



Liegner Nándor

VASÚTI GÖRBÜLET-ÁTMENETI GEOMETRIÁK ÉS ALKALMAZÁSUK

2004.
BME-UVT

<http://www.uvt.bme.hu>

TARTALOMJEGYZÉK

1. BEVEZETÉS	4
2. A VASÚTI PÁLYA MOZGÁSGEOMETRIÁJA.....	5
2.1. A MOZGÁSGEOMETRIA FELADAT ÉS MÓDSZERE	5
2.2. A VASÚTI PÁLYÁN MOZGÓ PONT MOZGÁSTÖRVÉNYE.....	7
2.3. KÍSÉRŐTRIÉDER	7
2.4. A KINEMATIKAI MOZGÁSJELLEMZŐ VEKTOROK	8
2.4.1. <i>A sebességvektor.....</i>	<i>8</i>
2.4.2. <i>A gyorsulásvektor</i>	<i>9</i>
2.4.3. <i>A h vektor.....</i>	<i>11</i>
2.5. A MOZGÁSJELLEMZŐ MENNYISÉGEK GYAKORLATI MEGHATÁROZÁSA	13
2.5.1. <i>Az oldalgyorsulás meghatározása</i>	<i>13</i>
2.5.2. <i>A gyorsulás-változás (h-vektor) közelítő értékének meghatározása</i>	<i>13</i>
3. ÁTMENETIÍVEK GEOMETRIÁJA	15
3.1. AZ ÁTMENETI ÍV GEOMETRIAI KIALAKÍTÁSA	15
3.2. ÁTMENETIÍV GEOMETRIA EGYENES ÉS KÖRÍV KÖZÖTT	18
3.2.1. <i>Koszinusz-átmenetiív egyenes és körív között.....</i>	<i>18</i>
3.2.2. <i>Klotoid-átmenetiív egyenes és körív között.....</i>	<i>21</i>
3.3. ÁTMENETIÍV GEOMETRIA AZONOS GÖRBÜLETŰ ÍVEK KÖZÖTT	22
3.3.1. <i>Koszinusz-átmenetiív azonos görbületű körívek között.....</i>	<i>22</i>
3.3.2. <i>Klotoid-átmenetiív azonos görbületű körívek között.....</i>	<i>25</i>
3.4. ÁTMENETIÍV GEOMETRIA ELLENKEZŐ GÖRBÜLETŰ ÍVEK KÖZÖTT.....	27
3.4.1. <i>Koszinusz-átmenetiív ellenkező görbületű körívek között.....</i>	<i>27</i>
3.4.2. <i>Klotoid-átmenetiív ellenkező görbületű körívek között.....</i>	<i>31</i>
4. KÖRÍVES PÁLYASZAKASZOKHOZ CSATLAKOZÓ ÁTMENETIÍVEK HOSSZÁNAK MEGHATÁROZÁSA	33
4.1. ÁTMENETIÍV HOSSZÁNAK MEGHATÁROZÁSA EGYENES ÉS KÖRÍV KÖZÖTT	34
4.1.1. <i>A koszinusz-átmenetiív hosszának számítása.....</i>	<i>34</i>
4.1.2. <i>A klotoid-átmenetiív hosszának számítása.....</i>	<i>34</i>
4.2. ÁTMENETIÍV HOSSZÁNAK MEGHATÁROZÁSA AZONOS GÖRBÜLETŰ KÖRÍVEK KÖZÖTT	35
4.2.1. <i>Koszinusz átmenetiív hosszának számítása.....</i>	<i>35</i>
4.2.2. <i>Klotoid átmenetiív hosszának számítása.....</i>	<i>35</i>
4.3. ÁTMENETIÍV HOSSZÁNAK MEGHATÁROZÁSA ELLENKEZŐ GÖRBÜLETŰ KÖRÍVEK KÖZÖTT	35
4.3.1. <i>Koszinusz átmenetiív hosszának számítása.....</i>	<i>35</i>
4.3.2. <i>Klotoid átmenetiív hosszának számítása.....</i>	<i>36</i>
5. TÚLEMELÉS, TÚLEMELÉS-ÁTMENET	37
5.1. TÚLEMELÉS KIALAKÍTÁSA KÖRÍVES VASÚTI VÁGÁNYOKBAN	37
5.2. A TÚLEMELÉS-ÁTMENET	40
5.2.1. <i>A túlemelés-átmenet kialakítása</i>	<i>40</i>
5.2.2. <i>A túlemelés-átmenet meredeksége</i>	<i>41</i>
5.2.3. <i>A túlemelés-átmenet elhelyezése és hossza</i>	<i>42</i>
5.3. TÚLEMELÉS-ÁTMENETI GEOMETRIÁK	42
5.3.1. <i>Egységes koszinusz túlemelés-átmenet</i>	<i>43</i>
5.3.2. <i>Lineáris túlemelés-átmenet.....</i>	<i>45</i>
6. KÖRÍVES, ÉS AHHOZ KAPCSOLÓDÓ ÁTMENETIÍVES GEOMETRIÁK GYAKORLATI VIZSGÁLATA.....	48
6.1. AZ ÁTMENETIÍV ELHAGYÁSÁNAK VIZSGÁLATA	48
6.2. AZ ÁTMENETIÍV LEGKISEBB HOSSZÁNAK MEGÁLLAPÍTÁSA.....	49
6.3. A MEGENGEDHETŐ LEGNAGYOBB SEBESSÉG MEGHATÁROZÁSA TÚLEMELÉS ÉS ÁTMENETIÍV NÉLKÜLI KÖRÍVBEN	50
6.4. A MEGENGEDHETŐ LEGKISEBB KÖRÍVSUGÁR VIZSGÁLATA ÁTMENETIÍVES KÖRÍVNÉL	51
6.5. A MEGENGEDHETŐ LEGNAGYOBB SEBESSÉG MEGHATÁROZÁSA ÁTMENETIÍVES KÖRÍV ESETÉN	52
6.6. A FÜGGŐLEGES LEJTTÖRÉSEKET LEKEREKÍTŐ KÖRÍVSUGÁR VIZSGÁLATA	52

6.7.	SZÁMPÉLDÁK KÖRÍVES, ÉS EZEKHEZ KAPCSOLÓDÓ ÁTMENETÍVES GEOMETRIÁK GYAKORLATI VIZSGÁLATÁRA KINEMATIKAI SZEMPONTBÓL	53
6.7.1.	<i>Inflexiósan, közbenső egyenes nélkül csatlakoztatott körívek</i>	53
6.7.2.	<i>Átmenetiív nélkül, közbenső egyenessel csatlakoztatott körívek</i>	54
6.7.3.	<i>Rövid átmenetiívvel csatlakoztatott körívek</i>	55
6.7.4.	<i>Megfelelő hosszúságú átmenetiívvel csatlakoztatott körívek</i>	56
7.	TISZTA ÁTMENETÍVES GEOMETRIÁK ALKALMAZÁSA	57
7.1.	TISZTA ÁTMENETÍVES ÍV	57
7.1.1.	<i>Geometriai és kinematikai áttekintés</i>	57
7.1.2.	<i>Számpélda</i>	59
7.2.	VÁGÁNYELHÚZÁS NÉGY ÁTMENETÍVVEL.....	60
7.2.1.	<i>Geometriai és kinematikai áttekintés</i>	60
7.2.2.	<i>Számpélda</i>	62
8.	KITÉRŐK KINEMATIKAI VIZSGÁLATA	64
8.1.	A KITÉRŐK KÖZLEKEDÉSMECHANIKAI KÉRDÉSEI	64
8.2.	KÖRÍVES ELTÉRÍTÉSŰ KITÉRŐ	65
8.3.	AZ ELTÉRÍTŐÁGBAN MÓDOSÍTOTT-ÖSSZETETT KOSZINUSZ ÁTMENETÍVES KITÉRŐ VIZSGÁLATA	69
8.3.1.	<i>Kitérőirányban nagyobb sebességre alkalmas kitérő-geometria vizsgálata</i>	69
8.3.2.	<i>Az átmenetiíves eltérítő geometria meghatározása</i>	71
8.3.3.	<i>A csúcshin lementszésének vizsgálata</i>	74
8.3.4.	<i>A kitérő tengelyábrájának számítása</i>	75
8.3.5.	<i>A vágánykapcsolás hosszának meghatározása</i>	76
8.3.6.	<i>Számpélda módosított-összetett koszinusz átmenetiíves eltérítésű kitérő, és ezekkel kialakított vágánykapcsolás meghatározására</i>	77
8.4.	NÉHÁNY, JELENLEG ALKALMAZOTT, KITÉRŐIRÁNYBAN ÁTMENETÍVES GEOMETRIÁJÚ KITÉRŐ	82
8.5.	KITÉRŐ GEOMETRIÁK ÖSSZEHASONLÍTÁSA	86

1. BEVEZETÉS

A „Vasúti görbület-átmeneti geometriák és alkalmazásuk” c. jegyzet a BME Építőmérnöki Karán oktatott Vasúttervezés és Nagysebességű vasutak c. tárgyak gyakorlataihoz nyújt segítséget.

A jegyzet 2. fejezete a mozgásgeometria feladatát, a mozgásjellemző mennyiségek kinematikai vizsgálatát és gyakorlati használatukat tartalmazza. A 3. fejezet az egyenes és körív, az azonos görbületű ívek, valamint az ellenkező görbületű ívek között elhelyezkedő átmenetiív geometriákat mutatja be, az átmenetiívek hosszának számításával a jegyzet 4. fejezete foglalkozik. A túlemelés és a túlemelés-átmeneti geometriák az 5. fejezetben találhatók. A 6. fejezetben köríves, és ahhoz kapcsolódó átmenetiíves geometriák gyakorlati vizsgálata kerül ismertetésre számpéldákon bemutatva. Körív nélküli, tiszta átmenetiíves geometriák alkalmazását a 7. fejezet tartalmazza. A 8. fejezet a köríves és az átmenetiíves eltérítésű kitérőket ismerteti kinematikai szempontból, kidolgozott számpéldákkal.

A jegyzet az 1986-ban kiadott *Dr. Megyeri Jenő: Vasúti Mozcásgeometria*, (Műszaki Könyvkiadó, Budapest) c. könyvének egyes fejezeteit veszi alapul, ezeket számpéldákkal kiegészítve. Ezúton mondok köszönetet Dr. Megyeri Jenő Professzor Úrnak, hogy könyvének fejezeteit rendelkezésemre bocsátotta.

A gépelés és a rajzok szerkesztésében jelentős munkája volt Bozóki Beáta nappali tagozatos építőmérnök hallgatónak és László Gabriella rajzolónak.

2. A VASÚTI PÁLYA MOZGÁSGEOMETRIÁJA

2.1. A mozgásgeometria feladat és módszere

A mozgásgeometriai vizsgálatok során, a vasúti pályán végbemenő mozgással, a mozgás és a pályageometria kapcsolatával, a mozgásnak megfelelő pályageometria kialakításával foglalkozunk.

A vasúti pályán a vasúti vágány tengelyvonalát értjük.

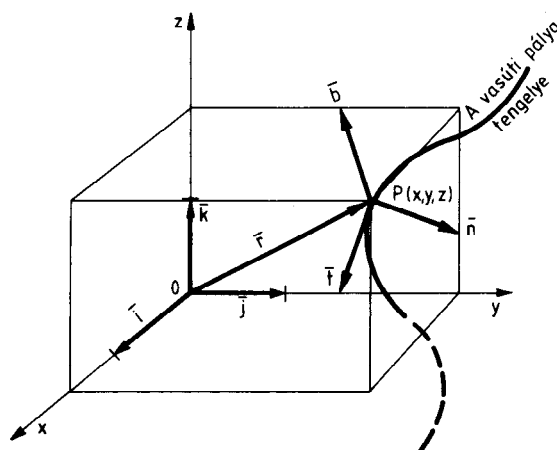
A vasúti pályának, mint térgörbének a vizsgálata során a differenciálgeometria ismereteit használjuk fel, amely az analízis módszereit alkalmazza a geometriában. Minthogy számításainkat elsősorban a differenciálszámítás felhasználásával végezzük, így az egyenletekben szereplő függvényekről feltételezzük, hogy folytonosak és a feladat jellegének megfelelően folytonosan differenciálhatók.

A vasúti pályát, mint térgörbét, a mozgást, mint a pályán a t időben lefolyó jelenséget vizsgálva a vasúti pálya pontjainak helyzetét az

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) \quad (2.1.)$$

vektor – skalár függvénnyel jellemezzük, ahol az \mathbf{r} helyvektor a rögzített O kezdőponttól (a vizsgálatunkban szereplő x, y, z koordináta-rendszer origójától) az adott $P(x,y,z)$ pontba mutat (2.1. ábra).

2.1. ábra: A vasúti pálya tengelyének helyzete az x, y, z térbeli koordináta-rendszerben



A helyvektor végpontja a t skaláris paraméter változása közben a pályát leíró térgörbén mozog. Minthogy a t paraméter skaláris változó, melynek valamennyi szóba jöhető értékéhez egy-egy vektort rendelünk, a vasúti pályán végbemenő pontmozgást az így értelmezett vektor – skalár függvény jellemzi. Legyenek az \mathbf{r} helyvektor derékszögű koordinátái x, y és z , a t időparaméter függvényei. Ez esetben a vasúti pályának, mint térgörbének a vektoregyenlete:

$$\mathbf{r} = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k} \quad (2.2.)$$

amely az (2.1.) vektorfüggvény koordinátás kifejezése. A vektoregyenletben \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} az x , y és z irányú egységvektorokat jelölik.

A vasúti pálya tengelyének skaláris egyenletrendszere:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t). \quad (2.3.)$$

A térbeli vonalvezetésű vasúti pálya geometriai elemeit a G görbület és a dG/dl görbületváltozás alapján definiáljuk. Megkülönböztetünk

- állandó görbületű és
- változó görbületű

pályaelemeket.

A vasúti pálya tengelye a valóságban térbeli vonalvezetésű, amelynek geometriai elemei

- az egyenesek,
- a körívek és
- az átmenetiívek.

Állandó görbületű pályaelem az *egyenes*, melynek görbülete definíció szerint zérus, és a körív, melynek görbülete a *körív* sugarának reciprok értéke. Változó görbületű pályaelem az *átmenetiív*, ahol a görbület az ívhossz függvényében változik.

A mozgás és a pályageometria közötti kapcsolat kifejezésére, a mozgás kinematikai jellemzésére a mozgás időbeli változását leíró mozgásjellemező vektorokat használjuk (\mathbf{v} sebességvektor, \mathbf{a} gyorsulásvektor, és \mathbf{h} gyorsulásváltozás-vektor).

A mozgásgeometriai vizsgálatoknál az általános mérnöki szemléletet vesszük alapul. Ennek megfelelően, egyrészt a megengedhető kinematikai igénybevételek (gyorsulás, gyorsulás-változás) ismeretében a vágánygeometria szerkezetét határozzuk meg, másrészt igénybevételeket számítunk és hasonlítunk össze megengedhető (ill. határ-) igénybevételekkel. Ezek alapján a mozgásgeometria feladatai:

- *geometriai méretezés:*

adott mozgásállapot és igénybevételi határok ismeretében a geometriai szerkezet megválasztása és méreteinek meghatározása;

- *adott pályageometria ellenőrzése:*

adott geometriájú és méretű meglevő pályaszakasz megfelelőségének a vizsgálata adott mozgásállapot és igénybevételi határok esetén;

- *különböző geometriák értékelő és összehasonlító vizsgálata:*

adott mozgásfeladatnál szóba jöhető geometriai szerkezetek közötti sorrendiség, optimálás megállapítása.

További vizsgálataink során a vasúti járművet — térgörbén mozgó — tömegpontnak tekintjük.

A vasúti pályán mozgó pont kinematikai vizsgálata során a mozgástörvénnyel, a kísértőtriéder és a mozgásjellemző vektorok (sebesség-, gyorsulás-, **h**-vektor, **m**-vektor) meghatározásával foglalkozunk.

2.2. A vasúti pályán mozgó pont mozgástörvénye

A térbeli vasúti pályán mozgó pont mozgástörvényét az

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) \quad (2.4.)$$

vektor-skalár függvény írja le. Koordinátás alakban

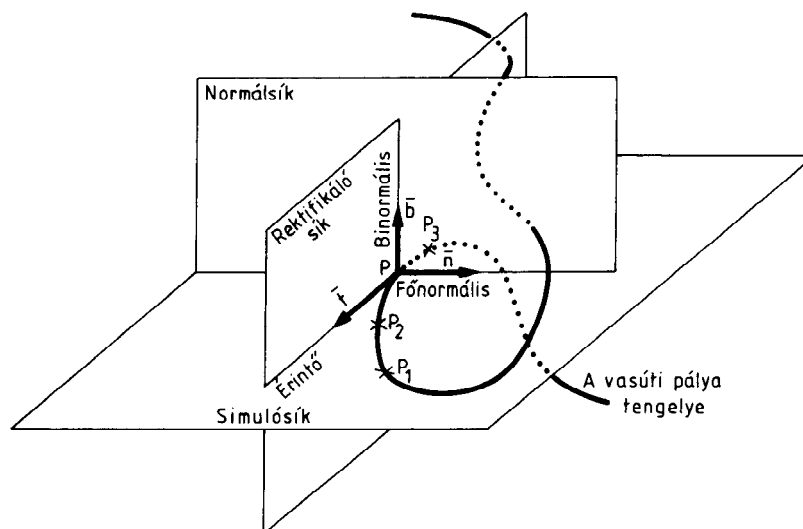
$$\mathbf{r} = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k} \quad (2.5.)$$

ahol

- x, y, z – az \mathbf{r} helyvektor koordinátái;
- $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ – az x, y, z irányú egységvektorok (korábbi 2.1. ábra).

A pont a térben három tetszőleges irányban mozdulhat el, így a koordinátákat meghatározó skaláris egyenletek száma, amely megegyezik a pontmozgás szabadságfokával, szintén három $[x(t), y(t), z(t)]$.

2.2. ábra: A simulósík és a kísértőtriéder



2.3. Kísértőtriéder

A mozgásgeometriai vizsgálatok során a mozgásjellemző vektorok meghatározásakor különleges jelentőségű az ún. kísértőtriéder szerepe. A kísértőtriédert három nevezetes irányú és páronként egymásra merőleges egységvektor határozza meg. Ezek az egységvektorok az érintőirányú \mathbf{t} , a főnormális irányú \mathbf{n} és a binormális irányú \mathbf{b} egységvektorok (ábra). A

térgörbe P pontjához tartozó érintő irányú egységvektor (\mathbf{t}) párhuzamos a pontbeli érintővel. A főnormális irányú egységvektor (\mathbf{n}) merőleges az érintőirányú egységvektorra és a térgörbe P pontbeli simulósíkjában fekszik — a pontbeli simulókör középpontja felé mutat. A binormális irányú egységvektor (\mathbf{b}) merőleges az érintőirányú és a főnormális irányú egységvektorokra, azokkal jobb sodrású rendszert alkot.

Az x , y , z koordináta-rendszerben a térgörbén mozgó ponttal a kísérőtriéder helyzete is változik (2.2. ábra).

2.4. A kinematikai mozgásjellemző vektorok

A vasúti pályán végbemenő mozgás kinematikai jellemzésére a mozgás időbeli változását leíró, a mozgás és a geometria kapcsolatát kifejező *mozgásjellemzőket* használjuk.

A térbeli vasúti pályán mozgó pont helyzetét az $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ helyvektor határozza meg, amelynek ismeretében a mozgás legfontosabb kinematikai jellemzői rendűségük sorrendjében:

- a sebességvektor jele \mathbf{v} , mértékegysége m/s;
- a gyorsulásvektor jele \mathbf{a} , mértékegysége m/s²;
- a harmadrendű vagy \mathbf{h} -vektor jele \mathbf{h} , mértékegysége m/s³.

2.4.1. A sebességvektor

A vasúti pályán történő mozgás fontos jellemzője a *sebesség*, amely vektoriális mennyiség. Jelölése \mathbf{v} , mértékegysége m/s, ill. a vasúti gyakorlatban V , km/h.

Matematikai képlete a

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t) \quad (2.6.)$$

elmozdulás vektor felhasználásával (2.3. ábra)

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}} \quad (2.7.)$$

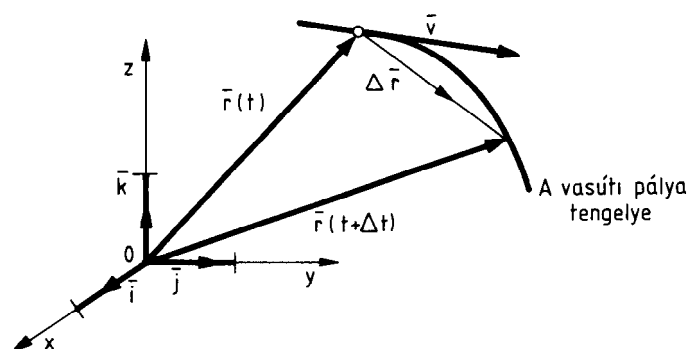
azaz, a sebességvektor a pályagörbét leíró vektor-skalár függvény idő szerinti első derivált vektora, amelyet a differenciálhányados határértékeként értelmezhetünk.

A pálya s ívhosszának helyettesítésével és a (2.7.) összefüggés felhasználásával

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \frac{ds}{dt} = \mathbf{t} |\mathbf{v}| = \mathbf{t} \left| \dot{\mathbf{r}} \right| \quad (2.8.)$$

E kifejezésből következik, hogy a sebességvektor érintőirányú, és nagyságát mint skaláris mennyiséget az út-idő függvény ismeretében az útnak az idő szerinti első differenciálhányadosa adja meg.

2.3. ábra: A sebességvektor értelmezése



Az \mathbf{r} helyvektor koordinátás alakjának (2.5.) ismeretében a sebességvektor derékszögű koordinátás képlete:

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k} \quad , \quad (2.9.)$$

ahol a sebesség-összetevők nagyságai

$$v_x = \dot{x}(t), \quad v_y = \dot{y}(t), \quad v_z = \dot{z}(t) \quad .$$

A sebességvektor nagysága

$$v = |\mathbf{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \quad . \quad (2.10.)$$

2.4.2. A gyorsulásvektor

A gyorsulás jelölése \mathbf{a} , mértékegysége m/s^2 . A mozgó pont gyorsulás vektorát az ábra és a (2.11.) összefüggés alapján határozhatjuk meg:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \ddot{\mathbf{r}} = \frac{d}{dt}(\dot{\mathbf{r}}) = \frac{dv}{dt}\mathbf{t} + v\frac{d\mathbf{t}}{dt} \quad . \quad (2.11.)$$

A gyorsulásvektor a sebességvektor idő szerinti első, ill. a helyvektor idő szerinti második derivált vektora. A gyorsulásvektor (2.11.)-beli összetevői egymásra merőlegesek, ugyanis $\mathbf{t}^2 = 1$ egyenlet deriválva

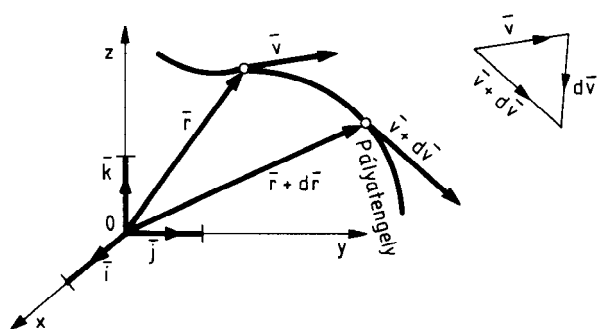
$$\mathbf{t} \frac{d\mathbf{t}}{dt} = 0 \quad (2.12.)$$

összefüggést kapjuk, amiből látható, hogy \mathbf{t} és $d\mathbf{t}/dt$ vektorok merőlegesek. Az egyik összetevő érintőirányú, a másik összetevő

$$v \frac{d\mathbf{t}}{dt} = v \frac{ds}{dt} \frac{d\mathbf{t}}{ds} = v^2 \frac{d\mathbf{t}}{ds} = v^2 G\mathbf{n} \quad (2.13.)$$

tehát *főnormális irányú*. Minthogy az érintő és a főnormális a görbe simulósíkját határozza meg, a gyorsulásvektor a pálya simulósíkjában fekszik.

2.4. ábra: A gyorsulásvektor értelmezése



A gyorsulásvektor

$$\mathbf{a} = \frac{dv}{dt} \mathbf{t} + v^2 G \mathbf{n} \quad \mathbf{n} = \mathbf{a}_t + \mathbf{a}_n \quad (2.14.)$$

képletében az érintőirányú (tangenciális) gyorsulás a sebesség nagyságának változását méri, és iránya dv előjelének megfelelő. Gyorsuló mozgásnál dv pozitív, így az érintőirányú gyorsulás iránya a sebességvektor irányával megegyező, lassuló mozgásnál azzal ellentétes.

A gyorsulásvektor normális irányú összetevője, a normális gyorsulás a sebességvektor irányának változását méri. Minthogy főnormális irányú — függetlenül a sebességvektor irányától —, mindenkor a görbületi középpont felé mutat (az \mathbf{n} egységvektor irányával megegyezően), ezért *centripetális gyorsulásnak* is nevezzük.

Az előzőekből következik, hogy a gyorsulásvektor a simulósíkokban mindenkor az érintőnek azon az oldalán fekszik, amelyiken a pálya is található. Inflexiós pontban, ahol az érintő metszi a mozgó pont pályáját, csak érintőirányú gyorsulás ébred, ugyanis $G = 0$, a normális gyorsulás zérus. Látható továbbá, hogy zérus *csak az egyenes pályán mozgó pont gyorsulása lehet*, minthogy íves pályán mindenkor ébred a sebességvektor irányának változásából normális gyorsulás.

Az \mathbf{r} helyvektor koordinátás alakjának (2.2.) ismeretében a gyorsulásvektor

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \ddot{\mathbf{r}} = \ddot{x} \mathbf{i} + \ddot{y} \mathbf{j} + \ddot{z} \mathbf{k} \quad (2.15.)$$

és a koordinátatengelyek egyenesébe eső összetevőinek nagyságai

$$a_x = \ddot{x}(t), \quad a_y = \ddot{y}(t), \quad a_z = \ddot{z}(t). \quad (2.16.)$$

A gyorsulásvektor nagysága

$$a = |\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \quad (2.17.)$$

A szabad oldalgyorsulás megengedhető legnagyobb értéke az Országos Közforgalmú Vasutak Pályatervezési Szabályzata alapján

$$a_{0,max} = 0,65 \text{ m/s}^2. \quad (2.18.)$$

2.4.3. A **h** vektor

A *harmadrendű mozgásjellemző* vagy **h**-vektor jelölése **h**, mértékegysége m/s³. A **h**-vektor a gyorsulásváltozásról ad pontos képet, ezért a (2.11.) összefüggés felhasználásával

$$\mathbf{h} = \frac{d\mathbf{a}}{dt} = \ddot{\mathbf{r}} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dv}{dt} \mathbf{t} + v \frac{d\mathbf{t}}{dt} \right) = \frac{d^2v}{dt^2} \mathbf{t} + 2 \frac{dv}{dt} \frac{d\mathbf{t}}{dt} + v \frac{d^2\mathbf{t}}{dt^2} \quad (2.19.)$$

tehát a harmadrendű **h** vektor a gyorsulásvektor idő szerinti első, a helyvektor szerinti harmadik derivált vektora.

A (2.19.) képletben

$$— \frac{dv}{dt} = a_t \quad [\text{m/s}^2], \quad (2.20.)$$

$$— \frac{d^2v}{dt^2} = \frac{da_t}{dt} \quad [\text{m/s}^3], \quad (2.21.)$$

$$— \frac{d\mathbf{t}}{dt} = vG\mathbf{n} \quad [\text{s}^{-1}] — \text{a (2.13.) szerint} — \quad (2.22.)$$

$$— \frac{d^2\mathbf{t}}{dt^2} = \frac{d}{dt}(vG\mathbf{n}) = \frac{dv}{dt}G\mathbf{n} + v \left(\frac{dG}{dt} + G \frac{d\mathbf{n}}{dt} \right), \quad (2.23.)$$

ahol

dG/dt a görbület idő szerinti deriváltja;

$d\mathbf{n}/dt$ az **n** egységvektor idő szerinti deriváltja.

A további levezetések mellőzésével a **h**-vektor képlete:

$$\mathbf{h} = \left(\frac{da_t}{dt} - v^3 G^2 \right) \mathbf{t} + \left(3va_t G + v^2 \frac{dG}{dt} \right) \mathbf{n} + v^3 GT\mathbf{b}, \quad (2.24.)$$

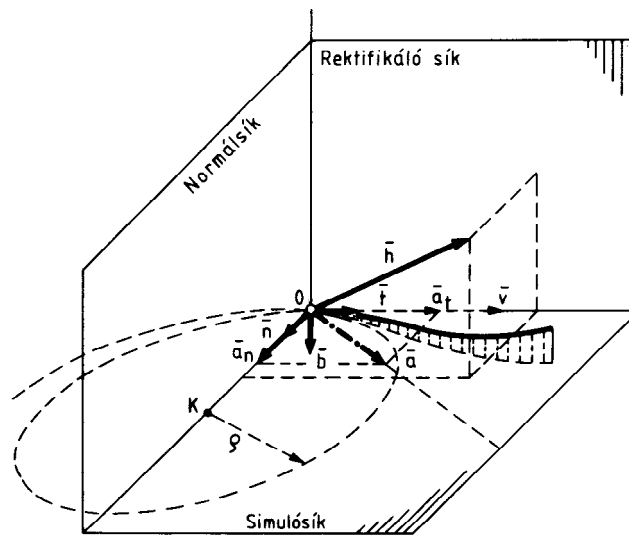
ahol

v	$[\text{m/s}]$	– a sebesség nagysága,
a_t	$[\text{m/s}^2]$	– az érintőirányú gyorsulás nagysága,
G	$[\text{m}^{-1}]$	– a pályagörbület,
T	$[\text{m}^{-1}]$	– a pályatorzió,
dG/dt	$[\text{m}^{-1}\cdot\text{s}^{-1}]$	– a pályagörbület idő szerinti deriváltja.

A (2.24.) képletből láthatjuk, hogy a **h** vektor térbeli pálya esetén kilép a pálya simulósíkjából, három derékszögű összetevőből áll, az összetevők nagyságai öt kifejezésből számíthatók, amelyek a sebességnek, a gyorsulásnak, a gyorsulás időszerinti deriváltjának, a görbületnek, a görbület idő szerinti deriváltjának és a torziónak meghatározott függvényei. A **h**-vektor (2.24.) képletéből következik:

- a **h**-vektor állandó sebességű vagy gyorsuló mozgásnál a pálya rektifikáló síkjától (az érintő és binormális által meghatározott síktól) a görbületi középpont felé hajlik (a **h**-vektor, a gyorsulásvektor és a sebességvektor térbeli elhelyezkedését szemléltető 2.5. ábra);
- az egyenes pályán állandó sebességgel, ill. gyorsulással mozgó pont esetében a **h**-vektor nagysága mindenkor zérus.

2.5. ábra: A \mathbf{h} -vektor, a gyorsulásvektor és a sebességvektor térbeli elhelyezkedése



Az \mathbf{r} helyvektor (2.2.) koordinátás alakjának felhasználásával a \mathbf{h} vektor képlete

$$\mathbf{h} = \frac{d\mathbf{a}}{dt} = \ddot{\mathbf{r}} = \ddot{x} \mathbf{i} + \ddot{y} \mathbf{j} + \ddot{z} \mathbf{k} \quad (2.25.)$$

a koordinátatengelyek egyenesébe eső összetevőinek nagyságai

$$h_x = \ddot{x}(t), \quad h_y = \ddot{y}(t), \quad h_z = \ddot{z}(t). \quad (2.26.)$$

A \mathbf{h} vektor nagysága

$$h = |\mathbf{h}| = \sqrt{h_x^2 + h_y^2 + h_z^2}. \quad (2.27.)$$

A \mathbf{h} -vektor megengedett nagyságának megállapításakor figyelembe vesszük az elvégzett elméleti vizsgálatok és mérések eredményeit, továbbá a különböző országok vasútjainál érvényes előírásokat. Ezek alapján a geometriai vizsgálatok és számítások során a \mathbf{h} -vektor megengedhető nagyságát az Országos Közforgalmú Vasutak Pályatervezési Szabályzata alapján a 2.1. táblázat foglalja össze.

2.1. táblázat: Az Országos Közforgalmú Vasutak Pályatervezési Szabályzata alapján a \mathbf{h} vektor megengedhető legnagyobb értéke

Körív csatlakozási módja	\mathbf{h}_{\max} m/s ³
Koszinusz átmenetiívvel kialakított körív	0,4
Klotoid átmenetiívvel kialakított körív	0,3
Körív és egyenes érintőleges csatlakoztatása, ha a csatlakozó pályaszakaszon koszinusz átmenetiíves körívek vannak	0,4
Körív és egyenes érintőleges csatlakoztatása, ha a csatlakozó pályaszakaszon klotoid átmenetiíves körívek vannak	0,3

A 2.1. táblázat kiegészítéseként megjegyzendő, hogy körív és egyenes érintőleges csatlakoztatásakor — az átmenetiív elhagyásakor — a \mathbf{h} vektor kinematikai szempontból javasolt legnagyobb értéke:

$$\mathbf{h}_{\max} = 0,2 \text{ m/s}^3. \quad (2.28.)$$

2.5. A mozgásjellező mennyiségek gyakorlati meghatározása

2.5.1. Az oldalgyorsulás meghatározása

A gyorsulásvektor szerinti vizsgálat (gyorsulásszemlélet) alapja az íves pályán fellépő centripetális (ill. ellentétje a centrifugális) gyorsulás számítása. Az oldalgyorsulás túlemelés nélküli körívben:

$$|a_n| = Gv^2 = \frac{v^2}{R} = \frac{V^2}{3,6^2 \cdot R} \quad [\text{m/s}^2], \quad (2.29.)$$

túlemelt körívben:

$$a_0 = \frac{V^2}{3,6^2 \cdot R} - \frac{m}{153} \quad [\text{m/s}^2], \quad (2.30.)$$

amely $v = \text{áll.}$ mozgásállapot esetén ($|a_n| = 0$) egyben az oldalgyorsulás nagyságát is jelenti ($|a_n| = |a|$), továbbá:

$ a_n $ [m/s ²]	– a gyorsulás vektor normális irányú komponensének nagysága,
a_0 [m/s ²]	– szabad oldalgyorsulás nagysága,
v [m/s]	– sebesség,
V [km/h]	– sebesség,
G [m ⁻¹]	– görbület,
R [m]	– görbületi sugár,
m [mm]	– túlemelés.

