9 பகுமுறை வடிவியல் (Co-ordinate geometry)

எண்களைப் பற்றிக் கற்கும் எண் கணிதமும், வடிவங்களைப் பற்றிக் கற்கும் வடிவியலுமல்லவா, கணிதவியலின் அடிப்படைப் பிரிவுகள்? எண்கணிதத்தின் மற்றொரு வடிவமாக (abstract form) இயற்கணிதம் வளருகிறது. பூர்வீகக்காலம் முதலே வடிவியல் பிரச்சினைகளை இயற்கணிதம் மூலமும் இயற்கணிதப் பிரச்சினைகளை வடிவியல் முறைகளிலும் தீர்வு செய்திருப்பதைக் காணலாம்.

கி.மு. பதினேழாம் நூற்றாண்டின் பிரஞ்சு கணித மேதைகளான தேகார்த்தே, பெஃர்மா முதலானோர் வடிவியல் பிரச்சினைகளை இயற்கணித முறையில் தீர்வு காண்பதற்கான ஒழுங்கான வழிமுறைகளைக் கண்டறிந்திருந்தனர். இதுவே பகுமுறை வடிவியல் என்னும் பெயரில் அறியப்படுகிறது. வடிவியலினுடையவும், இயற்கணிதத்தினுடையவும் இந்த ஒருங்கிணைவே நுண்கணிதம் (Calculus). பகுத்தாய்வுக்கணிதம் (Analysis) முதலான நவீன கணிதப் பிரிவுகளுக்கு முன்னோடியாக இருந்தது. பகுமுறை வடிவியலின் மிகவும் முக்கியமான சில கருத்துக்கள் மட்டுமே இப்பாடப்பகுதியில் அறிமுகப்படுத்தப் பட்டுள்ளன.

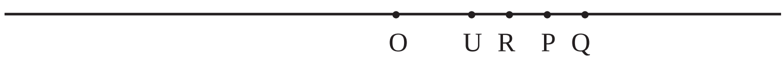
9.1 புள்ளிகளும் எண்களும்

வரையெண்கள் அனைத்தையும் ஒரு நேர்கோட்டின் புள்ளிகளாகக் கருதலாம் என்பதை நாம் முன்னர் கற்றோமல்லவா? மாறாக, ஒரு கோட்டிலுள்ள எல்லாப் புள்ளிகளையும் வரையெண்களால் குறிப்பிடவும் செய்யலாம். இதனைச் செய்வது எவ்வாறு எனக் காண்போம்.

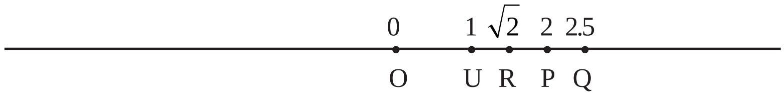
முதலில் 0-த்தைக் குறிப்பிடக் கோட்டிலுள்ள ஒரு புள்ளியை அடையாளப்படுத்தவும். வசதிக்காக இப்புள்ளிக்கு 'O' எனப் பெயரிடலாம்.

கோட்டிலுள்ள புள்ளிகளை எண்களால் குறிப்பிட, O-யில் இருந்து அவற்றிற்குக் காணப்படும் தூரங்களை அல்லவா பயன்படுத்தவேண்டும். வசதியான அலகு ஒன்றைத் தேர்ந்தெடுத்து, O-யில் இருந்து ஒரு அலகு தூரத்தில் வலப்பக்கம் புள்ளி ஒன்று அடையாளப்படுத்தவும். இப்புள்ளிக்கு 'U' எனப் பெயர் அமைக்கலாம்.

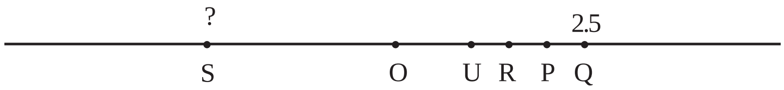
இனி, கோட்டில் O-யின் வலப்பக்கமுள்ள எந்தப் புள்ளியையும், O-யில் இருந்து அப்புள்ளிக்கு அமைந்த தூரத்தைப் பயன்படுத்திக் குறிப்பிடலாமல்லவா? எடுத்துக் காட்டாக, படத்தில் P என்னும் புள்ளி O-யில் இருந்து 2 அலகு தூரத்திலும், Q என்னும் புள்ளி 2.5 அலகு தூரத்திலும் R என்னும் புள்ளி $\sqrt{2}$ அலகு தூரத்திலும் காணப் படுகின்றன.



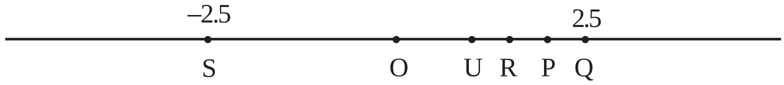
அப்போது P யை 2 என்னும் எண்ணினாலும் Q, R என்பவற்றை முறையே 2.5, $\sqrt{2}$ என்னும் எண்களாலும் குறிப்பிடலாம். மேலும் O யைக் குறிப்பிடும் எண் 0 என்பதையும், U வைக்குறிப்பிடும் எண் 1 என்பதையும் கருத்தில் கொள்ளவும்.



O யின் இடப்பக்கம் 2.5 அலகு தூரத்தில் உள்ள S என்னும் புள்ளியை எந்த எண்ணால் குறிப்பிடலாம்?



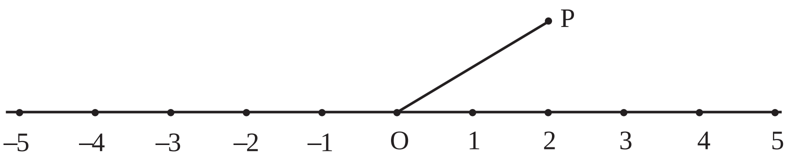
குறை எண்களைக் கோட்டில் O யின் இடப்பக்கமல்லவா நாம் அடையாளப்படுத்தினோம்? எனவே S ஐ –2.5 ஆல் குறிப்பிடலாமல்லவா?



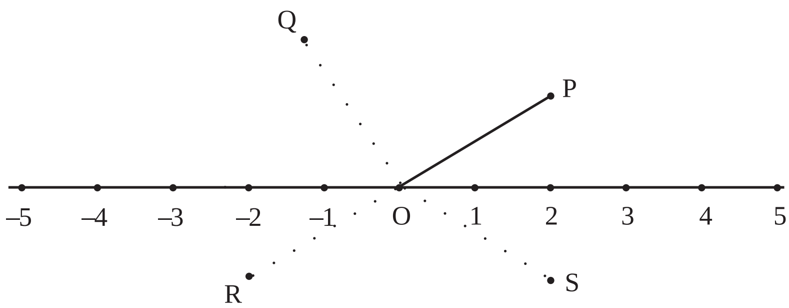
இக்கோட்டில் உள்ள எந்தப் புள்ளியின் இடத்தைக் குறிப்பதற்கும், அதனைக் குறிப்பிடும் எண் தெரிந்தால் போதுமல்லவா?

இக்கோட்டிற்கு வெளியேயுள்ள புள்ளிகளின் இடத்தையும் இவ்வாறு எண்கள் பயன்படுத்திக் குறிப்பிட இயலுமா?

எடுத்துக்காட்டாக படத்திலுள்ள P என்னும் புள்ளியின் இடத்தைக் குறிப்பிட OP யின் தூரம் தெரிந்தால் மட்டும் போதுமா?

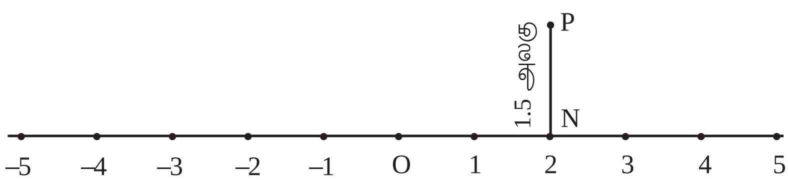


O யில் இருந்து இதே தூரத்தில் வேறு பல புள்ளிகளும் காணப்படுகின்றன அல்லவா?

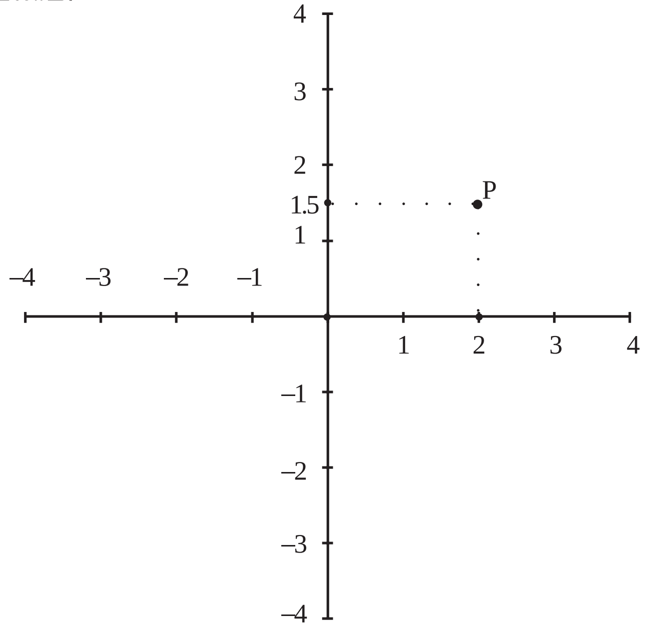


அப்போது P யின் இடத்தைக் குறிப்பிட வேறு ஒரு முறையைக் காண்போம்.

