal へ示めした問題が有り，此時から多く注意を惹く事となった．Pascal 及び Fermat の二人が得た結果は同じであったが，其解法は同じからず，其議論の結果として深く興味を惹いた．之れが為めに確率論は此の二人から創まると言わるる事になったのである．

確率論に就て初めて著述の公にされたのは，オランダの Huygens が 1659 年の作であった．

1708 年には De Montmort の著があり，1713 年に Jacques Bernoulli の Ars Conjectandi が出たのは，全部を確率論の論究に充当したものの初めである．

其次に出たのが De Moivre の偶機論 Doctrine of Chance であり，1718 年に出た．尋で 1740 年に Simpson が『偶機の法則』を作った．

斯の如くして 1812 年に至り Laplace の『解析的確率論』が出ることになった．Laplace が最小自乗法の証明を記るしたのも，此書中での事であった．

確率論を死亡率に応用したのは，Graunt が 1662 年の著書であり，Halley の研究も亦注意すべきであった．生命保険の事は London で 1583 年の頃に企てられたこともあるが，立派な会社が作られたのは 1699 年まではなかった．死亡表に就ては十八世紀に Northampton 表なるものが作られ，稍々後れて Milne(1776–1853) の作った表も現われた．1825 年には London の保険会社で正確な表を作った事もあった．

十九世紀には数学は一般に長足の進歩を途げたのであるが，確率論に就ては Laplace 以来余り顕著な発達が見られなかった．Laplace は Bernoulli の定理を逆に適用することを試みたが，他の事項と一致せざる所があった．1837 年に Poisson が巴里に於て『確率論研究』を著わし，1845 年には英吉利の De Morgan が『確率論』の著述あり，1886 年には独逸の Kries も亦専書があった．

又丁抹の Bing(1879 年の著書)，仏蘭西の Bertrand の確率論 (1889 年)，丁抹の Thielo(1838–1910) が 1889 年の著書なども，確率論の発達上には見逃がす可からざる文献である．Thielo は天文学者であった．

近年に至り丁抹の哲学者 Kroman も亦 1908 年に研究の見るべきものがある．

此等の研究があるけれども，確率論に就ては Laplace の研究が Baye の定理と称する者と一致しなかった事につき未だ充分に決定し得るに至らぬとか云うことである．

確率論に就て Todhunter が其歴史を作った事は前に述べた．其後に Czuber なども専書ではないが，同種の論究をしたものもある．確率論に就ては細かい問題に面白いものが幾らも有るが，本篇中に之を説くの余裕は許されぬのである．

Quetelet の統計学の樹立は斯の如き確率論の発達中に於ての事であった．Graunt の 1662 年の著述の事は前にも述べたが，此著述中に於て統計的研究の事は政治算術と言われて居る．普魯西の僧侶 Süssmilch も亦 1788 年に此種論究がある．Halley 等の如きは確率論を統計上に応用したもので，Jacob Bernoulli や，De Moivre，Euler，Laplace，Poisson 等は皆其応用を試みたのであった．

Quetelet(1796–1874) は其後に出た．白耳義人にして，Brussels の天文台長であり，天文学者であるが，又統計学は此人の力に依りて一科独立の存在を見ることとなったのである．統計上の公会又は官府が設立される事になったのも此人の力であった．

Quetelet は 1814 年 18 歳にして Ghent の学校で数学を教授する事となったが，此学校は其翌 1815 年には Ghent 大学に昇格した．此年其新設の大学から理学博士の学位を受けた．此れが同大学で学位授与の最初であった．1818 年には Brussels 天文台長の職を与えられたが，実はまだ建物もないし，空名に過ぎなかった．1826 年に至りて初めて建設せられ，Quetelet の設計が用いられた．けれども政治上の紛議などあって，其為めに 1832 年までは完成を見なかった．1836 年には Ghent の陸軍学校の天文学及び測地学の教授になる．数学に於ては幾何学上の諸問題に就て興味が深かった．天文学並に地磁気の事などに就ても研究がある．其著『白耳義数学物理学史』(1864 年) 及び『十九世紀初頭の白耳義に於ける数学物理学』の両書の如きは，数学史としても見るべき者だと云う．

けれども Quetelet が最も盛名を謡われたは，確率論の研究であり，1828 年には『確率論概論』を著し，1845 年には『確率論』の著があった．そうして近世統計学の祖と言われて居る．