2.5.2. A gyorsulás-változás (**h**-vektor) közelítő értékének meghatározása

A **h** vektor alapján történő vizsgálatnál (**h** vektor szemlélet) a gyorsulásszemlélet $v = \text{áll.}$ feltételezésből kiindulva, íves pályán végbemenő mozgásnál a pályatorzió hatásának elhanyagolásával a **h** vektor nagysága

$$|h| = \sqrt{(v^3 G^2)^2 + \left(v^2 \frac{dG}{dt}\right)^2} \quad [\text{m/s}^3]. \quad (2.31.)$$

Gyakorlati megfontolásból a $G = f(l)$ pályafüggvény bevezetésével

$$\frac{dG}{dt} = \frac{dG}{dl} \frac{dl}{dt} = \frac{dG}{dl} v,$$

a **h** vektor közelítő nagysága

$$|h| = v^3 \sqrt{G^4 + \left(\frac{dG}{dl}\right)^2} \approx \frac{V^3}{3,6^3} \frac{dG}{dl} \quad [\text{m/s}^3], \quad (2.32.)$$

minthogy $G^4 \rightarrow 0$. A (2.32.) képletben V a sebesség km/h-ban van értelmezve, és dG/dl az íves pálya görbület függvényének ívhossz szerinti deriváltja.

A **h** vektor közelítő nagysága átmenetiíves pályán.

A vizsgált átmenetiívek dG/dl függvényének maximuma

$$\left(\frac{dG}{dl}\right)_{\max} = \frac{\alpha}{RL} \quad [\text{m}^{-2}] \quad (2.33.)$$

nagyságú, ahol:

- R [m] - az átmenetiívhez csatlakozó körívsugár, m;
- L [m] - az átmenetiív hossza, m.

Az α nagysága folytonos, törés nélküli görbületfüggvények esetében:

- koszinusz-átmenetiívnél $\pi/2 = 1,57$,
- (klotoid-átmenetiív esetén az átmenetiív- eleje – és az átmenetiív-végpontokban a görbületfüggvény töréses, a dG/dl derivált függvény nincs értelmezve).

A (2.32.) és (2.33.) egybevetésével a **h** vektor közelítő nagysága az átmenetiív mértékadó pontjában

$$|h| = \frac{\alpha V^3}{3,6^3 RL} \quad [\text{m/s}^3], \quad (2.34.)$$

A **h** vektor közelítő nagysága egyenes és körív közvetlen csatlakozásánál

A **h** vektor közelítő nagysága (2.32.) alapján:

$$|h| = \frac{V^3}{3,6^3} \frac{dG}{dl} \approx \frac{V^3}{3,6^3} \frac{\Delta G}{\Delta l} = \frac{V^3}{3,6^3} \frac{1}{Rd} \quad [\text{m/s}^3], \quad (2.35.)$$

ahol:

- V [km/h] - a sebesség,
- R [m] - a körív sugara,
- d [m] - a görbületváltozást érzékelő hossz (négytengelyű járműnél a forgócsaptávolság, két- tengelyű járműnél a tengelytávolság; számításainkban $d = 17$ m).

3. ÁTMENETIÍVEK GEOMETRIÁJA

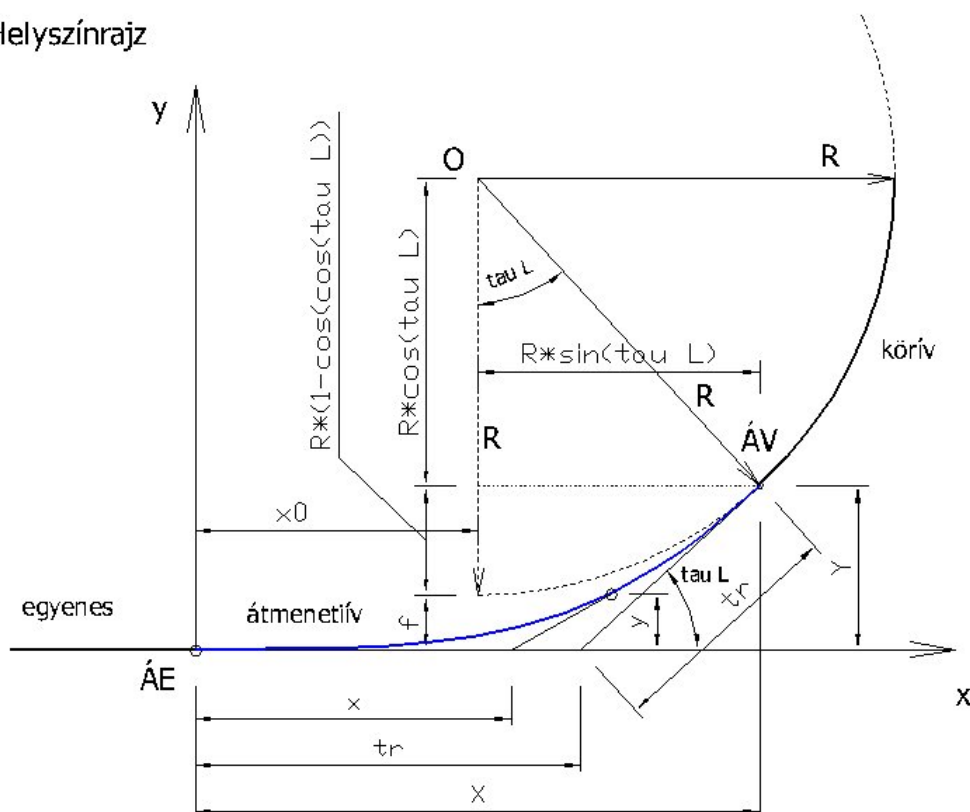
3.1. Az átmeneti ív geometriai kialakítása

Két eltérő, állandó görbületű pályaszakasz csatlakozásánál a gyorsulás, ill. a harmadrendű jellemző ugrásszerű változásának kiküszöbölése végett az eltérő görbületű ívek egy, a pálya síkjában fekvő és fokozatos görbületváltozást biztosító *közbenső görbületátmenettel*, az ún. *átmenetiívvel* kötjük össze.

Az átmenetiív általános geometriáját egyenes és körív között a **3.1. ábra** tünteti fel.

3.1. ábra: Az átmenetiív általános geometriája egyenes és körív között

Helyszínrajz



Az átmeneti ív eleje ($\acute{A}E$) a zérus (esetleg a kisebb) görbületű, az átmenetiív vége ($\acute{A}V$) mindenkor a nagyobb görbületű vágánytengely-pont.

Az átmenetiív geometriáját a görbületváltozás függvénye determinálja.

A görbületváltozás

$$G = f(l) \quad (3.1.)$$

függvényének ismeretében az átmenetiív kitzéséhez szükséges adatokat a következők szerint számítjuk.

Először meghatározzuk az átmenetiív érintő-(vagy középponti) szögét, mint az ívhossz függvényét:

$$\tau_1 = \int_0^{\tau} d\tau = \int_0^l G_l dl, \quad (3.2.)$$

ahol $G = f(l)$ – a vizsgált átmenetiív görbületfüggvénye.

A $\tau_1 = f(l)$ függvény felhasználásával a derékszögű kitűzési koordináták ívhosszparaméteres egyenletrendszere:

$$x = \int_0^x dx = \int_0^l \cos \tau_l dl \quad (3.3.)$$

és

$$y = \int_0^y dy = \int_0^l \sin \tau_l dl. \quad (3.4.)$$

Ezek az összefüggések alapintegrálokkal közvetlenül nem számíthatók ki, a derékszögű kitűzési koordináták numerikus meghatározásához az integrálnak véges összeggel való közelítésén alapuló sorba fejtés, ill. a *Simpson*-féle parabolaképletet használjuk fel. A *Simpson*-féle parabolaképlet alkalmazásakor a $[0, l]$ integrációs intervallumot páros $(2n)$ számú egyenlő részre felosztjuk, a kapott részintervallum hossza h . A derékszögű koordinátákat ezután a következőképpen számítjuk:

$$x = \int_0^l \cos \tau_l dl \approx \frac{h}{3} \{ \cos \tau_0 + \cos \tau_{2n} + 4(\cos \tau_1 + \cos \tau_3 + \dots + \cos \tau_{2n-1}) + 2(\cos \tau_2 + \cos \tau_4 + \dots + \cos \tau_{2n-2}) \} \quad (3.5.),$$

$$y = \int_0^l \sin \tau_l dl \approx \frac{h}{3} \{ \sin \tau_0 + \sin \tau_{2n} + 4(\sin \tau_1 + \sin \tau_3 + \dots + \sin \tau_{2n-1}) + 2(\sin \tau_2 + \sin \tau_4 + \dots + \sin \tau_{2n-2}) \} \quad (3.6.).$$

A $\sin \tau_l$ és a $\cos \tau_l$ függvény hatványsorának felhasználásával az átmenetiív derékszögű koordinátái

$$x = \int_0^l \cos \tau_l dl = \int_0^l \left(1 - \frac{\tau_l^2}{2!} + \frac{\tau_l^4}{4!} - \dots \right) dl \quad (3.7.)$$

és

$$y = \int_0^l \sin \tau_l dl = \int_0^l \left(\tau - \frac{\tau_l^3}{3!} + \frac{\tau_l^5}{5!} - \dots \right) dl. \quad (3.8.)$$

Polárkoordináták alkalmazása esetén (ill. a kerületi szögek számításánál) a derékszögű koordináták ismeretében a

$$\sigma = \arctg \frac{y}{x} \quad (3.9.)$$

és

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (3.10.)$$

összefüggést használjuk fel.

Az átmenetiív közelítő $y = f(x)$ alakú függvényét kapjuk, ha a sorba fejtésnél csak a hatványsorok első tagjait vesszük figyelembe. Ekkor a (3.7.) és (3.8.) összefüggésekből

$$x \approx l \quad (3.11.)$$

és

$$y = \int_0^x \tau_x dx. \quad (3.12.)$$

Az $x \approx l$ közelítéssel elkövetett geometriai hibák:

- az ívhossz helyett a kisebb értékű vetületével számolunk, ezért az $\acute{A}V$ pontban kisebb görbületű (nagyobb görbületi sugarú) a csatlakozás.
- A körívet helyettesítő másodfokú parabola miatt (az f köríveltolás számítása során) az $\acute{A}V$ pontban ordináta különbség jelentkezik.

Az átmenetiív kitűzésénél használatos jelöléseket az ábra tünteti fel.

Ennek figyelembevételével az egyes kitűzési adatok pontos értékei:

A köríveltolás nagysága

$$f = Y - (R - R \cos \tau_L) \quad (3.13.)$$

és abszcisszája

$$x_0 = X - R \sin \tau. \quad (3.14.)$$

A körív másodfokú parabolával való helyettesítésénél a köríveltolás közelítő értéke

$$f_{köz} = Y - \frac{L^2}{8R}. \quad (3.15.)$$

A t metsszék értéke

$$t = Y \cdot ctg \tau_L, \quad (3.16.)$$

továbbá az ún. hosszú ill. rövid tangeshossz értéke

$$t_h = X - t, \quad (3.17.)$$

és

$$t_r = Y \frac{1}{\sin \tau_L}. \quad (3.18.)$$

A különböző görbületátmeneti geometriák közül az átmenetiívek meghatározása során

- a koszinusz és
- a lineáris

görbületátmenetekkel foglalkozunk, mint az elmélet, ill. a gyakorlat szempontjából szóba jövő legfontosabb megoldásokkal.

Tárgyalásunk során megkülönböztetett figyelemben részesítjük a mozgásgeometriailag lényegesen kedvezőbb tulajdonságú folytonos, törés nélkül görbületátmeneteket, ezek közül is kiemelve a *koszinuszgeometriát*, amelynek a mozgásgeometriai vizsgálatok eredményei alapján egyértelműen a legkedvezőbbek a kinematikai és geometriai tulajdonságai.

A folytonos, törés nélkül görbületátmenetekhez képest mozgásgeometriailag lényegesen kedvezőtlenebb a lineáris görbületváltozású *klotoid-átmenetiív*, minthogy az átmenet elején és végén a görbületfüggvény csatlakozása töréses.

Az egyes geometriák vizsgálatánál *egységes szemléletben* tárgyaljuk

- az egyenes és köríves pályaszakasz közötti,
- a koszarívek esetén, továbbá
- az elleníves megoldásnál

alkalmazott átmenetiíveket, valamennyi esetben az átmenetiívet önálló geometriának tekintve.

3.2. Átmenetiív geometria egyenes és körív között

Az egyenes és köríves pályaszakasz közötti koszinusz-, és klotoid átmenetiív geometriai meghatározását, ill. az átmenetiív kitűzéséhez szükséges ismereteket a **3.2. ábra** alapján tárgyaljuk.

Az egyenes és köríves pályaszakaszok között kinematikai szempontból szükséges átmenetiív hosszakat, koszinusz átmenetiív esetén a **Függelék 1.a.**, klotoid átmenetiív esetén a **1.b.** táblázata tartalmazza.

3.2.1. Koszinusz-átmenetiív egyenes és körív között

Egyenes és köríves pályaszakaszok közötti koszinusz átmenetiív esetén, az átmenetiív görbület függvénye

$$G_l = \frac{1}{2R} \left(1 - \cos \frac{\pi}{l} \right) \quad (3.19.)$$

Az érintőszögfüggvény

$$\tau_l = \int_0^l G_l = \frac{1}{2R} \left(l - \frac{L}{\pi} \sin \frac{\pi}{L} l \right) . \quad (3.20.)$$

Az átmenetiív végpontjában ($l = L$) az érintő hajlása

$$\tau_L = \frac{L}{2R} . \quad (3.21.)$$

Helyszínrajz

Görbületi ábra koszinusz átmenetiív esetén

Görbületi ábra klotoid átmenetiív esetén

$$x = \int_0^l \cos \tau_l dl \approx l \left(1 - \frac{L^2}{16\pi^2 R^2} \right) - \frac{l^3}{24R^2} + \frac{L^3 \sin \frac{\pi}{L} l}{4\pi^3 R^2} + \frac{L^3 \sin \frac{2\pi}{L} l}{32\pi^3 R^2} - \frac{L^2 l \cos \frac{\pi}{L} l}{4\pi^2 R^2} \text{ m}; \quad (3.22.)$$

$$\begin{aligned}
y = \int_0^l \sin \tau_l dl \approx & -\frac{137L^2}{1152\pi^4 R^3} - \frac{L^2}{2\pi^2 R} + \frac{l^2}{2R} \left(1 - \frac{L^2}{16\pi^2 R^2} \right) - \frac{l^4}{192R^3} + \\
& + \frac{L^2 \cos \frac{\pi}{L} l}{2\pi^2 R} \left(1 + \frac{5L^2}{24\pi^2 R^2} - \frac{l^2}{8R^2} \right) + \frac{L^4 \cos \frac{2\pi}{L} l}{118\pi^4 R^3} + \frac{lL^3 \cos \frac{\pi}{L} l}{8\pi^3 R^3} + \\
& + \frac{lL^3 \cos \frac{2\pi}{L} l}{64\pi^3 R^3} + \frac{L^4 \cos^3 \left(\frac{\pi}{L} l \right)}{144\pi^4 R^3}
\end{aligned} \quad \text{m.} \quad (3.23.)$$

Az átmenetiív végpont-koordinátái a (3.22.) és (3.23.) képlet felhasználásával

$$X = L \left(1 - 0,02267 \frac{L^2}{R^2} \right) \quad \text{m}, \quad (3.24.)$$

$$Y = L^2 \left(\frac{0,14868}{R} - 0,00274 \frac{L^2}{R^3} \right) \quad \text{m}. \quad (3.25.)$$

Az átmenetiív kitűzéséhez szükséges további adatok az ábra jelöléseivel:

$$\tau_L = \frac{L}{2R}; \quad (3.26.)$$

$$f = Y - (R - R \cos \tau_L) \quad \text{m}, \quad (3.27.)$$

$$x_0 = X - R \sin \tau_L \quad \text{m}, \quad (3.28.)$$

$$t = Y \operatorname{ctg} \tau_L \quad \text{m}, \quad (3.29.)$$

$$t_h = X - t \quad \text{m}, \quad (3.30.)$$

$$t_r = Y \frac{1}{\sin \tau_L} \quad \text{m}. \quad (3.31.)$$

Az átmenetiív közelítő kitűzési képletei az $x \approx l$ feltétel esetén:

$$y = \int_0^x \tau_x dx = \frac{x^2}{4R} - \frac{L^2}{2\pi^2 R} \left(1 - \cos \frac{\pi}{L} x \right) \quad \text{m}. \quad (3.32.)$$

$$Y = \frac{L^2}{R} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{\pi^2} \right) \approx 0,149 \frac{L^2}{R} \quad \text{m}. \quad (3.33.)$$

$$f = \frac{\pi^2 - 8}{8\pi^2} \frac{L^2}{R} = \frac{L^2}{42,23R} \quad \text{m}. \quad (3.34.)$$

3.2.2. Klotoid-átmenetiív egyenes és körív között

Lineáris görbületátmenetnél a görbület egyenesen arányos az átmenet geometriai kezdőpontjától mért ívhosszal, a kiadódó átmenetiív matematikai definíció szerint *klotoidgörbe*, amelyet gyakran *Euler-ívnek* vagy *Cornu-féle spirálisnak* is neveznek.

A klotoid-átmenetiív általános görbületfüggvénye

Az átmenetiív görbületfüggvénye

$$G_l = \frac{l}{RL} \quad \text{m}^{-1} \quad (3.35.)$$

Az érintőszögfüggvény

$$\tau_l = \int_0^l G_l dl = \frac{l^2}{2RL}. \quad (3.36.)$$

Az érintő hajlása az átmenetiív végén ($l = L$)

$$\tau_l = \frac{l}{2R}. \quad (3.37.)$$

Az átmenetiív ívhosszparaméteres egyenletrendszere a **3.2. ábrán** feltüntetett (x,y) koordináta-rendszerben a kitűzési pontosság miatt a hatványsor első két tagjának figyelembevételével

$$x = \int_0^l \cos \tau_l dl \approx l - \frac{l^5}{40C^2} + \frac{l^9}{3456C^4} - \frac{l^3}{599040C^6} + \dots \quad \text{m} \quad (3.38.)$$

és

$$y = \int_0^l \sin \tau_l dl \approx \frac{l^3}{6C} - \frac{l^7}{336C^3} + \frac{l^{11}}{42240C^5} - \frac{l^{15}}{9676800C^7} + \dots \quad \text{m} \quad (3.39.)$$

ahol

$C = R \cdot L$ a klotoid állandója, $[\text{m}^2]$.

A klotoid-átmenetiív *közelítő* $y = f(x)$ alakú függvénye ($x \approx l$)

$$y = \int_0^x \tau_x dx = \int_0^x \frac{x^2}{2RL} dx = \frac{x^3}{6RL} \quad \text{m}, \quad (3.40.)$$

azaz *harmadfokú parabola*.

Az átmenetiív végpontjának közelítő ordinátája

$$Y = \frac{L^2}{6R} = 0,16 \frac{L^2}{R} \quad \text{m}. \quad (3.41.)$$

A kitűzés szempontjából fontos ún. köríveltolás közelítő értéke

$$f = Y - \frac{(L/2)^2}{2R} = \frac{L^2}{24R} \quad \text{m.} \quad (3.42.)$$

3.3. Átmenetiív geometria azonos görbületű ívek között

Az azonos görbületű körívek közötti (kosárívek esetén) koszinusz-, és klotoid átmenetiív geometria, görbületi viszonyok, valamint az ezek meghatározásához, ill. az átmenetiív kitűzéséhez szükséges jelölések a **3.3. ábrán** vannak feltüntetve.

Az azonos görbületű körívek között kinematikai szempontból szükséges átmenetiív hosszakat, koszinusz átmenetiív esetén a **Függelék 2.a.**, klotoid átmenetiív esetén a **2.b.** táblázata tartalmazza.

3.3.1. Koszinusz-átmenetiív azonos görbületű körívek között

Az átmenetiív geometriáját az egyenes és a körív közötti átmenetivnél megismertekhez hasonlóan az egység koszinusz-alapgeometria felhasználásával számítjuk. Az átmenetiív geometriáját meghatározó görbületfüggvény:

$$G_l = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{2R_0} \left(1 - \cos \frac{\pi l}{L} \right) \quad \text{m}^{-1} \quad (3.43.)$$

ahol

$$R_0 = R_1 R_2 / (R_1 - R_2) \quad \text{m}, \quad (3.44.)$$

R_1 és R_2 a kosárív köríveinek sugara ($R_1 > R_2$), m.

Az azonos görbületű körívek közötti koszinusz-átmenetiív érintőszögfüggvénye

$$\tau_1 = \int_0^l G dl = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{2R_0} \left(l - \frac{L}{\pi} \sin \frac{\pi l}{L} \right). \quad (3.45.)$$

Az érintő hajlása az átmenetiív végén ($l = L$):

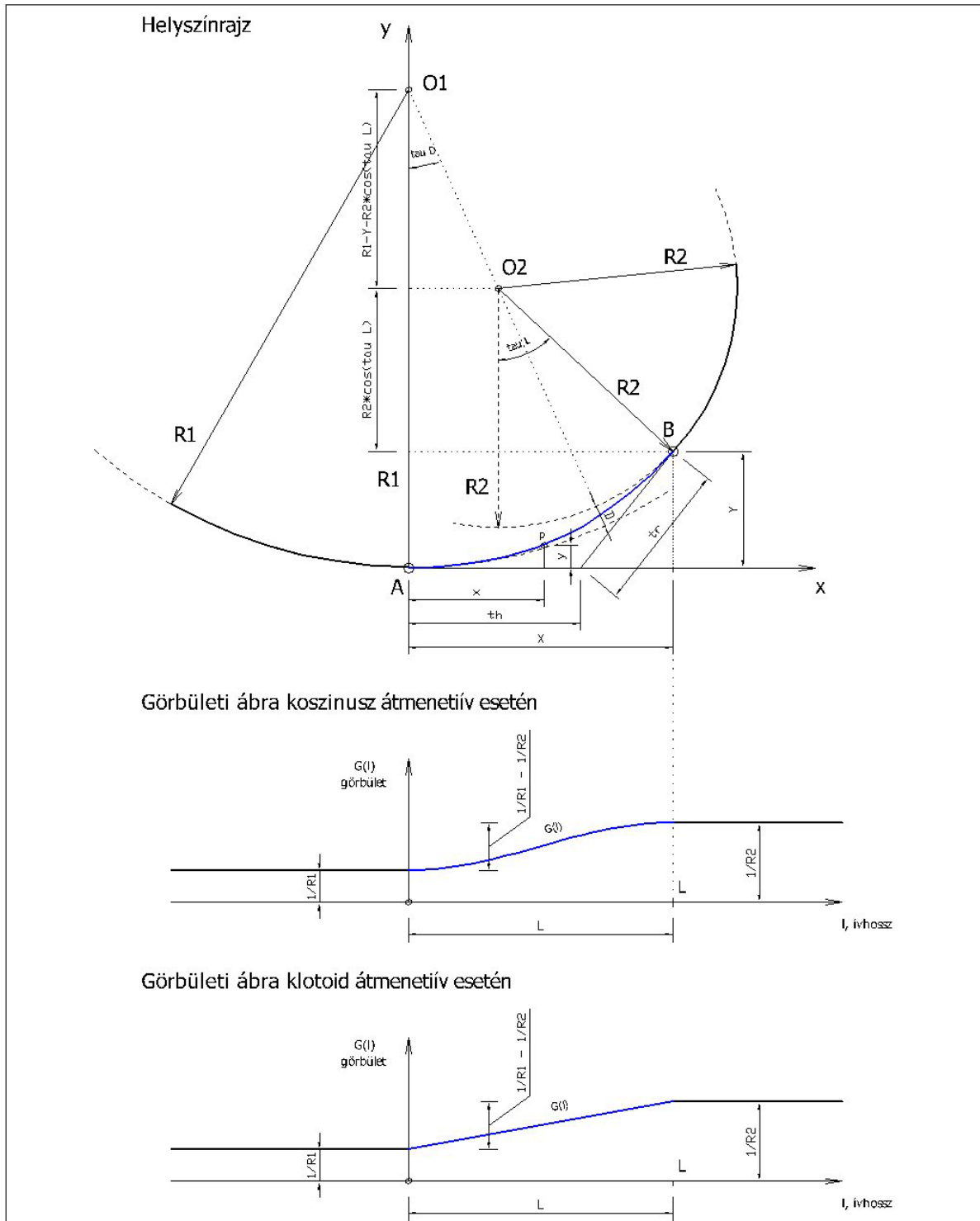
$$\tau_L = \frac{L}{R_1} + \frac{L}{2R_0} = \frac{L}{2} \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}. \quad (3.46.)$$

Az átmenetiív kitűzéséhez az ábrán feltüntetett a (x,y) derékszögű koordináta-rendszert használjuk, az átmenetiív geometriai kezdőpontja a helyi koordináta-rendszer origója. Az azonos görbületű körívek között koszinusz-átmenetiív tehát önálló geometriának tekintjük a korábbi gyakorlattól eltérően, és nem egy alapgeometria közbenső szakaszának.

A kitűzéshez szükséges derékszögű koordináták ívhossz paraméteres egyenletrendszere a hatványsor első két tagjának figyelembevételével

$$x = \int_0^l \cos \tau_i dl \approx l \left(1 - \frac{L^2}{16\pi^2 R_0^2} \right) - l^3 \left(\frac{1}{6R_1^2} + \frac{1}{6R_1 R_0} + \frac{1}{24R_0^2} \right) + \left(\frac{L^3}{2\pi^3 R_1 R_0} + \frac{L^3}{4\pi^3 R_0^2} \right) \sin \frac{\pi}{L} l - \left(\frac{L^2}{2\pi^2 R_1 R_0} + \frac{L^2}{4\pi^2 R_0^2} \right) l \cos \frac{\pi}{L} l + \frac{L^3}{32\pi^3 R_0^2} \sin \frac{2\pi}{L} l \quad [\text{m}] \quad (3.47.)$$

3.3. ábra: Azonos görbületű körívek közötti (kosárívek esetén) koszinusz-, és klotoid átmenetiív geometria és görbületi viszonyok



$$\begin{aligned}
y = \int_0^l \sin \tau_l dl \approx & -\frac{L^2}{2\pi^2 R_0} - \frac{L^4}{2\pi^4 R_1^2 R_0} - \frac{33L^4}{64\pi^4 R_1 R_0^2} - \frac{137L^4}{1152\pi^4 R_0^3} + \\
& + l^2 \left(\frac{1}{2R_1} + \frac{1}{4R_0} - \frac{L^2}{32\pi^2 R_1 R_0^2} - \frac{L^2}{64\pi^2 R_0^3} \right) - \\
& - l^4 \left(\frac{1}{24R_1^3} + \frac{1}{16R_1^2 R_0} + \frac{1}{32R_1 R_0^2} + \frac{1}{192R_0^3} \right) + \left(\frac{L^3}{2\pi^3 R_1^2 R_0} + \frac{L^3}{2\pi^3 R_1 R_0^2} + \frac{L^3}{8\pi^3 R_0^3} \right) l \sin \frac{\pi}{L} l + \\
& + \left(\frac{L^2}{2\pi^2 R_0} + \frac{L^4}{2\pi^4 R_1^2 R_0} + \frac{L^4}{2\pi^4 R_1 R_0^2} + \frac{5L^4}{48\pi^4 R_0^3} - \frac{l^2 L^2}{4\pi^2 R_1^2 R_0} - \frac{l^2 L^2}{4\pi^2 R_1 R_0^2} - \frac{l^2 L^2}{16\pi^2 R_0^3} \right) \cos \frac{\pi}{L} l + \\
& + \left(\frac{L^3}{32\pi^3 R_1 R_0^2} + \frac{L^3}{64\pi^3 R_0^3} \right) l \sin \frac{2\pi}{L} l + \left(\frac{L^4}{64\pi^4 R_1 R_0^2} + \frac{L^4}{128\pi^4 R_0^3} \right) \cos \frac{2\pi}{L} l + \\
& + \frac{L^4}{144\pi^4 R_0^3} \cos^3 \left(\frac{\pi}{L} l \right) \quad [\text{m}]
\end{aligned} \tag{3.48.}$$

Az átmenetiív végpont-koordinátái a (3.47.) és (3.48.) képlet felhasználásával:

$$X = L - L^3 \left(\frac{1}{6R_1^2} + \frac{0,02267}{R_0^2} - \frac{0,11601}{R_0 R_1} \right) \quad [\text{m}], \tag{3.49.}$$

$$Y = L^2 \left(\frac{0,14868}{R_0} + \frac{1}{2R_1} \right) - L^2 \left(\frac{1}{24R_1^3} + \frac{0,00274}{R_0^3} + \frac{0,01935}{R_1 R_0^2} + \frac{0,04744}{R_1^2 R_0} \right) \quad [\text{m}] \tag{3.50.}$$

Az azonos görbületű körívek közötti átmenetiív *gyakorlati kitűzésénél két eset fordulhat elő.*

A. eset: Adott a kosáriveret alkotó két körív helyzete (az ábrán az O_1 és O_2 pont koordinátái), és keressük ezen adottságok kielégítő L átmenetiív adatait. A kiadódó közbelső koszinusz-átmenetiív hosszának jó közelítő értéke az érintőszög alapján

$$L \approx \sqrt{42,23 R_0 D} \quad \text{m}, \tag{3.51.}$$

ahol

$$D = R_1 - R_2 - \overline{O_1 O_2} \quad \text{m}. \tag{3.52.}$$

E feladat gyakorlati megoldásánál az átmenetiív hossza természetesen nem lehet kisebb, mint a \mathbf{h} vektor alapján meghatározott legkisebb ívhossz.

B. eset: Adott L átmenetiív esetén keressük az R_2 sugarú körív helyzetét az R_1 sugarú körívhez képest, tehát a D távolságot:

$$D = R_1 - R_2 - \sqrt{(X - R_2 \sin \tau_L)^2 + (R_1 - Y - R_2 \cos \tau_L)^2} \quad \text{m}. \tag{3.53.}$$

A kiadódó $\overline{O_1 O_2}$ távolság ez esetben

$$\overline{O_1 O_2} = R_1 - R_2 - D \quad \text{m}. \tag{3.54.}$$

A kitűzési (x, y) koordináta-rendszer helyzete mindkét esetben az $\overline{O_1 O_2}$ irány és a

$$\tau_D = \operatorname{arctg} \frac{X - R_2 \sin \tau_L}{R_1 - Y - R_2 \cos \tau_L} \quad (3.55.)$$

szög ismeretében egyértelműen határozott.

Az átmenetiív kitűzéséhez szükséges további adatok az ábra alapján

$$\tau_L = \frac{L}{2} \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}, \quad (3.56.)$$

$$f = Y - (R_2 - R_2 \cos \tau_L) \quad \text{m}; \quad (3.57.)$$

$$e = R_2 \sin \tau_L \quad \text{m}, \quad (3.58.)$$

$$a = X - e \quad \text{m}, \quad (3.59.)$$

$$t = Y \operatorname{ctg} \tau_L \quad \text{m}, \quad (3.60.)$$

$$t_h = X - t \quad \text{m}, \quad (3.61.)$$

$$t_r = Y \operatorname{cosec} \tau_L \quad \text{m}. \quad (3.62.)$$

Kosárivek közötti koszinusz-átmenetiív *közelítő* kitűzési képletei $x \approx l$ feltétel esetén

$$y = \frac{x^2}{2R_1} + \frac{x^2}{4R_0} - \frac{L^2}{2\pi^2 R_0} \left(1 - \cos \frac{\pi}{L} x \right) \quad \text{m}, \quad (3.63.)$$

$$Y = \frac{L^2}{2R_1} + \frac{L^2}{R_0} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{\pi^2} \right) \approx 0,5 \frac{L^2}{R_1} + 0,149 \frac{L^2}{R_0} \quad \text{m}, \quad (3.64.)$$

$$e = R_2 \operatorname{arc} \tau_L = L \frac{R_1 + R_2}{2R_1} \quad \text{m}, \quad (3.65.)$$

$$a = X - e = L \left(1 - \frac{R_1 + R_2}{2R_1} \right) \quad \text{m}, \quad (3.66.)$$

$$f = Y - \frac{e^2}{2R_2} \approx 0,5 \frac{L^2}{R_1} + 0,149 \frac{L^2}{R_0} - \frac{L^2 (R_1 + R_2)^2}{8R_2 R_1^2} \quad \text{m}. \quad (3.67.)$$

3.3.2. Klotoid-átmenetiív azonos görbületű körívek között

Az átmenetiív görbületfüggvénye (3.3. ábra)

$$G_l = \frac{1}{R_1} + \frac{l}{R_0 L} \quad [\text{m}^{-1}] \quad (3.68.)$$

Az érintőszögfüggvény

$$\tau_l = \int_0^l G_l dl = \frac{l}{R_1} + \frac{l^2}{2R_0L}. \quad (3.69.)$$

Az érintő hajlása az átmenetiív végén ($l = L$)

$$\tau_l = \frac{L}{R_1} + \frac{l}{2R_0} = \frac{L}{2} \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}. \quad (3.70.)$$

Kosárirvek közötti klotoid-átmenetiív ívhossz paraméteres egyenletrendszere a hatványsor első két tagjának figyelembevételével

$$x = \int_0^l \cos \tau_l dl = l - \frac{l^3}{6R_1^2} - \frac{l^4}{8R_1 R_0 L} - \frac{l^5}{40R_0^2 L^2} \quad [\text{m}] \quad (3.71.)$$

és

$$y = \int_0^l \sin \tau_l dl = \frac{l^2}{2R_1} + \frac{l^3}{6R_0 L} - \frac{l^4}{24R_1^3} - \frac{l^6}{20R_0 L R_1^2} - \frac{l^6}{48R_1 R_0^2 L^2} - \frac{l^7}{336R_0^3 L^3} \quad [\text{m}]. \quad (3.72.)$$

A kosárirv közbenső átmenetiívének gyakorlati kitűzésénél két eset fordulhat elő.