O யில் இருந்து P க்குச் சென்றடைய OP என்னும் கோடு வழியல்லாமல் வேறு வழிகளும் உள்ளன அல்லவா? நமது எண்கோடு வழி P க்கு நேர் கீழ் உள்ள N என்னும் புள்ளியைச் சென்றடைந்து அங்கிருந்து நேராக P யைச் சென்றடையலாம்.

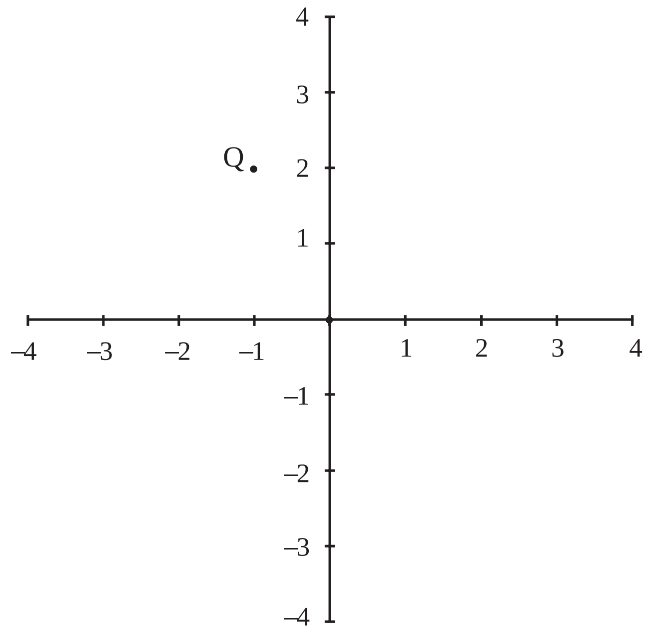


படத்தில் N ஐக் குறிப்பிடும் எண் 2 அல்லவா? மேலும் NP = 1.5 அலகல்லவா? NP யின் நீளத்தைக் குறிப்பிடுவதற்கு வசிதயாக, 0 த்தின் வழி எண்கோட்டிற்குச் செங்குத்தாக முன்னர் பயன்படுத்திய அதே அலகைப் பயன்படுத்தி வேறொரு எண் கோடும் வரையலாம்.

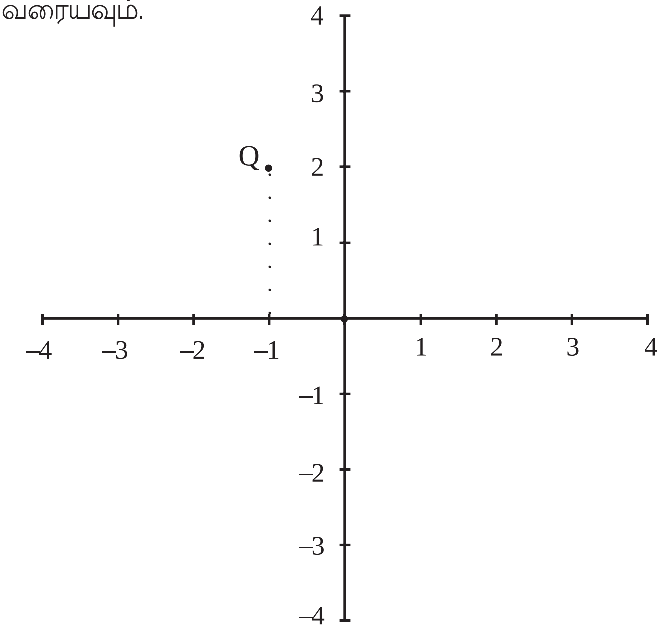


2, 1.5 என்னும் எண்களைப் பயன்படுத்தி P யின் இடத்தை முடிவு செய்யலாம் அல்லவா? அதாவது (2, 1.5) என்னும் எண் ஜோடியே P யின் இடத்தை முடிவு செய்கிறது.

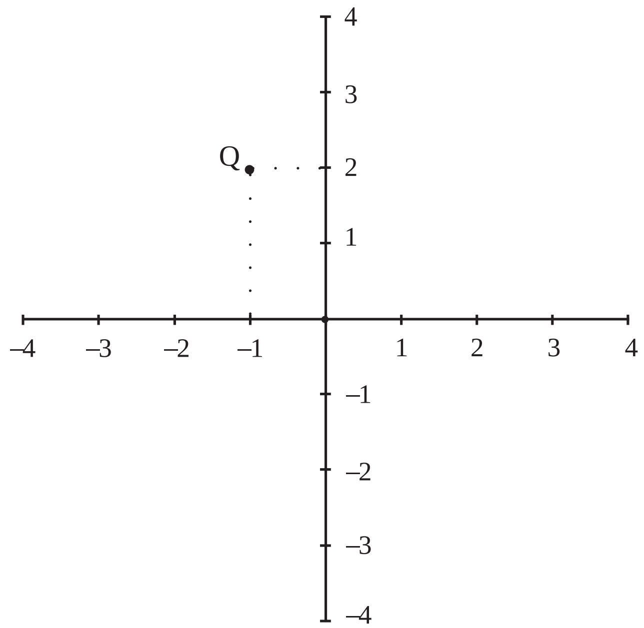
படத்தில் Q என்னும் புள்ளியின் எண்ஜோடியை எவ்வாறு கண்டறியலாம்?



முதலில் Q வில் இருந்து அதன் கீழ்க் காணப்படும் கிடை எண் கோட்டிற்கு குத்துக்கோடு வரையவும்.



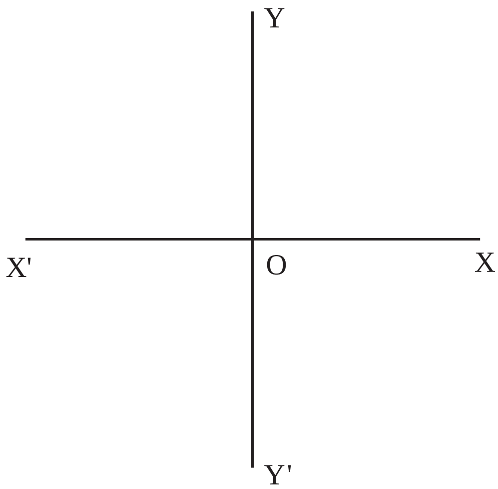
இது எண்கோட்டை –1 ல் அல்லவா சந்திக்கிறது? எனவே Q வின் எண்ஜோடியில் முதலில் காணப்படுவது –1 ஆகும். இரண்டாவது எண், இக்குத்துக்கோட்டின் நீளமா குமல்லவா? இதனைக் காண்பதற்கு Q-வில் இருந்து, செங்குத்தாக நிற்கும் எண் கோட்டிற்கு குத்துக்கோடு வரைந்தால் போதுமல்லவா?



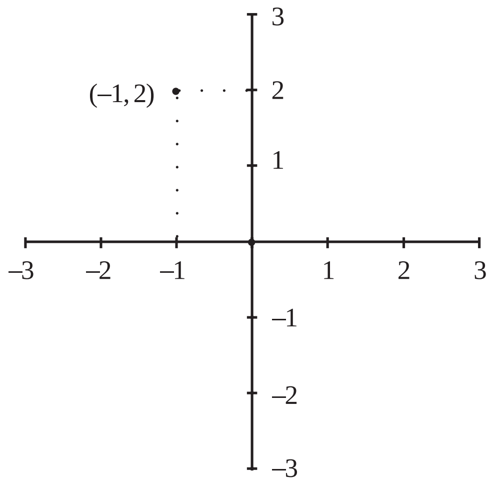
இது எண்கோட்டை 2 ல் சந்திக்கிறது. அப்போது Q வின் எண்ஜோடியின் இரண்டா வது எண் 2 ஆகும். அதாவது Q வின் இடத்தைத் தீர்மானிக்கும் எண்ஜோடி $(-1, 2)$ ஆகும்.

9.2 புள்ளிகளும் அச்சுத் தூரங்களும்

ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான இருகோடுகள் பயன்படுத்தி ஒரு தளத்திலுள்ள எந்த ஒரு புள்ளியின் இடத்தையும், ஒரு எண் ஜோடியால் குறிப்பிடலாம் எனக் கற்றோ மல்லவா? இவ்வாறு வரையும் கோடுகளில் கிடைக்கோட்டை x–அச்சு (x - axis) என வும் குத்துக்கோட்டை y–அச்சு (y - axis) எனவும் அழைக்கிறோம். இவற்றைப் பொது வாக XX', YY' என்றிவ்வாறு குறிப்பிடுகிறோம். இவை வெட்டும் புள்ளியை மூலப் புள்ளி (origin) என அழைக்கிறோம். இதனைப் பொதுவாக O என்னும் எழுத்தால் குறிப்பிடுகிறோம்.