Quetelet の平均人 (average man) の説は，其後多く評論の目的となり，Westergaard(1890)，Bertillon(1891)，De Foville(1907)，Jacobs(1913) 等の著述が現われて居る．

Quetelet は 1833 年に英国に遊び，其結果として大英理学奨励会に統計部が設けらるる事となった．そうして又 1835 年には London の統計学会も成立したのである．之に尋で 1839 年に米国統計学会も設けられた．

Quetelet が物理的並に社会的科学上に確率論を応用した研究中の精華は，Saxe-Coburg 及び Gotha 公爵への幾多の書状中に見え，其書状集は 1846 年に刊行された．Quetelet は最も大数の法則と云う事に重きを置いたのである．此事は仏蘭西の Poisson や独逸の Lexis(1877 年)，丁抹人 Westergaard 及び Charlie，露西亜人 Chebichev(1821–1894) 等の論ずる所もあった．

平均論の事も De Morgan 等の研究があってから，其後幾多の論究が見えて居る．此等は勿論凡て確率論の上に基礎を有するのであるが，Knapp 及び Guerry 等の所説の如きは，統計学を樹立する為めには必ずしも確率論を基準とするを要せずとして居る．

人口論に就ても Havey や及び十八世紀の見解は未だ渾沌たるもので，人口は不動のように見た．Euler は年々の出生率は等比級数で進むと考えた．此説につき 1839 年に Moser の駁論があり，Knapp は 1868 年に出生及び死亡の数は時と年齢との函数と見た．そうして之をグラフで表わした．Zeyner は 1869 年に更に幾何学的及び解析的の援助を作った．1874 年に Knapp は一層他の條件を設定し，不連続の変化をも許容することとした．それにつき 1875 年には Lexis の研究があった．

形式的の人口論や死亡率の事は又 Becker(1867 年及び 1874 年) 及び Wittstein(1881 年頃) 等の研究もあった．

生物学上に統計的の研究を創めたのは，英人 Galton(1822–1911) であり，此人は生れながらの統計家と言われて居る．Galton が進化論で有名な Darwin の従弟であることも，人の知る所である．其大著『自然遺伝論』．は 1889 年に出た．

英人 Pearson の研究も亦同じ方向に於て顕われて居る．Pearson は生物学上の統計に関して数学的の方法を用い，偶発事の分布に就て一種の曲線に依って研究することなどして居る．其著『進化論上の貢献』は 1899 年に出た．Mendel の遺伝の法則が学界に知られるようになったのは，1890 年の頃の事であるが，之れが為めに遺伝の事に統計学の応用される上にも少なからざる影響を及ぼしたのであった．之に就ては丁抹の植物学者 Johannsen の研究 (1914 年) がある．

第 13 章　解析数学

十八世紀に仏蘭西が数学研究の中心であった時代の数学は，殆んど悉く解析数学が全盛の状態であり，幾何学の如きは裏面に沈んだのである．然るに十八世紀末から十九世紀になって，Monge や Poncelet 等の画法幾何学や射影幾何学などが現われ，又非ユークリッド幾何学も出現し，事情は頗る同じからざるものとなった．其幾何学上の発展に就ては既に之を明かにした．故に今，解析数学が 19 世紀に至りて如何になったかを説くのも，之を必要とする．

解析数学の一部分なる方程式解法の事などは前既に論ずる所があった．

十九世紀前半の頃に於ける仏蘭西の数学を説くに当り，解析数学の発展に於て多少説く所のあったことなどは，覧者の耳目に新らたな者があろう．

十九世紀には仏蘭西の解析数学が英国に輸入される．仏蘭西には Lagrange 並に Laplace の後を受けて，Fourier 及び Cauchy 等が出て級数論だの，又一般に解析数学の論究が進む．

仏蘭西には Legendre があり，諾威からは Abel が出る，独逸には Jacobi や Riemann や Weierstrass など云う諸大家があって，楕円函数や又一般函数論の次第に進んだ事も，亦折に触れて説いたのであった．

今函数論の発達に就て言はんに，初め Legendre が楕円函数の研究のあった事は甚だ顕われて居るが，長く其継続を見なかったと言っても宜い．然るに Abel 及び Jacobi が出て，楕円函数の事は著しく進んだ．Abel の功績は楕円積分の反函数を論じた事であり，Jacobi も亦数月後に同じ試みの甚だ便利なることを見た．又虚数を函数論の上に使用することも此二人が別々に考え着いた事であった．此くして三角函数と指数函数とが同時に表わされ得ることとなった．何となれば三角函数は実の週期のみ有し，指数函数は虚数週期のみ有するに反し，楕円函数は両者を併せ有するからである．此種の発見を基礎とし，二人共に甚だ其研究を進め，得る所が多かった．