A. eset: adott a kosárirvet alkotó két körív helyzete, keressük a kiadódó átmenetiív adatait. Az L átmenetiív hossz jó közelítő értéke az érintő-szög alapján

$$L \approx \sqrt{24R_0 D} \quad [\text{m}], \quad (3.73.)$$

ahol

$$D = R_1 - R_2 - \overline{O_1 O_2}.$$

A gyakorlati megoldásánál szükséges továbbá, hogy a közbenső átmenetiív hossza ne legyen rövidebb, mint a \mathbf{h} vektor alapján meghatározott legkisebb érték.

B. eset: a közbenső átmenetiív adatainak ismeretében keressük az R_2 sugarú körív helyzetét. A „26”ábra alapján a D távolság a (3.53.), a többi adat a (3.54.)-(3.62.) szerint számítható, természetesen a klotoid-átmenetiív megfelelő adatainak figyelembevételével. A kosárirv közbenső klotoid-átmenetiívének közelítő kitűzési képletei ($x \approx l$) helyettesítéssel (3.3. ábra)

$$y = \int_0^x \tau_x dx = \frac{x^2}{2R_1} + \frac{x^3}{6R_0 L} \quad [\text{m}], \quad (3.74.)$$

$$Y = \frac{L^2}{2R_1} + \frac{L^2}{6R_0} = 0,5 \frac{L^2}{R_1} + 0,16 \frac{L^2}{R_0} \quad [\text{m}], \quad (3.75.)$$

$$e = R_2 \sin \tau_L = L \frac{R_1 + R_2}{2R_1} \quad [\text{m}], \quad (3.76.)$$

$$a = X - e = L \left(1 - \frac{R_1 + R_2}{2R_1} \right) \quad [\text{m}], \quad (3.77.)$$

$$f = Y - \frac{e^2}{2R_2} = 0,5 \frac{L^2}{R_1} + 0,16 \frac{L^2}{R_0} - \frac{L^2 (R_1 + R_2)^2}{8R_2 R_1^2} \quad [\text{m}]. \quad (3.78.)$$

3.4. Átmenetiív geometria ellenkező görbületű ívek között

Az ellenkező görbületű körívek között koszinusz-, és klotoid átmenetiív geometriáját, görbületi viszonyait, valamint az ezek meghatározásához, ill. az átmenetiív kitűzéséhez szükséges mennyiségeket a **3.4. ábra** alapján ismertetjük.

Az ellenkező görbületű körívek között kinematikai szempontból szükséges átmenetiív hosszakat, koszinusz átmenetiív esetén a **Függelék 3.a.**, klotoid átmenetiív esetén a **3.b.** táblázata tartalmazza.

3.4.1. Koszinusz-átmenetiív ellenkező görbületű körívek között

Az átmenetiív geometriájának számítását az egyenes és a körív között, ill. azonos görbületű körívek között átmenetiíveknel megismert elvekkel megegyezően végezzük.

Ellenívek közötti koszinusz-átmenetiív görbületfüggvénye a **3.4. ábra** alapján

$$G_l = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{2R_{0e}} \left(1 - \cos \frac{\pi}{L} l \right) \quad [\text{m}^{-1}] \quad (3.79.)$$

ahol

$$\text{— } R_{0e} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \quad [\text{m}], \quad (3.80.)$$

— R_1 és R_2 az ellenív köríveinek sugara, [m].

Az átmenetiív érintőszögfüggvénye

$$\tau_l = \int_0^l G dl = \frac{1}{R_1} - \frac{1}{2R_{0e}} \left(l - \frac{L}{\pi} \sin \frac{\pi}{L} l \right) \quad (3.81.)$$

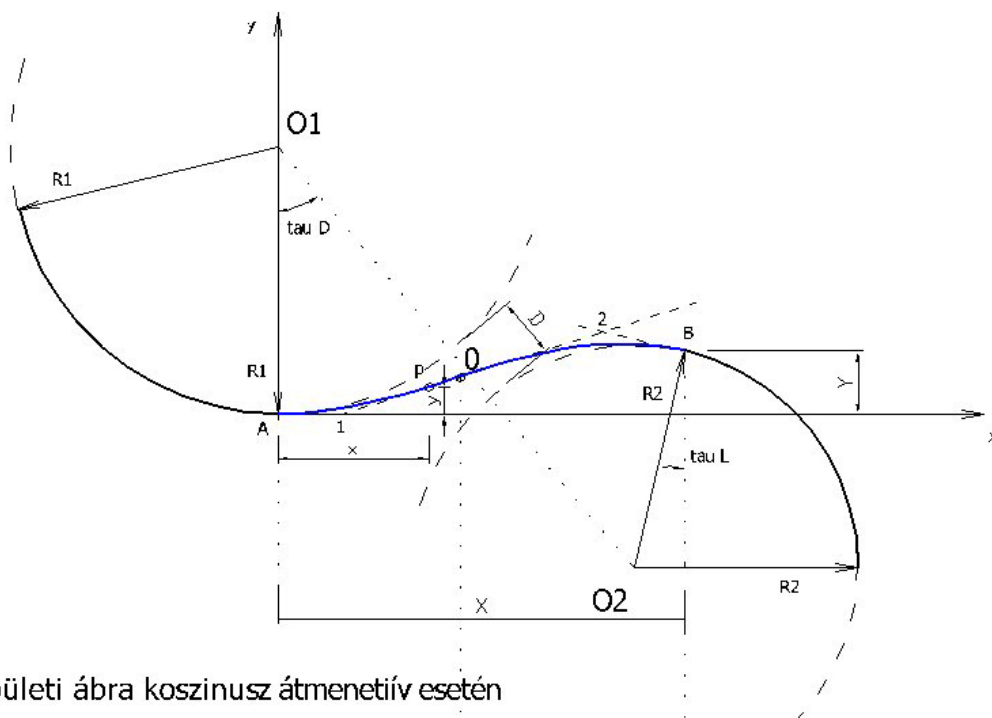
Az érintő hajlása az átmenetiív végén ($l = L$)

$$\tau_L = \frac{1}{R_1} - \frac{1}{2R_{0e}} = -\frac{L}{2} \frac{R_1 - R_2}{R_1 + R_2} \quad (3.82.)$$

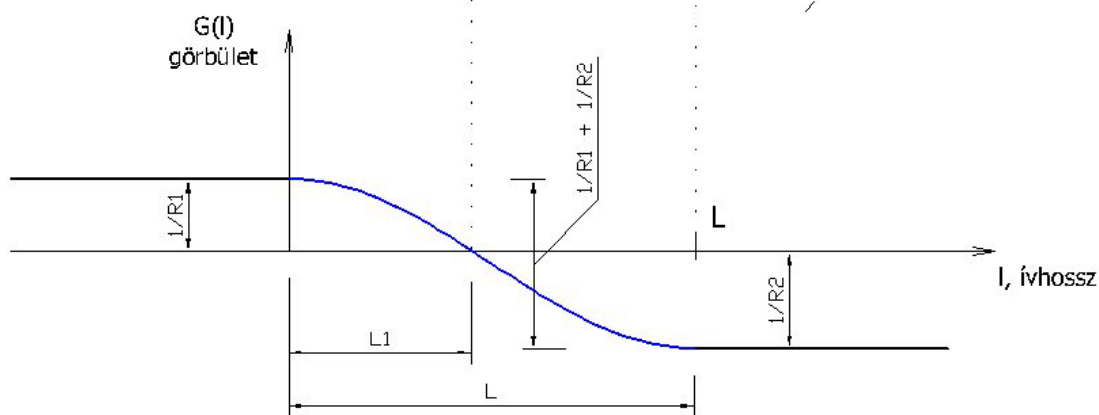
Ellenívek közötti koszinusz-átmenetiív kitűzésénél az ábrán feltüntetett (x,y) derékszögű koordináta-rendszert használjuk, az átmenetiív geometriai kezdőpontja e helyi koordináta-rendszer origója. Az átmenetiívet ez esetben is – a koszárívhez hasonlóan – önálló geometriának tekintjük.

3.4. ábra: Az ellenkező görbületű körívek között koszinusz-, és klotoid átmenetiív geometriája és görbületi viszonyai

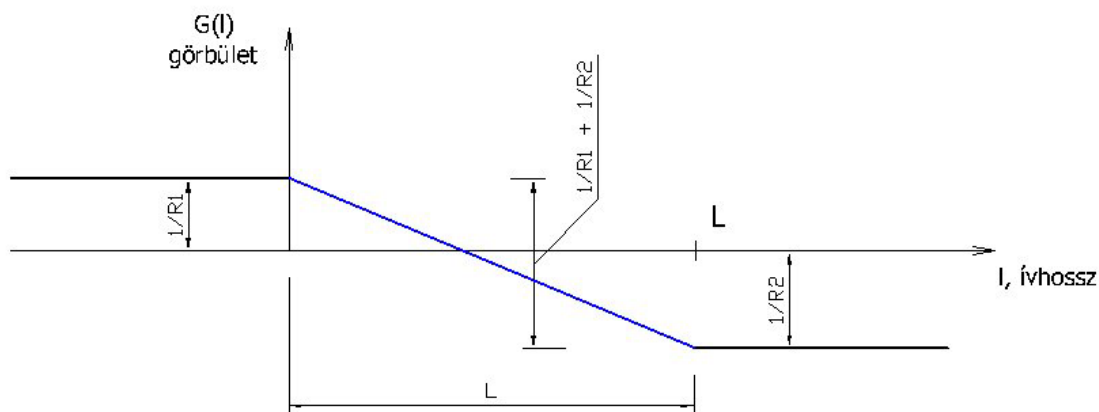
Helyszínrajz



Görbületi ábra koszinusz átmenetiív esetén



Görbületi ábra klotoid átmenetiív esetén



A kitűzéshez szükséges derékszögű koordináták ívhossz paraméteres egyenletrendszere a hatványsor első két tagjának figyelembevételével.

$$x = \int_0^l \cos \tau_l dl \approx l \left(1 - \frac{L^2}{16\pi^2 R_{0e}^2} \right) - l^3 \left(\frac{1}{6R_1^2} - \frac{1}{6R_1 R_{0e}} + \frac{1}{24R_{0e}^2} \right) + \left(\frac{L^3}{4\pi^3 R_{0e}^2} - \frac{L^3}{2\pi^3 R_1 R_{0e}} \right) \sin \frac{\pi}{L} l - \left(\frac{L^2}{4\pi^2 R_{0e}^2} - \frac{L^2}{2\pi^2 R_1 R_{0e}} \right) l \cos \frac{\pi}{L} l + \frac{L^3}{32\pi^3 R_{0e}^2} \sin \frac{2\pi}{L} l \quad [\text{m}] \quad (3.83.)$$

$$y = \int_0^l \sin \tau_l dl \approx \frac{L^2}{2\pi^2 R_{0e}} + \frac{L^4}{2\pi^4 R_1^2 R_{0e}} - \frac{33L^4}{64\pi^4 R_1 R_{0e}^2} + \frac{137L^4}{1152\pi^4 R_{0e}^3} + l^2 \left(\frac{1}{2R_1} - \frac{1}{4R_{0e}} - \frac{L^2}{32\pi^2 R_1 R_{0e}^2} + \frac{L^2}{64\pi^2 R_{0e}^3} \right) - l^4 \left(\frac{1}{24R_1^3} - \frac{1}{16R_1^2 R_{0e}} + \frac{1}{32R_1 R_{0e}^2} - \frac{1}{192R_{0e}^3} \right) + \left(\frac{L^3}{2\pi^3 R_1 R_{0e}^2} - \frac{L^3}{2\pi^3 R_1^2 R_{0e}} - \frac{L^3}{8\pi^3 R_{0e}^3} \right) l \sin \frac{\pi}{L} l + \left(\frac{L^4}{2\pi^4 R_1 R_{0e}^2} - \frac{L^2}{2\pi^2 R_{0e}} - \frac{L^4}{2\pi^4 R_1^2 R_{0e}} - \frac{5L^4}{48\pi^4 R_{0e}^3} + \frac{l^2 L^2}{4\pi^2 R_1^2 R_{0e}} - \frac{l^2 L^2}{4\pi^2 R_1 R_{0e}^2} + \frac{l^2 L^2}{16\pi^2 R_{0e}^3} \right) \cos \frac{\pi}{L} l + \left(\frac{L^3}{32\pi^3 R_1 R_{0e}^2} - \frac{L^3}{64\pi^3 R_{0e}^3} \right) l \sin \frac{2\pi}{L} l + \left(\frac{L^4}{64\pi^4 R_1 R_{0e}^2} - \frac{L^4}{128\pi^4 R_{0e}^3} \right) \cos \frac{2\pi}{L} l - \frac{L^4}{144\pi^4 R_{0e}^3} \cos^3 \left(\frac{\pi}{L} l \right) \quad [\text{m}] \quad (3.84.)$$

Az átmenetiív végpont-koordinátái a (3.83.) és (3.84.) képlet felhasználásával:

$$X = L - L^3 \left(\frac{1}{6R_1^2} + \frac{0,002267}{R_{0e}^2} - \frac{0,11601}{R_{0e} R_1} \right) \quad [\text{m}]; \quad (3.85.)$$

$$Y = L^2 \left(-\frac{0,14868}{R_{0e}} + \frac{1}{2R_1} \right) - L^4 \left(\frac{1}{24R^3} - \frac{0,00274}{R_{0e}^3} \right) + \frac{0,01935}{R_1 R_{0e}^2} - \frac{0,04744}{R_1^2 R_{0e}} \quad [\text{m}] \quad (3.86.)$$

Az ellenívek közötti átmenetiív gyakorlati kitűzésnél – hasonló a kosárivnél tárgyalatokhoz – két eset fordulhat elő:

A, eset: Adott az ellenív két körívének helyzete (az ábrán az O_1 és O_2 pont koordinátái). A kiadódó L koszinusz-átmenetiív jól közelítő hossza az érintőszög-eljárás alapján

$$L \approx \sqrt{42,23R_{0e}D} \quad [\text{m}], \quad (3.87.)$$

ahol

$$D = \overline{O_1 O_2} - R_1 - R_2 \quad [\text{m}]. \quad (3.88.)$$

E feladat megoldásánál is feltétel, hogy az átmenetiív hossza ne legyen kisebb a \mathbf{h} vektor alapján meghatározott legkisebb értéknél.

B, eset: Az átmenetiív hosszát ismerjük, és keressük az ellenív köríveinek relatív helyzetét. Az ábra alapján

$$D = -R_1 - R_2 + \sqrt{(X - R_2 \sin \tau_L)^2 + (R_1 - Y + R_1 - R_2 \cos \tau_L)^2} \quad [\text{m}] \quad (3.89.)$$

és

$$\overline{O_1 O_2} = R_1 + D + R_2 \quad [\text{m}]. \quad (3.90.)$$

A kitűzési (x, y) koordináta-rendszer mindkét előző esetben az $O_1 O_2$ irány és a

$$\tau_D = \arctg \frac{X - R_2 \sin \tau_L}{R_1 - Y + R_1 - R_2 \cos \tau_L} \quad (3.91.)$$

szög ismeretében egyértelműen meghatározott.

Az átmenetiív kitűzéséhez szükséges további adatok az ábra figyelembevételével

$$\tau_L = -\frac{L}{2} \frac{R_1 - R_2}{R_1 + R_2}, \quad (3.92.)$$

$$L_1 = \frac{L}{\pi} \arccos -\frac{R_1 - R_2}{R_1 + R_2} \quad [\text{m}]; \quad (3.93.)$$

$$\tau_0 = \frac{1}{R_1} - \frac{1}{2R_{0e}} \left(L_1 - \frac{L}{\pi} \sin \frac{\pi}{L} L_1 \right), \quad (3.94.)$$

továbbá

$$\begin{aligned} \overline{O1} &= y_0 \cos ec \tau_0; & \overline{A1} &= x_0 - y_0 ctg \tau_0; \\ \overline{O2} &= (x_2 - x_0) \sec \tau_0; & \overline{2B} &= (X - x_2) \sec \tau_L \end{aligned}$$

és

$$x_2 = \frac{Y - y_0 + X tg \tau_L + x_0 tg \tau_0}{tg \tau_0 + tg \tau_L} \quad [\text{m}]. \quad (3.95.)$$

Ellenívek közötti koszinusz-átmenetiív közelítő képletei $x \approx l$ feltétel esetén:

$$y = \frac{x^2}{2R_1} - \frac{x^2}{4R_{0e}} + \frac{L^2}{2\pi^2 R_{0e}} \left(1 - \cos \frac{\pi}{L} x \right) \quad [\text{m}]. \quad (3.96.)$$

$$Y = \frac{L^2}{2R_1} - \frac{L^2}{R_{0e}} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{\pi^2} \right) \approx 0,5 \frac{L^2}{R_1} + 0,149 \frac{L^2}{R_{0e}} \quad [\text{m}]. \quad (3.97.)$$

3.4.2. Klotoid-átmenetiív ellenkező görbületű körívek között

Az átmenetiív görbületfüggvénye (3.4. ábra)

$$G_l = \frac{1}{R_1} - \frac{l}{R_{0e}L} \quad [\text{m}^{-1}] \quad (3.98.)$$

Az érintőszögfüggvény

$$\tau_l = \int_0^l G_l dl = \frac{l}{R_1} - \frac{l^2}{2R_{0e}L}. \quad (3.99.)$$

Az érintő hajlása az átmenetiív végén ($l = L$)

$$\tau_l = \frac{L}{R_1} - \frac{l}{2R_{0e}} = \frac{L}{2} \frac{R_1 - R_2}{R_1 R_2}. \quad (3.100.)$$

Az átmenetiív ívhosszparaméteres egyenletrendszere a hatványsor első két tagjának figyelembevételével

$$x = \int_0^l \cos \tau_l dl = l - \frac{l^3}{6R_1^2} + \frac{l^4}{8R_1 R_{0e}L} - \frac{l^5}{40R_{0e}^2 L^2} \quad [\text{m}] \quad (3.101.)$$

és

$$y = \int_0^l \sin \tau_l dl = \frac{l^2}{2R_1} - \frac{l^3}{6R_{0e}L} - \frac{l^4}{24R_1^3} + \frac{l^6}{20R_{0e}LR_1^2} - \frac{l^6}{48R_1R_{0e}^2L^2} + \frac{l^7}{336R_{0e}^3L^3} \quad [\text{m}]. \quad (3.102.)$$

Az ellenív közbenső átmenetiívének gyakorlati kitűzésénél két eset fordulhat elő.

A. eset: Adott a két körív helyzete, keressük a kiadódó átmenetiív adatait. Az átmenetiív hosszának jó közelítő értéke

$$L \approx \sqrt{24R_{0e}D} \quad [\text{m}], \quad (3.103.)$$

ahol

$$D = \overline{O_1 O_2} - R_1 - R_2.$$

A gyakorlati megoldásánál szükséges továbbá, hogy az átmenetiív ne legyen rövidebb, mint a **h** vektor alapján meghatározott legkisebb átmenetiívhossz.

B. eset: Az átmenetiív adatainak ismeretében keressük az R_2 sugarú körív helyzetét az R_1 sugarú körívhez képest. A „27” ábra alapján a D távolság a (3.89.), a többi adat a (3.90.) – (3.92.) és a (2.52) alapján számítható, a klotoid-átmenetiív megfelelő adatainak figyelembevételével. Az ábra alapján az átmenetiív inflexiós pontjának távolsága a $G = 0$ feltétel alapján

$$L_1 = \frac{R_{0e}L}{R_1} \quad [\text{m}] \quad (3.104.)$$

és

$$\tau_l = \frac{L_1}{R_1} - \frac{L_1^2}{2R_{0e}L}. \quad (3.105.)$$

az ellenívek közötti klotoid-átmenetiív *közelítő* kitűzési képletei ($x \approx y$)

$$y = \int_0^x \tau_x dx = \frac{x^2}{2R_1} - \frac{x^3}{6R_{0e}L} \quad [\text{m}]; \quad (3.106.)$$

és

$$Y = \frac{L^2}{2R_1} - \frac{L_1^2}{6R_{0e}} = 0,5 \frac{L^2}{R_1} - 0,16 \frac{L^2}{R_{0e}} \quad [\text{m}]. \quad (3.107.)$$

4. KÖRÍVES PÁLYASZAKASZOKHOZ CSATLAKOZÓ ÁTMENETIÍVEK HOSSZÁNAK MEGHATÁROZÁSA

Az átmenetiív mozgásgeometriailag kívánatos hosszát a harmadrendű mozgásjellemző vektor alapján határozzuk meg.

Állandó gyorsulású mozgást alapul véve a **h** vektor képlete a korábbi (2.19.) összefüggés szerint

$$h = -v^3 G^2 \mathbf{t} + \left(3va_t G + v^3 \frac{dG}{dl} \right) \mathbf{n} + v^3 G T \mathbf{b} \quad \text{m/s}^3.$$

Az előző összefüggésből az átmenetiív hosszát, az egyes átmeneti geometriákat figyelembe véve, abból a feltételből számítjuk, hogy a **h** vektor nagysága az átmenetiív mértékadó pontjában se haladja meg az engedélyezett maximális értéket.

A gyorsulás-változás ott éri el a legnagyobb értéket, ahol a görbületváltozás — a $\left| \frac{dG}{dl} \right|_{\max}$ kifejezés — felveszi a legnagyobb értékét. Koszinusz átmenetiív esetén a görbületváltozás legnagyobb értéke az átmenetiív közepén $l = 0,5 \cdot L$ helyen lép fel, értékeit a **4.1. táblázat** foglalja össze. A klotoid átmenetiív az eleje és a vége pontban töréses, így ott $|dG/dl|$ derivált függvény nem értelmezhető. Az átmenetiív közepében a $|dG/dl|$ görbületváltozás függvény konstans — mert a görbületváltozás lineáris —, melynek értékeit a **4.1. táblázat** tünteti fel.

4.1. táblázat Koszinusz és klotoid átmenetiívek $|dG/dl|$ függvényeinek maximumai (klotoid átmenetiívénél a derivált függvény az átmenet eleje és vége pontokban a törés miatt nincs értelmezve)

Geometria	$ dG/dl _{\max}$	
	koszinusz átmenetiív	klotoid átmenetiív
Egyenes és R sugarú körív között	$\frac{0,5\pi}{LR}$	$\frac{2\pi}{LR}$
Kosárívek között ($R_1 > R_2$) $R_0 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$	$\frac{0,5\pi}{LR_0}$	$\frac{2\pi}{LR_0}$
Ellenívek között $R_{0e} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$	$\frac{0,5\pi}{LR_{0e}}$	$\frac{2\pi}{LR_{0e}}$

A számítások során

L [m] - az átmenetiív hossza,
 R [m] - a körívsugár nagysága,
 R_1, R_2 [m] - a kosár-, ill. az ellenív körívsugarainak a nagysága ($R_1 > R_2$) m;
továbbá:

$$R_0 = \frac{R_1 R_2}{R_1 - R_2} \quad \text{és} \quad R_{0e} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \quad m.$$

Klotoid-átmenetiív esetén az $l = 0$ és $l = L$ pontban a görbület-, ill. a túlemelés függvény csatlakozása töréses, így a dG/dl , ill. a torzió nem értelmezhető. A következő közelítő számításoknál a \mathbf{h} vektor nagyságát az $l = L - \Delta$ pontban számítjuk (Δ ívhossz különbséggel az átmenet vége előtt), és feltételezzük, hogy a görbület a csatlakozó körív görbületével a (2.33.) szerint $\Delta G/\Delta l \approx \alpha/LR$ értékkel közelíthető (kosárvra α/RL_0 , ellenívre α/LR_{0e}), miközben $T = 0$. Számításainkban $\alpha = 2$, ami összehasonlítva a szinuszos, ill. a parabolageometriákkal, a klotoid szempontjából túlságosan kedvező érték (4.1. táblázat).

4.1. Átmenetiív hosszának meghatározása egyenes és körív között

4.1.1. A koszinusz-átmenetiív hosszának számítása

A koszinusz-átmenetiív hosszának meghatározása során a \mathbf{h} vektor mértékadó helye az átmenetiív felezőpontja ($l = 0,5L$), a görbület értéke a $G = 1/2R$, a 4.1. táblázat alapján $\frac{dG}{dl} = \frac{0,5\pi}{LR}$, és a koszinusz átmenetiív torziójának vizsgálata szerint $T = \frac{\pi^3}{2L^3}mR$. A \mathbf{h} vektor nagysága az $l = 0,5L$ pontban a (2.19.) figyelembevételével

$$|h| = 0,4 = \sqrt{\frac{v^6}{16R^4} + \left(\frac{0,5\pi v^3}{RL} + \frac{3va_t}{2R}\right)^2 + \frac{\pi^6 m^2 v^6}{16L^6}} \quad \text{m/s}^3. \quad (4.1.)$$

A (4.1.) rendezése és V (km/h) helyettesítése után az átmenetiív L hosszát meghatározó egyenlet

$$\left(\frac{V^6}{3,6^6 \cdot 16R^4} + \frac{9a_t^2 V^2}{3,6^2 \cdot 4R^2} - 0,16\right)L^6 + \frac{3\pi a_t V^4}{3,6^4 \cdot 2R^2}L^5 + \frac{\pi^2 V^6}{3,6^6 \cdot 4R^2}L^4 + \frac{\pi^6 V^6}{3,6^6 \cdot 16} \left(0,0118 \frac{V^2}{R} - 0,1\right)^2 = 0. \quad (4.2.)$$

A (4.2.) alapján meghatározott koszinusz átmenetiív-hosszakat a 2. függelék tartalmazza a sebesség ($V = 60 \dots 250$ km/h), a körívsugár változásában és $a_t = 0,35$ m/s² érintőirányú gyorsulás figyelembevételével. (A 160 km/h sebesség feletti átmenetiív hosszakat részint elméleti megfontolásból, részint síkvidéken mint új nyomvonal megválasztási lehetőséget közöljük.)

4.1.2. A klotoid-átmenetiív hosszának számítása

Egyenes és körív közötti átmenetiív-nél a \mathbf{h} vektor közelítő nagysága, figyelemmel az előzőkre és a 2.1. táblázatra,

$$|h| = 0,3 = \sqrt{\frac{v^6}{R^4} + \left(\frac{2v^3}{LR} + \frac{3va_t}{R}\right)^2} \quad \text{m/s}^3. \quad (4.3.)$$

Az egyenlet rendezése és V (km/h) helyettesítése után az átmenetiív hosszát meghatározó egyenlet

$$\left(\frac{V^4}{3,6^4 R^2} + 9a_t^2 - \frac{0,09 \cdot 3,6^2 R^2}{V^2}\right)L^2 + \frac{12a_t V^2}{3,6^2}L + \frac{4V^4}{3,6^4} = 0. \quad (4.4.)$$

A (4.4.) egyenletből számított átmenetiív hosszakat ($a_t = 0,35 \text{ m/s}^2$ érintőirányú gyorsulás figyelembevételével) a 6. függelék tartalmazza a sebesség ($V = 120 \dots 160 \text{ km/h}$) és a körívsugar változása esetén.

4.2. Átmenetiív hosszának meghatározása azonos görbületű körívek között

4.2.1. Koszinusz átmenetiív hosszának számítása

A \mathbf{h} vektor nagysága az $l=0,5L$ pontban a (3.43.), a 4.1. táblázat és a koszinusz átmenetiív — itt nem közölt — torziója alapján

$$|h| = 0,4 = \left[v^6 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{2R_0} \right)^4 + \left\{ \frac{0,5\pi v^3}{R_0 L} + 3va_t \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{2R_0} \right) \right\}^2 + \frac{\pi^6 v^6}{4L^6} (m_2 - m_1)^2 \frac{R_0^2 R_1^2}{(R_1 + 2R_0)^2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{2R_0} \right)^2 \right]^{1/2} \text{ m/s}^3. \quad (4.5.)$$

Az egyenlet rendezése és $V \text{ (km/h)}$ helyettesítés után az L hosszúságot meghatározó egyenlet

$$\left[\frac{V^6}{3,6^6} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{2R_0} \right)^4 + \frac{9a_t^2 V^2}{3,6^2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{2R_0} \right)^2 - 0,16 \right] L^6 + \frac{3\pi a_t V^4}{3,6^4 R_0} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{2R_0} \right) L^5 + \frac{\pi^2 V^6}{3,6^6 \cdot 4R_0^2} L^4 + \frac{\pi^6 V^6}{16 \cdot 3,6^6} \left[0,0118V^2 \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) \right]^2 = 0. \quad (4.6.)$$

A (4.6.) alapján számított átmenetiív hosszakat a 4. Függelékben találjuk a kosáriv R_1 és R_2 körívsugarainak változása és a $V = 60 \dots 160 \text{ km/h}$ sebesség esetén.

4.2.2. Klotoid átmenetiív hosszának számítása

Kosárivek közötti közbenső átmenetiív hosszának számításakor az előző közelítések figyelembevételével (l. a 4.2.1. pontot) az átmenetiív hosszának számítására a következő egyenletet kapjuk:

$$\left(\frac{V^4}{3,6^4 R_2^2} + 9a_t^2 - \frac{0,09 \cdot 3,6^2 R_2^2}{V^2} \right) L^2 + \frac{12a_t V^2 R_2}{3,6^2 R_0} L + \frac{4V^4 R_2^2}{3,6^4 R_0^2} = 0. \quad (4.7.)$$

4.3. Átmenetiív hosszának meghatározása ellenkező görbületű körívek között

4.3.1. Koszinusz átmenetiív hosszának számítása

A \mathbf{h} vektor nagysága az $l=0,5L$ pontban a (3.79.), a 4.1. táblázat és az átmenetiív — itt nem közölt — torziójának figyelembevételével

$$|h| = 0,4 = \left[v^6 \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{2R_{0e}} \right)^4 + \left\{ \frac{0,5\pi v^3}{R_{0e}L} + 3va_t \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{2R_{0e}} \right) \right\}^2 + \frac{\pi^6 v^6}{4L^6} (m_2 - m_1)^2 R_{0e}^2 \left(\frac{R_1^2}{(R_1 - 2R_{0e})} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{2R_{0e}} \right)^2 \right)^{1/2} \right]^{1/2} \quad \text{m/s}^3 \quad (4.8.)$$

Az L hosszúságot meghatározó egyenlet rendezése és V (km/h) helyettesítése után

$$\left[\frac{V^6}{3,6^6} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{2R_{0e}} \right)^4 + \frac{9a_t^2 V^2}{3,6^2} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{2R_{0e}} \right)^2 - 0,16 \right] L^6 + \frac{3\pi a_t V^4}{3,6^4 R_{0e}} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{2R_{0e}} \right) L^5 + \frac{\pi^2 V^6}{3,6^6 \cdot 4R_{0e}^2} L^4 - \frac{\pi^6 V^6}{16 \cdot 3,6^6} \left[0,0118V^2 \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) + 0,1 \left(\frac{R_2}{R_1} - 1 \right) \right]^2 = 0. \quad (4.9.)$$

A (4.9.) alapján meghatározott átmenetiív hosszakat az 5. Függelék tartalmazza az ellenívek R_1 és R_2 körívsugarainak változása és a $V = 60 \dots 160$ km/h sebesség esetén.

4.3.2. Klotoid átmenetiív hosszának számítása

Ellenívek közötti közbenső átmenetiív hosszának meghatározása során az előző közelítések alapján (l. a 4.1.2. pontot) az átmenetiív hosszát a következő egyenletből számíthatjuk:

$$\left(\frac{V^4}{3,6^4 R_2^2} 9a_t^2 - \frac{0,09 \cdot 3,6^2 R_2^2}{V^2} \right) L^2 - \frac{12a_t V^2 R_2}{3,6^2 R_{0e}} L + \frac{4V^4 R_2^2}{3,6^4 R_{0e}^2} = 0. \quad (4.10.)$$

Az előzők fejezetek alapján egyértelműen látható, hogy a kinematikailag szükséges átmenetiív hosszak nem arányosak az empirián alapuló előírás szerinti $V \cdot m$ értékkel. Ebből következik, hogy a mozgásgeometriailag szükséges átmenetiív hossz

$$L \neq cVm,$$

azaz nem írható fel a szakirodalomban szereplő empirikus alakban.

5. TÚLEMELÉS, TÚLEMELÉS-ÁTMENET

5.1. Túlemelés kialakítása köríves vasúti vágányokban

Köríves vasúti vágányokat a sebességtől függően a kisebb körívsugarak tartományában ún. túlemeléssel, a nagyobb körívsugarak esetén túlemelés nélkül építjük (**Függelék 4. táblázat**).

Nem túlemelt vágánykeresztmetszetben azonos magasságban fekvő sínszálak esetén, a köríves vasúti pályán mozgó járműre ható gyorsulás főnormális irányú összetevőjének nagysága

$$a_n = v^2 G = \frac{v^2}{R} \quad \text{m/s}^2 \quad (5.1.)$$

értékű, és centripetális, ill. az ellentettje centrifugális gyorsulás néven ismeretes.

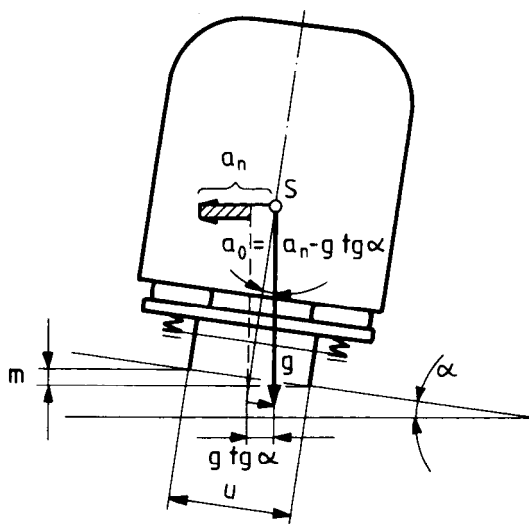
A centrifugális gyorsulás hatásának csökkentésére, ill. ellensúlyozására a köríves vasúti vágányokat túlemeléssel építjük, azaz egy vágánykeresztmetszetben a két sínszál közül a külső sín a belsőhöz viszonyítva magasabban fekszik (**5.1. ábra**).