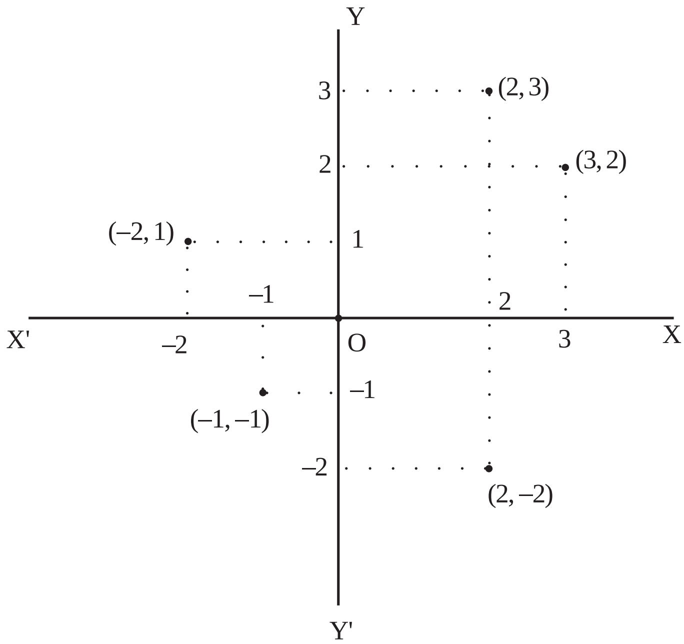


இவற்றைப் பயன்படுத்தி ஒரு புள்ளியின் இடத்தை முடிவுசெய்யும் இரண்டு எண்கள் காண்பது எவ்வாறு என முன்னர் கண்டறிந்தோமல்லவா?



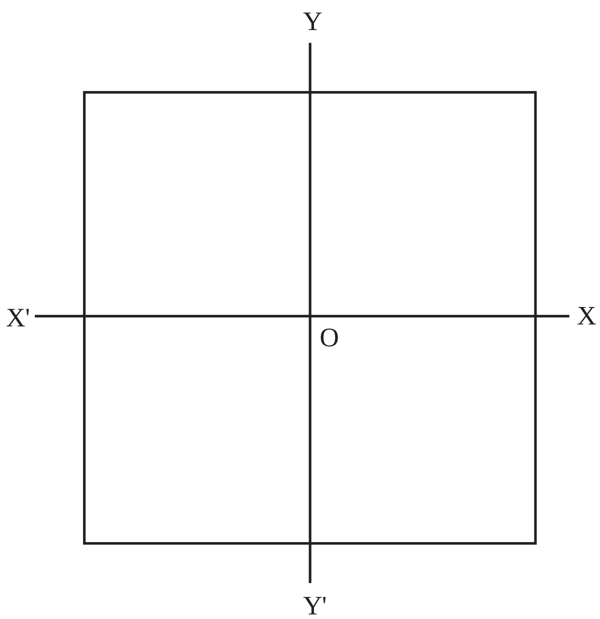
இவ்வாறு கிடைக்கும் எண்களைப் புள்ளியின் அச்சுத்தூரங்கள் (co-ordinates) என் பர். x அச்சிலிருநது கிடைக்கும் எண்ணை x அச்சுத்தூரம் (x co-ordinate) எனவும், y அச்சிலிருந்து கிடைக்கும் எண்ணை y அச்சுத்தூரம் (y co-ordinate) எனவும் அழைக் கிறோம். அச்சுத்தூரங்களை ஒரு ஜோடியாக எழுதும் போது x அச்சுத்தூரத்தை முத

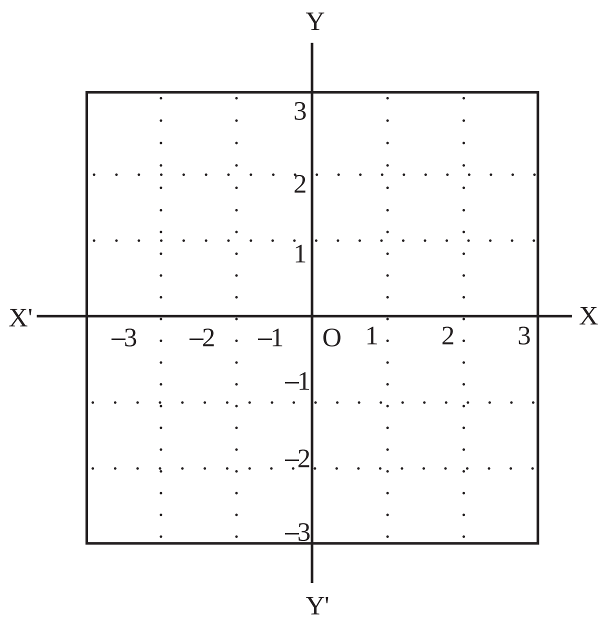
லிலும், *y* அச்சுத்தூரத்தை இரண்டாவதும் எழுதவேண்டும் என்பதை கவனிக்கவும். சில புள்ளிகளும் அவற்றின் அச்சுத்தூரங்களும் கீழ்க்காணப்படும் படத்தில் கொடுக் கப்பட்டுள்ளன.



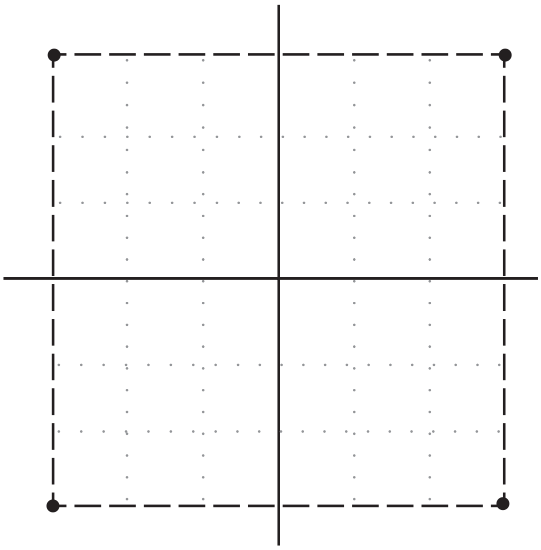
இனி நீங்கள் எளிய செயல்பாடொன்று செய்து பாருங்களேன்.

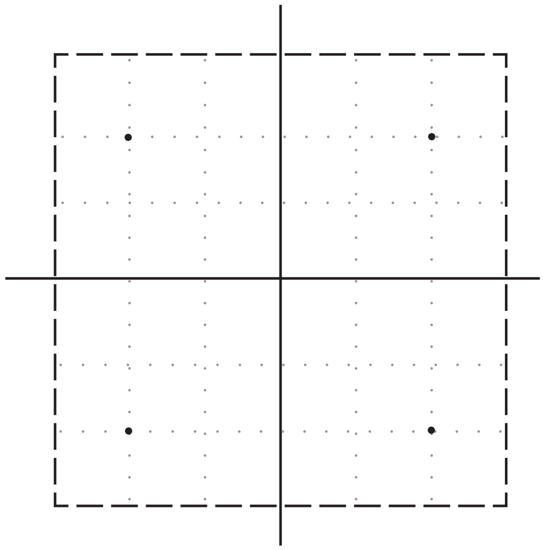
6 செ.மீ. பக்கமுள்ள ஒரு சதுரம் வரைந்து அதன் நடுவில் முதல் படத்தில் கொடுக்கப் பட்டுள்ளது போன்று அச்சுகள் வரையவும். 1 செ.மீ. அலகு எடுத்து இரண்டாவது படத்தில் காணப்படுவது போன்று எண்கள் அடையாளப்படுத்தவும்.