Abel は楕円函数論に関して造詣の多かったのであるが．Abel 函数に関する研究は更に注意すべきであった．其最も一般に論じた者は 1826 年作の論文中に見える．Abel は巴里滞在中に之を仏蘭西の学士院に提出した．Cauchy と Legendre とが其調査を命ぜられた．而も Abel の死するまで，報告する所はなかった．此発見に関して Abel は 1829 年の Crelle の雑誌中に略述し，其論文の事も言って居るが，Jacobi は之を見て Legendre へ其論文が何うなって居るかを尋ねた．Legendre の回答に拠れば，原稿が乱雑で読めないから，Abel へ書き改める事を求めたが，Abel は其侭にして居たのだと云う事である．

けれども又其当時の仏蘭西学士院の諸学者は主として応用数学即ち熱学，電気学，強性論等に興味を集中して居たので，Abel の論文の真価を認め得なかったのだと云う説もある．Poisson は Jacobi が 1829 年作の論文に就ての報告中に，Abel も Jacobi も共に熱の運動に注意して居ないのが宜しくないと言って居るが，Jacobi は之に就て Legendre に対し次の如く言送って居る．

> Fourier 氏は数学の主目的が世に役立つ事であり，自然現象の説明であると見たのは事実であるが，併し此人の如き哲学者は科学なる者の唯一の目的は人間精神の名誉であること，並に此見解からして数に関する問題は宇宙の体系に関する問題も同様に大切である事を知らなければならぬ筈である．

此事から見ても仏蘭西の学者が自然現象の数学的組織を重要視した事が知られ，決して単に純理論的にのみ攻究したのではなかった．

Abel 並に Jacobi の研究中の或るものは，又 Gauss も別に研究したものがあった．

Jacobi は初めは Gauss が定積分の近似に就て論じたものや偏微分方程式等の研究などしたが，Legendre の著書を読んで，楕円函数論の研究に入り，1829 年に十五歳の時に『楕円函数新論』を著わし，楕円函数に関する主要な事項を集めて論じたのである．此れにより其名声は一時に高まった．此れから又シイター函数等の事を委細に研究した．其結果として得る所が甚だ多かったのである．

此種の研究は Jacobi と Abel との手で開発せられ，其後 Weierstrass，Picard，Kowalevsky 夫人，Poincaré 等の手で更に其研究が進められた．

仏蘭西の Hermite(1822–1901) も亦函数の研究に於て頗る其造詣を現わして居る．Hermite は早くから数学の天才を示めし，講義を度外に置いて，Euler，Lagrange，Gauss，Jacobi 等諸先輩の著書を耽読した．幼時から足が悪るく，杖を要した程で，身体虚弱であり，適当の地位をも得られなかったのであるが，四十七歳の時に至って始めて教授になることが出来た．其受持ったのは高等代数学であり，仏蘭西の数学者中最も尊敬されたのであった．幾何学には全く嗜好を有せず，代数学及び解析数学の研究に限られて居る．整数論，不変式論，定積分，方程式論，楕円函数論，函数論等の論著がある．函数論の研究に於ては，仏蘭西では Cauchy も功績があったが，其以後では Hermite が第一人者であった．

一般函数論に於ては Fourier が任意の函数を三角級数にて表わし得ることを示めしたのが，其発展に重大な関係を持つ．

是に於て Cauchy の函数に関する研究を進めた．其著 Cours d'Analyse が刊行されたのは 1821 年であった．Cauchy は函数が連続であることの條件を規定し，函数と云う概念をも純粋なものにすることに努めた．虚変数の函数に就ては初めは其価値を認めなかったけれど，後には深く之を認め，Gauss 及び其他の諸学者の試みた如く幾何学的の形式を避けて寧ろ解析的にしたのである．虚数的の範囲内に於ける積分法の事をも研究した．

Cauchy の級数論の基本定理は 1837 年に公にされた．此れには函数の連続性の関係があった．

Cauchy の函数論の或る部分は Laurent 及び Puiseux(1820–1883) の研究する所となった．

函数論の発達には Cauchy の研究は重要な地位を占めるのであるが．之に尋で独逸の Riemann 及び Weierstrass の二人が出た事は一層注意すべきである．此二人の閲歴に就ては前既に略記する所があった．