Az íves vágány túlemelésével a járműre ható nehézségi gyorsulás $g \cdot \tan \alpha$ nagyságú összetevőjének csökkentő hatása révén elérjük, hogy a mozgó és rugózatlan járműben a centrifugális gyorsulásnál kisebb

$$a_0 = a_n - g \tan \alpha \quad \text{m/s}^2 \quad (5.2.)$$

nagyságú, vízszintes és a körívből kifelé mutató ún. szabad oldalgyorsulás hat (**5.1. ábra**).

5.1. ábra: *Mozgásnál fellépő gyorsulások íves vasúti vágányon*



Amennyiben az a_n és $g \tan \alpha$ egyenlő nagyságú, a járműre szabad oldalgyorsulás nem hat, ekkor a pálya **elméleti túlemeléséről** beszélünk.

A jármű padlósíkjával párhuzamos irányú szabad oldalgyorsulás $a_0 \cdot \cos \alpha$ nagyságú, azonban a biztonság javára tett megengedhető közelítéssel $a_0 \cos \alpha \approx a_0$.

(Minthogy $\alpha_{\max} = \arctg \frac{150}{1500} = 5^\circ 42' 3''$ és $\cos \alpha_{\max} = 0,995 04$, így a gyakorlatban a $\cos \alpha \approx 1$ közelítés általában megengedhető).

Az (5.2.) összefüggésbe behelyettesítve az a_n (5.1.) szerinti, ill. a $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ értékét, továbbá az **5.1. ábra** alapján $\tg \alpha \approx \sin \alpha = \frac{m}{u} = \frac{m}{1500}$ megengedhető közelítéssel élve, a köríves pályán haladó járműben ható és a körívből kifelé mutató *szabad oldalgyorsulás* nagysága

$$a_0 = \frac{V^2}{3,6^2 R} - 9,81 \frac{m}{1500} = \frac{V^2}{12,96 R} - \frac{m}{152,905} \text{ m/s}^2 \quad (3.1-3)$$

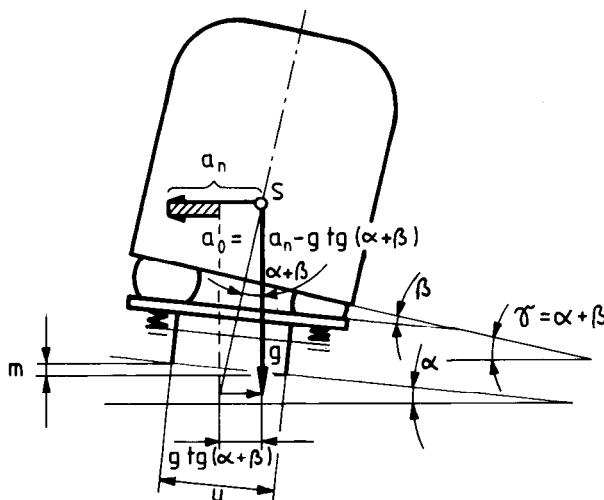
ahol m [mm] – a túlemelés,
 V [km/h] – a sebesség,
 R [m] – a körív sugár.

Íves pályán haladó különleges **kocsiszekrény-vezérlésű** jármű padlósíntje az m túlemelésen felül további β szöggel hajlik a vízszinteshez képest (**5.2. ábra**). Ilyen járművek íves mozgásánál ébredő szabad oldalgyorsulás nagysága a padlósík $\alpha + \beta$ hajlásának figyelembevételével

$$a_0 = a_n - g \sin (\alpha + \beta) \quad \text{m/s}^2, \quad (5.4.)$$

és $\beta_{\max} = 10^\circ$ a jelenlegi kocsiszekrény-vezérlésű járműveknél.

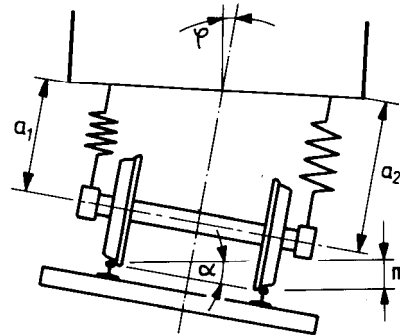
5.2. ábra Íves vasúti vágányon a járműszekrény vezérlésű járműre ható gyorsulások



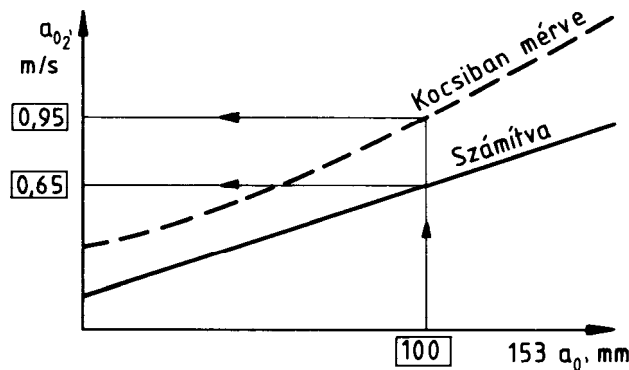
A szabad oldalgyorsulás (a_0 , m/s^2) megengedhető nagyságának megállapításához figyelembe kell venni azt a hatást is, hogy a járműben a vágánygeometriailag számított oldalgyorsulási értéknél nagyobb oldalgyorsulás ébred. Ennek oka, hogy az íves pályán haladó járműszekrény a rugók egyenlőtlen összenyomódása miatt a körív külső oldala felé kitér (**5.3. ábra**), és ez pozitív oldalgyorsulás-növekményt hoz létre.

Nagyobb sebességgel (140...160 km/h), rendszeresen közlekedő gyorsvonatok kocsijaiban elvégzett külföldi mérések eredményei szerint a járműben mért oldalgyorsulási értékek mintegy 0,2...0,4 m/s² értékkel meghaladták a vágánygeometriailag számítható oldalgyorsulási értékeket. A vágánygeometriailag számított és a járműben mért értékek kiegyenlítésével kapott oldalgyorsulások változását tünteti fel az **5.4. ábra** az elméleti és a gyakorlati túlemelés különbségét jelentő, $153 \cdot a_0$ nagyságú túlemelésihiány függvényében (5.5. összefüggés).

5.3. ábra: A járműrugók egyenlőtlen összenyomódása okozta kocsiszekevény-kitérés



5.4. ábra: A számított és a járműben mért oldalgyorsulási értékek változása



A szabad oldalgyorsulás, a sebesség és a körvsugár változásában a (5.3.) képletből a köríves ún. **gyakorlati túlemelésének** számítására a következő összefüggést kapjuk:

$$m = 11,798 \frac{V^2}{R} - 152,905 a_0 \approx 11,8 \frac{V^2}{R} - 153 a_0 \quad \text{mm.} \quad (5.5.)$$

Az előző képlet szerint az íves vasúti pálya túlemelését a $11,8 V^2/R$ nagyságú elméleti túlemelésnek a megengedett szabad oldalgyorsulással arányos csökkentésével állapítjuk meg, és a $153 a_0$ csökkentő tagot **túlemelésihiánynak** nevezzük.

Az (5.5.) képlet alapján kiszámított túlemelések értékeit foglalja össze a **Függelék 4. táblázata**, $V = 20...250$ km/h sebességtartományban és a feltüntetett körívsugarak változásában. A túlemelési értékek meghatározásakor a következő a_0 szabad oldalgyorsulás-nagyságokat veendők figyelembe:

- $V = 40...160$ km/h sebességek esetén legfeljebb 0,65 m/s², lehetőség szerint 0,52 m/s².
- $V = 180...250$ km/h sebességek esetén legfeljebb 0,52 m/s², lehetőség szerint 0,30 m/s².

Az előző szabad oldalgyorsulások alapján a túlemelési értékek számítására szolgáló képletek:

$$m_{0,65} = 11,8 \frac{V^2}{R} - 153 \cdot 0,654 = 11,8 \frac{V^2}{R} - 100 \quad \text{mm}; \quad (5.6.)$$

$$m_{0,52} = 11,8 \frac{V^2}{R} - 153 \cdot 0,523 = 11,8 \frac{V^2}{R} - 80 \quad \text{mm}; \quad (5.7.)$$

$$m_{0,30} = 11,8 \frac{V^2}{R} - 153 \cdot 0,301 = 11,8 \frac{V^2}{R} - 46 \quad \text{mm}. \quad (5.8.)$$

A Függelék 4. táblázata szerint a köríves pálya túlemelése a feltüntetett két túlemelési érték között a helyi sajátosságokat is figyelembe véve választható meg. Gyakorlati megfontolásból a megépíthetőséget figyelembe véve a számítás során a 20 mm-nél kisebb túlemelések helyett *egységesen 20 mm nagyságú legkisebb túlemelés szerepel* a táblázatban, ugyanis e kis túlemelések elhanyagolása a szabad oldalgyorsulás indokolatlan növelését jelentené.

Köríves vasúti pályában megengedhető *legnagyobb túlemelést* az álló járműben, a körív középpontja felé ható negatív előjelű oldalgyorsulás felvételével határozhatjuk meg. Az elmaradó dinamikus hatásokra tekintettel álló járműben $a_0 \approx 1 \text{ m/s}^2$ nagyságú oldalgyorsulás engedhető meg, így a (3.1-5) összefüggésből a legnagyobb túlemelésre

$$m_{\max} = 150 \quad \text{mm} \quad (5.9.)$$

számérté adódik.

A gyakorlati túlemelés (5.5. összefüggés) fontosabb hatásainak összefoglalása:

- a centrifugális gyorsulás hatásának csökkentésével a járműben ható szabad oldalgyorsulás utazáskényelmileg elviselhető, rakománycsúszás szempontjából veszélytelen;
- a járművek kiborulással szembeni biztonságát növeli;
- a sínszálak, ill. a járműhordrugók egyenlőtlen igénybevételét és elhasználódását, továbbá a járművek rendellenes mozgását csökkenti.

5.2. A túlemelés-átmenet

A túlemelés-átmenet célja, hogy az átmenet hosszában a külső, ill. a belső sínszálak közötti magasságkülönbségek fokozatos változtatásával a tiszta körívben szükséges túlemelést elérjük. A túlemelés-átmenet elején a zérus (esetleg a kisebb) túlemelésű, a túlemelés-átmenet végét mindenkor a nagyobb túlemelésű vágánykeresztmetszet jelenti.

5.2.1. A túlemelés-átmenet kialakítása

A túlemelés-átmenet hosszában általában a *külső sínszál fokozatos emelésével* érjük el a szükséges nagyságú túlemelést, miközben a belső sínszál vezetése változatlan. A megkívánt túlemelés ezenkívül kialakítható még a külső és a belső sínszálak egymáshoz szimmetrikus emelésével, ill. süllyesztésével is. (A harmadik megoldást: a belső sínszál fokozatos süllyesztését a külső sínszál változatlan vezetése mellett a gyakorlatban nem használják a zúzottkő ágyazat vastagságának jelentős csökkenése miatt.)

5.2.2. A túlemelés-átmenet meredeksége

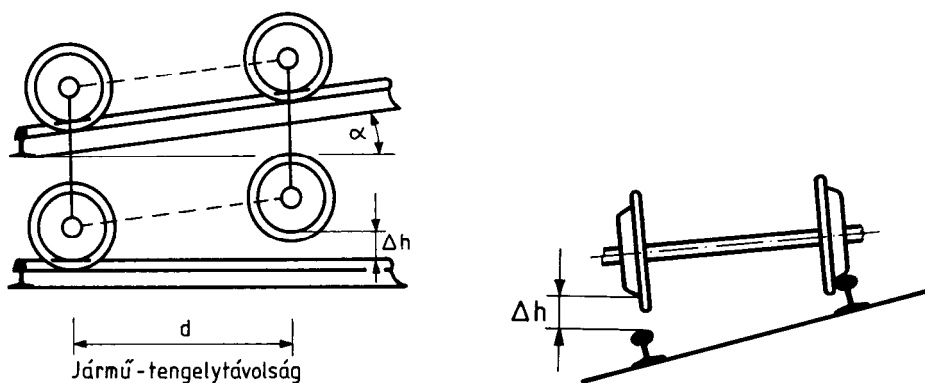
A túlemelés-átmenet hajlását lineáris túlemelés-változás esetén az

$$n = \operatorname{ctg} \alpha \quad (5.10.)$$

összefüggéssel értelmezzük (5.5. ábra), folytonos törés nélküli (koszinusz, parabola, szinuszos) átmeneteknél pedig a legnagyobb érintőhajlást adjuk meg az átmenet közepén.

A túlemelés-változás okozta emelési sebességek, ill. gyorsulások csökkentése, valamint ezek hatásainak időbeli elkülönítése végett a minél laposabb túlemelés-átmeneti hajlás kívánatos. Ugyanakkor főleg a nagyobb sebességű vasúti pályákon kiadódó túlságosan lapos átmenethajlás is hátrányos, mivel az ilyen átmenet elején a magasságkülönbségek a pályafenntartás során nehezen ellenőrizhetők, és az üzem közben változó pozitív és negatív túlemelések alakulhatnak ki.

5.5. ábra: A túlemelés-átmenet meredeksége a jármű futóművére való tekintettel



A túlemelés-átmenet legnagyobb meredekségének vizsgálatánál figyelemmel kell lenni egyrészt a jármű futóművének, ill. kocsiszekrényének kialakítási módjára, másrészt a haladási sebességre, ugyanis túlságosan meredek hajlásnál az átmenet torz felülete miatt felemelkedő kerek a jármű kisiklását okozhatja.

A jármű futóművére való tekintettel a túlemelés-átmenet legnagyobb meredekségét a nyomkarima magassága és a jármű tengelytávolsága határozza meg. Így 25 mm nagyságú legkisebb nyomkarima-magasságnál a túlemelés-átmenet lejtőjének laposabbnak kell lenni az

$$n = \frac{1000d}{25} = 40d \quad (5.11.)$$

határértéknél, ahol d a jármű tengelytávolsága, m (5.5. ábra).

A határhajlás képletéből láthatjuk, hogy e vizsgálatnál a legnagyobb tengelytávolságú jármű a mértékadó. A nagyobb tengelytávolságú járműveknél azonban a járműalváz rugalmas deformációja miatt a kerékfelemelkedés helyett a valóságban inkább csak egyes kerekek tehermentesülése következik be. Ezt figyelembe véve, a legtöbb vasút a $40d$ hajlás helyett a túlemelés-átmenet legnagyobb meredekségét a jármű futóművére tekintettel az

$$n = 400 \quad (5.12.)$$

értékben állapítja meg.

A jármű haladási sebessége a túlemelés-átmenetben ébredő emelési sebesség, ill. emelési gyorsulás **(5.4. alfejezet)** révén befolyásolja a legnagyobb megengedhető meredekséget. Minthogy a jármű kereke a keletkező erőhatás következtében sehol sem emelkedhet fel a sínről, biztosítani kell, hogy a járműre ható emelési sebesség, ill. ennek időbeli változása, az emelési gyorsulás egy megengedhető értéknél nagyobb ne legyen.

A legtöbb vasút az emelési sebesség megengedhető értékét 25...60 mm/s között választja meg, ami

$$n = 11,1 \cdot V \dots 4,6 \cdot V \quad (5.13.)$$

túlemelés-átmeneti hajlásoknak felel meg, ahol V (km/h) a sebesség. E határok között számos vasút a lineáris túlemelés-átmenet hajlását

$$n = 10 \cdot V \quad (5.14.)$$

értékben (28 mm/s emelési sebességben), a folytonos, törés nélküli túlemelés-átmenetek legnagyobb hajlását pedig

$$n = 5 \cdot V \dots 4 \cdot V \quad (5.15.)$$

nagyságban állapítja meg.

5.2.3. A túlemelés-átmenet elhelyezése és hossza

A vasúti pálya helyes mozgásgeometriai kialakítása szükségessé teszi, hogy a túlemelés-átmenetnek

- a görbületátmenettel (átmenetiívvel) azonos hosszúnak és helyszínrajzilag egybeesőnek,
- geometriájának az átmenetiív-görbület-geometriájával megegyezőnek kell lennie.

A túlemelés-átmenet hosszát számos vasút a (5.16.) alapján lineáris túlemelés-átmenetnél

$$T = 10 \cdot V \cdot m \quad \text{m} \quad (5.16.)$$

értékben, ill. folytonos, törés nélküli túlemelés-átmenetek esetén a (5.15.) figyelembevételével állapítja meg, ahol m a túlemelés (m) és V a sebesség (km/h).

Minthogy a **h vektor** alapján számított átmenetiív-hosszak minden esetben nagyobbak, mint az (5.13.), (5.14.) és az (5.15.) szerinti átmenethosszak, így a **túlemelésátmenet T hosszának az átmenetiívek 1. - 3. függelék szerinti L hosszával kell megegyeznie**, azaz

$$T \equiv L \quad \text{m.} \quad (5.17.)$$

5.3. Túlemelés-átmeneti geometriák

A 3.2. - 3.4. alfejezetben vizsgált görbületátmeneti geometriákhoz kapcsolódva a következőkben

- a koszinusz- és,
- a lineáris

túlemelés-átmenetek meghatározását ismertetjük a következő egységes jelölésekkel:

l	[m]	–	a vizsgált pont távolsága az átmenetiív elejétől,
m	[mm]	–	a túlemelés nagysága a vizsgált pontban,

L	[m]	–	a túlemelés-átmenet hossza (egyező az átmenetiív hosszával (3.2. - 3.4. alfejezet),
m_R	[mm]	–	a túlemelés értéke az egyenes és körív közötti átmenet végén,
m_1, m_2	[mm]	–	a túlemelés nagysága a kosár-, ill. az ellenív köríveiben.

5.3.1. Egységes koszinusz túlemelés-átmenet

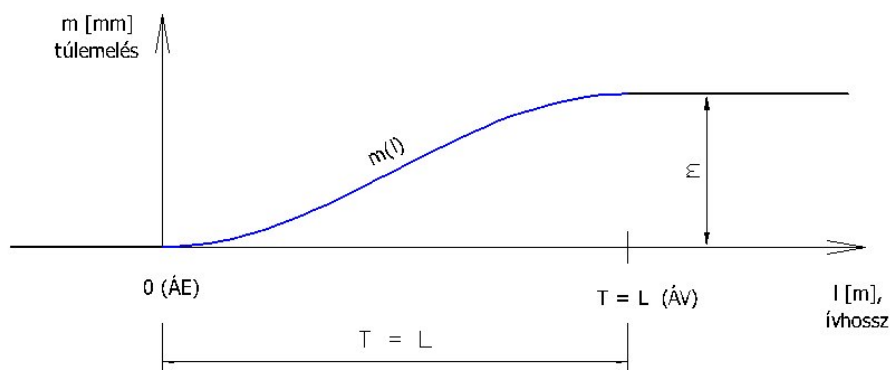
Egyenes és körív közötti koszinusz túlemelés-átmenet esetén a túlemelés függvénye (5.6. ábra)

$$m = \frac{m_R}{2} \left(1 - \cos \frac{\pi}{L} l \right) \text{ mm.} \quad (5.18.)$$

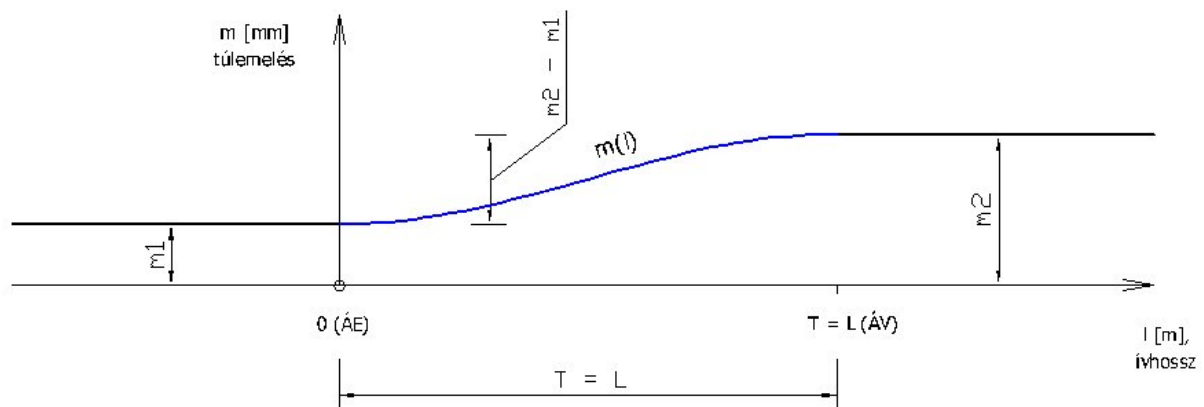
A túlemelés-átmenet legmeredekebb hajlása az $l = 0,5 \cdot L$ pontban

$$n_{L/2} = \operatorname{ctg} \alpha = \frac{2000L}{\pi m_R} \approx 636,62 \frac{L}{m_R}. \quad (5.19.)$$

5.6. ábra: Koszinusz túlemelés-átmenet egyenes és körív között



5.7. ábra: Koszinusz túlemelés-átmenet azonos görbületű körívek között



Azonos görbületi körívek közötti koszinusz túlemelés-átmenetnél (5.7. ábra)

$$m = m_1 + \frac{m_2 - m_1}{2} \left(1 - \cos \frac{\pi}{L} l \right) \quad \text{mm.} \quad (5.20.)$$

Az átmenet legmeredekebb hajlása az $l = 0,5 L$ pontban

$$n_{L/2} = \text{ctg} \alpha = \frac{2000L}{\pi(m_2 - m_1)} \approx 636,62 \frac{L}{m_2 - m_1}. \quad (5.21.)$$

Ellenkező görbületű körívek közötti koszinusz túlemelés-átmenet számítása az 5.8. ábra alapján:

$$y_b = \frac{m_2}{2} \left(1 - \cos \frac{\pi}{L} l \right) \quad \text{mm;} \quad (5.22.)$$

$$y_j = m_1 - \frac{m_1}{2} \left(1 - \cos \frac{\pi}{L} l \right) \quad \text{mm;} \quad (5.23.)$$

$$y_t = \frac{m_1}{2} + \frac{m_2 - m_1}{4} \left(1 - \cos \frac{\pi}{L} l \right) \quad \text{mm,} \quad (5.24.)$$

ahol

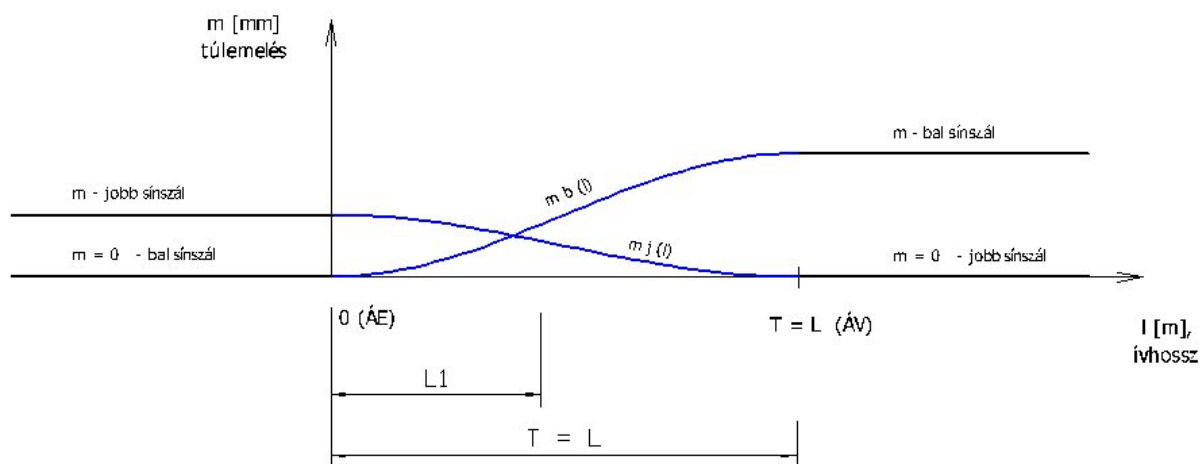
$a_0 = 0,65 \text{ m/s}^2$ szabad oldalgyorsulás-nagyság esetén

$$m_2 = 11,8 \frac{V^2}{R_2} - 100 \quad \text{mm,}$$

továbbá a görbületi zéruspont és a vízszintes pályakeresztmetszet azonossági feltételéből

$$m_1 = m_2 \frac{G_1}{G_2} = 11,8 \frac{V^2}{R_1} - 100 \frac{R_2}{R_1} \quad \text{mm.}$$

5.8. ábra: Koszinusz túlemelés-átmenet ellenkező görbületű körívek között



A vízszintes pályakeresztmetszet L_1 távolsága a (3.93.) szerint számítható (3.4. és 5.8. ábra).

A túlemelés-átmenet legmeredekebb hajlása az $l = 0,5L$ pontban a jobb és a bal sinszálak között

$$n_{L/2} = \operatorname{ctg} \alpha = \frac{2000L}{\pi(m_1 + m_2)} \approx 636,62 \frac{L}{m_1 + m_2}. \quad (5.25.)$$

5.3.2. Lineáris túlemelés-átmenet

Lineáris túlemelés-átmenetnél — a görbületváltáshoz hasonlóan — a túlemelés mértéke egyenesen arányos az ívhosszal, a túlemelési lejtő hajlása állandó, jelentős hátránya azonban, hogy az átmenet elején és a végén csatlakozása töréses.

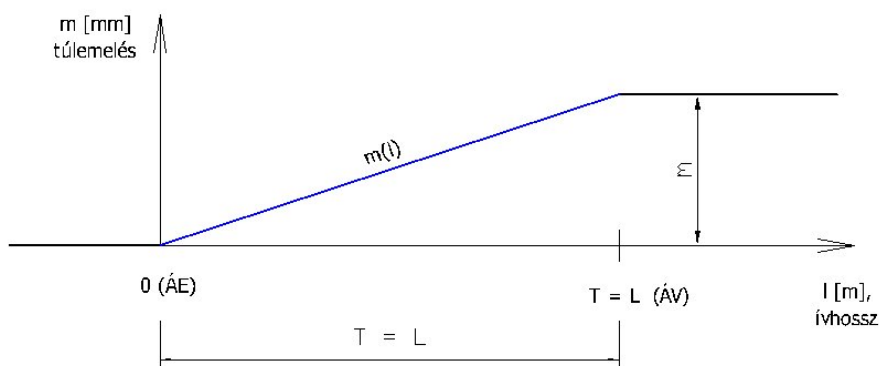
Egyenes és körív közötti lineáris átmenet túlemelés függvénye (5.9. ábra)

$$m = \frac{m_R}{L} l \quad \text{mm.} \quad (5.26.)$$

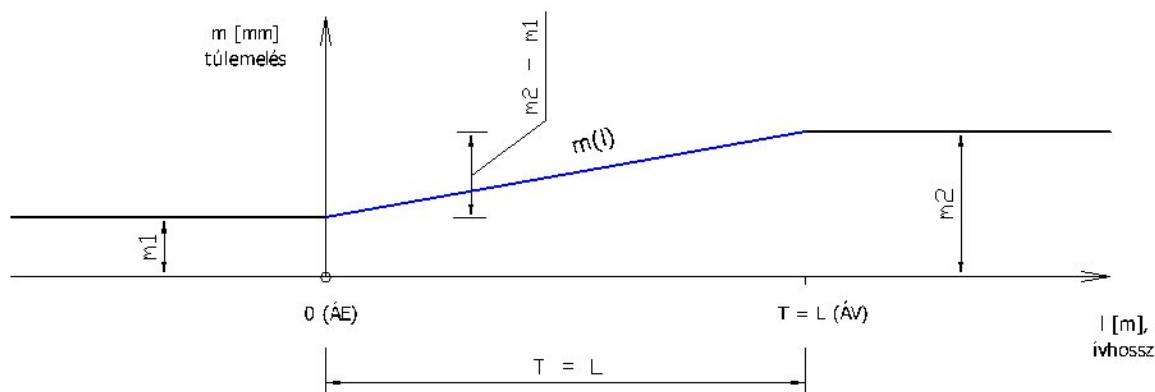
A túlemelés-átmenet hajlása az átmenet eleje- és végpontjainak kivételével

$$n = \operatorname{ctg} \alpha = 1000 \frac{L}{m_R}. \quad (5.27.)$$

5.9. ábra: Klotoid túlemelés-átmenet egyenes és körív között



5.10. ábra: Klotoid túlemelés-átmenet azonos görbületű körívek között



Azonos görbületű körívek között a lineáris túlemelés függvény (5.10. ábra)

$$m = m_1 + \frac{m_2 - m_1}{L} l \quad \text{mm.} \quad (5.28.)$$

A túlemelési lejtő hajlása az átmenet eleje- és végpontjai kivételével:

$$n = \text{ctg} \alpha = 1000 \frac{L}{m_2 - m_1}. \quad (5.29.)$$

Ellenkező görbületű körívek között a lineáris túlemelés-átmenet ordinátái (5.11. ábra)

$$y_b = \frac{m_2}{L} l \quad \text{mm;} \quad (5.30.)$$

$$y_j = \frac{m_1}{L} (L - l) \quad \text{mm;} \quad (5.31.)$$

$$y_t = \frac{m_1}{2} + \frac{m_2 - m_1}{2L} l \quad \text{mm,} \quad (5.32.)$$

ahol

$a_0 = 0,65 \text{ m/s}^2$ szabad oldalgyorsulás-nagyság esetén:

$$m_2 = 11,8 \frac{V^2}{R_2} - 100 \quad \text{mm,}$$

továbbá a görbületi zéruspont és a vízszintes pályakeresztmetszet azonossági feltételéből

$$m_1 = m_2 \frac{G_1}{G_2} = 11,8 \frac{V^2}{R_1} - 100 \frac{R_2}{R_1} \quad \text{mm.}$$

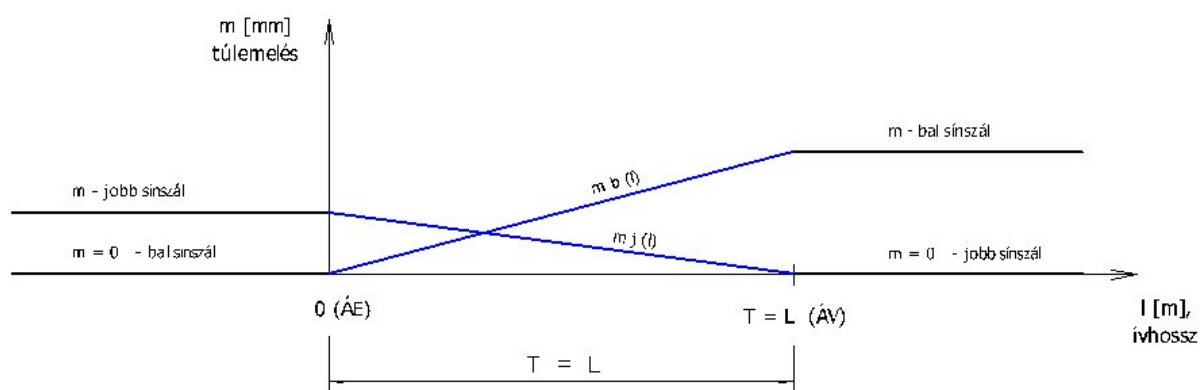
A vízszintes pályakeresztmetszet L_1 abszcisszája a (3.104. összefüggés) alapján (3.4. és 5.11. ábra):

$$L_1 = \frac{R_{0e} L}{R_1} \quad \text{m.} \quad (5.33.)$$

A jobb és a bal sín-szál közötti túlemelési lejtő hajlása az átmenet eleje- és végpontjai kivételével

$$n = \text{ctg} \alpha = 1000 \frac{L}{m_1 + m_2}. \quad (5.34.)$$

5.11. ábra: Koszinusz túlemelés-átmenet ellenkező görbületű körívek között



6. KÖRÍVES, ÉS AHOZ KAPCSOLÓDÓ ÁTMENETIÍVES GEOMETRIÁK GYAKORLATI VIZSGÁLATA

Az előzőekben tárgyalt mozgásgeometriai vizsgálatok gyakorlati bemutatására néhány egyszerű alapfeladat közelítő megoldását ismertetjük. Vizsgálataink általában kétirányúak:

- a gyorsulásvektor, ill.
- a \mathbf{h} vektor

alapján a keresett ismeretlen $f(V)$, ill. $f(R)$ függvényinek a meghatározása, majd a mértékadó állapotból kiindulva a keresett érték kiszámítása.

6.1. Az átmenetiív elhagyásának vizsgálata

Egyenes és köríves pályaszakasz abban az esetben csatlakoztatható közvetlenül, átmenetiív beépítése nélkül, ha a csatlakozási pontban sem a gyorsulás, sem a \mathbf{h} vektor nagysága nem haladja meg a megengedett küszöbértéket.

Gyorsulás alapján (2.29.) a határsugár értéke, amely felett egyenes és köríves pályaszakasz átmenetiív nélkül csatlakoztatható:

$$R_L^a = \frac{V^2}{3,6^2 |a|} \approx 0,22 \cdot V^2 \quad \text{m}, \quad (6.1.)$$

ha $|a_t| = 0,35 \text{ m/s}^2$.