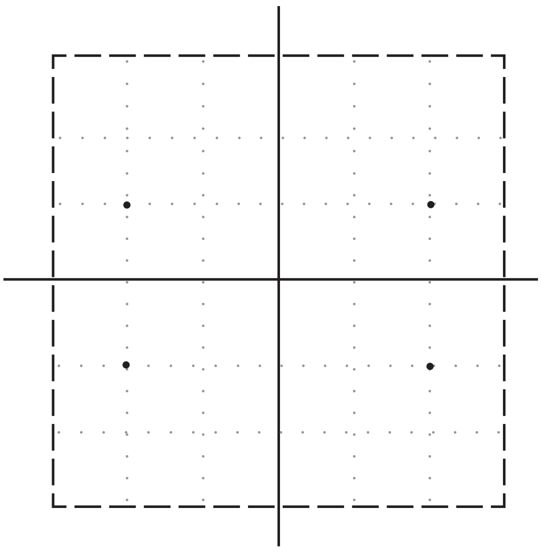


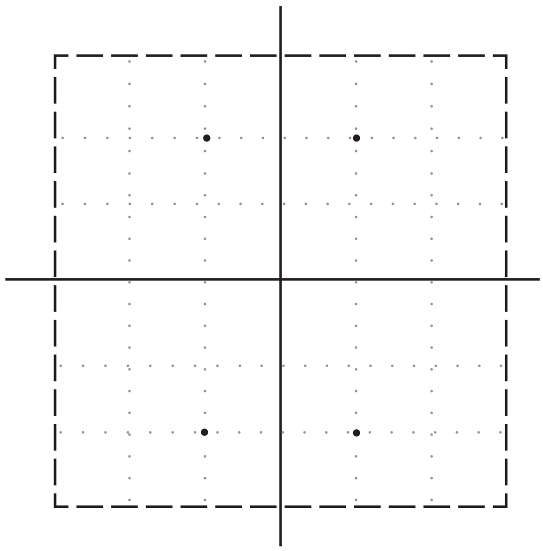


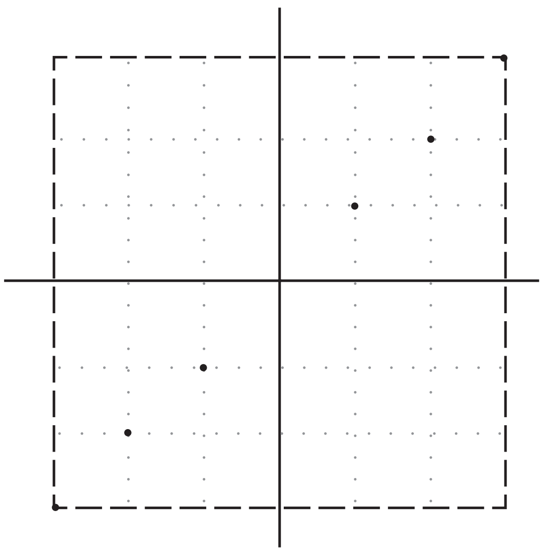
இனி கீழ்க் கொடுக்கப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு படத்திலும் காணப்படும் புள்ளிகளின் அச்சுத் தூரங்களைக் காணவும்.

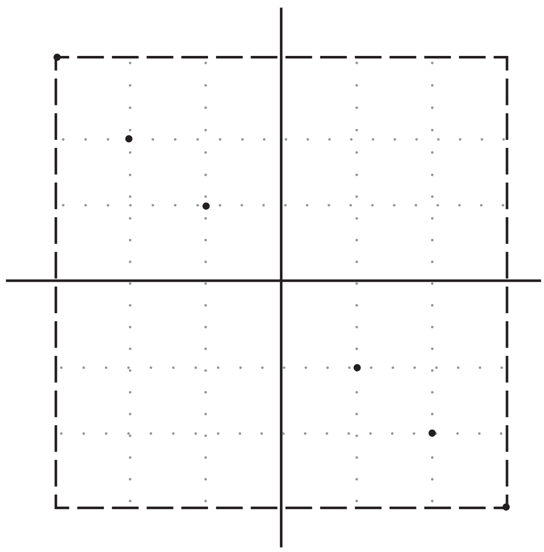










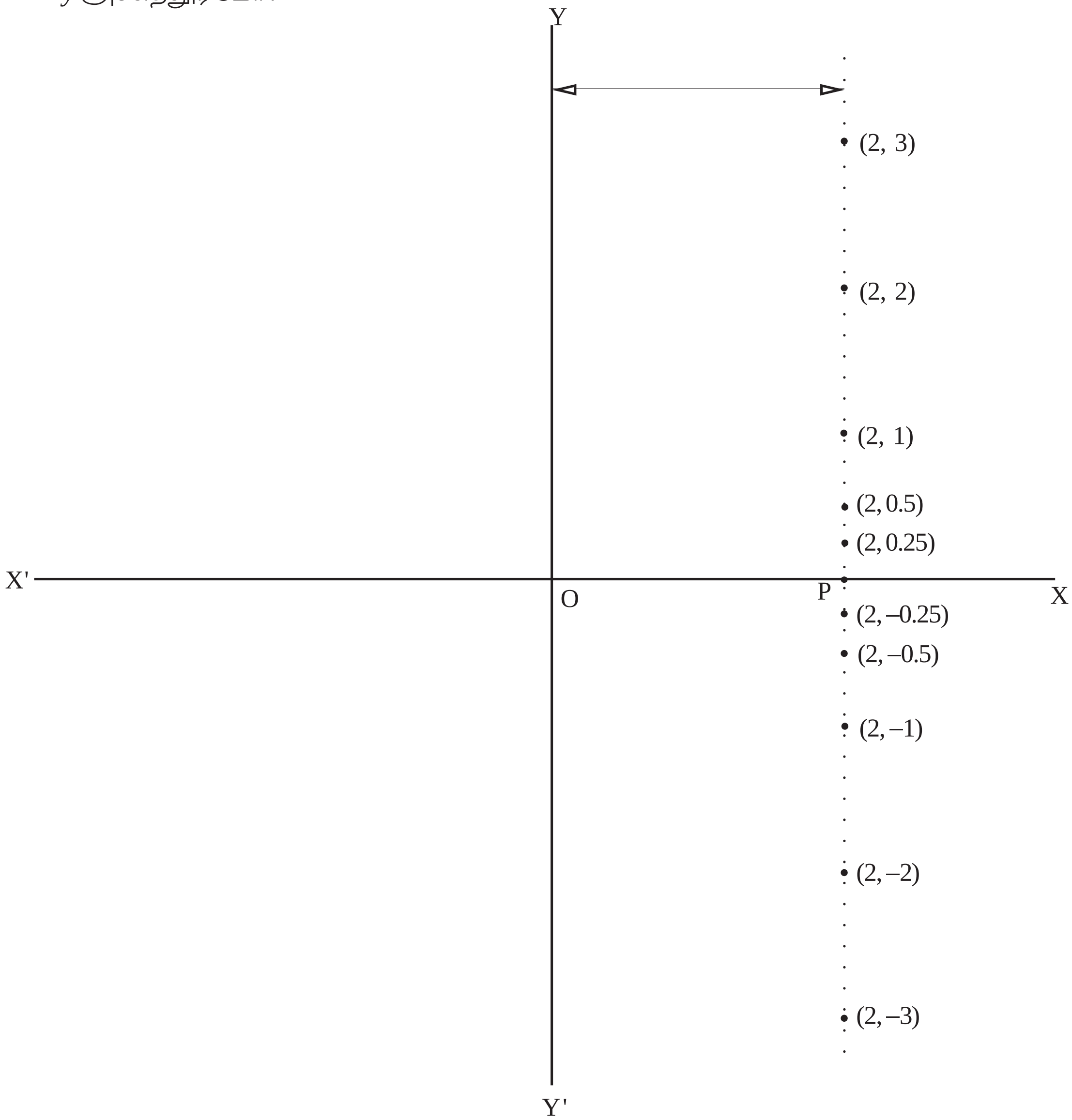


9.3 அச்சுகளிலுள்ள புள்ளிகள்

கீழ்க் கொடுக்கப்பட்டுள்ள படத்தைப் பாருங்கள். O யிலிருந்து 2 அலகு தூரத்தில் x அச்சில் காணப்படும் ஒரு புள்ளி P.

P யின் அச்சுத்தூரங்கள் யாவை? P யின் x அச்சுத்தூரம் 2.

y அச்சுத்தூரமோ?



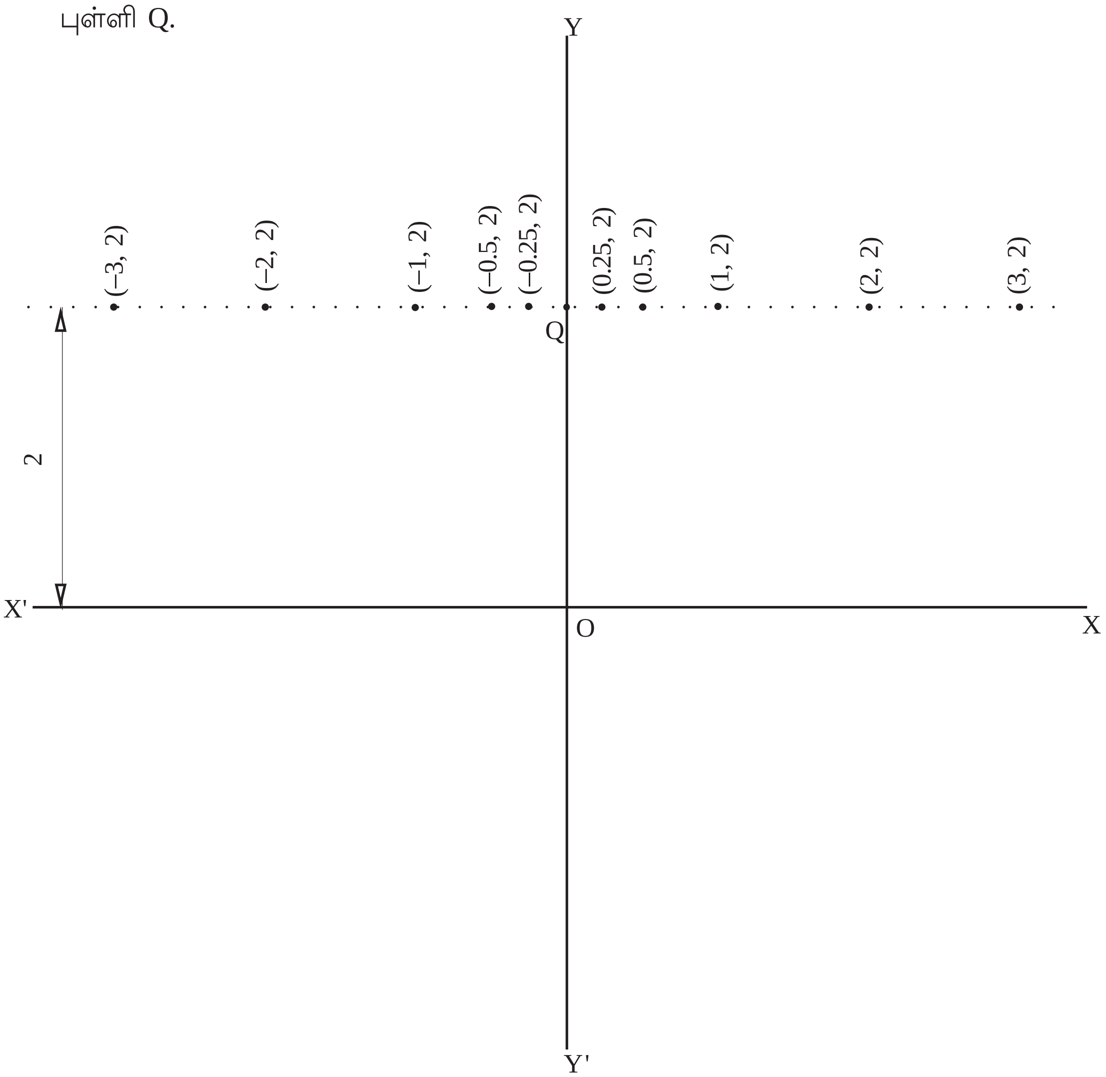
இப்படத்தில் அடையாளப்படுத்தப்பட்டிருக்கும் ஏனைய புள்ளிகளைக் கவனிக்கவும். அவை எல்லாம் y அச்சில் இருந்து 2 அலகு தூரத்தில் காணப்படுகின்றன.