Riemann は Göttingen 大学に於て Gauss に学び，1851 年学位論文として一虚変数の一般函数論の基礎を論じたのであるが，Gauss は殊の外に之を歓喜したと云う事である．Riemann は Gauss 及び物理学者 Weber の指導を受けて，物理学的の見地が純数学研究の源泉となって居る．Riemann は函数を表わす為めに三角級数を用いたものであるが．前に Dirichlet の試みたよりも遥かに進んで居る．定積分の成立條件に就ても Cauchy の所説よりも進んで，其成立範囲の事など誠に霊妙に指摘する所があった．

Riemann の研究は凡て霊妙深遠であるが，函数論に於ても亦同様である．Riemann は Weierstrass と共に函数論の建設に偉功があったが，此二人の立脚は全然趣きを異にし，Riemann は算式よりも寧ろ特質を基礎として其説を立て，虚変数の平面内に就ての幾何学的の見解が重きを成して居る．Riemann は函数を規定するには算式に拠らずして，其不連続点及び限界を用いたのである．

此種の立脚から進むが故に，Kronecker 及び Weierstrass などが非としたものもある事は免れぬ．故に別の見解に立ちて再吟味を行うことの企ても後人の希及する所となった．即ち Weierstrass が全然算式を基礎として進んだ立脚地からして，Riemann の考察を新たにしようと云う企てが出て来たのである．Weierstrass と Riemann とは斯く別別の立脚地に立って一般函数論を立てたのであるが，二人共に之を Abel 函数論に応用したけれども，其結果は Riemann の方が一般的であった．

Weierstrass は Kronecker と共に数学を算術的基礎の上に置き，幾何学的の見地を離れて組織しようと云うのが其理想であり，又功績であって，之に依り証明の厳密を期したのである．故に Weierstrass の函数論は此見地の下に構成された．Abel 函数の研究を始めたのは 1849 年頃であるが，1863 年及び 66 年には其事の講義をして居る．併し此等の事は存生中には公刊しなかった．

Weierstrass が連続函数にして誘導函数を有せざるものを発見したのは．1861 年であった．是より先き 1835 年に Lobachevsky は函数の連続性と微分し得らるることとは区別するの要あることを説いたのであるが，Weierstrass の此発見あるに及んで．数学界は驚異の眼を見張った．

Darboux は斯の如き函数の例証若干を得た．そうして不連続函数の積分し得ることにつき研究があった．又無限級数に就て珍稀の性質あることの実例を示めし，其取扱には注意を要することを論じた．

Weierstrass の見地に於ては，解析函数と云う概念が大切なのであり，一切の解析函数には凡て乗冪級数の形で表わさるるものとする．之に就ては言うべき事多く，又趣味に富むけれども，冗長に流るるを以て，今は凡て之を省き，Weierstrass 以後にも Mittag-Leffler 及び G. Cantor 等の研究が多く出た事のみ述べて置く．

又仏蘭西の Borel なども函数論の研究があった．Borel は現存の人，1871 年に生れ，政治家としての手腕も認められ，海軍大臣をした事もあった．

Mittag-Leffler は瑞典の人，函数論に関する研究が多い．1846 年の生れである．

函数論に功績ある人物としては，独逸の Schwarz(1845 生) 及び仏蘭西の Picard(1856 生) の名も挙げなければなるまい．又独逸の Klein(1849–1925) の業績なども注意すべきである．Klein は Hilbert(1862 生) と共に独逸輓近の大家にして，数学諸分科に亘りて貢献する所多く，又綜合統一の才に富み，数学教育の事にも功績の多い人であった．

今，Hilbert の名が出たので序に言って置くが，此人は 1899 年に『幾何学基礎論』を公にし，幾何学組織に関する論理的表現の傑作として，学界の等しく認むる所である．後に改訂版が数版を重ねて居る．初版本の英訳も出来て居る．

Hilbert は Weierstrass 等の開いた所の数学上の論理的抽象思想の最大表現者とも言うべきである．

第 14 章　整数論

Gauss は整数論を数学中の女王だと称した．Gauss に取って整数論は最も価値あるものであった．整数論は Gauss に依って全く改革されたとも言われる．

Gauss が Disquisitiones Arithmeticae を著わしたのは 1802 年であった．而も其研究は 1795 年弱冠の頃からの事であり，記載事項の中には Euler 及び Lagrange の得たものもあったが，Gauss は未だ此等諸大家の作を見ない中に思い付いたのだと云う事である．書中には新思想並に新研究が甚だ多い．二次形式論なども其一つであり，割円術も亦最初から学界に重きを成す所であった．割円術とは円内に容れたる正多角形に関する方程式を作り，之を研究したものであって，辺数に依りて定木と円規とにて作図し得るものをも此れから索めたのである．