Állandó sebességű mozgásnál a \mathbf{h} vektor nagyságát az (2.35.) alapján számítva és az átmenettől eltekintve, $|h| = 0,2 \text{ m/s}^3$:

$$R_L^h \approx \frac{V^3}{3,6^3 |h| d} = 0,0063 \cdot V^3 \quad \text{m}. \quad (6.2.)$$

Az R_L^a és R_L^h határfüggvényeket a **6.1. ábra** tünteti fel. Ezek alapján az a sebességérték, amely felett a vizsgálat szempontjából a \mathbf{h} vektor a mértékadó, az $R_L^a = R_L^h$ egyenlőségből

$$V_L \frac{3,6 |h| d}{|a|} \approx 35 \quad \text{km/h}. \quad (6.3.)$$

Állandó gyorsulású mozgásnál ($a_t = \text{áll.}$) az (2.19.) alapján és az érintőirányú $v^3 G^2$ nagyságú összetevő figyelmen kívül hagyásával

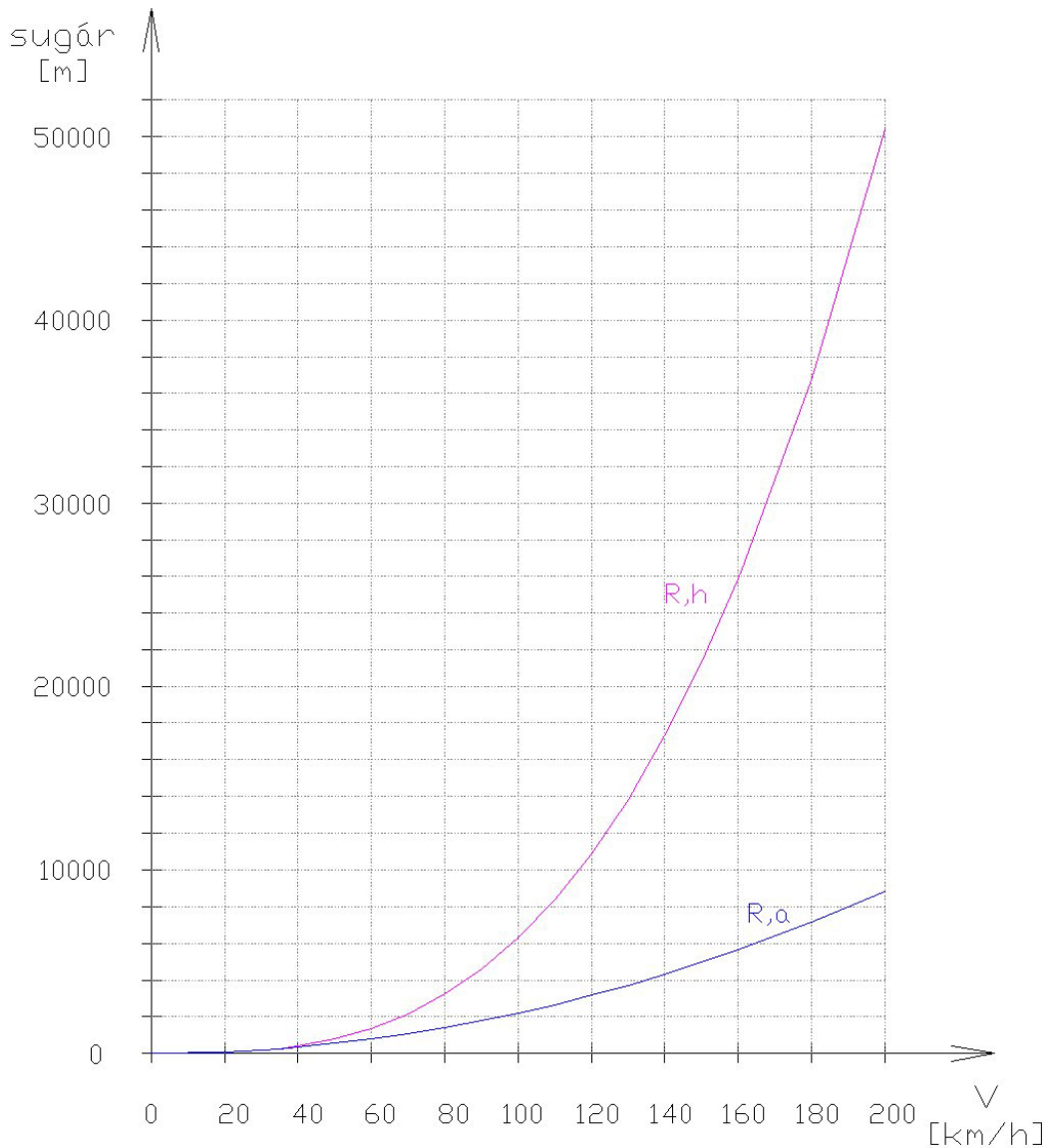
$$|h| \approx 3va_t G + v^3 \frac{G}{d},$$

amiből $|h| = 0,2 \text{ m/s}^3$ és $|a_t| = 0,35 \text{ m/s}^2$ figyelembevételével az átmenetiív elhagyásának határsugara

$$R_L^h = 1,46V + 0,0063V^3 \quad \text{m}. \quad (6.4.)$$

(megemlítjük, hogy a \mathbf{h} vektor közelítő számításánál az érintőirányú $v^3 G^2$ összetevő elhagyása a több ezer méteres határsugár értékeknél csupán néhány cm-es hibát jelent.)

6.1. ábra: R_L^a és R_L^h határfüggvények, átmenetiív elhagyása esetén



6.2. Az átmenetiív legkisebb hosszának megállapítása

Az átmenetiíves pályán a görbület állandó változása miatt a gyorsulásszemlélet alapján az átmenetiív hossza nem határozható meg. Ennek következménye, hogy számos vasút az átmenetiív hosszát empirikus összefüggés alapján ($L = 10 \cdot V \cdot m$, ahol V a sebesség, km/h; m a túlemlés, m) kényszerül megválasztani.

A harmadrendű mozgásjellemző alapján az átmenetiív hosszát a \mathbf{h} vektor (2.19.) képletéből annak figyelembevételével számítjuk, hogy az átmenetiív mértékadó pontjában se haladja meg a \mathbf{h} vektor nagysága a megengedett küszöbértéket.

Hullámos görbületváltozású átmenetiívek (koszinusz-, negyedfokú parabola-, szinuszos átmenetiív) esetén a mértékadó pont az átmenetiív közepe. A (2.19.) alapján a \mathbf{h} vektor nagyságban rendezés után a hullámos görbületváltozású átmenetiívek hosszára a következő hatodfokú egyenletet kapjuk:

$$\left(\frac{v^6}{16R^4} + \frac{9v^2|a_t|^2}{4R^2} - |h|^2 \right) L^6 + c_1 \frac{v^4|a_t|}{R^2} L^5 + c_2 \frac{v^6}{R^2} L^4 + c_3 m^2 v^6 = 0, \quad (6.5.)$$

amelynek egyetlen pozitív gyöke az egyenlet megoldása.

6.3. A megengedhető legnagyobb sebesség meghatározása túlemelés és átmenetiív nélküli körívben

A gyakorlatban ez az eset a nagy sugarú körívekben, ill. a nem túlemelt pályában fekvő kitérőívben fordul elő.

Gyorsulás alapján (2.29.) a megengedhető legnagyobb sebesség

$$V^a = 3,6\sqrt{|a|R} \approx 2,13\sqrt{R} \quad \text{km/h}, \quad (6.6.)$$

ha $|a_t| = 0,35 \text{ m/s}^2$.

6.2. ábra: $A V^a$, ill. V^h határfüggvények, túlemelés és átmenetiív nélküli körívben



A \mathbf{h} vektort figyelembe véve ($|h| = 0,2 \text{ m/s}^3$), és a (2.35.) szerint

$$V^h = 3,6\sqrt[3]{|a|R} \approx 5,41\sqrt[3]{R} \quad \text{km/h}, \quad (6.7.)$$

A V^a , ill. V^h határfüggvényeket az **6.2. ábra** tünteti fel. Ezek figyelembe vételével az a határsugár, amely felett a megengedhető legnagyobb sebesség számításánál a \mathbf{h} vektor *a mértékadó*, a $V^a = V^h$ egyenlőségből

$$R_V = \frac{|h|^2 d^2}{|a|^3} \approx 270 \quad \text{m} \quad (6.8.)$$

6.4. A megengedhető legkisebb körívsugár vizsgálata átmenetiíves körívnél

Gyorsulás alapján a túlemelés a megengedhető legkisebb körívsugár értéke

$$R_{\min}^a = \frac{0,0118V^2}{m + 0,153|a|} \quad \text{m}, \quad (6.9.)$$

ahol

$m [\text{mm}]$ — a túlemelés.

A harmadrendű mozgásjellemző (2.34.) képletből

$$R_{\min}^h = \frac{\alpha V^3}{3,6^3 |h| L} \quad \text{m}. \quad (6.10.)$$

az R_{\min}^a (6.9.) és R_{\min}^h (6.10.) képletet összehasonlítva feltétlen említést érdemel, hogy amíg a gyorsulás alapján számított legkisebb körívsugár – adott sebesség mellett – csupán a tiszta körív jellemzőitől (túlemelés, $|a|$) függ, és nem vesz tudomást az átmenetiív meglétéről, addig a \mathbf{h} vektor nagyságából számítható körívsugár az *átmenet folytonosságára* (L , α) *hívja fel a figyelmet*. Az R_{\min}^h (6.10.) összefüggésből láthatjuk továbbá, hogy az átmenet L hosszának növelésével az R_{\min} értéke csökkenthető.

Az állandó túlemelésű körívet tehát mindenkor az átmenettel együtt mint *egységes geometriát* kell vizsgálnunk, mivel a vasúti pálya geometriai folytonosságból következően állandó túlemelésű tiszta körív csak átmenettel együtt fordulhat elő. Az állandó túlemelésű körívnek önmagában történő, a pályából kiszakított vizsgálata állandó sebességű mozgásnál félrevezető is lenne, ugyanis ez esetben csak oldalirányú gyorsulás ébred, az oldalirányú \mathbf{h} vektor zérus. Ez viszont a vizsgálat leszűkítését és a mértékadó állapot figyelmen kívül hagyását okozná.

Az R_{\min}^a és R_{\min}^h függvényének egyenlőségéből meghatározható az a V_R sebességértéket, amely a felett a \mathbf{h} vektor hatása a mértékadó:

$$V_R = \frac{3,6|h|l}{\alpha \left(|a| + \frac{m}{0,153} \right)} \text{ km/h} \quad (6.11.)$$

6.5. A megengedhető legnagyobb sebesség meghatározása átmenetiíves körív esetén

Gyorsulás alapján a túlemelés a megengedhető legnagyobb sebesség

$$V_{\max}^a = \sqrt{\frac{m + 0,153|a|}{0,0118}} R \text{ km/h.} \quad (6.12.)$$

A **h** vektor (2.34.) nagyságából

$$V_{\max}^h = 3,6 \sqrt{\frac{|h|RL}{\alpha}} \text{ km/h,} \quad (6.13.)$$

A V_{\max}^a és V_{\max}^h függvények egyenlőségéből meghatározható az a sugárérték, amelyeknél nagyobb sugarú körívek esetén a **h** vektor a mértékadó:

$$R_V = \frac{3|h|^2 L^2}{\alpha \left(|a| + \frac{m}{0,153} \right)^3} \text{ m.} \quad (6.14.)$$

6.6. A függőleges lejtöréseket lekerekítő körívsugár vizsgálata

Gyorsulás alapján (2.29.) a függőleges síkú lekerekítő körív sugara

$$R_f^a = \frac{V^2}{3,6^2 |a_f|} \approx 0,22 V^2 \text{ m,} \quad (6.15.)$$

ahol

$|a_f|$ a függőleges síkban megengedett gyorsulás nagysága ($|a_f| = 0,35 \text{ m/s}^2$).

A harmadrendű mozgásjellemző (2.35.) képletből

$$R_f^h = \frac{V^3}{3,6^3 |h_f| d} \approx \frac{V^3}{238} \text{ m.} \quad (6.16.)$$

ha a függőleges síkú mozgást figyelembe véve $|h_f| = 0,3 \text{ m/s}^3$.

Az (6.15.) és (6.16.) alapján $R_f^a = R_f^h$ egyenlőségből számítgató sebességhatár, amely felett a \mathbf{h} vektor a mértékadó:

$$V_f = 3,6 \frac{|h|d}{|a|} \approx 52,5 \text{ km/h} \quad (6.17.)$$

6.7. Számpéldák köríves, és ezekhez kapcsolódó átmenetiíves geometriák gyakorlati vizsgálatára kinematikai szempontból

Megvizsgálandó két ellenkező görbületi körív csatlakoztatása kinematikai szempontból négy esetben:

1. inflexiósan csatlakoztatva, közbenső egyenes nélkül,
2. átmenetiív nélkül, közbenső egyenessel csatlakoztatva,
3. a két túlemelt körív között rövid átmenetiív helyezkedik el,
4. a két túlemelt körív között megfelelő hosszúságú átmenetiív van.

Valamennyi esetben

- a körívek sugara: $R_1 = 1000 \text{ m},$
 $R_2 = 1200 \text{ m},$
- szabad oldalgyorsulás legnagyobb értéke: $a_a = 0,65 \text{ m/s}^2,$
- oldalgyorsulás-változás legnagyobb értéke: $h = 0,4 \text{ m/s}^3.$

Meghatározandó valamennyi esetben a pályán engedélyezhető legnagyobb sebesség, a gyorsulás és a gyorsulás-változás alapján.

6.7.1. Inflexiósan, közbenső egyenes nélkül csatlakoztatott körívek

A körívek és az egyenesek geometriáját és görbületét a **6.3. ábra** szemlélteti. A pálya görbületi ábrája szakadásos. Legnagyobb ugrás a görbületi ábrában:

$$\frac{1}{R_{0e}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \Rightarrow R_{0e} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = \frac{1000 \cdot 1200}{1000 + 1200} = 545,454 \text{ m}.$$

Az engedélyezhető legnagyobb sebesség

- a gyorsulás (2.29. összefüggés) alapján ($a = 0,65 \text{ m/s}^2$):

$$V = 3,6 \cdot \sqrt{a \cdot R_{0e}} = 3,6 \cdot \sqrt{0,65 \cdot 1000} = 91,78 \text{ km/h}.$$

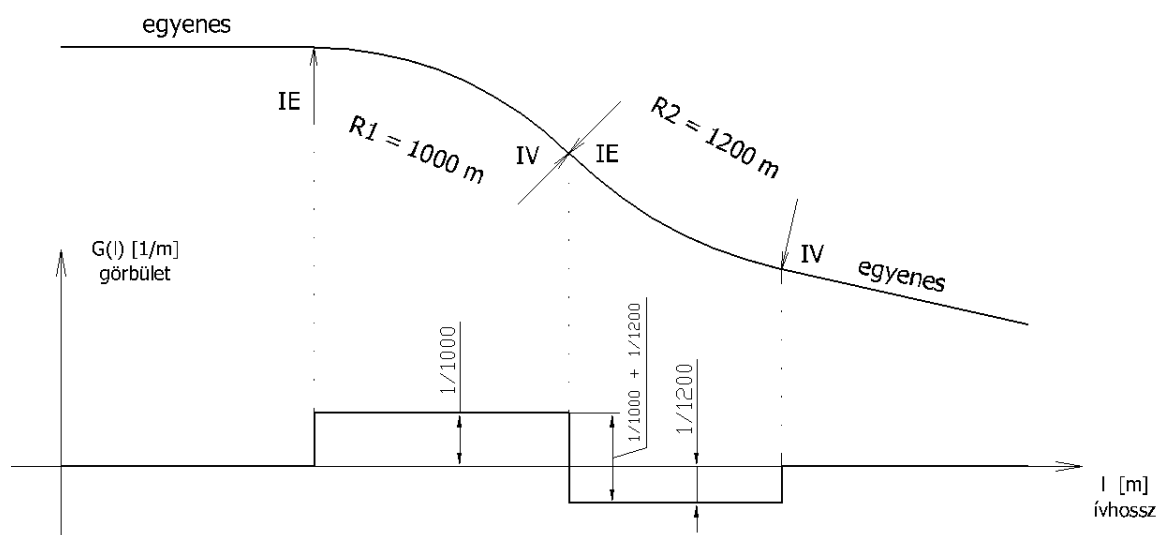
- a gyorsulás-változás alapján (2.35. összefüggés, a görbületi ábra szakadásos) ($h = 0,4 \text{ m/s}^3$):

$$V = 3,6 \cdot \sqrt[3]{h \cdot R_{0e} \cdot d} = 3,6 \cdot \sqrt[3]{0,4 \cdot 545,454 \cdot 17,00} = 55,73 \text{ km/h}.$$

A fenti eredmények és a kerekítés után adódik, hogy a 6.3. ábrán vázolt geometrián az engedélyezhető legnagyobb sebesség:

$$V = 50 \text{ km/h.}$$

6.3. ábra: A körívek és az egyenesek geometriája és görbülete



6.7.2. Átmenetiív nélkül, közbelső egyenessel csatlakoztatott körívek

A körívek és az egyenesek geometriáját és görbületét a 6.4. ábra szemlélteti. A pálya görbületi ábrája szakadásos. Legnagyobb ugrás a görbületi ábrában:

$$\frac{1}{R_{0e}} = \frac{1}{R_1} \Rightarrow R_{0e} = R_1 = 1000 \text{ m}$$

Az engedélyezhető legnagyobb sebesség

— a gyorsulás (2.29. összefüggés) alapján ($a = 0,65 \text{ m/s}^2$):

$$V = 3,6 \cdot \sqrt{a \cdot R_{0e}} = 3,6 \cdot \sqrt{0,65 \cdot 1000} = 91,8 \text{ km/h.}$$

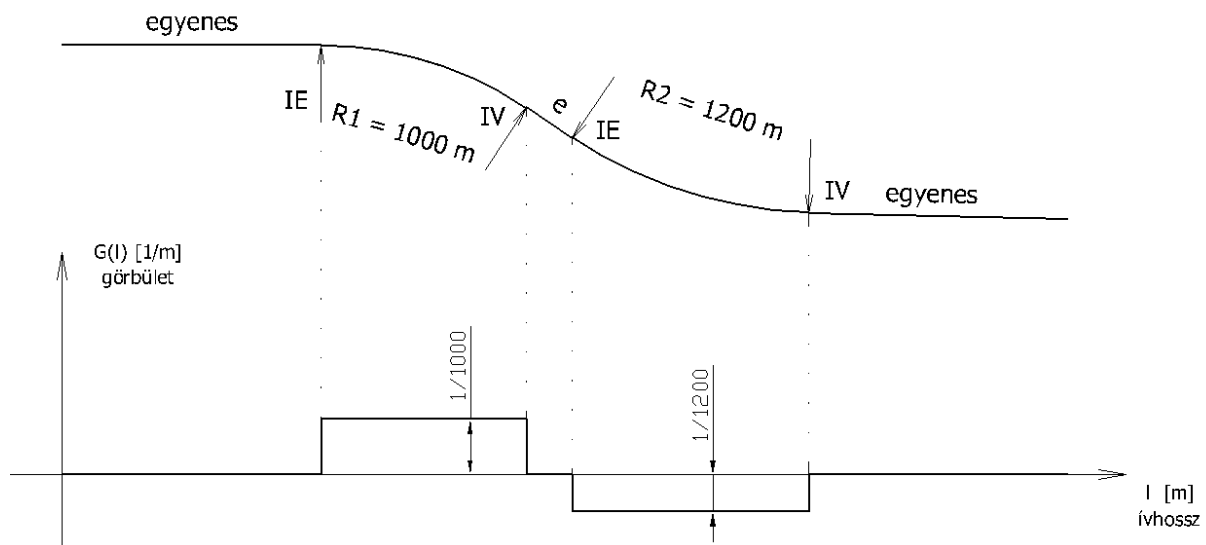
— a gyorsulás-változás alapján (2.35. összefüggés, a görbületi ábra szakadásos) ($h = 0,4 \text{ m/s}^3$):

$$V = 3,6 \cdot \sqrt[3]{h \cdot R_{0e} \cdot d} = 3,6 \cdot \sqrt[3]{0,4 \cdot 1000 \cdot 17,00} = 68,2 \text{ km/h.}$$

A fenti eredmények és a kerekítés után adódik, hogy a 6.4. ábrán vázolt geometrián az engedélyezhető legnagyobb sebesség:

$$V = 60 \text{ km/h.}$$

6.4. ábra: A körívek és az egyenesek geometriája és görbülete



6.7.3. Rövid átmenetiívvel csatlakoztatott körívek

A körívek és a koszinusz átmenetiívek geometriáját és görbületét a **6.5. ábra** szemlélteti. Az egyenesek és a körívek csatlakozásánál megfelelően hosszú átmenetiív van, az ellenkező görbületű ívek között rövid átmenetiív helyezkedik el, melynek hossza.

$$L = 100 \text{ m.}$$

A pálya görbületi ábrája folytonos. A görbület legnagyobb megváltozása:

$$\frac{1}{R_{0e}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \Rightarrow R_{0e} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = \frac{1000 \cdot 1200}{1000 + 1200} = 545,454 \text{ m}$$

A számítások során, a körívekben a lehető legnagyobb túlemelés kialakítását feltételezzük ($m = 150 \text{ mm}$) (**Függelék 4. táblázat**):

$$R_1 = 1000 \text{ m és } m = 150 \text{ mm, } \Rightarrow V = 140 \text{ km/h.}$$

Az engedélyezhető legnagyobb sebesség

— a gyorsulás és a túlemelés alapján:

$$V = 140 \text{ km/h,}$$

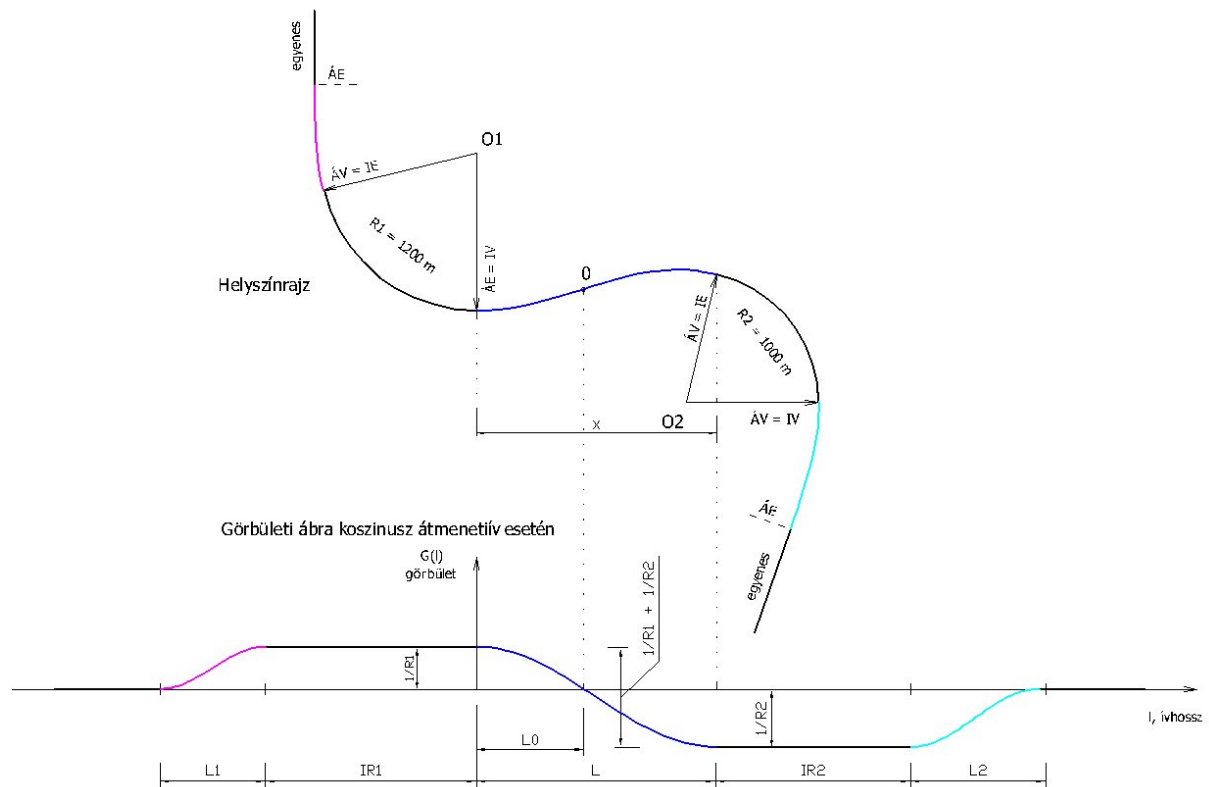
— a gyorsulás-változás alapján (2.34. összefüggés, a görbületi ábra folytonos), ($h = 0,4 \text{ m/s}^3$):

$$V = 3,6 \cdot \sqrt[3]{\frac{h \cdot R_{0e} \cdot L}{\alpha}} = 3,6 \cdot \sqrt[3]{\frac{0,4 \cdot 545,454 \cdot 100}{\pi / 2}} = 86,53 \text{ km/h.}$$

A fenti eredmények és a kerekítés után adódik, hogy a vizsgált geometrián az engedélyezhető legnagyobb sebesség:

$$V = 80 \text{ km/h.}$$

6.5. ábra: A körívek és az átmenetiívek (koszinusz) geometriája és görbülete



6.7.4. Megfelelő hosszúságú átmenetiívvel csatlakoztatott körívek

A körívek és a koszinusz átmenetiívek geometriáját és görbületét a korábbi **6.5. ábra** szemlélteti. Az egyenesek és a körívek között mindenhol megfelelő hosszúságú átmenetiív van. A pálya görbületi ábrája folytonos.

A pályára engedélyezhető legnagyobb sebesség a túlemelés értékekből határozható meg. $R = 1000$ m sugarú ívben (Függelék 4. táblázat)

$$m = 150 \text{ mm}$$

túlemelés alkalmazása esetén legfeljebb

$$V = 140 \text{ km/h}$$

sebesség engedélyezhető. Ennél a sebességnél az átmenetiívek hossza (**Függelék 1.a., 2.a. és 3.a. táblázatból**):

- egyenes és $R = 1000$ m sugarú ív csatlakozásakor: $L = 244$ m,
- az ellenkező görbületű ívek között: $L = 421$ m,
- egyenes és $R = 1200$ m sugarú ív csatlakozásakor: $L = 201$ m.

A fenti eredmények és a kerekítés után adódik, hogy a vizsgált geometrián az engedélyezhető legnagyobb sebesség:

$$V = 140 \text{ km/h.}$$

7. TISZTA ÁTMENETIÍVES GEOMETRIÁK ALKALMAZÁSA

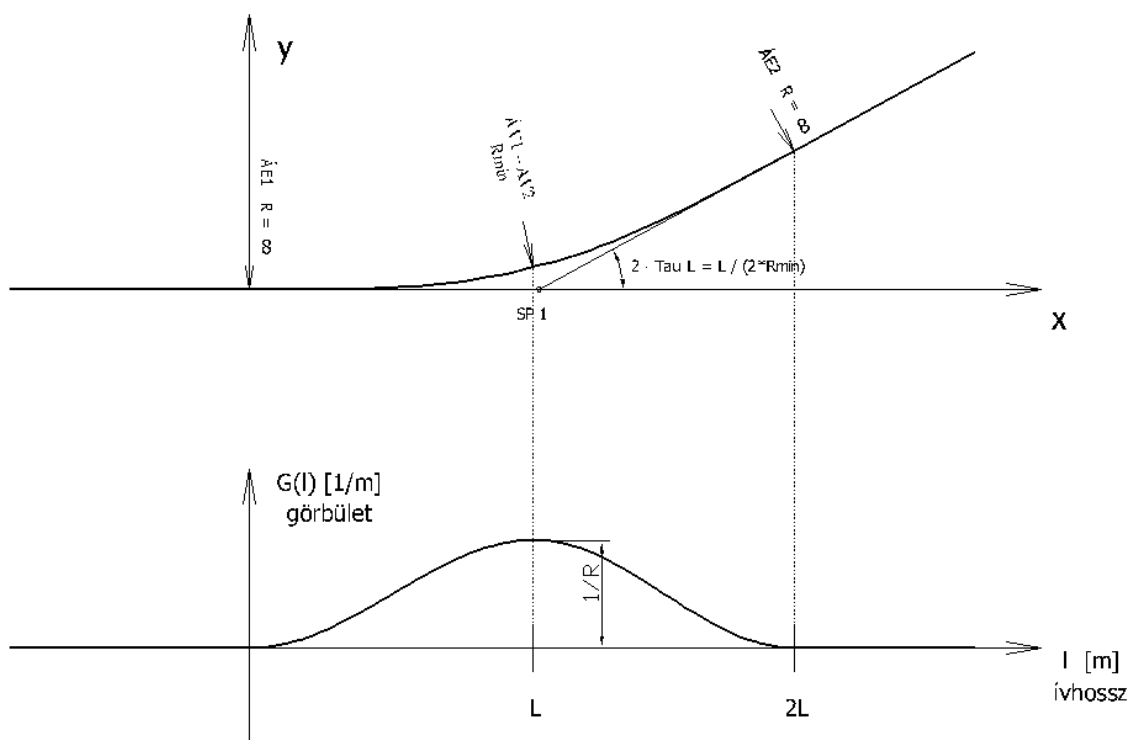
7.1. Tiszta átmenetiíves ív

7.1.1. Geometriai és kinematikai áttekintés

Kis irányeltérésű egyenes vágányszakaszok csatlakozásánál kis középponti szögű körívek helyett mozgásgeometriailag előnyösebb megoldást jelent a tiszta átmenetiíves ív építése. Meglévő pályaívek átépítésekor pedig a sebesség felemelésének gyakori akadálya, hogy a hosszabb átmenetiíves körív csak jelentős építési többletmunkával alakítható ki. Ebben az esetben különösen előnyös a tiszta átmenetiíves megoldás, amikor is az ív lényegében helyben maradhat.

Két közvetlen csatlakozású átmenetiívből kialakított tiszta átmenetiíves ív helyszínrajzát és a koszinusz átmenetiíves geometria görbületfüggvényét **7.1. ábra** tünteti fel.

7.1. ábra: Tiszta átmenetiíves ív geometriája és görbületi viszonyai koszinusz átmenetiív esetén



A tervezés menete:

1. Tiszta átmenetiíves ív esetén az átmenetiív hosszának $L = f(V)$ függvényét a harmadrendű jellemzővel határozzuk meg. Egyenletes mozgásnál ($V = \text{áll.}$) és síkban fekvő pálya esetén ($m = 0$) a h vektor nagysága

$$|h| = \frac{V^2}{3,6^2} \sqrt{G^4 + \left(\frac{dG}{dl}\right)^2} \approx \frac{V^3}{3,6^2} \frac{dG}{dl} \quad [\text{m/s}^2] \quad (7.1.)$$

minthogy $G^4 \ll 1$.

A vizsgált átmenetiívek dG/dl derivált függvényeinek legnagyobb értékeit figyelembe véve

$$\left(\frac{dG}{dl}\right)_{\max} = \frac{\alpha}{L \cdot \rho_{\min}} \quad [\text{m}^{-2}] \quad (7.2.)$$

ahol α értéke koszinusz átmenetiívnél $\pi/2$.

Az átmenetiív hosszának függvénye (7.1.) és (7.2.) alapján

$$L = \frac{\alpha \cdot V^3}{3,6^2 \cdot |h| \cdot \rho_{\min}} \quad [\text{m}], \quad (7.3.)$$

ahol

$\rho_{\min} [\text{m}]$: az ÁV pontban a görbületi sugár értéke.

A vizsgált koszinusz átmenetiívnek megfelelő α és $|h|$ értékeinek behelyettesítésével az $L = f(V)$ függvény

$$L_{\cos} = \frac{1,57 \cdot V^3}{0,4 \cdot 3,6^2 \cdot \rho_{\min}} \quad [\text{m}] \quad (7.4.)$$

2. A tiszta átmenetiíves ívet alkotó átmenetiívek megengedhető legnagyobb $L^{\max}(\text{m})$ hosszát abból a feltételből állapítjuk meg, hogy az ÁV pontban a görbület ne lépje túl a megengedett legnagyobb görbület (ill. a görbületi sugár ne legyen kisebb a megengedett legkisebb körívsugárnál).

A megengedhető legnagyobb görbület értéke $V = \text{áll.}$ és $m = 0$ esetben az $\mathbf{a} = \frac{dv}{dt} \mathbf{t} + v^2 G \mathbf{n} = \mathbf{a}_t + \mathbf{a}_n$ összefüggést felhasználva

$$G_{\max} = \frac{1}{\rho_{\min}} = \frac{a_0}{v^2} = \frac{0,65 \cdot 3,6^2}{V^2} \quad [\text{m}] \quad (7.5.)$$

Az előző összefüggésnek a (7.4.) képletbe helyettesítése után az átmenetiívek megengedhető legnagyobb hossza a sebesség függvényében

$$L_{\cos}^{\max} = 0,7090 \cdot V \quad [\text{m}] \quad (7.6.)$$

3. A tervezés során adott középponti szög esetén a **7.1. ábra** alapján $2\tau_L = L/\rho_{\min}$ és

$$L = 2 \cdot \tau_L \cdot \rho_{\min} = 2 \cdot \tau_L \cdot \frac{V^2}{a_0 \cdot 3,6^2} \quad [\text{m}] \quad (7.7.)$$

ahol:

$\tau_L [\text{rad}]$: a csatlakozó egyenesek által alkotott törésszög,

V [km/h] : a tervezési sebesség,
 a_0 [m/s²] : a legnagyobb szabad oldalgyorsulás.

7.1. táblázat: Tiszta átmenetiívénél megengedhető legnagyobb középponti szög ($2 \cdot \tau_L$) értéke

Sebesség [km/h]	Legnagyobb középponti szög értéke koszinusz átmenetiív esetén	
	radián	fok-perc-másodperc
60	0,099549	5°42'13,5"
80	0,074662	4°15'40,1"
100	0,059730	3°25'20,1"
120	0,049775	2°51'06,8"
140	0,042664	2°26'40,1"
160	0,037331	2°08'20,1"
180	0,033183	1°54'04,5"
200	0,029865	1°42'40,1"

4. A (7.3.) és a (7.7.) egyenlősége alapján, ρ_{min} értékének a (7.5.) szerinti behelyettesítése és a szükséges műveletek elvégzése után

$$2\tau_L = \frac{3,6 \cdot \alpha \cdot a_0^2}{|h| \cdot V} \quad (7.8.)$$

az a legnagyobb középponti szögérték, amelynél adott sebesség esetén még tervezhetünk tiszta átmenetiíves ívet. Ennél kisebb szögek esetén tiszta átmenetiíves ív mindenkor alkalmazható, és ez esetben a középponti szög ismeretében a (7.7.)-ből számítjuk az átmenetiív hosszát.