இந்தப் புள்ளிகள் அனைத்தின் x அச்சுத்தூரமும் 2 அல்லவா? y அச்சுத்தூரமோ? x அச்சு நெருங்கிவரும் போது அதன் மதிப்பு குறைகிறது.

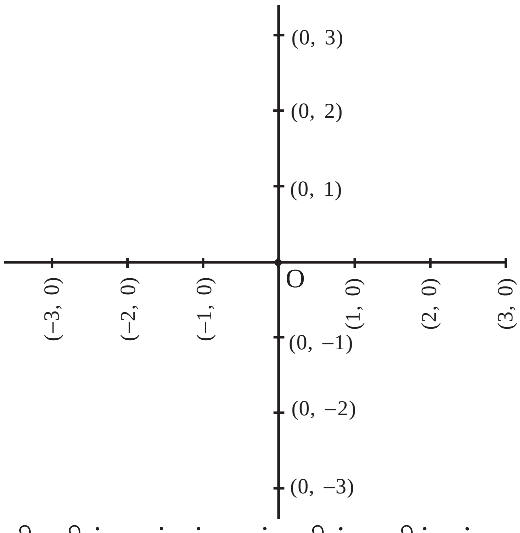
அப்போது P ன் y அச்சுத்தூரம் என்ன?

இதைப் போன்று x அச்சில் O ல் இருந்து 1அலகு தொலைவிலுள்ள புள்ளியின் அச்சுத்தூரங்கள் எவை?

அடுத்த படத்தைப் பார்க்கவும். y அச்சில் O யில் இருந்து 2 அலகு தூரத்திலுள்ள ஒரு புள்ளி Q.



Q என்னும் புள்ளியின் அச்சுத்தூரங்கள் எவை? இப்படத்தைப் பார்க்கவும்.

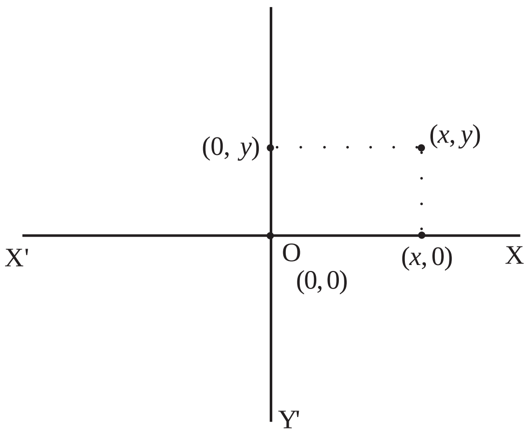


x அச்சிலுள்ள புள்ளிகளின் அச்சுத்தூரங்களின் தனித்தன்மை என்ன?

y அச்சிலுள்ள புள்ளிகளின் தனித்தன்மையோ?

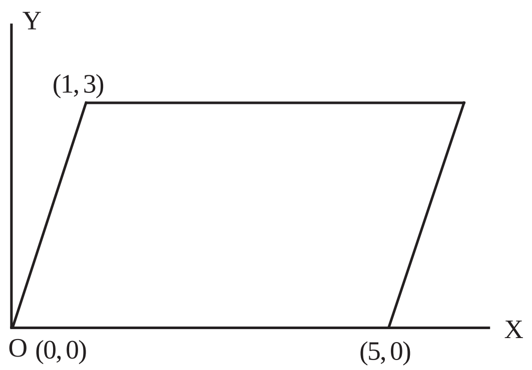
மூலப்புள்ளியின் அச்சுத்தூரங்கள் யாவை?

ஒரு புள்ளியின் அச்சுத்தூரங்கள் (x, y) எனில் அப்புள்ளியில் இருந்துள்ள குத்துக்கோடுகள் அச்சுகளைச் சந்திக்கும் புள்ளிகளின் அச்சுத் தூரங்கள் எவை?

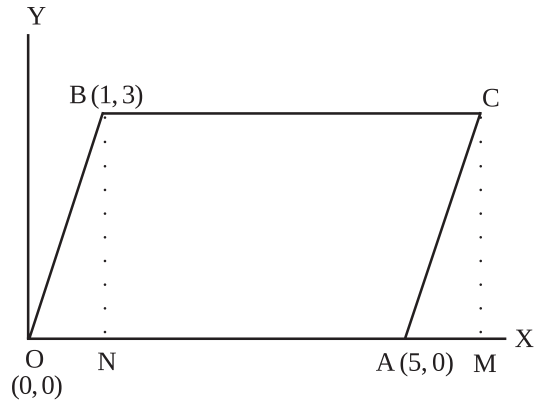


சில எடுத்துக்காட்டுகளைப் பார்ப்போம்.

❖ படத்திலுள்ள இணைகரத்தின் நான்காவது உச்சியின் அச்சுத் தூரங்கள் கண்டறியவும்.



இணைகரத்தின் உச்சிகளுக்குப் படத்தில் உள்ளது போன்று பெயர் கொடுக்கவும். C யின் அச்சுத்தூரங்கள் கண்டறியவேண்டும். அதற்கு C ல் இருந்து x அச்சுக்குக் குத்துக்கோடு வரையவும். B ல் இருந்தும் x அச்சுக்குக் குத்துக் கோடு வரையவும்.



இதில் C ன் x அச்சுத்தூரம் OM ன் நீளமும் y அச்சுத்தூரம் CM ன் நீளமும் அல்லவா? OA, BC என்பவை இணை ஆனதால் CM = BN ஆகும். B ன் y அச்சுதூரமல்லவா BN ன் நீளம்? எனவே BN = 3 ஆகும்.

$$CM = BN = 3$$

இனி, OM கண்டறியவேண்டும். படத்தில் OM = OA + AM என்பதைக் காணலாம். OA என்பது A ன் x அச்சுத்தூரமல்லவா?

$$\therefore OA = 5$$

இனி AM ஐ எவ்வாறு கண்டறிவது?

நாம் AM = ON என நிரூபிக்கலாம். ΔOBN, ΔACM என்னும் செங்கோண முக்கோணங்களைக் கவனிப்போம். OACB ஒரு இணைகரம் என்பதால் OB = AC ஆகும். BN = CM எனவும் நாம் கண்டறிந்தோம். அதனால் இம்முக்கோணங்கள் சர்வ சமமாகும். எனவே

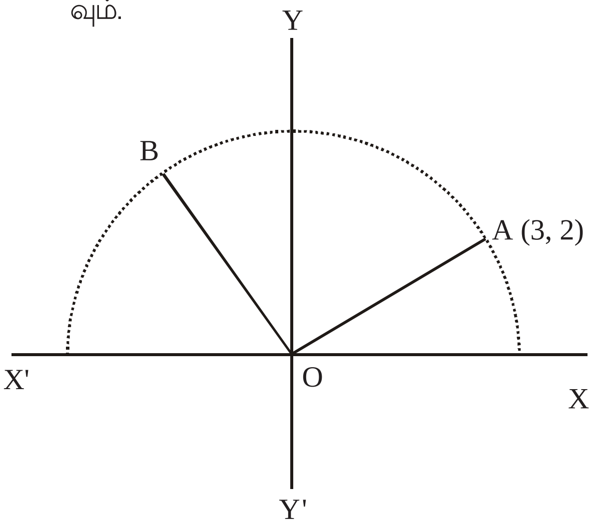
$$AM = ON$$

மேலும் ON என்பது B ன் x அச்சுத்தூரமல்லவா? அதனால் ON = 1 ஆகும்.