之に就き 1872 年に至り Bachmann は『割円術』と題する専書を作った．

Gauss は其大著中に於て整数論研究の新らしい出発点を作ったのみならず，其外にも尚研究する所があった．Jacob の研究などは之に尋で現われたのである．

Gauss の大著は Dirichlet が巴里留学中に読んで甚だ讃歎し，終身之を愛読して止まなかったと云う．Dirichlet は此書中の多くの事項に就て簡略にする所あり，了解を容易にしたのである．

Dirichlet が或る五次の不定方程式は不可能なることの論文は 1825 年に十歳の時に巴里の学士院に提出した．Fermat の方程式 $x^n + y^n = z^n$ は $n = 5$ の場合には成立せぬことの証明をした．此研究中には Legendre の見解も含まれて居る．

Dirichlet は素数の事にも研究があった．Gauss 及び Legendre も一定限以下の素数の数を近似的に定める研究があったが，厳密に此見地での研究を成就したのは Riemann の 1859 年の論文であった．

露西亜の Chebichev は別の方面から同じ研究があり (1850 年)，仏蘭西の Bertrand も亦先きだって同様の事を言って居る．其後 Poincaré 及び Sylvester，Hadamard 等の研究もあった．

1909 年に Landau は『素数分布論』の書を作った．又 1912 年には之に関して四つの問題を提出した．

因数表は幾多のものが作られて居るが，1909 年に Lehmer の著したものが千万以下の数に就て説き，前代の諸研究中の誤謬をも指摘して居る．

整数論に就ては Cauchy 及び Liouville(1809–1882)，英吉利の Stephen Smith(1826–1883)，独逸の Kummer(1810–1893) なども種々の研究があった．Kummer は理想数なるものを説いた．

Klein は理想数を幾何学的に取扱いて簡単に了解される事とした．此れは 1893 年の事であった．

Kummer が理想数の概念を得たのは，Fermat の方程式 $x^n + y^n = x^n$ は $n > 2$ なる場合には整数解を有せざる事の証明を企てたのに基づく．此方程式の或る特殊の場合に就ては巴里の女流数学者 Sophie Germain(1776–1831) の研究があり，他に之を拡張したものもあるが，初等的性質のものであった．Kummer の所説は之に反し，Kummer も創意者の一人であった所の代数的の数なるものの説に基づき，初等的のものではない．其証明は一般に成立つと思ったけれども，Dirichlet は然らざることを指摘した．Kummer は更に研究を重ねて，遂に理想数の事に想到し，之を証明に用いた．斯くして得たる証明も尚全く一般ではないけれども，除外の場合は至って少ないことになった．

Kummer 以後には 1909 年に Wieferich の研究など進歩を示めす者であった．尚他に多くの証明が現われて居る．勿論一般的のものはないのである．

Waring の定理の証明と云うものも二十世紀になって試みられたのであるが，1909 年に Wieferich は其一部分の証明をした．即ち各整数は九個より多からざる立方数の和として表わされ得ると云うのである．此種の事に就ては Hilbert の研究もある．

今，代数的の数と云うことを言ったが，Hilbert が 1892 年に公にした代数的数体論の如きは注意すべきであった．此事に関しては尚他の研究もあるが，我国の高木貞治博士の研究なども注意して置かなければならぬ．

代数的の数に対し超越数なるものがある．e だの π だの云うのが其れである．e の超越性に就ては Liouville は 1872 年に，又 Lindemann は 1882 年に之を証明した．Lindemann は又 π の超越数なることをも証した．其後 Weierstrass, Hilbert 等は簡単な証明を得た．

此二数の外に幾多の超越数の存することも，Liouville 及び其他の人人の研究に依りて明らかである．

第 15 章　応用数学

十八世紀末には Laplace の天体力学が成り，天文関係の数学は完成したかの如く見えたのであるが，十九世紀の第一日には伊太利で Piazzi が小遊星 Ceres を発見し，其運行は Laplace の理論を以てしては未だ解釈し得なかったのである．