A **7.1. táblázat** a sebesség függvényében tartalmazza tiszta koszinusz-átmenetiíves ív esetén a legnagyobb középponti szögek (7.8.) szerinti értékeit.

7.1.2. Számpélda

Meghatározandó a koszinusz átmenetiívek hossza az alábbi feltételek mellett:

- sebesség: $V = 120$ km/h
- középponti szög: $\alpha = 1^\circ 53' 39''$,
- szabad oldalgyorsulás legnagyobb értéke: $a_a = 0,65$ m/s²,
- oldalgyorsulás-változás legnagyobb értéke: $h = 0,4$ m/s³.

A középponti szög értéke kisebb, mint a **7.1. táblázatban** megadott legnagyobb érték, amelynél az adott kinematikai mozgásjellemzők esetén tiszta átmenetiíves ív építhető. Az adott középponti szög megegyezik az átmenetiívek végérintőszögeinek összegével:

$$\alpha = 2 \cdot \tau_L = 1^\circ 53' 39'' = 0,033059 \text{ rad.}$$

Az átmenetiív hossza a 7.7. összefüggés alapján:

$$L = 2 \cdot \tau_L \cdot \frac{V^2}{a_0 \cdot 3,6^2} = 0,033059 \cdot \frac{120^2}{0,65 \cdot 3,6^2} = 56,512 \text{ m.}$$

7.2. Vágányelhúzás négy átmenetiívvel

7.2.1. Geometriai és kinematikai áttekintés

Vágányelhúzáson a vágánynak önmagával párhuzamos eltolását értjük, amelynek mozgásgeometriailag és helyigény szempontjából rendkívül előnyös, négy átmenetiív közvetlen csatlakozásával való megoldását szemlélteti a **7.2. ábra**. Az átmenetiívek közvetlen kapcsolódása következtében valamennyi átmenetiív túlemelés nélküli, így $m = 0$.

Az átmenetiív hosszakat az

$$L_{\cos} = \frac{1,57 \cdot V^3}{0,4 \cdot 3,6^2 \cdot \rho_{\min}} \quad [\text{m}], \quad (7.9.)$$

a megengedhető legnagyobb értéküket az

$$L_{\cos}^{\max} = 0,7090 \cdot V \quad [\text{m}] \quad (7.10.)$$

összefüggéssel határozzuk meg.

A vágányszéthúzás K szimmetria középpontjának közelítő ordinátája (**7.2. ábra**)

$$y_k = \frac{\Delta}{2} \approx \frac{L^2}{\rho_{\min}} \quad [\text{m}] \quad (7.11.)$$

ahol Δ [m] a vágányszéthúzás tengelytávolsága.

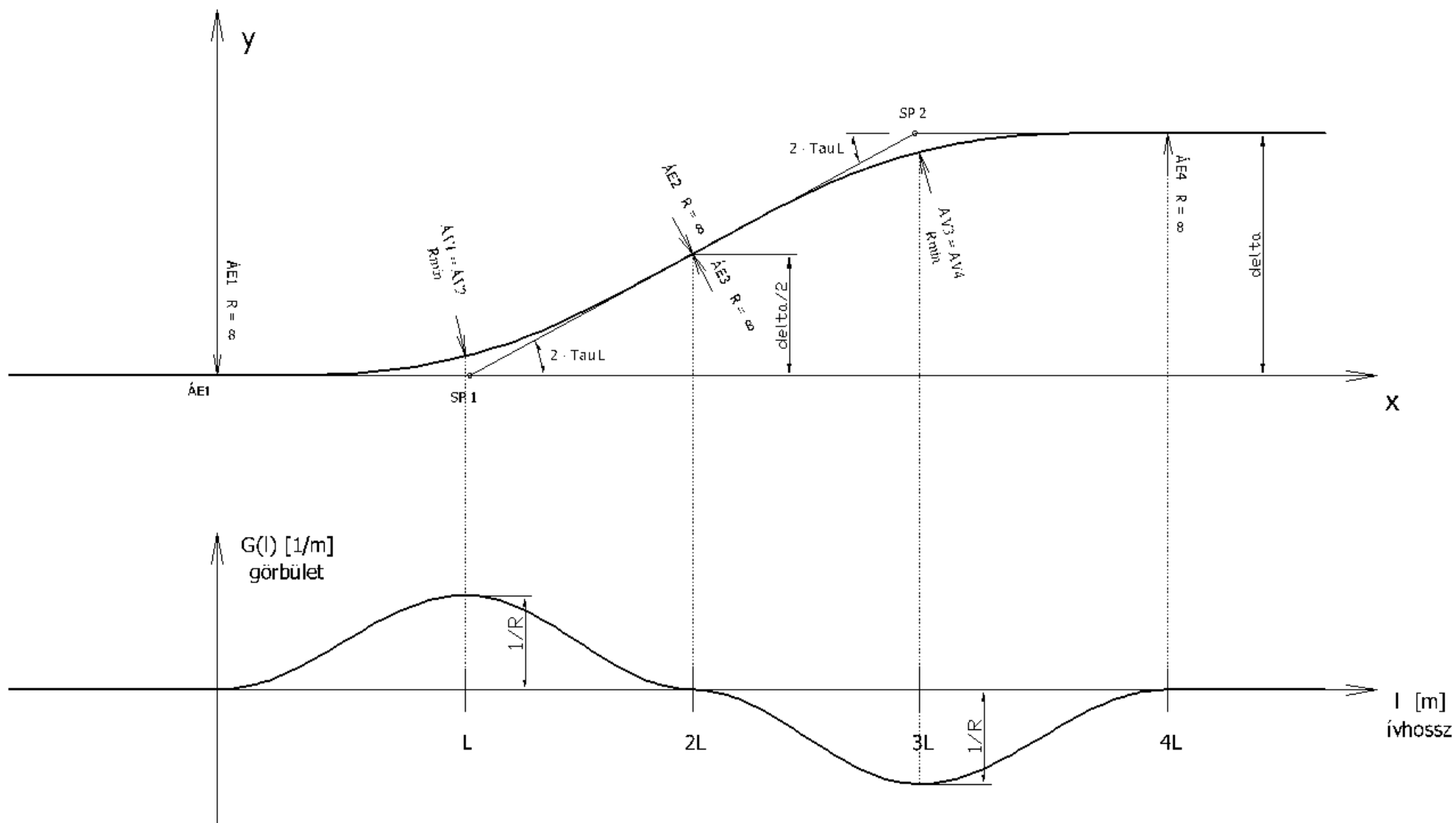
Mínthogy lapos átmenetiívekről van szó, másodfokúparabola-közelítéssel és átmenetiívenként az átlagos görbület figyelembevételével

$$y_k \approx \frac{1}{2} G_{\text{átl}} x^2 \approx \frac{1}{2 \cdot 2 \rho_{\min}} (2L)^2 = \frac{L^2}{\rho_{\min}} \quad [\text{m}] \quad (7.12.)$$

A (7.11.) összefüggésből kifejezett ρ_{\min} értékét behelyettesítve az (7.9.) képletbe, állandó sebesség esetén a vágányszéthúzás átmenetiíveinek $L = f(\Delta)$ függvénye

$$L_{\cos} = \frac{V}{3,6} \sqrt[3]{\frac{1,57 \cdot \Delta}{2 \cdot h}} \quad [\text{m}] \quad (7.13.)$$

Vágányelhúzás geometriája és görbülete négy koszinusz átmenetiív alkalmazásával



Az előző képletben a $\Delta = 1,0$ m behelyettesítésével

$$L_{\cos} = 0,3478 \cdot V \quad [\text{m}]$$

adódik.

A vágányszéthúzás legnagyobb mértékét a (7.10.), illetve a (7.13.) képletekből az azonos geometriához tartozó képletek egyenlősége alapján határozhatjuk meg:

$$\Delta_{\max} = \frac{2 \cdot \alpha^2 \cdot a_0^3}{|h|^2} \quad [\text{m}] \quad (7.14.)$$

Az $a_0 = 0,65 \text{ m/s}^2$, továbbá az átmenetiív geometriájától függően h és α megfelelő numerikus értékeinek behelyettesítése után a vágányszéthúzás legnagyobb értéke koszinusz átmenetiív esetén:

$$\Delta_{\max} = 8,47 \text{ m.}$$

7.2.2. Számpélda

Megtervezendő a vágányelhúzás geometriája az alábbi kiindulási adatok mellett:

- sebesség: $V = 140 \text{ km/h}$,
- vágányelhúzás mértéke: $\Delta = 5,00 \text{ m}$,
- szabad oldalgyorsulás legnagyobb értéke: $a_0 = 0,65 \text{ m/s}^2$,
- oldalgyorsulás-változás legnagyobb értéke: $h = 0,4 \text{ m/s}^3$.

Az átmenetiív hossza a 7.13. összefüggés alapján:

$$L_{\cos} = \frac{V}{3,6} \sqrt[3]{\frac{\pi \cdot \Delta}{4 \cdot h}} = \frac{140}{3,6} \sqrt[3]{\frac{\pi \cdot 5,00}{4 \cdot 0,4}} = 83,271 \text{ m.} \quad (7.15.)$$

A legkisebb görbületi sugár az átmenetiív vége pontban a 7.11. képlet szerint:

$$\rho_{\min} = \frac{2 \cdot L^2}{\Delta} = \frac{2 \cdot (83,271)^2}{5,00} = 2773,624 \text{ m.} \quad (7.16.)$$

A **7.2. ábra** szerinti első átmenetiív végének (ÁV1 = ÁV2 pont) koordinátái (3.24. és 3.25. alapján):

$$X = L \left(1 - 0,02267 \frac{L^2}{R^2} \right) = 83,271 \cdot \left(1 - 0,002267 \frac{83,271^2}{2773,624^2} \right) = 83,271 \text{ m,} \quad (7.17.)$$

$$Y = L^2 \left(\frac{0,14868}{R} - 0,00274 \frac{L^2}{R^3} \right) = 83,271^2 \left(\frac{0,14868}{2773,624} - 0,00274 \frac{83,271^2}{2773,624^3} \right) = 0,3717 \text{ m.} \quad (7.18.)$$

A végérintő szöge az $\dot{A}V1 = \dot{A}V2$ (az első átmenetiív végén) és az $\dot{A}V3 = \dot{A}V4$ pontokban (7.2. ábra) a 3.21. összefüggés alapján:

$$\tau_L = \frac{L}{2R} = \frac{83,271}{2 \cdot 2773,624} = 0,015011 \text{ rad} = 0^\circ 51' 36,29''. \quad (7.19.)$$

Az érintőnek a szöge az $\dot{A}E2 = \dot{A}E3$ pontban (a geometria szimmetria középpontjában):

$$2 \cdot \tau_L = 1^\circ 43' 12,58'' \quad (7.20.)$$

Az átmenetiívek rövidebb és hosszabb tangenshossza a 3.2. ábra és a 3.30. – 3.31. összefüggések alapján:

$$t_r = Y \frac{1}{\sin \tau_L} = \frac{0,3717}{\sin 0^\circ 51' 36,3''} = 24,7623 \text{ m}. \quad (7.21.)$$

$$t_h = X - t_r \cdot \cos \tau_L = 83,271 - 24,7623 \cdot \cos 0^\circ 51' 36,3'' = 58,5114 \text{ m}, \quad (7.22.)$$

Az átmenetiívek jellegzetes pontjainak koordinátáit és számítási képleteit a 3.2. és a 7.2. ábrák alapján a 7.2. táblázat foglalja össze. A számítások során kihasználjuk, hogy a vágányelhúzás geometriája középpontosan szimmetrikus

7.2. táblázat: Az átmenetiívek jellegzetes pontjainak koordinátái és számítási képletei

A pont jelölése	x koordináta [m]		y koordináta [m]	
	jelölése	számítása	jelölése	számítása
$\dot{A}E1$	$\dot{A}E1x$	0	$\dot{A}E1y$	0
$\dot{A}V1 = \dot{A}V2$	$\dot{A}V1x$	$X = 83,271$	$\dot{A}V1y$	$Y = 0,372$
$\dot{A}E2 = \dot{A}E3$	$\dot{A}E2x$	$\dot{A}V1x + t_r \cdot \cos \tau_L + t_h \cdot \cos(2 \cdot \tau_L) = 166,516$	$\dot{A}E2y$	$\dot{A}V1y + t_r \cdot \sin \tau_L + t_h \cdot \sin(2 \cdot \tau_L) = 2,500 = \frac{\Delta}{2}$
$\dot{A}V3 = \dot{A}V4$	$\dot{A}V3x$	$2 \cdot \dot{A}E2x - X = 249,760$	$\dot{A}V3y$	$\Delta - Y = 4,628$
$\dot{A}E4$	$\dot{A}E4x$	$2 \cdot \dot{A}E2x = 333,031$	$\dot{A}E4y$	$\Delta = 5,000$
SP1	SP1x	$\dot{A}E2x - \frac{\Delta}{2 \cdot \sin(2 \cdot \tau_L)}$	SP1y	0
SP2	SP1x	$\dot{A}E2x + \frac{\Delta}{2 \cdot \sin(2 \cdot \tau_L)}$	SP2y	$\Delta = 5,000$

A vágányelhúzás teljes hossza megegyezik az $\dot{A}E4$ pont x koordinátájával.

$$H = \dot{A}E4x = 333,031 \text{ m}. \quad (7.23.)$$

8. KITÉRŐK KINEMATIKAI VIZSGÁLATA

A kényszerpályás vasúti közlekedés jellegéből következően a pálya — jármű kapcsolatban különösen fontos — ugyanakkor a folyóvágánnyal összehasonlítva lényegesen összetettebb — feladat hárul a kitérőkre. A megnövekedett feladatok, továbbá a vasúti vágánynak mind geometriailag, mind szerkezetileg megkülönböztetett fontosságú elemei, és összetett feladatok következtében fokozott fenntartási igényűek.

Az előzőkből egyértelműen következik, hogy a kitérők helyes geometriai kialakítását a pálya — jármű rendszert figyelembe véve, a jármű mozgásának megfelelően kell megválasztani, és egyben a kitérők számát a korszerű vágánykapcsolatok, állomások kialakításánál az üzem elvégzéséhez feltétlenül szükséges legkisebb értékre kell csökkenteni.

A kitérőívek kinematikai, dinamikai igénybevételének csökkentése, továbbá a kitérőívek alkalmassá tétele nagyobb sebességekre és forgalmi terhelésekre mindenekelőtt a megfelelő geometriai kialakításuk függvénye, ami magába foglalja az egyes szerkezeti részek (keresztezés, csúcssín stb.) geometriai kiképzését is. A vágánygeometria, ugyanis mint elsődleges meghatározó, alapvetően befolyásolja a pálya igénybevételének nagyságát, a járművek nyugodt mozgását, a vasúti közlekedés fizikai, fiziológiai jellemzőit.

A következőkben a kitérőívek geometriai vizsgálatára kerül, a kitérőkkel kapcsolatos szerkezeti és egyéb kérdések nem képezik e jegyzet tárgyát. A mozgásgeometriai vizsgálat során alapelv, hogy a kitérőgeometria azonos a vágánygeometriával, annak megkülönböztetett jelentőségű részterületét képezi, így a kitérők kinematikai vizsgálatának elve és módszere is megegyezik az előző fejezetekben tárgyaltakkal.

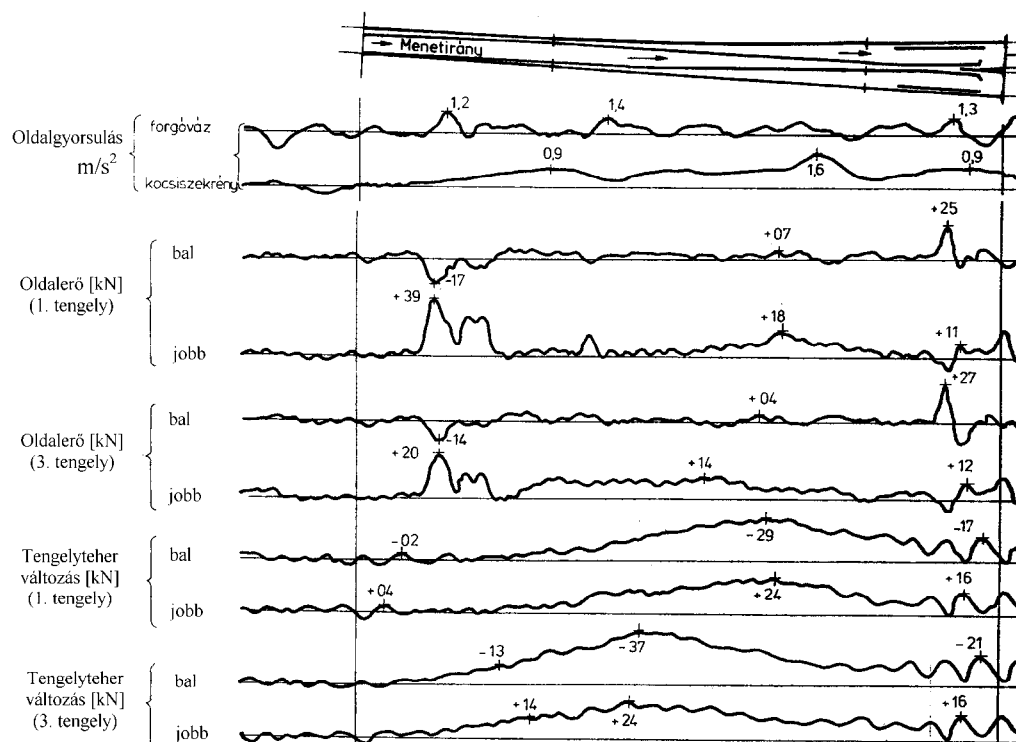
8.1. A kitérők közlekedésmechanikai kérdései

A kitérőkön történő mozgásnál a folyóvágányhoz képest a pályában és a járműben egyaránt fokozott mechanikai igénybevételek (gyorsulások, erők) ébrednek. Különösen jelentősek az igénybevételek az eltérítőágban a csúcssín eleje és a keresztezés környezetében. Jól szemlélteti ezt a **8.1. ábra**, ahol az oldalgyorsulás, ill. az oldalerők változását tüntetjük fel a kitérő eltérítőágában $V=125$ km/h sebességgel haladó négytengelyű mérőkocsin végzett külföldi kísérleti mérés alapján.

A mérési eredményekből látható, hogy a kitérők a jármű futását az ébredő igénybevételek, lengések következtében minden esetben kedvezőtlenül befolyásolják. Különösen jelentős lehet ez a hatás, ha a kitérőn történő áthaladás után a jármű lengése csillapodás helyett egy újabb gerjesztést kap a pályában nem kellő távolságban elhelyezett kényszerpont (kitérő, szintbeli útátjáró stb.) révén. Ezért kitérők után olyan hosszú folyóvágány szakasz kívánatos, amelyen a járműben — a kitérőn történő áthaladás által — ébresztett lengések és rendellenes mozgások kellő mértékig csillapodnak. E csillapítószakasz hossza mindenekelőtt a sebesség és a jármű rugózási tulajdonságainak függvénye.

A kitérő okozta többlet-igénybevételek mindenekelőtt a kitérő kedvező geometriai, továbbá szerkezeti kialakításával jelentősen csökkenthetők, azonban hatásuk teljesen nem szüntethető meg.

8.1. ábra: Kitérőágban $V = 125 \text{ km/h}$ sebességgel haladó járművön mért igénybevételek



A kitérő geometriáját a főirányban általában az a tény szabja meg, hogy megfeleljen a csatlakozó folyóvágányban megengedhető sebességi igénynek, ami leggyakrabban az egyenes kialakítású kitérőfőirányt jelenti. A kitérő mellékirányában az eltérítőív körív vagy átmenetiív lehet, megemlítve, hogy az utóbbinak lényegesen kedvezőbbek a mozgásgeometriai tulajdonságai. A kitérő eltérőíve kialakítható egyrészt egyenes keresztezési csúccsal, ez esetben az eltérítőív a keresztezés előtt végződik, másrészt a kitérő végéig tartó eltérítőívvel, amikor a keresztezési csúcs is ívbe kerül. Ez utóbbi megoldás különösen fontos a kitérők ívesíthetősége szempontjából.

Az eltérítőív geometriai méretezésének alapelve, hogy az ébredő szabad oldalgyorsulás, ill. a gyorsulásváltozás (\mathbf{h} vektor) nagysága mértékadó esetben sem haladhatja meg az engedélyezett küszöbértékeket. A gyorsulásszemlélet alapján történő méretezésnél a megengedett szabad oldalgyorsulás nagysága állandó (általában $0,65 \text{ m/s}^2$). Ez a kialakult álláspont nagyon vitatható, hiszen olyan tényezőket figyelmen kívül hagy, mint a mozgás állapota stb. Fokozottan vitatható hibás eredménye miatt a „gyorsulásváltozás” skaláris számítása, ehelyett a mozgás és a geometria kapcsolatát pontosan kifejező harmadrendű mozgásjellemző (\mathbf{h} vektor) (2.19.) figyelembevétele szükséges.

8.2. Köríves eltérítésű kitérő

A gyakorlatban legelterjedtebbek a köríves eltérítésű kitérők. E geometriailag durva megoldásnak legnagyobb hátránya az eltérítőív és az egyenes vágányszakaszok csatlakozási pontjaiban az ugrásszerű görbületváltozás, aminek gyakorlati következménye a megnövekedett fenntartási igény és a kitérő idő előtti elhasználódása.

A meglevő köríves kitérők használatánál — figyelembe véve, hogy több fenntartási munkát igényelnek — a következőkben a mozgásgeometriai vizsgálatok során a folyóvágánytól eltérően (2.18 és 2.28. összefüggés) nagyobb,

$$a_e = 0,65 \text{ m/s}^2 \quad \text{és} \quad |h| = 0,4 \text{ m/s}^3 \quad (8.1.)$$

küszöbértékeket veszünk figyelembe. Hangsúlyozzuk azonban, hogy e felemelt értékek a folyóvágányhoz képest egyben a kitérők fokozott igénybevételét is jelentik.

Állandó sebességnagyságot feltételezve, túlemelés nélküli körívben az oldalgyorsulás (2.29. alapján) az

$$a = \frac{V^2}{3,6^2 \cdot R},$$

túlemelt körívben (5.5. összefüggés alapján) az

$$a = \frac{V^2}{12,96R} - 9,81 \frac{m}{152,905}$$

képlet szerint számítható.

Állandó sebességet feltételezve, a gyorsulásváltozás értéke szakadós görbületfüggvény — pl. egyenes és körív érintőleges csatlakozása — esetén (2.35. képlet alapján) a

$$h \approx \frac{V^3}{3,6^3} \frac{1}{Rd}$$

összefüggés szerint számítható, ahol:

$a \text{ [m/s}^2\text{]}:$	gyorsulás,
$h \text{ [m/s}^3\text{]}:$	gyorsulásváltozás,
$V \text{ [km/h]}:$	sebesség,
$R \text{ [m]}:$	sugár,
$m \text{ [mm]}:$	túlemelés,
$L \text{ [m]}:$	az átmenetiív hossza,
$d \text{ [m]}:$	a görbületváltozást érzékelő hossz (forgócsap-távolság, négytengelyes járműveknél $d \approx 17 \text{ m}$ -nek vehető),
$\alpha = \frac{dG}{dl}:$	$= \frac{\pi}{2}$ — koszinusz átmenetiívénél,
	$= 2$ — negyedfokú parabola és szinuszos átmenetiívénél,
	$= 1$ — klotoid átmenetiívénél az eleje és vége pontokat kizárva; (a klotoid átmenetiív eleje és vége pontjában a görbületfüggvény törésszerű, ott nem értelmezhető a derivált).

A köríves kitérőkben a fenti összefüggések alapján számított megengedhető legnagyobb sebességet a **8.1. táblázat** tartalmazza.

8.1. táblázat: *Köríves kitérőben megengedhető sebesség értéke*

A kitérő körívsugara, R [m]	100	150	190	200	300	500	800	1200	1900	2200
A gyorsulás alapján, V_a , [km/h]	27,9	34,2	38,4	39,4	48,3	62,3	78,9	96,6	121,6	130,8
A h vektor alapján, V_h , [km/h]	31,7	36,2	39,2	39,9	45,7	54,1	63,3	72,5	84,5	88,7
A megengedhető sebesség, V [km/h]	28	34	38	39	46	54	63	72	85	89

A **8.1. táblázat** utolsó sora a kitérők köríveiben a mértékadó, megengedhető sebességek nagyságait tartalmazza. Az itt közölt adatok egyértelműen bizonyítják, hogy a jelenlegi, a megengedhető gyorsulás alapján felállított előírásaink az $R = 300$ m és ettől nagyobb sugarú kitérő körívekben túlságosan nagy sebességeket engednek meg, ami a kitérők a folyópályához képest jelentős túligénybevételét, fokozott fenntartási igényét és elhasználódását okozza.

Az előzőkből — figyelemmel a **6.2. ábrára** — következik továbbá az is, hogy a kitérőív sugarának növelésével csak rendkívül csekély mértékű az elérhető sebességnövelés, így elsősorban az eltérítőágban nagyobb sebességigényű kitérőknél a köríves geometria helyett magasabb rendű, átmenetiíves geometria szükséges.

A (8.1.) figyelembevételével a határsugar értéke, amelynél nagyobb körívsugarak tartományában a h vektor a mértékadó, a (6.8.) összefüggés alapján

$$R_h = \frac{0,4^2 \cdot 17^2}{0,6^3} = 214 \text{ m.} \quad (8.2.)$$

A megkívánt sebesség ismeretében a kitérő túlemelés nélküli eltérítő körívének sugarértéke a (6.1.), (6.2.), és a (8.1.) alapján számítható, és az eredményül kapott értékeket a **8.2. táblázatban** tüntetjük fel.

8.2. táblázat: *Kitérő körívsugarának nagysága a sebesség változásában*

A kitérőág sebessége V , km/h	30	40	50	60	80	100	120	140	160
A gyorsulás alapján, R_a [m]	116	206	322	463	823	1286	1852	2521	3292
A h vektor alapján, R_h [m]	85	202	394	681	1614	3152	5447	8649	12911
A mértékadó körívsugár, R [m]	116	206	394	681	1614	3152	5447	8649	12911

A határsebesség nagysága, amely felett a h vektor a mértékadó, az (1.6-8) szerint

$$V_h = \frac{3,6 \cdot 0,4 \cdot 17}{0,6} = 40,8 \text{ km/h.} \quad (8.3)$$

A MÁV Rt.-nél alkalmazott néhány szabványosított, köríves geometriájú kitérő sugarát, az eltérítőágban engedélyezett legnagyobb sebességet, valamint az ennél a sebességnél fellépő oldalgyorsulás értékeit a **8.3. táblázat**, a gyorsulásváltozás értékeit a **8.4. táblázat** tartalmazza.

8.3. táblázat: A MÁV Rt.-nél alkalmazott köríves geometriájú kitérőkön fellépő oldalgyorsulás értéke $[m/s^2]$ a sebesség függvényében

Kitérő rendszere	Körívsugár az eltérítő ágba [m]	Eltérítőágban engedélyezett legnagyobb sebesség [km/h]	Sebesség [km/h]				
			40	60	80	100	120
			Oldalgyorsulás $[m/s^2]$				
XIII	192	40	0,643	—	—	—	—
XIV	200	40	0,617	—	—	—	—
XI	300	40	0,412	—	—	—	—
500	500	60	0,247	0,556	—	—	—
800	800	80	—	0,347	0,617	—	—
1800	1800	120	—	0,154	0,274	0,429	0,617
2200	2200	100	—	0,126	0,224	0,351	0,505

8.4. táblázat: A MÁV Rt.-nél alkalmazott köríves geometriájú kitérőkön fellépő oldalgyorsulásváltozás értéke $[m/s^3]$ a sebesség függvényében

Kitérő rendszere	Körívsugár az eltérítő ágba [m]	Sebesség [km/h]				
		40	60	80	100	120
		Gyorsulás-változás $[m/s^3]$				
XIII	192	0,420	—	—	—	—
XIV	200	0,403	—	—	—	—
XI	300	0,269	—	—	—	—
500	500	0,161	0,545	—	—	—
800	800	—	0,340	0,807	—	—
1800	1800	—	0,151	0,359	0,700	1,210
2200	2200	—	0,124	0,293	0,573	0,990

A külföldi vasutaknál alkalmazott, néhány köríves kitérők sugarát, tervezési sebességét az eltérítő ágba, és kinematikai igénybevételeit a **8.5. táblázat** foglalja össze [1], [2].

8.5. táblázat: Külföldön alkalmazott néhány kitérő kinematikai igénybevételei [1], [2]

Vasút	Tervezési sebesség [km/h]	Az eltérítőág sugara [m]	Maximális oldalgyorsulás [m/s ²]	Maximális oldalgyorsulás-változás [m/s ³]
SNCF	160	3100	0,637	1,49
DB	130	2500	0,522	0,99
SNCF	130	2000	0,652	1,24
SNCF	100	1400	0,551	0,81
FS	100	1200	0,643	0,94

8.3. Az eltérítőágban módosított-összetett koszinusz átmenetiíves kitérő vizsgálata

8.3.1. Kitérőirányban nagyobb sebességre alkalmas kitérő-geometria vizsgálata

A köríves geometriájú kitérő alapvető hátránya, hogy az íveleje-pontban $1/R$ értékkel ugrásszerűen változik a görbület. Minthogy adott esetben ez a hátrány a kitérő sugarának növelésével csak rendkívül csekély mértékben csökkenthető, így elsősorban sebességigény esetén a kitérő eltérítőágában a körívnél kedvezőbb kinematikai tulajdonságú fokozatos görbületváltozású átmenetiíves geometria szükséges.

Az eltérítőirányban nagyobb sebességre alkalmas kitérőgeometriák vizsgálatánál két alapvető szempontot veszünk figyelembe:

- az eltérítőirányban a kinematikailag kedvező, fokozatos görbületváltozású geometria biztosítása;
- a kitérő végének olyan geometriai kialakítása, amely lehetővé teszi e kitérők egyszerű vágánykapcsolatba való beépítését is.

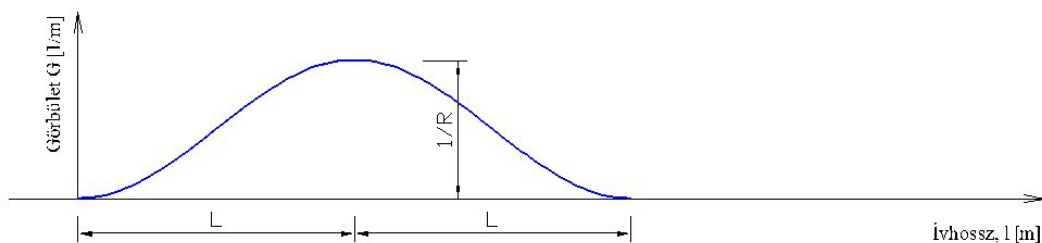
Minthogy az eltérítőirányban $V \approx 40$ km/h-nál nagyobb sebességű kitérők kinematikai vizsgálatánál (8.3.) a gyorsulásszemlélettel szemben minden esetben a \mathbf{h} vektor hatása a mértékadó, így a kitérő geometriai vizsgálatát a \mathbf{h} vektor figyelembevételével kell elvégezni.

Az egyszerű vágánykapcsolatba való beépíthetőség megköveteli továbbá, hogy a kitérő végpontjában a görbület lehetőleg zérus legyen, azonban semmiképpen sem haladhatja meg a kitérők szembefordított beépítése esetén az egyszerű vágánykapcsolat szimmetriapontjában a $|\mathbf{h}| = 0,4$ m/s³ feltételből számítható görbületértéket.

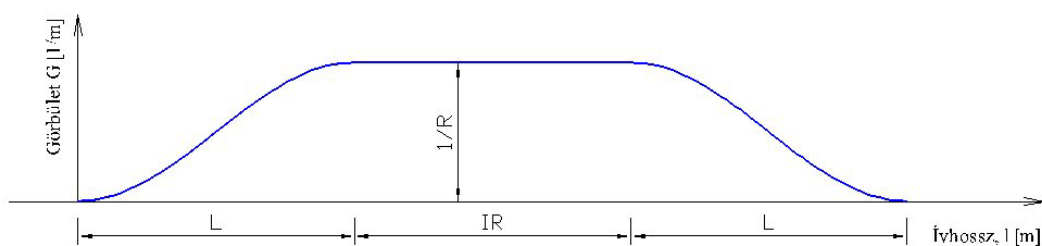
E feltételeket figyelembe véve, az átmenőköríves eltérítő geometria — ahol a kitérő körívsugarának növelésével csak rendkívül csekély mértékű sebességnövelés érhető el — kinematikai hátrányai és túlságosan nagy helyigénye miatt rendkívül kedvezőtlen.