$$OM = OA + AM = OA + ON = 5 + 1 = 6$$

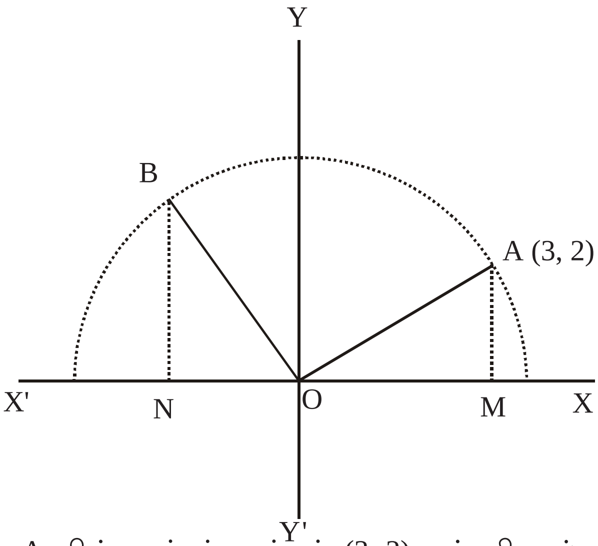
OM = 6 ம், CM = 2 ம் ஆனதினால் C ன் அச்சுத்தூரங்கள் (6, 3) ஆகும்.

❖ கீழ்க்கொடுக்கப்பட்டுள்ள படத்தில் OA, OB என்பவை ஒன்றுக்கொன்று செங்குத் தாகும். B ன் அச்சுத்தூரங்கள் கண்டறிய வும்.



B ன் அச்சுத்தூரங்களைக் கண்டறிய, B ல் இருந்து x அச்சுக்கு BN என்னும் குத்துக்கோடு வரையவும். ON, BN என்பவற்றைக் கண்டறிய வேண்டும்.

A ல் இருந்து x அச்சிற்கு AM என்னும் குத் துக்கோடும் வரையவும்.



A யின் அச்சுத்தூரங்கள் (3, 2) என்பதினால் OM = 3, AM = 2 ஆகுமல்லவா? ON, BN என் பவற்றைக் கண்டறிவதற்கு ΔOMA, ΔONB என்னும் செங்கோணமுக்கோணங்கள் சர்வ சமமென நிரூபிக்கவேண்டும்.

வசதிக்காக

$$\angle AOM = x$$

எனக் கொண்டால்.

$$\angle AOY = \angle YOM - \angle AOM = 90 - x$$

OA, OB இவை ஒன்றுக்கொன்றுச் செங்குத்துக் கோடுகள் என்பது கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. இதி லிருந்து

$$\angle BOY = \angle AOB - \angle AOY = 90 - (90 - x) = x$$

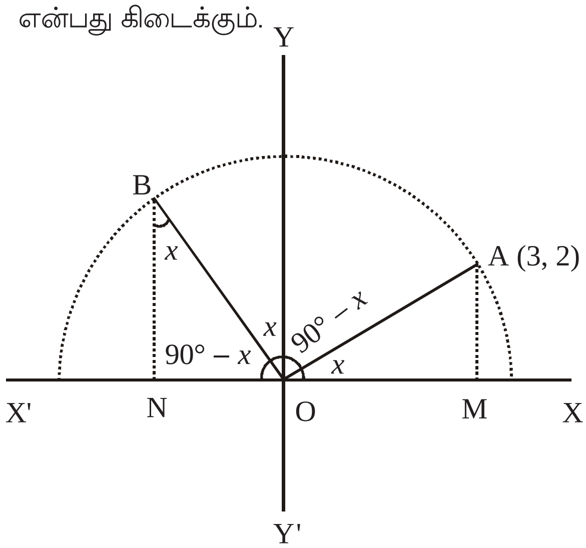
எனக் கிடைக்கும்.

$$\angle BON = \angle YON - \angle BOY = 90 - x$$

ΔONB செங்கோண முக்கோணமானதினால்,

$$\angle OBN = 90 - \angle BON = 90 - (90 - x) = x$$

என்பது கிடைக்கும்.



ΔAOM, ΔBON என்னும் முக்கோணங்களில்

$$\angle AOM = x = \angle OBN$$

$$\angle OAM = 90° - x = \angle BON$$

OA, OB என்னும் பக்கங்கள் வட்டத்தின் ஆரங்களாகும்.

$$\therefore OA = OB$$

ΔAOM ன் இருகோணங்களும் அவற்றின் பொதுக்கரமும், ΔBON ன் இருகோணங்களுக் கும் அவற்றின் பொதுக்கரத்திற்கும் சமமான தினால், இம்முக்கோணங்கள் சர்வசமமாகும். எனவே அவற்றின் சமகோணங்களுக்கு எதிரே உள்ள பக்கங்களும் சமமாகும்.

இதிலிருந்து

ON = AM,   BN = OM என்பது கிடைக்கும்.

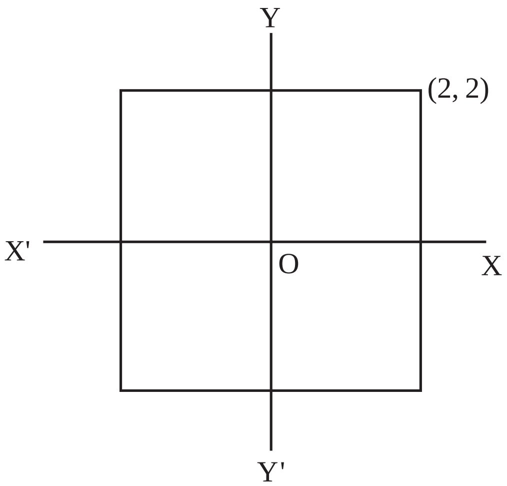
OM = 3, AM = 2 என்பதினால்

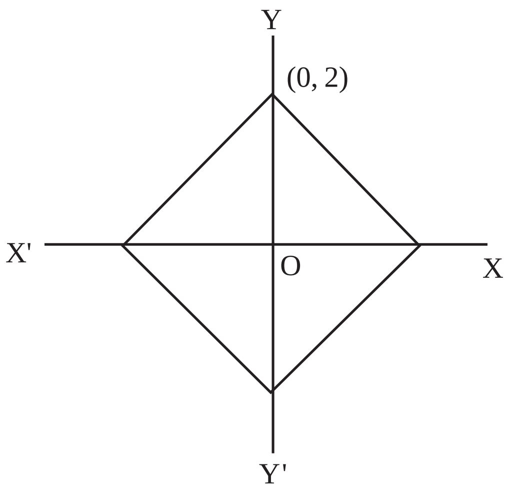
ON = 2   BN = 3

படத்தில் B ன் இடம் O ன் இடப்பக்கம் இருப்பதினால் x அச்சுத்தூரம் குறையெண்ணும் O ன் மேற்பக்கம் இருப்பதினால் y அச்சுத்தூரம் மிகை எண்ணும் ஆகுமல்லவா? எனவே B ன் அச்சுத்தூரம் (–2, 3) ஆகும்.

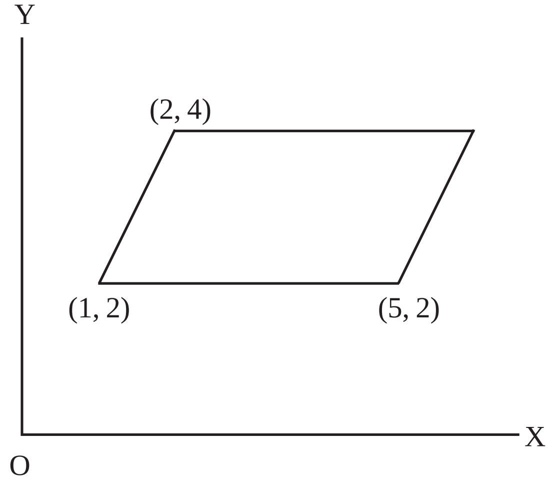
சில செயல்பாடுகள்

- கீழ்க்கொடுக்கப்பட்டுள்ள இருபடங்களிலும் ஒரு சதுரத்தின் ஒரு உச்சியின் அச்சத்தூரங்கள் தரப்பட்டுள்ளன. ஏனைய மூன்று உச்சிகளின் அச்சுத் தூரங்களைக் காணவும்.

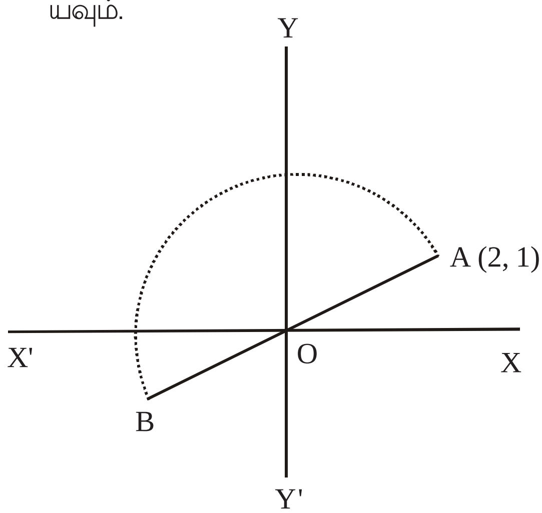




- படத்திலுள்ள இணைகரத்தின் நான்காவது உச்சியின் அச்சுத்தூரங்கள் கண்டறியவும்.