然るに Gauss は適当に之を解釈し得る所の理法を立てた．Olbers は此理法に基づき再び其小遊星の位置を発見することを得た．Olbers の誘掖に依って天文学上に偉功を収めたものに Bessel(1789–1846) があった．Bessel は近代の実地星学及び測地学の創始者と云われて居る．星学の観測に就ては甚だ優れた人物であった．其創意に成れる Bessel 函数は応用数学上に応用の多いものである．

Laplace 及び Lagrange に尋で出た応用数学者には Poisson(1781–1864) があり．又 Lagrange の甥に伊太利の Plana(1781–1864) があった．此 2 人は遊星或は月の運行に就ての研究がある．

Hansen(1795–1874) は月行論の著 (1838) で名高い．

英吉利の Airy(1801–1892) は 1826 年に太陰及び遊星の説を作る．独逸の Möbius も 1842 年に天体力学書を作る．仏蘭西の Leverrie(1811–1877) は天体力学の新研究を試み，理論上から海王星を発見した．英吉利の Adams(1819–1892) も亦同じ発見があり，之れが為めに盛んに論争が行われた．

George Darwin(1845–1912) の潮汐進化論の如きも甚だ注意すべきである．進化論の創唱を以て有名な Charles Darwin の長男にして，有力な天文学者であるが，潮汐の摩擦に依りて地球の運動が鈍り，次第に自転の時間が長引き，それから如何なる結果が現われたかを説いたのである．此研究の初めて公にされたのは，1875 年であるが，1885 年に Poincaré は賛意を表する旨の論文を著わした．

月の運行に就ては米国の Hill(1838–1914) なども研究があった．三体問題即ち日月地の三体の運行を論ずる力学も，Lagrange が其体系を整えて以後，幾多の研究があって次節に進んだのである．三体問題からして n 体の問題も論究されて居る．此種の研究には Poincaré，Painlevé 等の努力に負う所多く，十種の積分を用いて解くべく．其以外にはないことが明らかにされたのである．

一般力学に就ても，Lagrange は解析力学の大著を作したのであるが．其後十九世紀になっては力学の問題も幾何学的の処理を便利とするに至った．Poinsot(1777–1851)，Chasles 等がそれである．Poinsot の静力学書は 1804 年に出たが，綜合的に論じたものの初めである．Poinsot は後に廻転運動に就ての立派な研究がある．

英吉利の Ball は動力学を幾何学的に研究した．1876 年以来独楽の理論を論じたのは名高い．

運動の方程式に関する研究の如きも，Lagrange に尋いで Poisson，Hamilton，Kowalevsky 夫人 (1850–1891) などの研究があった．此等は微分方程式の取扱に関するのである．Kowalevsky 夫人の研究の如きも其積分方法に関し，函数論を巧みに応用したものであった．

夫人は露西亜・モスコウの人．陸軍将官の家に生れ，独逸に遊んで Weierstrass に師事し，ドクトルの学位を得たが，後に (1894) 瑞典 Stockholm 大学の数学教授となり，病歿の時に至った．全く露西亜の新らしい婦人であって，其姉及び友人と諮りて，私かに地質学者 Kowalevsky に嫁し，伴われて独逸に出奔留学したことなど，世の興味を惹く．婦人の解放運動に関与したなどは，此人としては当然であったろう．私は嘗て其自伝及び補記の英訳を読み，感ずる所が多かった．夫人は其結婚生活に於て幸福なものでなかったのであるが，此れは必ずしも女流天才として必然の結果ではなく，不純な結婚から来た自然の帰結であったろうかとも思われる．英国の女流理学者として有名な Somerville 夫人や今の女流化学者 Curie 夫人の如きは，其結婚生活が正常なものであったのである．

十八世紀に於ては諸大家が天体の運行を研究するにしても，摩擦の問題は度外に置いたのてあるが，十九世紀の諸学者は摩擦をも打算することとなった．其研究は物理学的に物質の運動と云うようなことにも及んだもので，Thomson(Lord Kelvin)(1824–1907) の如きは其先鞭を着けたのであった．独楽の運動を研究したのは，学生時代の事で，これから其見解が進んだのであった．

独逸の Klein は 1898 年に英国の Routh の動力学書など見るに英国の学風は具体的，実際的であるのが，大陸風とは趣きを異にすることを指摘して居る．Routh の書は独逸訳も試みられ，Klein と Sommerfeld は共同に英国風の長所を

採り入れて，独楽の理論の書を作った．1914 年に英国の Greenhill の著わしたものは，一層工学上に直接の関係が多い．其理は水雷に用いられ，又船の動揺を防ぐ為めにも役立つのである．