8.2. ábra: Összetett átmenetiíves eltérítő geometriák összehasonlítása

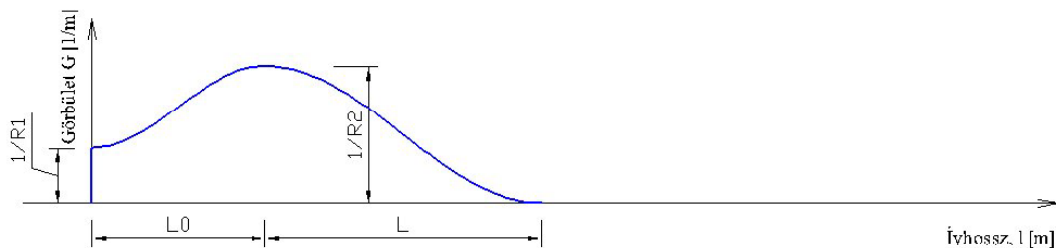
Tiszta koszinusz átmenetiívek



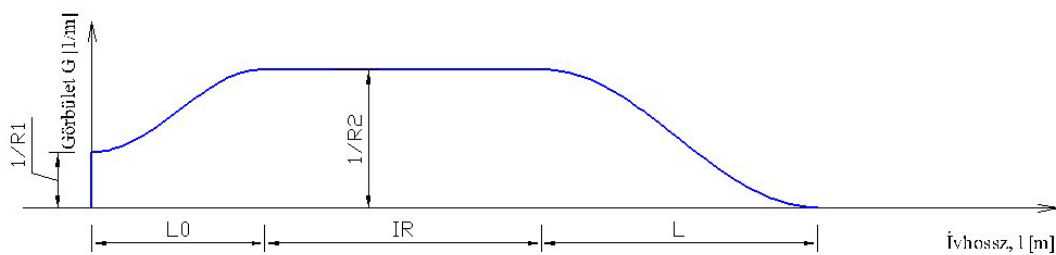
Koszinusz átmenetiíves körív



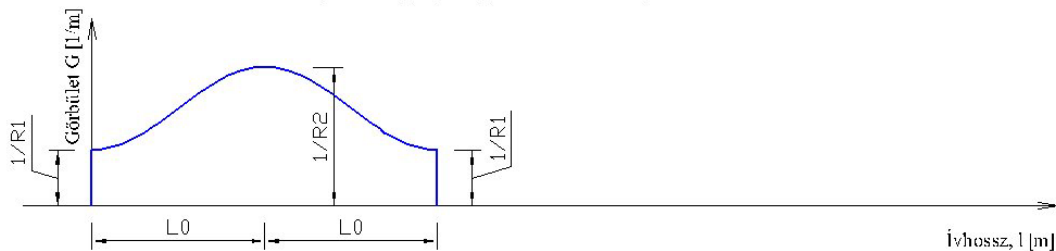
Módosított összetett koszinusz átmenetiívek



Módosított koszinusz átmenetiíves körív



Összetett koszinusz átmenetiívek (csak vágányelágazási kitérőknél)



8.3.2. Az átmenetiíves eltérítő geometria meghatározása

A mozgásgeometriailag legmegfelelőbb eltérítő geometria kiválasztása során több, a feladat szempontjából kívánatos, összetett koszinusz-átmenetiíves megoldás került vizsgálatra, amelyek görbületábráit a **8.2. ábra** szemlélteti.

A megvizsgált változatok esetében alapvető szempont, hogy valamennyi kitérőgeometria bármely pontjában — a mértékadó pontokat is beleértve — a $|\mathbf{h}| \leq 0,4 \text{ m/s}^3$ feltételt biztosítani kell. Az egyes változatok között a legkedvezőbb megoldás a legrövidebb kitérő-, ill. vágánykapcsolási hosszat eredményező geometria.

A vizsgálatok alapján az ún. módosított összetett koszinusz-átmenetiíves kitérőgeometriának legelőnyösebbek a tulajdonságai. A kitérő eltérítőágának görbületi ábráját a **8.3. ábra** tünteti fel.

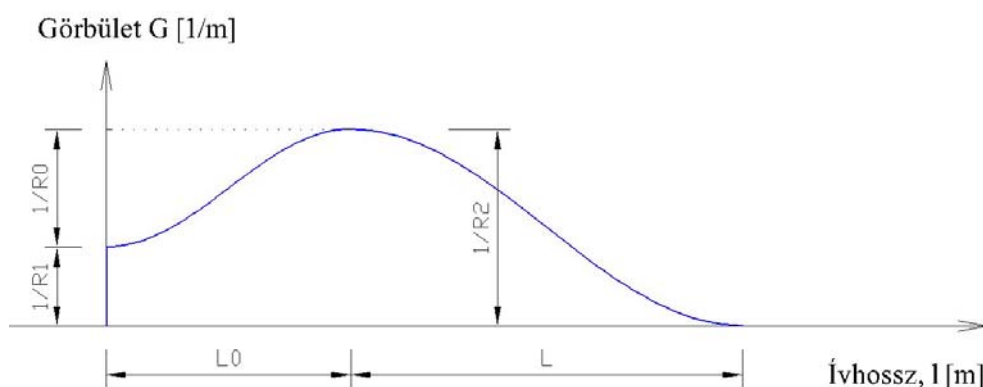
Az eltérítőág geometriája ez esetben két eltérő görbületi viszonyokat tükröző, szembefordított koszinusz-átmenetiív. A kitérő elején $1/R_1$ görbülettel induló L_0 hosszúságú koszinusz-átmenetiív végén a görbület $1/R_2$ értékre növekszik, amit az ehhez kapcsolódó és a $G = 0$ feltétellel záró L hosszúságú átmenetiív követ. Az első L_0 hosszúságú átmenetiív a kitérő legkisebb hosszát, a másik L hosszúságú átmenetiív pedig a kitérőnek az egyszerű vágánykapcsolatba való beépítését hivatott biztosítani. A **8.3. ábra** alapján

$$\frac{1}{R_0} = \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \quad [\text{m}^{-1}], \quad (8.4.)$$

és

$$R_0 = \frac{R_1 R_2}{R_1 - R_2} \quad [\text{m}]. \quad (8.5.)$$

8.3. ábra: A módosított-összetett koszinusz átmenetiíves eltérítő geometria görbületi ábrája



1. A módosított összetett koszinusz-átmenetiíves kitérőgeometria görbületfüggvényei a kitérő első felében ($0 \leq l \leq L_0$)

$$G_l = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{2R_0} \left(1 - \cos \frac{\pi}{L_0} l \right) \quad [\text{m}^{-1}], \quad (8.6.)$$

a kitérő második felében ($L_0 \leq l \leq L_0 + L$)

$$G_{II} = \frac{1}{2R_2} \left[1 - \cos \frac{\pi}{L} (L_0 + L - l) \right] \quad [\text{m}^{-1}]. \quad (8.7.)$$

Az eltérítőágban haladó járműre ható oldalgyorsulás a kitérő első átmenetiívében ($0 \leq l \leq L_0$):

$$a_1(0 \leq l \leq L_0) = \frac{V^2}{3,6^2} \left\{ \frac{1}{R_1} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) \left(1 - \cos \frac{\pi}{L} l \right) \right\} \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right], \quad (8.8.)$$

a második átmenetiívben ($L_0 \leq l \leq L_0 + L$):

$$a_{II}(L_0 \leq l \leq L_0 + L) = \frac{V^2}{3,6^2} \left\{ \frac{1}{R_2} - \frac{1}{2R_2} \left(1 - \cos \frac{\pi}{L} (L + L_0 - l) \right) \right\} \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right] \quad (8.9.)$$

2. A kritikus görbületeket és a rész-átmenetiív hosszakat a következő feltételekből határozzuk meg:

Az $1/R_1$ görbület a kitérő elején a $|\mathbf{h}| \leq 0,4 \text{ m/s}^3$ feltétel alapján a (2.35.) szerint

$$R_1 = \frac{V^3}{3,6^3 |\mathbf{h}| d} \quad [\text{m}]. \quad (8.10.)$$

Az L_0 , L rész-átmenetiív hosszak és az $1/R_2$ görbület számítására a (2.34.) és a 7.2. fejezet alapján a részletes levezetések mellőzésével a következő egyenleteket kapjuk:

$$L = \frac{\pi V^3}{2 \cdot 3,6^3 |\mathbf{h}| R_2} \quad [\text{m}], \quad (8.11.)$$

$$L_0 = \frac{\pi V^3 (R_1 - R_2)}{2 \cdot 3,6^3 |\mathbf{h}| R_1 R_2} \quad [\text{m}], \quad (8.12.)$$

és a kitérő végpontordinátájánál az $Y = \Delta/2 = G_{\text{át}} (L_0 + L)^2 / 2$ közelítés figyelembe vételével

$$R_2 = \frac{R_1 (L_0 + L)^2}{2 \Delta R_1 - R_0 (L_0 + L)} \quad [\text{m}], \quad (8.13.)$$

ahol Δ [m]: az egyszerű vágánykapcsolat párhuzamos vágányainak tengelytávolsága.

Az (8.9.) — (8.11.) egyenletről az L_0 , L és R_2 ismeretlen értékek számítása körülményes, időigényes feladat. Az ismeretleneket egyszerűbben határozhatjuk meg, ha a módosított összetett koszinusz-átmenetiíves eltérítőgeometriát közelítőleg tiszta átmenetiíves ívként a **7.2. fejezet** alapján számítjuk. A számítási képletek ez esetben az (2.34.) és a (7.11.) figyelembevételével ($\rho_{\min} = R_2$)

$$L = \frac{V}{3,6} \sqrt[3]{\frac{\pi \cdot \Delta}{4 \cdot |h|}} \quad [\text{m}], \quad (8.14.)$$

$$R_2 = \frac{2L^2}{\Delta} \quad [\text{m}], \quad (8.15.)$$

$$L_0 = \frac{\pi V^3 (R_1 - R_2)}{2.3,6^3 |h| R_1 R_2} \quad [\text{m}]. \quad (8.16.)$$

E megoldásnál azonban egyszerű vágánykapcsolat esetén a kitérők között

$$e = \frac{\Delta - 2Y}{\sin \tau_{CV}} \quad [\text{m}] \quad (8.17.)$$

nagyságú közbenső egyenes adódik, a képletben Y a végordináta nagysága és τ_{CV} az érintőszög értéke a koszinusz geometria végén a későbbi (8.22.) összefüggés alapján.

3. Az eltérítőív *kitűzési ordinátáinak meghatározása a kitérő első részén* ($0 \leq l \leq L_0$).

Az érintőszög függvénye

$$\tau_I = \int_0^l G_I dl = \frac{l}{R_1} + \frac{l}{2R_0} - \frac{L_0}{2\pi R_0} \sin \frac{\pi}{L_0} l, \quad [\text{rad}] \quad (8.18.)$$

az érintőszög nagysága az $l = L_0$ pontban

$$\tau_{L_0} = \frac{L_0}{2R_1} + \frac{L_0}{2R_2}. \quad [\text{rad}] \quad (8.19.)$$

Az ordinátafüggvény

$$y_I = \int_0^l \tau_I dl = \frac{l^2}{4} \left(\frac{2}{R_1} + \frac{1}{R_0} \right) - \frac{L_0^2}{2\pi^2 R_0} \left(1 - \cos \frac{\pi}{L_0} l \right) \quad [\text{m}], \quad (8.20.)$$

az ordináta értéke az $l = L_0$ pontban

$$y_{L_0} = \frac{L_0^2}{4} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) - \frac{L_0^2}{\pi^2} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) \quad [\text{m}]. \quad (8.21.)$$

4. A *kitűzési ordináták meghatározása a kitérő második részén* ($L_0 \leq l \leq L_0 + L$).

Az érintőszögfüggvény

$$\begin{aligned} \tau_{II} &= \tau_{L_0} + \int_{L_0}^l G_{II} dl = \tau_{L_0} + \left[\frac{l}{2R_2} + \frac{L}{2\pi R_2} \sin \frac{\pi}{L} (L_0 + L - l) \right]_{L_0}^l = \\ &= \frac{L_0}{R_1} - \frac{L_0}{2R_2} + \frac{L_0}{2R_0} + \frac{l}{2R_2} + \frac{L}{2\pi R_2} \sin \frac{\pi}{L} (L_0 + L - l), \quad [\text{rad}] \end{aligned} \quad (8.22.)$$

az érintőszög értéke a koszinusz geometria végén — a második átmenetiív eleje pontban
($l = L_0 + L$)

$$\tau_{C,V} = \frac{L_0}{2R_1} + \frac{L_0 + L}{2R_2}. \quad [\text{rad}] \quad (8.23.)$$

Az ordináta függvénye

$$y_{II} = y_{L_0} + \int_{L_0}^l \tau_{II} dl = y_{L_0} + \left[\frac{L_0 l}{R_1} - \frac{L_0 l}{2R_2} + \frac{L_0 l}{2R_0} + \frac{l^2}{4R_2} + \frac{L^2}{2\pi^2 R_2} \cos \frac{\pi}{L} (L_0 + L - l) \right]_{L_0}^l =$$

$$= -\frac{L_0^2}{4R_1} - \frac{L_0^2}{\pi^2 R_0} + \frac{L^2}{2\pi^2 R_2} + \frac{L_0 l}{2R_1} + \frac{l^2}{4R_2} + \frac{L^2}{2\pi^2 R_2} \cos \frac{\pi}{L} (L_0 + L - l) \quad [\text{m}]. \quad (8.24.)$$

A végordináta nagysága a koszinusz geometria végén ($l = L_0 + L$)

$$Y = y_{C,V} = \left(\frac{L_0^2}{4} + \frac{L_0 L}{2} \right) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) - \frac{L_0^2}{\pi^2} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) + \frac{L^2}{R_2} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{\pi^2} \right) \quad [\text{m}]. \quad (8.25.)$$

8.3.3. A csúcssín lemetszésének vizsgálata

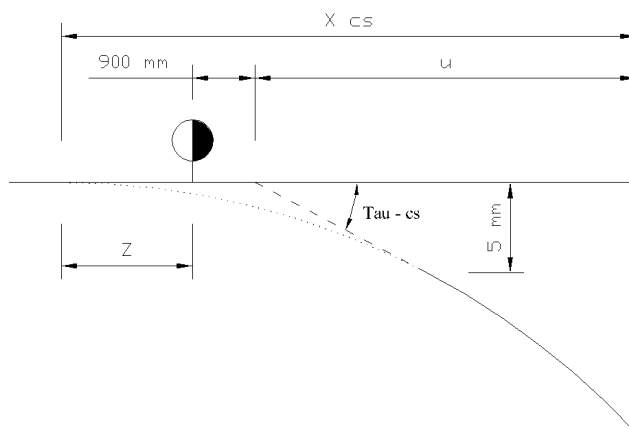
Az érintőíves csúcspont elején a lemeztést (8.4. ábra) annak figyelembevételével határozzuk meg, hogy az ébredő \mathbf{h} vektor nagysága a $|\mathbf{h}| \leq 0,4 \text{ m/s}^3$ feltételt kielégítse.

A megengedhető legnagyobb lemetzési szög vizsgálatánál a

$$|h| \approx \frac{V^3}{3,6^3} \frac{dG}{dl} \leq 0,4 \quad [\text{m/s}^3] \quad (8.26.)$$

feltétel alapján geometriailag a dG/dl görbületváltozás a meghatározó.

8.4. ábra: *A csúcssín lemetzésének és a kitérő elejének megállapítása átmenetiíves geometriánál*



A vonatkozó vektorgeometriai ismeretek szerint a görbület

$$G = \left| \frac{dt}{dl} \right| = \frac{1}{\rho} \quad [\text{m}^{-1}], \quad (8.27.)$$

azaz a \mathbf{t} érintőirányú egységvektor ívhossz szerinti derivált vektorának nagysága. Minthogy a lemetzés által törésszerű függvénnyel van dolgunk, a görbület nagysága közelítőleg

$$G \approx \frac{\Delta t}{\Delta l} = \frac{\tau}{d} \quad [\text{m}^{-1}], \quad (8.28.)$$

ahol τ [rad]: a csúcspont lemetzési szöge.

Mindezeket figyelembe véve a csúcspont lemetzésénél ébredő h vektor közelítő nagysága

$$|h| \approx \frac{V^3}{3,6^3} \frac{\Delta G}{\Delta l} = \frac{V^3}{3,6^3} \frac{\tau}{d^2} \quad [\text{m/s}^3], \quad (8.29.)$$

amiből a csúcspont lemetzési szöge

$$\tau \leq \frac{|h|d^2}{V^3} 3,6^3 \quad [\text{rad}]. \quad (8.30.)$$

A csúcspont lemetzésénél az ORE vizsgálatok szerint az

$$y_{cs} = 0,005 \text{ m} \quad (8.31.)$$

érték veendő figyelembe. Az ehhez tartozó ívhossz (l_{cs}) interpolálandó. Az ívhossz ismeretében a (8.16.) összefüggés alapján számítható a τ_{cs} érintőszög értéke ebben a pontban.

A **8.4. ábra** alapján a csúcspont lemetzésének számításához szükséges mennyiségek (u és Z):

$$u = \frac{y_{cs}}{\tan \tau_{cs}} \quad [\text{m}] \quad (8.32.)$$

A csúcspont lemetzése miatt a kitérő szerkezet eleje nem esik egybe az átmenetiív matematikai elejével. A kitérő elejét meghatározó távolság:

$$Z = X_{cs} - u - 0,9 \quad [\text{m}] \quad (8.33.)$$

8.3.4. A kitérő tengelyábrájának számítása

A kitérő V végének — részletes aljkiosztási terv hiányában — az $Y = 1750$ mm ordinátájú pont értendő. Az ehhez tartozó $l_{K,V}$ ívhossz és $X_{K,V}$ abszcissza interpolálás útján határozható meg. Az $l_{K,V}$ ívhossz ismeretében az érintő $\tau_{K,V}$ hajlása a kitérő végében a (8.21.)

összefüggésből meghatározható. A kitérő tengelyábráját a **8.5. ábra** tünteti fel, melynek adatai:

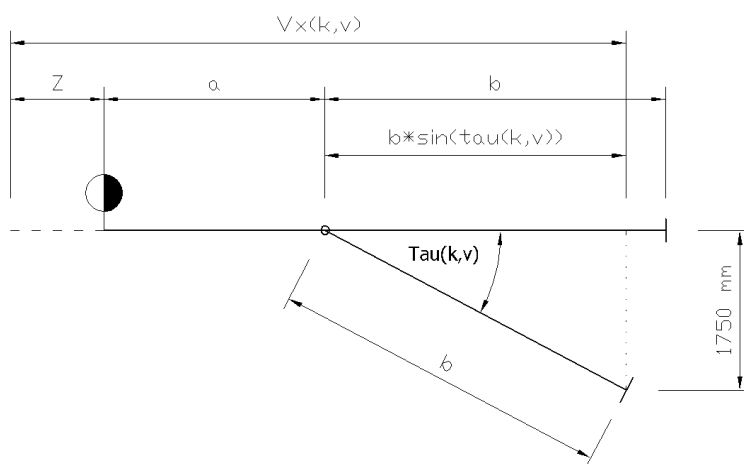
$$b = \frac{y_{cs}}{\sin \tau_{K,V}} \quad [\text{m}] \quad (8.34.)$$

$$a = X_{K,V} - b \cdot \cos \tau_{K,V} - Z \quad [\text{m}] \quad (8.35.)$$

A kitérő hossza:

$$H = a + b \quad (8.36.)$$

8.5. ábra: A tengelyábra számítása módosított-összetett koszinusz átmenetiíves kitérőnél



8.3.5. A vágánykapcsolás hosszának meghatározása

A módosított-összetett koszinusz átmenetiíves kitérőkkel kialakított vágánykapcsolás főbb geometriai jellemzőinek — L_0 , L , R_1 , R_2 — meghatározása a **8.3.2. fejezetben** került ismertetésre.

A kitérő és a vágánykapcsolás geometriája a négy koszinusz átmenetiívvel történő vágányelhúzás alapelveire épül. Az első átmenetiív módosítása — az átmenetiív elejének $1/R_1$ görbületi sugárnál történő lemetzése miatt — a vágánykapcsolás középső részén, a második és a harmadik átmenetiív között egy egyenes adódik, melynek hossza:

$$e = \frac{p - 2 \cdot Y}{\sin \tau_{c,v}} \quad [\text{m}] \quad (8.37.)$$

ahol:

- p [m] : a vágánytengely-távolság,
- Y [m] : a koszinusz geometria végének ordinátája (8.24.) szerint számítva,
- $\tau_{c,v}$ [rad] : a koszinusz geometria végérintőszöge (8.22.) szerint számítva.

A vágánykapcsolás teljes hossza:

$$TH = 2 \cdot (X_{C,V} - Z) + e \cdot \cos \tau_{C,V} \quad [\text{m}] \quad (8.38.)$$

ahol:

- $X_{C,V}$ [m] : a koszinusz geometria végének ordinátája (8.24.) szerint számítva,
 Z [m] : a csúcspól levezetésénél a (8.32.) összefüggéssel értelmezett mennyiség,
 e [m] : közbelső egyenes (8.36.) szerint,
 $\tau_{C,V}$ [rad] : a koszinusz geometria végérintőszöge (8.22.) szerint számítva.

A vágánykapcsolás tengelyábrája részletesen a **8.3.6. fejezetben** ismertetett számpéldán kerül bemutatásra.

8.3.6. Számpélda módosított-összetett koszinusz átmenetiíves eltérítésű kitérő, és ezekkel kialakított vágánykapcsolás meghatározására

A módosított – összetett koszinusz átmenetiíves kitérő és a vágánykapcsolás alapadatai

Tervezési sebesség kitérő irányban:	$V = 80 \text{ km/h}$
Vágánytengely távolság:	$\Delta = 5,00 \text{ m}$
Legnagyobb oldalgyorsulás-változás:	$h = 0,40 \text{ m/s}^3$
Legnagyobb szabad oldalgyorsulás:	$a_0 = 0,65 \text{ m/s}^2$
Görbületváltozást érzékelő hossz:	$d = 17,0 \text{ m}$
Nyomtávolság:	$t = 1435 \text{ mm}$

A módosított – összetett koszinusz átmenetiíves eltérítésű geometria meghatározása

Az L átmenetiív hossza (8.12.) szerint:

$$L = \frac{V}{3,6} \cdot \sqrt[3]{\frac{\pi \cdot \Delta}{4 \cdot h}} = \frac{80}{3,6} \cdot \sqrt[3]{\frac{\pi \cdot 5,00}{4 \cdot 0,4}} = 47,5833 \text{ m}, \quad (8.39.)$$

a minimális görbületi sugár R_2 értéke (8.13.) alapján:

$$R_2 = \frac{2 \cdot L^2}{\Delta} = \frac{2 \cdot 47,5833^2}{5,00} = 905,666 \text{ m}. \quad (8.40.)$$

Az R_1 görbületi sugár a módosított átmenetiív elején (8.8.)-ből:

$$R_1 = \frac{V^3}{3,6^3 \cdot h \cdot d} = \frac{80^3}{3,6^3 \cdot 0,4 \cdot 17,00} = 1613,8142 \text{ m}, \quad (8.41.)$$

Az L_0 módosított átmenetiív hossza (8.10.) összefüggés szerint:

$$L_0 = \frac{\pi \cdot V^3 (R_1 - R_2)}{3,6^3 \cdot 2 \cdot h \cdot R_1 \cdot R_2} = \frac{\pi \cdot 80^3 (1613,814 - 905,666)}{3,6^3 \cdot 2 \cdot 0,4 \cdot 1613,814 \cdot 905,666} = 20,8797 \text{ m}, \quad (8.42.)$$

a koszinusz geometria hossza:

$$L_0 + L = 68,4630 \text{ m} \quad (8.43.)$$

Az R_0 görbületi sugár:

$$R_0 = \frac{R_1 R_2}{R_1 - R_2} = \frac{1613,814 \cdot 905,666}{1613,814 - 905,666} = 2063,9421 \text{ m}. \quad (8.44.)$$

Az átmenetiív részletpont-koordinátáinak pontos számítása (3.3. és 3.4. összefüggések) szerint a módosított átmenetiív végpontjának koordinátái ($l = L_0$):

$$\begin{aligned} x(L_0) &= 20,8788 \text{ m} \\ y(L_0) &= 0,1665 \text{ m} \end{aligned}$$

Az érintőszög értéke a módosított átmenetiív végpontjában (8.19.) összefüggés alapján ($l = L_0$):

$$\tau(L_0) = 1^\circ 01' 52,01''$$

A koszinusz-geometria végpontjának koordinátái (3.3.) és (3.4.) összefüggések szerint számítva ($l = L_0 + L$):

$$\begin{aligned} X_{c,v} &= 68,4289 \text{ m} \\ Y_{c,v} &= 1,9007 \text{ m} \end{aligned}$$

A koszinusz geometria végérintőszöge (8.23.) alapján:

$$\tau_{c,v} = 2^\circ 32' 10,53''$$

A csúcssín lemetzés vizsgálata

A csúcssín lemetzés részletes vizsgálatát a **8.3.3. alfejezet** tartalmazza. Ezek alapján a csúcssín lemetzés végpontjában az ívhossz paraméter értéke

$$l_{cs} = 3,9832 \text{ m},$$

a végpont abszcisszája

$$x_{cs} = 3,9832 \text{ m}$$

és a pontbeli érintő τ_m hajlása:

$$\tau_{cs} = 0^\circ 08' 40,81''. \quad (8.45.)$$

A csúcssín lemetzés végpontjában a gyorsulás-változás értéke nem lehet nagyobb, mint az engedélyezett maximális érték. A csúcssín lemetzés legnagyobb engedélyezhető értéke (8.29.)-ből számítva:

$$\tau_{cs,eng} = \frac{h \cdot 3,6^3 \cdot d}{V^3} = \frac{0,4 \cdot 3,6^3 \cdot 17,00}{80^3} = 0^\circ 36' 12,80'' \quad (8.46)$$

A csúcssín lemetzési szög (8.45.) értéke kisebb, mint a (8.46.) szerinti maximális érték, ezért a csúcssín lemetzés kinematikailag megfelel.

A **8.3.3. alfejezetben** részletezett (8.32.) összefüggés alapján:

$$u = \frac{y_m}{\operatorname{tg} \tau_m} = 1,9802 \text{ m.} \quad (8.47.)$$

A kitérő elejének távolsága az első átmenetiív matematikai elejétől a (8.33.) szerint:

$$Z = x_m - u - 0,9 = 1,1030 \text{ m} \quad (8.48.)$$

A kitérő tengelyábrájának meghatározása

A kitérő tengelyábrájának részletes meghatározásával a korábbi 8.3.4. alfejezet foglalkozik, amelyek alapján a főbb méretek:

$$b = \frac{y_{kit,v}}{\sin \tau_{kit,v}} = 39,5607 \text{ m}$$

$$a = x_{kit,v} - b \cdot \cos \tau_{kit,v} - Z = 24,4022 \text{ m}$$

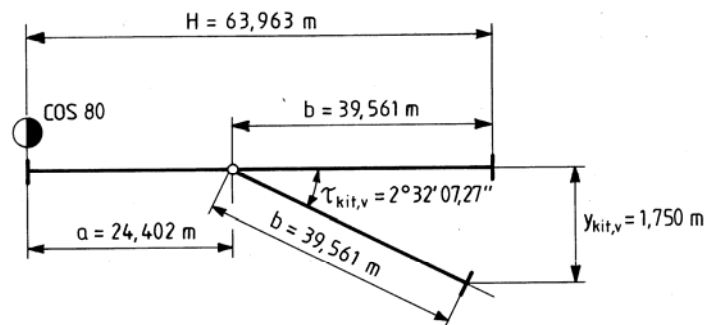
a kitérő hossza:

$$H = a + b = 63,9629 \text{ m}$$

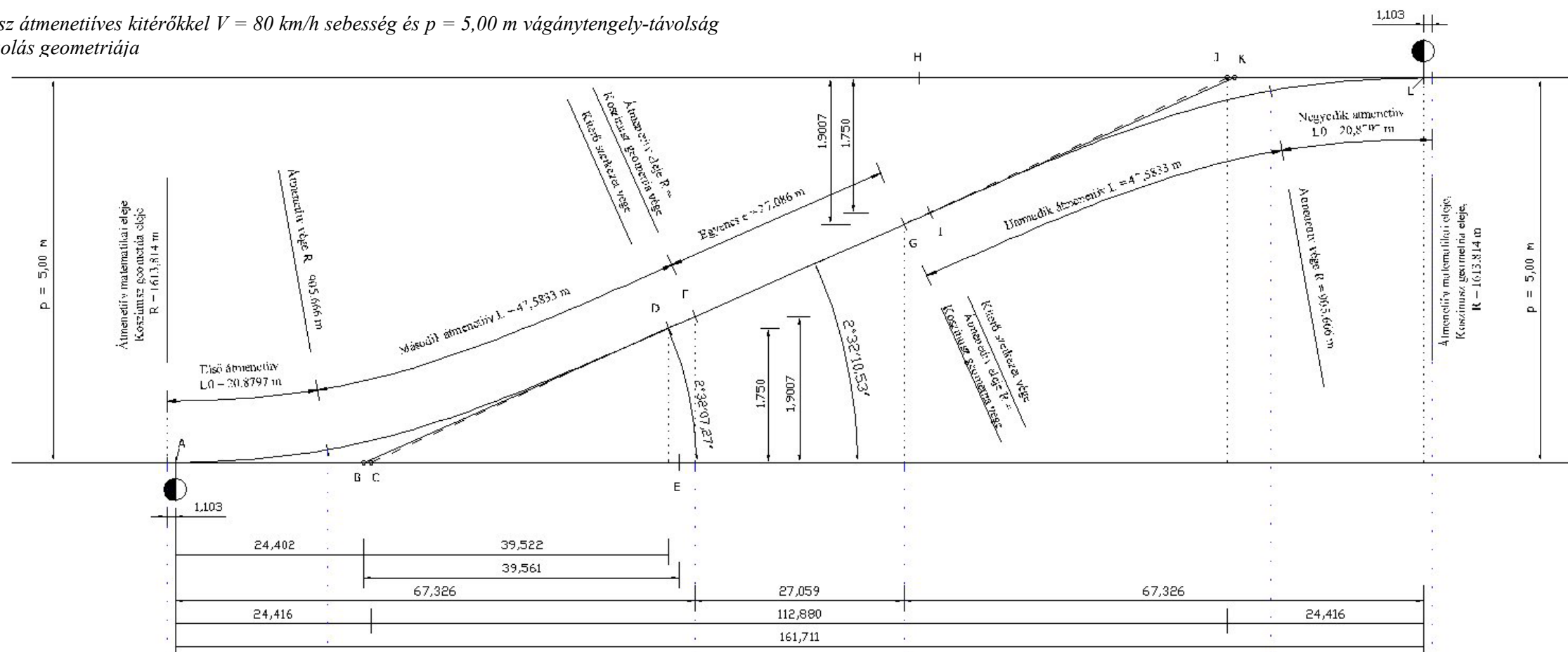
a kitérő végérintő szöge (8.22.) összefüggésből:

$$\tau_{kit,v} = 2^\circ 32' 07,27''.$$

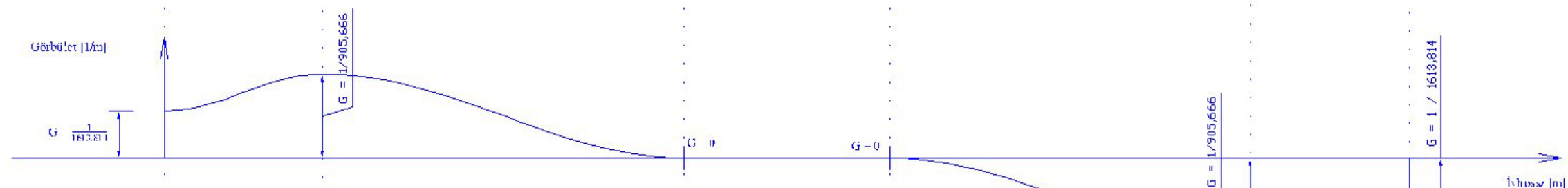
8.6. ábra: A kitérő tengelyábrája



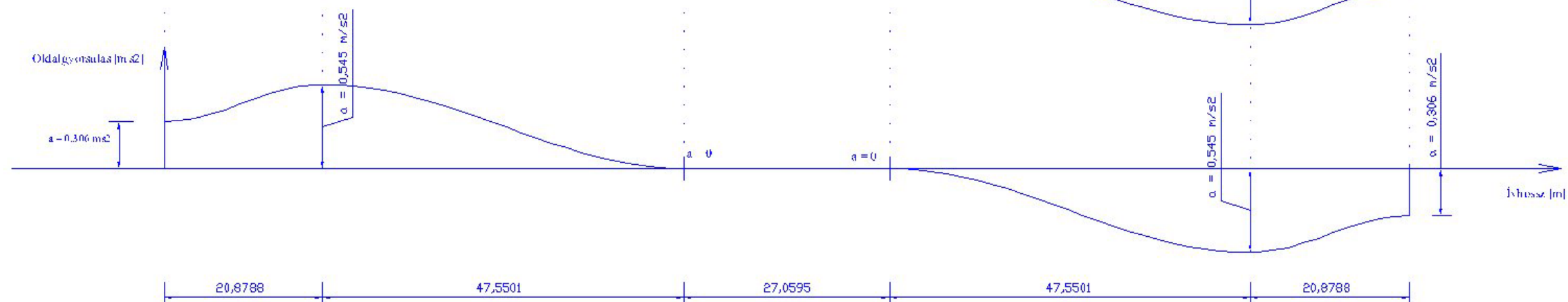
8.7. ábra: A módosított-összetett koszinusz átmenetiíves kitérőkkel $V = 80 \text{ km/h}$ sebesség és $p = 5,00 \text{ m}$ vágánytengely-távolság esetén kialakított vágánykapcsolás geometriája



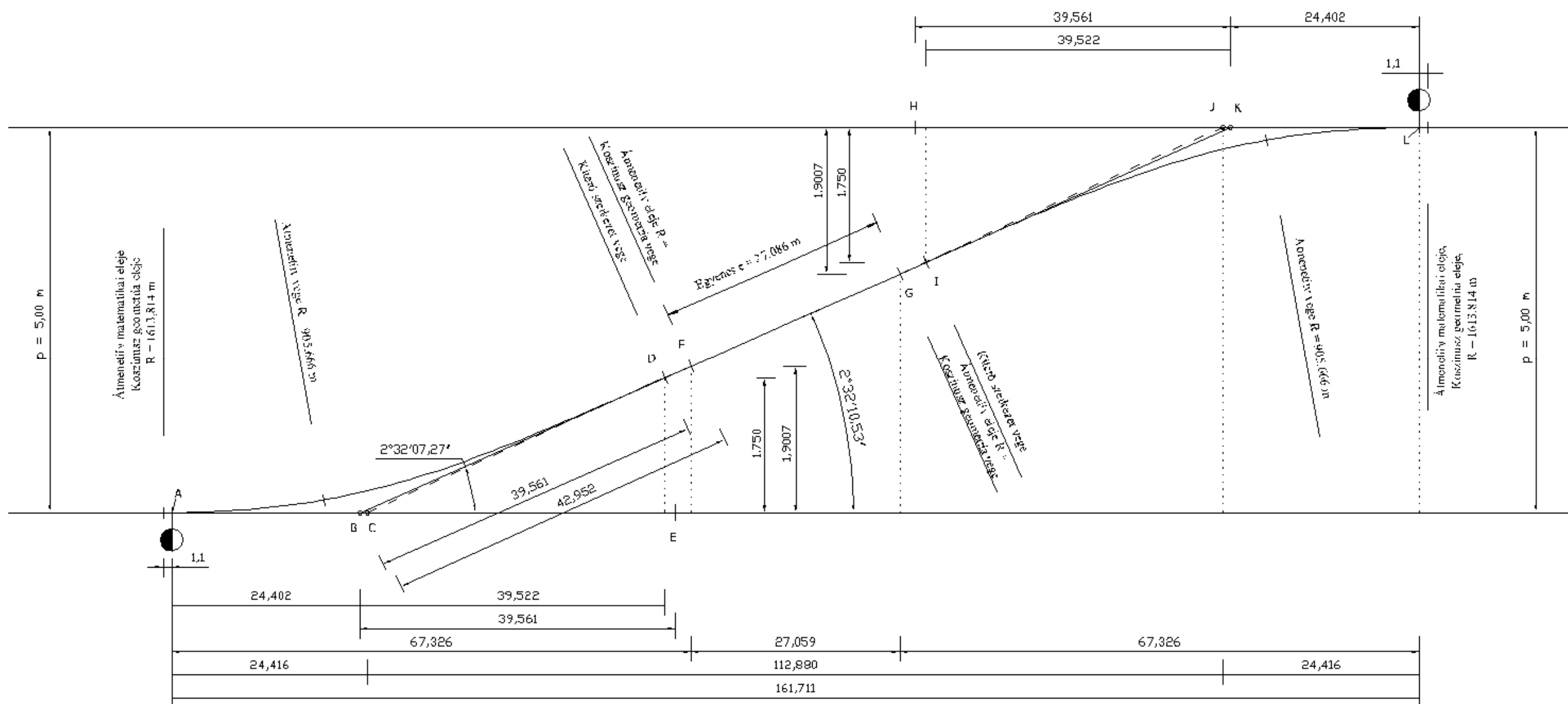
8.8. ábra: A vágánykapcsolás görbületi ábrája



8.9. ábra: A vágánykapcsolás eltérítő ágán $V = 80 \text{ km/h}$ sebességgel haladó járóban ébredő oldalgyorsulás



8.10. ábra: A módosított-összetett koszinusz átmenetiíves kitérőkkel $V = 80$ km/h sebesség és $p = 5,00$ m vágánytengely-távolság esetén kialakított vágánykapcsolás geometriája



A 8.7. és a 8.10. ábrákon a pontok jelölései:

- „A” és „L” : a módosított átmenetiívek eleje pontjai,
- „B” és „K” : a vágánykapcsolás kitérőinek főpontjai,
- „C” és „J” : a koszinusz geometria végérintői (a közbelső egyenes meghosszabbításának) és az egyenes irányok metszéspontjai,
- „D” és „I” : a kitérők végpontjai a mellékirányban,
- „E” és „H” : a kitérők végpontjai a mellékirányban,
- „F” és „G” : a második és harmadik átmenetiív eleje pontjai.