- படத்தில் B ன் அச்சுத்தூரங்கள் கண்டறியவும்.

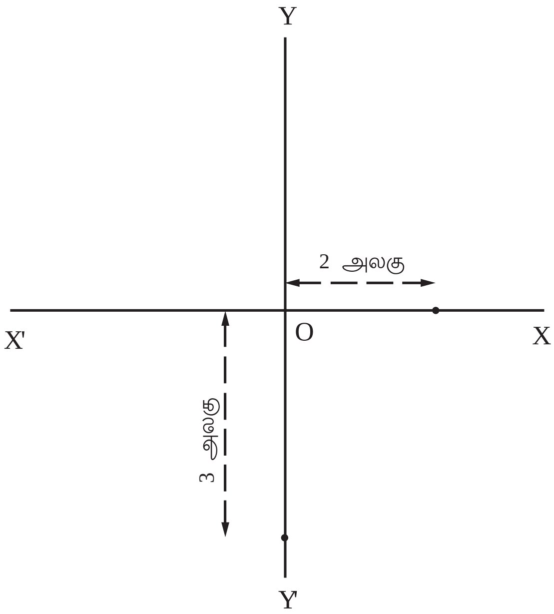


9.4 அச்சுத்தூரங்களும் புள்ளிகளும்

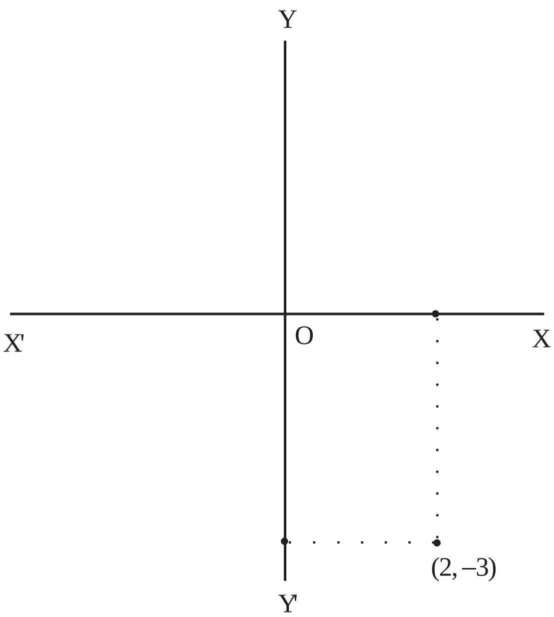
ஒரு புள்ளியின் அச்சுத்தூரங்களைக் குறிப்பிடும் எண்களைக் கண்டறிவதற்கான முறைகளை முன்னர் நாம் பயின்றுள்ளோம். இனி ஏதேனும் ஒரு ஜோடி எண்கள் தரப்பட்டால், அவை அச்சுத்தூரங்களாக அமையும் புள்ளியைக் கண்டறிவதெவ்வாறு என்பதைக் காண்போம்.

எடுத்துக்காட்டாக (2, –3) அச்சுத்தூரங்களுக்கான புள்ளியைக் கண்டறிவோம். x அச்சுத்தூரம் 2 ஆக இருக்கவேண்டுமெனில் x அச்சில்

O ன் வலப்பக்கமாக 2 அலகு தூரத்தில் ஒரு புள்ளியை அடையாளப்படுத்தவும். y அச்சுத் தூரம் -3 ஆக இருக்கவேண்டுமென்பதனால் y அச்சில் O ன் கீழ் 3 அலகு தூரத்தில் ஒரு புள்ளியை அடையாளப்படுத்தவும்.



இந்தப் புள்ளிகள் வழியாக x அச்சிற்கும் y அச்சிற்கும் குத்துக்கோடுகள் வரையவும். இவை வெட்டும் புள்ளியின் அச்சுத்தூரங்கள் $(2, -3)$ என அமையும் என்பதைக் காணலாமல்லவா?



சில செயல்பாடுகள்

கீழ்க்கொடுக்கப்பட்டுள்ள பிரச்சினைகளின் தீர்வு காணும்போது ஒவ்வொரு வினாக்களுக்கும் தனித்தனியே அச்சுகள் வரையவும்.

- $(0, 0), (4, 0), (2, 5)$ என்பவற்றை இணைத்து ஒரு முக்கோணம் வரையவும்.
- $(0, 0), (3, 2), (4, 6), (1, 4)$ என்பவற்றை இணைத்து ஒரு நாற்கரம் அமைக்கவும்.
- $(0, 0), (1, 4), (5, 4), (6, 0)$ என்பவற்றை இணைத்து ஒரு நாற்கரம் அமைக்கவும்.
- கீழ்க் கொடுத்திருக்கும் ஒவ்வொரு வினாவிலுமுள்ள புள்ளிகளை அடையாளப் படுத்தி அடுத்துள்ள புள்ளிகளை இணைக்கவும்.

  (i) $(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)$

  (ii) $(1, 2), (2, 4), (3, 6), (4, 8)$

  (iii) $(1, 1), (2, 3), (3, 5), (4, 7)$.

9.5 தூரங்கள்

$(5, 0), (3, 0)$ என்பவை x அச்சிலுள்ள இருபுள்ளிகள். (சரியாகக் கூறுவதென்றால் x அச்சிலுள்ள இரு புள்ளிகளின் அச்சுத்தூரங்கள்) அல்லவா?

இவற்றிற்கு இடையேயுள்ள தூரம் $5 - 3 = 2$ ஆகும்.

$(-5, 0), (-2, 0)$ என்னும் புள்ளிகளுக்கிடையே அமைந்த தூரமோ?

படத்தில் இருந்து இப்புள்ளிகளுக்கிடையே அமைந்த தூரமும் 2 எனக் காணலாம். ஆனால் $-5 - (-3) = -2$ அல்லவா? -2 ன் சார்புவிலை தான் இங்குள்ள தூரம். அதாவது

$(-5, 0), (-3, 0)$ என்னும் புள்ளிகளுக்கிடையே உள்ள தூரம் $= |-5-(-3)| = |-2| = 2$

$(-5, 0), (3, 0)$ இவற்றிற்கிடையே அமைந்த தூரம் எவ்வளவு?

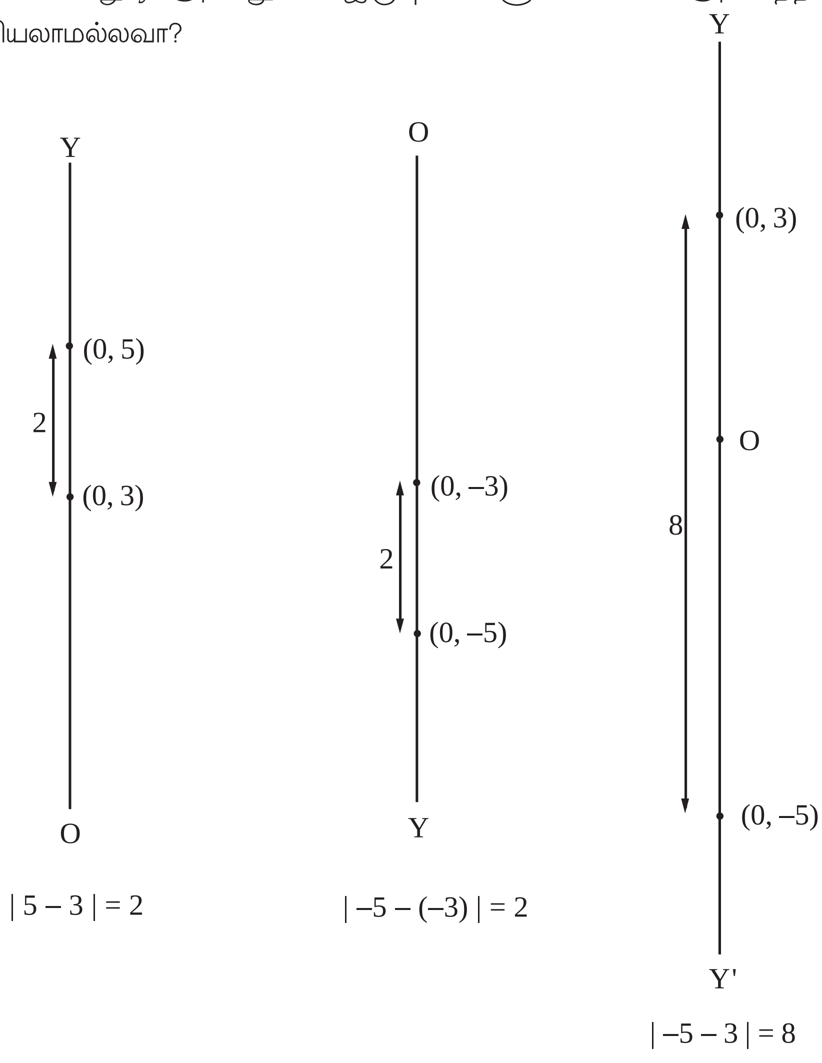
படத்தில் இருந்து தூரம் $5 + 3 = 8$ என்பதறியலாம். $|-5-3| = |-8| = 8$ அல்லவா? அதாவது

$(-5, 0), (3, 0)$ என்னும் புள்ளிகளுக்கிடையே அமைந்த தூரம் $= |-5-3|$

இவற்றில் இருந்து நாம் கண்டறிந்த உண்மை என்ன?