尚力学に就ては言うべき事が多いけれども，凡て割愛しなければならぬ．併し相対性原理の事だけは一言するの要があろう．

光はエーテルの波動なりとは，Huygens も十七世紀に言って居る．十九世紀に入りて Young(1773–1829) 及び Fresnel(1788–1827) が出て，光波は横の振動なりとの説を立て，初め Laplace 及び Poisson 等の諸大家が多く同意しなかったけれども，之が為めに Fresnel は益々其研究を厳にしたし，Young は光の現象に就ては一層の観察をするし，Laplace の如きも遂に賛意を表するに至った．

其後諸大家が出て光に関する一切の現象を波動説に依りて説明することに努めた．

英国の物理学者 Clerk Maxwell(1831–1871) は 1864 年に光は電気磁気的現象なることを説いた．即ち同一性質の波動に外ならぬことを数学的に説述したのである．其後独逸の Hertz は実験的に之を確めた．是に於て物理学の理論的基礎は有力に成立つこととなった．

エーテルが静止的のものなりとすれば，地球が軌通上を運行するに当りて光が一定距離を往復するに要する時間は，此運行に平行な時と垂直な時とでは異同があるべき筈となる，然るに 1887 年に Michelson と Morley とは実験に依りて此の如き差異の認められざることを確めた．此実験や又他の実験に依りて，地球が空間内に於ける運動は，地球上でのみの観測では看破し得べからざることを示した．

Lorentz は 1895 年に Michelson 等の実験の結果を説明せんと欲し，且つエーテル静止観を放棄せざらんが為めに，運動する所の剛体は縦に少しく収縮するのだと云う説を立てた．英国の Fitzgerald も亦別に同じ見解を作った．

1904 年に至り Lorentz は運動する物体系の電磁気的方程式を静止した場合にも成立つ所の形に変形せんことを企てた．其基本方程式は所謂 Lorentz の変換なるものに対して不変式であることが知られた．1906 年に Poincaré は此変換を適用して電子の動力学を説き又宇宙重力に就ても説く所があった．

1905 年には当時二十六歳の独逸の猶太人 Einstein が相対性原理の学説を創唱したのであるが，上述の如き準備が進みつつある所に出現したのである．全く Lorentz の学説を完全に説明しようと云う企てから来て居る．

1907 年には一層委しく論述した．

Einstein の学説では質量とエネルギーとは相比例すと見たのが，根本の見解である．重力の現象をも説明せんが為めに，質量と重量とも比例すと見做し，従て光線は物質の為めに引かれるとした．其学説は数学的には 1913 年に Grossmann が進んで研究する所があった．

Minkowski(1864–1909) は 1908 年に空間及時間と題する講演を試み．時空は別々のものではなく，両者相関して一個の存在を成すのだとの新説を立てた．如何なる空間上の位置と雖も或る格段の時に注意し得るのみであり，時も亦或る格段の処を離れては考えられない．是に於て時空を併せて四次元の世界を成し，此世界の中に於ける一つの質点の経歴は之を一世界線と名づける．Minkowski は Einstein の相対性原理から出発して，四次元の時空世界を想定し，依って Lorentz 変換を甚だ大切なものにしたのであるが，Klein 及び其他の諸大家が之を重視したのでも知られよう．Minkowski は露西亜に生れ，独逸に学びて独逸で教授に任じた人である．

Klein は 1910 年に物理学者の相対性原理を以て Minkowski の四次元時空世界に於ける一種の不変式論なりと看做した．

又伊太利の Enriques は 1906 年に『科学諸問題』と題する書を著わし，古典的力学の原則は或種の光学的若くは電気光学的現象に対して矛盾を有し，恐らく全然確実なりと看做すに足らざるべく，改造を要するであろう事を説いて居る．

露西亜の数学者 Varicak は相対性の物理学に対しては Lobachevski の幾何学が最も適当であることを了解し，光学上の現象に就て Ehrenfest 及び Bonn の示めした矛盾の解決を試みた．

仏蘭西の Borel は此見地から発して，相対性原理の新しい帰結を論究した．

是に於て仏蘭西の Rougier は 1914 年に Lobachevski の幾何学は物理学的に真にして，Euclid 幾何学は邪であろうかの問題を提出した．そうして恁う云う風に考えた．