A vágánykapcsolás tengelyábrája

A vágánykapcsolás tengelyábrája a **8.7. ábrán** tekinthető meg. A vágánykapcsolás középső részén az e egyenes hajlásszöge nem egyezik meg a kitérő végének hajlásszögével. A módosított-összetett átmenetiív hossza (L_0+L) nagyobb, mint a kitérőé. A vágánykapcsolás elágazó ágában a kitérő után a vágány átmenetiívben folytatódik, melynek geometriáját a **8.3.1. alfejezetben** bemutatottak szerint a **8.7. ábra** szemlélteti. Az eltérítő ág görbületét a (8.6.) és a (8.7.) képletek szerint számítva a **8.8. ábra**, a kitérőirányban $V = 80$ km/h sebességgel haladó járműben fellépő oldalgyorsulást a (8.8.) és a (8.9.) összefüggésekből meghatározva a **8.9. ábra** tünteti fel. A vágánykapcsolás kitűzési vázlata a **8.10. ábrán** látható.

A vágánykapcsolás középső részén kiadódó e egyenes hossza a 8.3.5. alfejezetben ismertetett (8.37.) összefüggés alapján:

$$e = \frac{p - 2 \cdot Y_{C,V}}{\sin \tau_{cv}} = \frac{5,00 - 2 \cdot 1,9007}{\sin 2^\circ 32' 10,53''} = 27,086 \text{ m.} \quad (8.49.)$$

A vágánykapcsolás teljes hossza az első kitérő elejétől a második kitérő tárcsájáig a (8.38.) összefüggés és a **8.7. és a 8.10. ábra** alapján:

$$TH = 161,711 \text{ m.} \quad (8.50.)$$

A vágánykapcsolásban a vágánytengely, a jobb sínszál és a bal sínszál koordinátáit tartalmazó eredménylista a (3.3.) és a (3.4.) összefüggések szerint számítva az **5. Függelékben** található

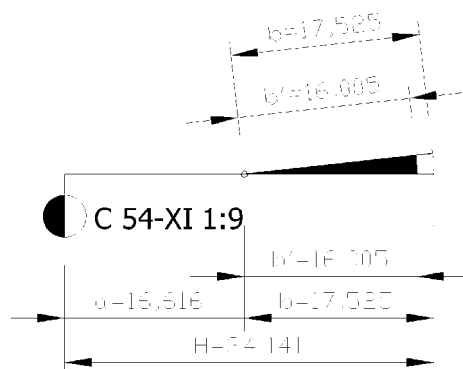
8.4. Néhány, jelenleg alkalmazott, kitérőirányban átmenetiíves geometriájú kitérő

A MÁV Rt. a C54-XI 1:9 és a C54-2200 1:27,4 rendszerű, az eltérítőágban ciklois-átmenetiíves geometriájú kitérőket alkalmaz.

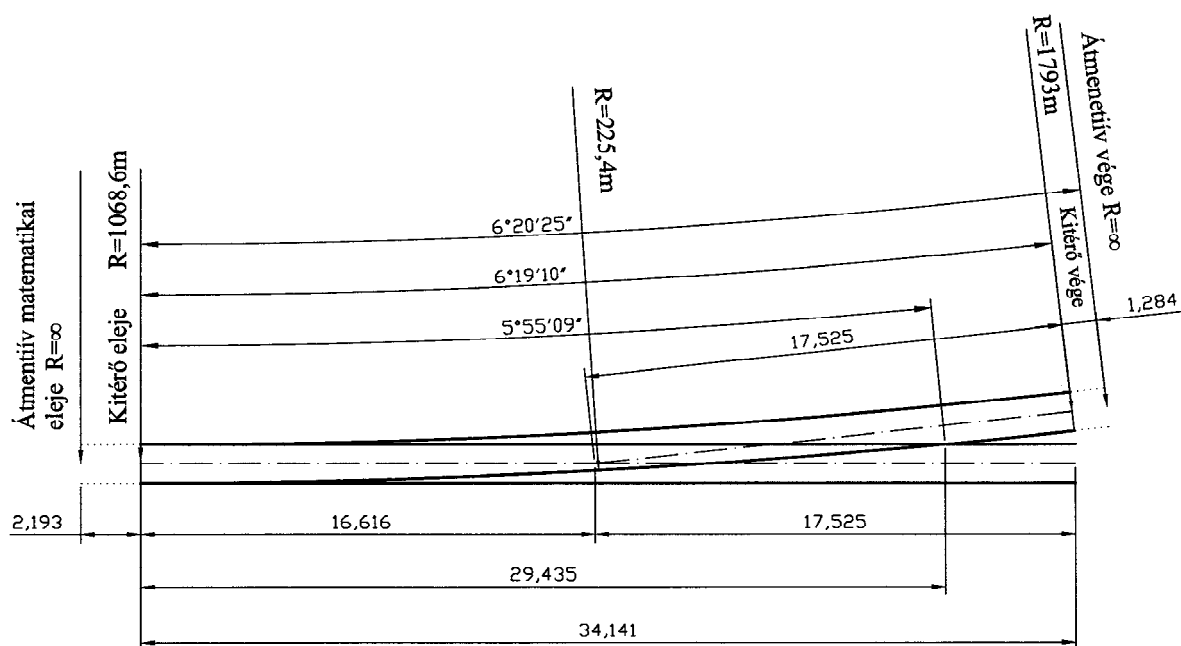
A C54-XI 1:9 r. kitérő tengelyábráját a **8.11.**, geometriáját a **8.12. ábra** mutatja. A görbületi sugár értéke a csúcspont levezetés elejénél $R = 693,8$ m, minimális értéke $R = 225,4$ m, a kitérő végénél $R = 1793$ m, a kitérő vége után 1284 mm távolságra $R = \infty$.

A C54-2200 1:27,4 rendszerű, metszőköríves csúcsponttal ellátott kitérő tengelyábrája **8.13. ábrán**, geometriája a **8.14. ábrán** látható. A görbületi sugár minimális értéke $x = 42000$ mm abszcisszájánál $R = 1703$ m, a kitérő végénél $R = \infty$.

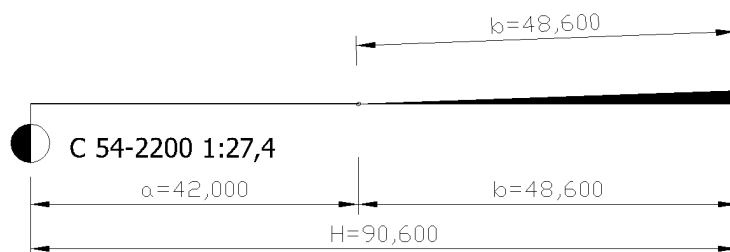
8.11. ábra: A C54-XI 1:9 r. kitérő tengelyábrája



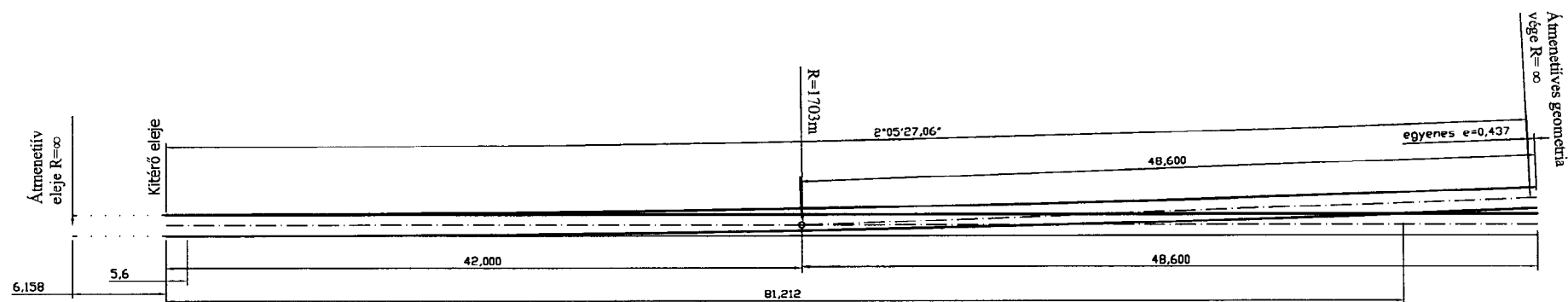
8.12. ábra: A C54-XI 1:9 r. kitérő görbületi viszonyai



8.13. ábra: A C54-2200 1:27,4 r. kitérő tengelyábrája



8.14. ábra: A C 2200-1:27,4 r. kitérő görbületi viszonyai



A C54-XI 1:9 és a C54-2200 1:27,4 rendszerű kitérőkön, az eltérítőágon haladó járműben fellépő kinematikai igénybevételeket a **8.6. táblázat** foglalja össze.

8.6. táblázat: *Az eltérítőágban átmenetiíves geometriájú kitérőkön fellépő kinematikai igénybevételek maximális értékei*

Kitérő rendszere	Minimális görbületi sugár [m]	Sebesség [km/h]	Maximális oldalgyorsulás [m/s ²]	Maximális oldalgyorsulás-változás [m/s ²]
C-XI	225,4	40	0,548	0,608
C-2200	1703	80	0,290	0,223
		100	0,453	0,436
		120	0,652	0,753

A MÁV Rt. Fejlesztési és Kísérleti Intézete Porpác állomáson 1989. december 14-én C 54-2200 és 54-2200, 1990. november 13-15-én C 54-2200 és 54-1800 rendszerű kitérőkből kialakított vágánykapcsoláson végzett dinamikai és geometriai méréseket. A vizsgálatok eredményei:

- A metszőköríves csúcssínnel felszerelt 54-2200 r. kitérőben, $V = 120$ km/h sebességnél, kitérőirányban a csúcssín elejénél, a kerék és a sín között keresztirányban ébredő nagymértékű igénybevételek miatt a kitérőirányban nem engedélyezhető a $V = 120$ km/h sebesség.
- A C54-2200 rendszerű ciklois átmenetiíves geometriájú, és az 54-1800 rendszerű érintőköríves geometriájú kitérők egyaránt jól kiküszöbölik azt a már 100 km/h sebességnél is fellépő el nem tűrhető, 120 km/h-nál veszélyes nagyságú keresztirányú dinamikus pálya-jármű kölcsönhatást, amely az 54-2200 r. metszőköríves geometriájú kitérő csúcssínlemetszésénél lévő iránytörés miatt fellép.
- Az 54-1800 r. érintőköríves geometriájú kitérő a kerék-sín kölcsönhatás, futás-biztonság, pályaigénybevételek, valamint a járműszekrény mozgásjellemzői alapján alkalmas a $V=100$ km/h kitérőirányú sebességre.
- A C54-2200 r. ciklois átmenetiíves kitérő közbelső részén, ahol a görbületi sugár értéke kisebb, mint 1800 m, $V = 120$ km/h sebességnél jelentős mértékben megnövekednek a külső sínszál keresztirányú igénybevételei.

Néhány, külföldön alkalmazott, az eltérítőágban átmenetiíves geometriával kialakított kitérő tervezési sebességét, görbületi viszonyait és az ezen fellépő kinematikai igénybevételeket a **8.7. táblázat** foglalja össze.

8.7. táblázat: Külföldön alkalmazott kitérők kinematikai igénybevételei [1], [2]

Vasút-társaság	Tervezési sebesség [km/h]	Kitérőág geometriája	Görbületi sugár [m]	Maximális oldalgyorsulás [m/s ²]	Maximális oldalgyorsulás-változás [m/s ³]
SNCF	220	átmenetiíves	6720 - ∞	0,556	2,0
NS	130	átmenetiíves	2300 - ∞	0,567	1,08
SBB	120	átmenetiíves	2600 - 1600	0,694	0,85

8.5. Kitérő geometriák összehasonlítása

A **8.3.6. alfejezet**ben részletezettek szerint meghatározásra került a módosított-összetett koszinusz átmenetiíves kitérőkkel kialakított vágánykapcsolás geometriája és hossza, $p = 5,00$ m vágány-tengely távolság esetén.

A 60-800-1:15:44 rendszerű $R = 800$ m sugarú kitérőkkel kialakított vágánykapcsolás tengelyábráját, görbületi ábráját és a $V = 80$ km/h sebességgel haladó járműre ható oldalgyorsulás ábráját a **8.15. ábra** tünteti fel. A vágánykapcsolás összekötő ágában a harmadrendű mozgásjellemző legnagyobb értéke a (2.35.) összefüggés és a **8.1. táblázat** adatai szerint:

$$|h| = \frac{V^3}{3,6^3} \frac{1}{R \cdot d} = \frac{80^3}{3,6^3} \cdot \frac{1}{800 \cdot 17,00} = 0,807 \text{ m/s}^3.$$

Egyenes és körív érintőleges csatlakoztatása esetén, a körívnek a sugara, ahol a $V = 80$ km/h sebességgel haladó járműben a harmadrendű mozgásjellemző értéke $h = 0,4 \text{ m/s}^3$:

$$R = \frac{V^3}{3,6^3} \frac{1}{h \cdot d} = \frac{80^3}{3,6^3} \cdot \frac{1}{0,4 \cdot 17,00} = 1613,814 \approx 1614 \text{ m}.$$

Az $R = 1614$ m sugarú kitérőkkel és a vágánykapcsolás ellenívei között

$$e = V/2 = 80/2 = 40 \text{ m}$$

hosszú közbenső egyenessel kialakított vágánykapcsolás hossza:

$$TH = 180,707 \text{ m}.$$

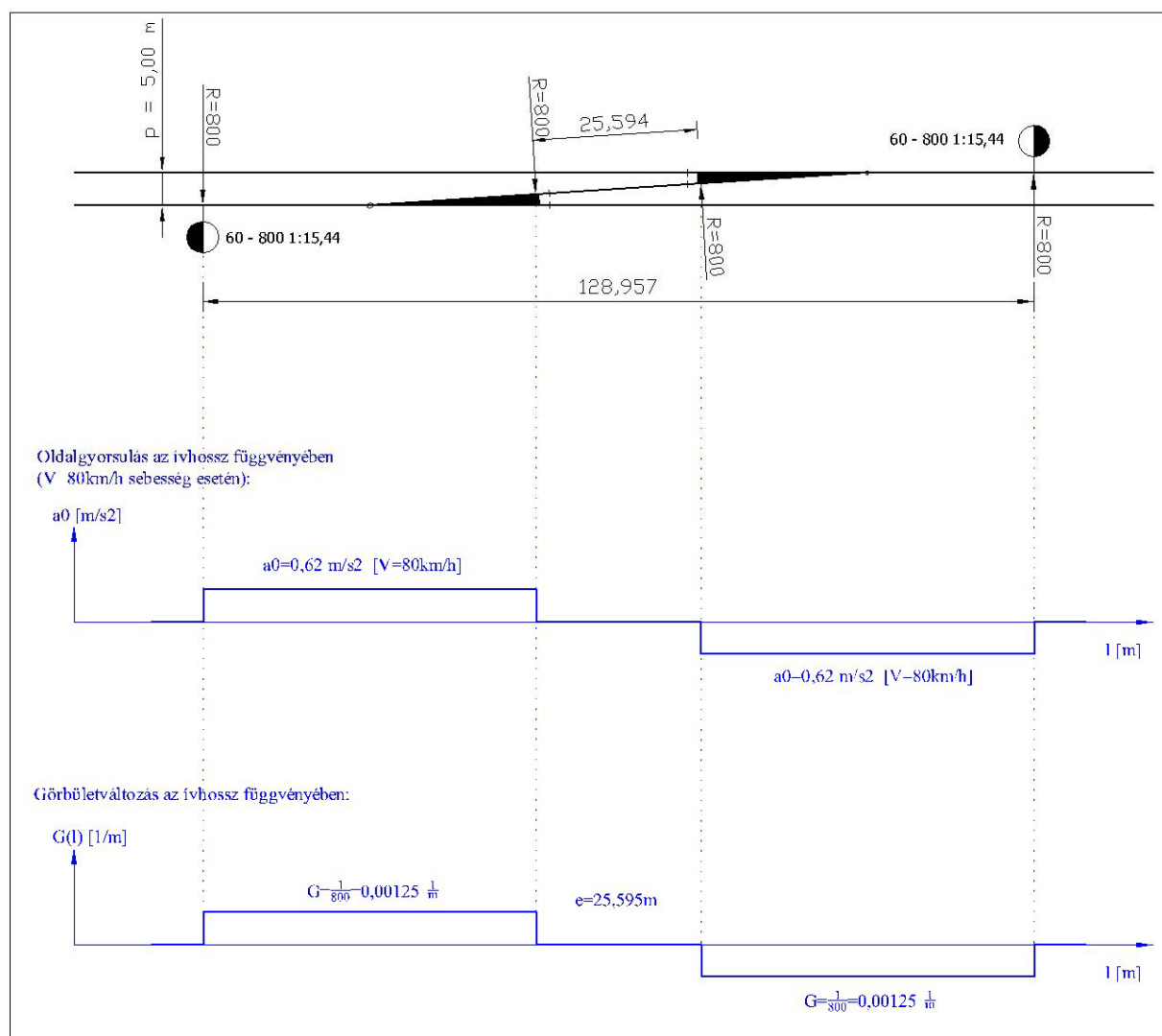
A **8.3.6. alfejezet**ben bemutatott, módosított-összetett koszinusz átmenetiíves kitérőkkel, a 60-800-1:15:44 rendszerű kitérőkkel, valamint $R = 1614$ m sugarú kitérőkkel — ahol az ellenívek között $e = 40$ m hosszú egyenes van — kialakított vágánykapcsolások hosszát és a harmadrendű mozgásjellemző legnagyobb értékét a **8.8. táblázat** foglalja össze.

A **8.8. táblázat** adataiból látható, hogy azonos kinematikai igénybevételek esetén az átmenetiíves geometria rövidebb vágánykapcsolási hosszakat eredményez.

8.8. táblázat: A módosított-összetett koszinusz átmenetiíves kitérőkkel, a 60-800-1:15,44 rendszerű kitérőkkel, valamint $R = 1614$ m sugarú kitérőkkel kialakított vágánykapcsolások hossza és a harmadrendű mozgásjellemző legnagyobb értéke

Kitérő rendszer geometriája	A vágánykapcsolás hossza [m]	A harmadrendű mozgásjellemző legnagyobb értéke [m/s^3]
Módosított-összetett koszinusz átmenetiíves	161,711	0,4
Köríves, (60-800-1:15,44)	128,957	0,807
Köríves, $R=1614$ m, $e = 40$ m	180,707	0,4

8.15. ábra: A 60-800-1:15:44 rendszerű $R = 800$ m sugarú kitérőkkel kialakított vágánykapcsolás tengelyábrája, görbületi ábrája, és a $V = 80$ km/h sebességgel haladó járműre ható oldalgyorsulás ábrája



1.A. FÜGGELÉK

Egyenes és köríves pályaszakaszok között kinematikai szempontból szükséges koszinusz átmenetiívek hossza

(Készítés alatt)

1.B. FÜGGELÉK

Egyenes és köríves pályaszakaszok között kinematikai szempontból szükséges klotoid átmenetiívek hossza

(Készítés alatt)

2.A. FÜGGELÉK

Azonos görbületű körívek között kinematikai szempontból szükséges koszinusz átmenetiívek hossza

(Készítés alatt)

2.B. FÜGGELÉK

Azonos görbületű körívek között kinematikai szempontból szükséges klotoid átmenetiívek hossza

(Készítés alatt)

3.A. FÜGGELÉK

Ellenkező görbületű körívek között kinematikai szempontból szükséges koszinusz átmenetiívek hossza

(Készítés alatt)

3.B. FÜGGELÉK

Ellenkező görbületű körívek között kinematikai szempontból szükséges klotoid átmenetiívek hossza

(Készítés alatt)

4. FÜGGELÉK

Köríves pályaszakaszokon a túlemelések táblázata

(Készítés alatt)

5. FÜGGELÉK

A 8.3.6. fejezetben ismertetett, módosított-összetett koszinusz átmenetiíves kitérőkkel kialakított vágánykapcsolás számításának eredménylistája

$$\begin{aligned} R1 &= 1613,8142 \text{ [m]} & L0 &= 20,8797 \text{ [m]} \\ R2,h &= 905,6663 \text{ [m]} & L &= 47,5833 \text{ [m]} \\ R0 &= 2063,9435 \text{ [m]} & L0+L &= 68,4630 \text{ [m]} \end{aligned}$$

$$l = L0 : \quad x = 20,8788 \text{ [m]} \quad y = 0,1665 \text{ [m]} \quad \tau = 1^\circ 1' 52.01''$$

A koszinusz-geometria vége:

$$l = L0+L: \quad x = 68,4289 \text{ [m]} \quad y = 1,9007 \text{ [m]} \quad \tau_{c,v} = 2^\circ 32' 10.53''$$

A csúcssín lemetzési szög max. értéke ($\tau_{cs,max}$) = $0^\circ 36' 12.80''$

A csúcssín lemetzésének a helye:

$$x = 3,9932 \text{ [m]} \quad y = 0,0050 \text{ [m]} \quad l = 3,9932 \text{ [m]} \quad \tau_{cs} = 0^\circ 8' 42.17''$$

A kitérő vége:

$$x = 65,0272 \text{ [m]} \quad y = 1,7500 \text{ [m]} \quad l = 65,0580 \text{ [m]} \quad \tau_{k,v} = 2^\circ 32' 7.27''$$

5. Függelék 1. táblázat:

A vágánytengely koordinátái:

Ívhossz l, [m]	Abszcissza x [m]	Ordináta y [m]
0,0000	0,0000	0,0000
2,0000	2,0000	0,0012
4,0000	4,0000	0,0050
6,0000	6,0000	0,0114
8,0000	8,0000	0,0207
10,0000	9,9999	0,0331
12,0000	11,9999	0,0489
14,0000	13,9998	0,0683
16,0000	15,9996	0,0917
18,0000	17,9994	0,1192
20,0000	19,9992	0,1511
21,0000	20,9990	0,1686
23,0000	22,9987	0,2071
25,0000	24,9982	0,2500
27,0000	26,9976	0,2971
29,0000	28,9970	0,3486
31,0000	30,9962	0,4041
33,0000	32,9953	0,4635
35,0000	34,9943	0,5267
37,0000	36,9932	0,5935
39,0000	38,9920	0,6635
41,0000	40,9907	0,7365

Ívhossz l, [m]	Abszcissza x [m]	Ordináta y [m]
1,0000	1,0000	0,0003
3,0000	3,0000	0,0028
5,0000	5,0000	0,0079
7,0000	7,0000	0,0157
9,0000	8,9999	0,0265
11,0000	10,9999	0,0405
13,0000	12,9998	0,0581
15,0000	14,9997	0,0795
17,0000	16,9995	0,1049
19,0000	18,9993	0,1346
20,8797	20,8788	0,1665
22,0000	21,9989	0,1873
24,0000	23,9984	0,2280
26,0000	25,9979	0,2730
28,0000	27,9973	0,3223
30,0000	29,9966	0,3758
32,0000	31,9958	0,4333
34,0000	33,9948	0,4947
36,0000	35,9938	0,5597
38,0000	37,9926	0,6281
40,0000	39,9913	0,6996
42,0000	41,9900	0,7740

Az 5. Függelék 1. táblázatának folytatása

43,0000	42,9892	0,8122
45,0000	44,9877	0,8904
47,0000	46,9861	0,9708
49,0000	48,9844	1,0530
51,0000	50,9826	1,1368
53,0000	52,9808	1,2219
55,0000	54,9790	1,3081
57,0000	56,9771	1,3951
59,0000	58,9751	1,4827
61,0000	60,9732	1,5707
63,0000	62,9713	1,6590
65,0000	64,9693	1,7474
67,0000	66,9673	1,8359
68,4630	68,4289	1,9007

44,0000	43,9885	0,8510
46,0000	45,9869	0,9303
48,0000	47,9852	1,0117
50,0000	49,9835	1,0947
52,0000	51,9817	1,1792
54,0000	53,9799	1,2649
56,0000	55,9780	1,3515
58,0000	57,9761	1,4388
60,0000	59,9742	1,5267
62,0000	61,9722	1,6148
64,0000	63,9703	1,7032
66,0000	65,9683	1,7917
68,0000	67,9664	1,8802

5. Függelék 2. táblázat:

A belső sinszál fej vágánytengely felé eső oldalának koordinátái:

Ívhossz l, [m]	Abszcissza x [m]	Ordináta y [m]
0,0000	0,0000	0,7175
2,0000	1,9991	0,7187
4,0000	3,9982	0,7225
6,0000	5,9972	0,7289
8,0000	7,9961	0,7382
10,0000	9,9949	0,7506
12,0000	11,9936	0,7663
14,0000	13,9921	0,7858
16,0000	15,9905	0,8091
18,0000	17,9888	0,8366
20,0000	19,9870	0,8685
21,0000	20,9860	0,8860
23,0000	22,9841	0,9245
25,0000	24,9820	0,9673
27,0000	26,9800	1,0144
29,0000	28,9778	1,0658
31,0000	30,9756	1,1213
33,0000	32,9733	1,1807
35,0000	34,9710	1,2439
37,0000	36,9687	1,3105
39,0000	38,9663	1,3805
41,0000	40,9640	1,4535
43,0000	42,9616	1,5292
45,0000	44,9592	1,6074
47,0000	46,9569	1,6877
49,0000	48,9546	1,7699
51,0000	50,9523	1,8537
53,0000	52,9501	1,9388
55,0000	54,9479	2,0249
57,0000	56,9457	2,1119
59,0000	58,9436	2,1995
61,0000	60,9416	2,2875
63,0000	62,9396	2,3758
65,0000	64,9376	2,4642
67,0000	66,9356	2,5527
68,4630	68,3971	2,6175

Ívhossz l, [m]	Abszcissza x [m]	Ordináta y [m]
1,0000	0,9996	0,7178
3,0000	2,9986	0,7203
5,0000	4,9977	0,7254
7,0000	6,9967	0,7332
9,0000	8,9955	0,7440
11,0000	10,9942	0,7580
13,0000	12,9929	0,7756
15,0000	14,9913	0,7969
17,0000	16,9897	0,8223
19,0000	18,9879	0,8520
20,8797	20,8659	0,8839
22,0000	21,9851	0,9047
24,0000	23,9831	0,9453
26,0000	25,9810	0,9903
28,0000	27,9789	1,0396
30,0000	29,9767	1,0930
32,0000	31,9745	1,1505
34,0000	33,9722	1,2118
36,0000	35,9698	1,2768
38,0000	37,9675	1,3451
40,0000	39,9651	1,4166
42,0000	41,9628	1,4910
44,0000	43,9604	1,5680
46,0000	45,9581	1,6473
48,0000	47,9557	1,7286
50,0000	49,9534	1,8116
52,0000	51,9512	1,8961
54,0000	53,9490	1,9817
56,0000	55,9468	2,0683
58,0000	57,9447	2,1557
60,0000	59,9426	2,2435
62,0000	61,9406	2,3316
64,0000	63,9386	2,4200
66,0000	65,9366	2,5085
68,0000	67,9346	2,5970

5. Függelék 3. táblázat:

A külső sínszál fej vágánytengely felé eső oldalának koordinátái:

Az elméleti keresztezési pont:

$x = 57.9041$ [m] $y = 0.7175$ [m] $l_{vt} = 57.8964$ [m] $\tau_{elm} = 2^\circ 30' 35.28''$

Ívhossz l, [m]	Abszcissza x [m]	Ordináta y [m]
0,0000	0,0000	-0,7175
2,0000	2,0009	-0,7163
4,0000	4,0018	-0,7125
6,0000	6,0028	-0,7061
8,0000	8,0038	-0,6968
10,0000	10,0050	-0,6844
12,0000	12,0062	-0,6686
14,0000	14,0074	-0,6492
16,0000	16,0088	-0,6258
18,0000	18,0101	-0,5982
20,0000	20,0114	-0,5663
21,0000	21,0120	-0,5487
23,0000	23,0133	-0,5102
25,0000	25,0144	-0,4674
27,0000	27,0153	-0,4201
29,0000	29,0162	-0,3687
31,0000	31,0168	-0,3131
33,0000	33,0173	-0,2536
35,0000	35,0176	-0,1904
37,0000	37,0178	-0,1236
39,0000	39,0177	-0,0536
41,0000	41,0174	0,0195
43,0000	43,0169	0,0953
45,0000	45,0162	0,1735
47,0000	47,0153	0,2539
49,0000	49,0142	0,3361
51,0000	51,0129	0,4200
53,0000	53,0116	0,5051
55,0000	55,0100	0,5913
57,0000	57,0084	0,6783
59,0000	59,0067	0,7659
61,0000	61,0048	0,8539
63,0000	63,0030	0,9422
65,0000	65,0010	1,0306
67,0000	66,9991	1,1191
68,4630	68,4606	1,1839

Ívhossz l, [m]	Abszcissza x [m]	Ordináta y [m]
1,0000	1,0004	-0,7172
3,0000	3,0013	-0,7147
5,0000	5,0023	-0,7096
7,0000	7,0033	-0,7018
9,0000	9,0044	-0,6910
11,0000	11,0055	-0,6769
13,0000	13,0068	-0,6594
15,0000	15,0081	-0,6380
17,0000	17,0094	-0,6125
19,0000	19,0107	-0,5828
20,8797	20,8917	-0,5509
22,0000	22,0127	-0,5300
24,0000	24,0138	-0,4893
26,0000	26,0149	-0,4443
28,0000	28,0158	-0,3949
30,0000	30,0165	-0,3414
32,0000	32,0171	-0,2838
34,0000	34,0175	-0,2225
36,0000	36,0177	-0,1574
38,0000	38,0177	-0,0890
40,0000	40,0175	-0,0174
42,0000	42,0171	0,0570
44,0000	44,0165	0,1341
46,0000	46,0157	0,2134
48,0000	48,0147	0,2948
50,0000	50,0136	0,3779
52,0000	52,0123	0,4624
54,0000	54,0108	0,5481
56,0000	56,0092	0,6347
58,0000	58,0075	0,7220
60,0000	60,0058	0,8099
62,0000	62,0039	0,8980
64,0000	64,0020	0,9864
66,0000	66,0001	1,0749
68,0000	67,9981	1,1634

Irodalomjegyzék

1. Dr. Megyeri Jenő: Vasúti mozgásgeometria, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1986
2. Dr. Gajári József: Vasútépítéstan II. Tankönyvkiadó, Budapest, 1982;
3. MÁV Kitérőgyártó Üzem: C 54-XI r. kitérő, alaprajz, rajzsám: 09-550-00-00-00, Gyöngyös, 1990;
4. MÁV Kitérőgyártó Üzem: C 54-2200 r. átmenetiíves kitérő, alaprajz, rajzsám: 09-532-00-00-00, Gyöngyös, 1988;
5. Országos Közforgalmú Vasutak Pályatervezési Szabályzata, KÖZDOK, Budapest, 1983;
6. MÁV Fejlesztési és Kísérleti Intézet: C54-2200 átmenetiíves és 54-1800-as kitérők dinamikai és geometriai vizsgálata, Budapest 1991.