否，相対性の物理学を論ずる為めには，Lorentz 及び Einstein の試みた如く普通の幾何学を以てしても宜い．若しくは又 Minkowski の企ての如く我が三次元の上に第四次元を想い加えても宜い．或は又 Wilson 及び Lewis の如く力学的及び電磁気学的に非ユークリッド幾何学を用いても宜い．此等の解釈は何れを採るにしても何かの格段な便益があるの

である．

相対性原理は学界の中心の問題となったと言っても宜い．そうして諸方面から幾多の研究家が現われた．其結果として Newton の力学の原則は覆えされ，新力学も構成されて，Newton の力学と新力学とは恰(あたか)も Eudid 幾何学と非ユークリッド幾何学とが併存するが如き有様となった．新力学には非ユークリッド幾何学が摂取せられ，非ユークリッド幾何学は単なる数学上の思想的構造からして物理学上の現実性を認められるようになり，数学的思索の効果も現実に表現されたとも言われよう．

相対性の物理学が出現したことは数学に取りても決して徒爾(とじ)の事ではなかった．数学研究の新分野も茲に新たに其眼界を広くした．

そうして独り此方面だけでなく，数学の他の諸方面に於ても亦其領域を拡め，其深度を深うし，有望なる将来は益々新進気鋭の青年子弟を待ちつつあるのである．

此時に当って我国の数学も維新以来，在り来った所の和算を棄てて西洋の数学を学び，一時は稍々研究が衰えたかの観もあったけれど，菊池，藤澤，寺尾，北尾等の諸大家が出て数学の専門教育を進め，其門下から幾多の英才を輩出せしめたのであった．特に東北大学の設立後に於ては『東北数学雑誌』の如き有力な専門雑誌も刊行されることとなり，我が数学界は頓(とみ)に其活気を倍加したかの感がある．独り然るのみならず東西両京及び其他の地にも多くの有力な人物が相尋(つい)で出現し，近年次第に進歩発達の朕兆を来たして居ると言っても宜い．

純数学に於てのみならず，応用数学若くは物理学に於ても我国現下の状態は甚だ有望に開展されつつ有りと言うべく，既に幾多の業績が得られ，又益々進まんとして居る．相対性の物理学等に於ても充分に了解せられ，又研究も企てられたのであった．

近頃世間に報ぜらるる所に依れば，Einstein は今又相対性原理にも匹敵すべき重要な新原則を発見したと云うことである．若(も)し果して然らば之に基づいて大に新研究の勃興するは言うまでもないであろうし，我国でも必ずや有益な結果が得られるであろう．

上来説く所に依りて見る如く，我国の数学上に於ける業績貢献は之を世界の大舞台の上に比較する時は，固(もと)より甚だ見劣りするのも余儀ない事であろう．我等は曲げて否らずと言い張ろうとは思わぬ．併しながら我国は孤立の一島帝国であり，他から学び他から影響せられる事極めて少なかったに拘(かかわ)らず，徳川時代の旧数学をも造り出したのであった．近代の西洋の如きは幾多の国々が相集まり相競争しつつ，互に参加して其偉大なる業績を挙げて居るのである．単なる一国を以て之と対抗することは決して容易でない．之に対して見劣りがするからとて，左まで卑下するにも当るまい．我国の地位境遇と其業績とを以て子細に比較を試みたならば，数学史上に於ける我国の真価は凡そ考え及ばれる事であろうと思う．具(つぶ)さに之を理解して，今や世界の数学活動団の中に進み入った其地位を思い，充分に天分の発揮されることを願うのである．

言うこと勿(なか)れ，我日本は模倣にのみ長じた国であると，今や我等は西洋の数学を学ぶ，而(しか)も此れは単なる模倣ではない．世界共通の進運の中に進み入ったが為めに．共同に之を学習し之を獲得するのであって，斯くする事の外に，我等の進むべき路はないのである．彼に学んで而して後に，彼れの未だ知らざる所のものを開拓し，彼れをして倚(よ)らしむることも出来るならば，此れ即ち我れの貢献となるのである．我等は後進の士に向い，深く且つ強く我等の期待を懸け茲に筆を擱(お)く．

ここに集録したものは，
三上義夫著『東西数学史』（「輓近高等数学講座」東京，共立社）の全文である。集録にあたり，読みやすさのために

1. 原文のカタカナをひらがなに改めた。
2. 地名・人名などのひらがなをカタカナに改めた。
3. 地名その他に振り仮名をつけた。
4. PDF 化するにあたって，pLaTeX2ε で組版し，dvipdfmx で PDF 化した。