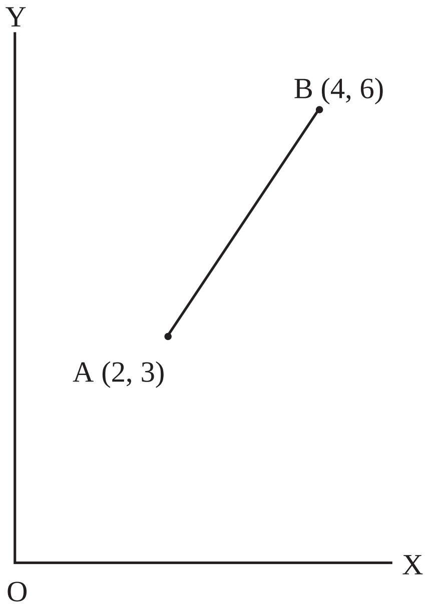
$(x_1, 0), (x_2, 0)$ எனும் புள்ளிகளுக்கிடையே அமைந்த தூரம் $= |x_1 - x_2|$

இதைப் போன்று y அச்சிலுள்ள இருபுள்ளிகளுக்கிடையே அமைந்த தூரமும் கண்டறியலாமல்லவா?

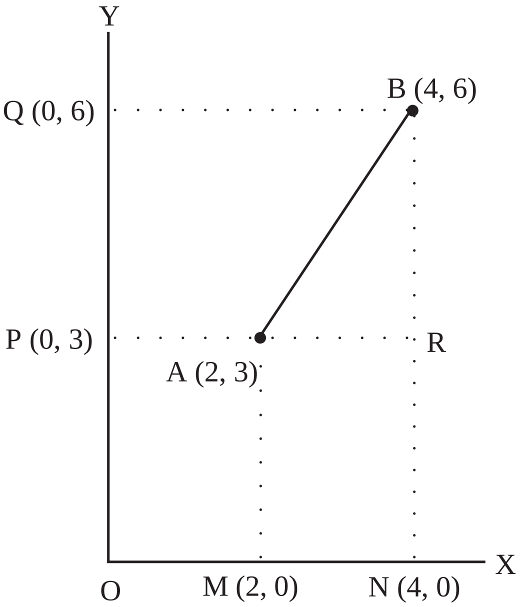


$(0, y_1), (0, y_2)$ என்னும் புள்ளிகளுக்கிடையே அமைந்த தூரம் $= |y_1 - y_2|$

(2, 3), (4, 6) என்னும் புள்ளிளுக்கிடையே அமைந்த தூரம் கண்டறிவது எவ்வாறு?



கீழ்க் கொடுக்கப்பட்டுள்ள படத்தில் உள்ளது போன்று பல குத்துக்கோடுகள் வரையவும்.



ΔABR என்னும் செங்கோணமுக்கோணத்தில் இருந்து

$$AB^2 = AR^2 + RB^2$$

என்பதைக் கண்டறியலாமல்லவா? மேலும் படத்தில் AMNR என்னும் செவ்வகத்தில் இருந்து

$$AR = MN$$

என்பதும், BQPR என்னும் செவ்வகத்தில் இருந்து

$$RB = PQ$$

என்பதும் கிடைக்கும். எனவே

$$AB^2 = MN^2 + PQ^2$$

படத்திலிருந்து

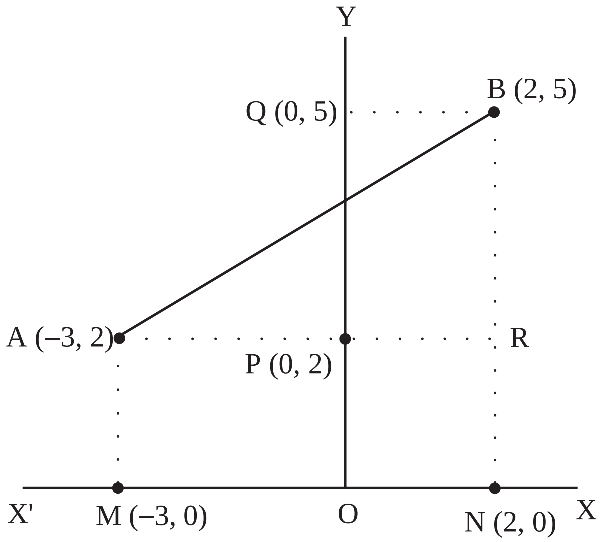
$$MN = 2 \qquad PQ = 3$$

எனக் கண்டறியலாமல்லவா?

$$AB^2 = MN^2 + PQ^2 = 2^2 + 3^2 = 13$$

இதிலிருந்து $AB = \sqrt{13}$ எனக் கிடைக்கும்.

A, B என்னும் புள்ளிகளின் இடம் எதுவானாலும் இந்த முறையில் அவற்றின் இடையே அமைந்த தூரத்தைக் கண்டறியலாமல்லவா? (–3, 2), (2, 5) இவற்றிற்கு இடையிலமைந்த தூரம் கண்டறிவதற்கான படத்தைப் பார்க்கவும்.



இங்கேயும் முன்னர் செய்தது போன்று,

$$AB^2 = AR^2 + RB^2 = MN^2 + PQ^2$$

எனக் கிடைக்குமல்லவா? இங்கு

$$MN = |-3 - 2| = |-5| = 5$$

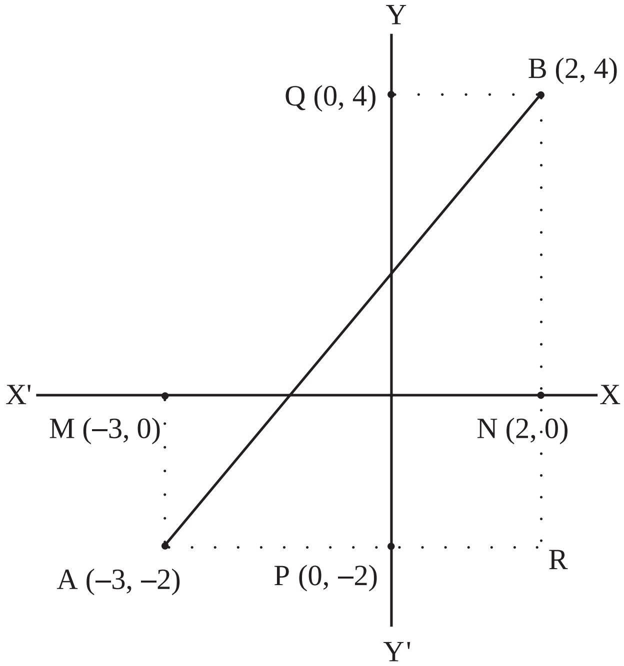
$$PQ = |2 - 5| = |-3| = 3$$

எனக் கண்டறியலாமல்லவா?

$$AB^2 = 5^2 + 3^2 = 34$$

இதிலிருந்து $AB = \sqrt{34}$ எனக் கண்டறியலா மல்லவா?

இதைப் போன்று கீழ்க்காணும் படத்தைப் பயன்படுத்தி (–3, –2), (2, 4) இவற்றுக்கிடையே உள்ள தூரம் கண்டறியவும்.



பொதுவாக $A (x_1, y_1)$, $B (x_2, y_2)$ என்னும் புள்ளிகளுக்கிடையே அமைந்த தூரம் கண்டறிவது எவ்வாறு? மேற்கூறிய எடுத்துக்காட்டுகள் போன்று A, B என்னும் புள்ளிகளில் இருந்து x அச்சிற்குள்ள குத்துக்கோடுகளின் அடிப்பகுதிகள் M, N என்பவையும், y அச்சிற்குள்ள குத்துக்கோடுகளின் அடிப்பகுதிகள் P, Q என்பவையும் ஆனால்,

$$AB^2 = MN^2 + PQ^2$$

என்பது கிடைக்கும். மேலும் M, N என்னும் புள்ளிகளின் அச்சுத்தூரங்கள் $(x_1, 0)$, $(x_2, 0)$ என்பவையும், P, Q என்னும் புள்ளிகளின் அச்சுத்தூரங்கள் $(0, y_1)$, $(0, y_2)$ என்பவையும் ஆனதால்

$$MN = | x_1 - x_2 | \ ; \ PQ = | y_1 - y_2 |$$

எனக் கிடைக்கும். எனவே,

$$AB^2 = | x_1 - x_2 |^2 + | y_1 - y_2 |^2$$

என்பது கிடைக்கும். ஒரு எண்ணின் சார்பு விலையின் வர்க்கமும், எண்ணின் வர்க்கமும் சமம் என்பதால்

$$AB^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$$

என எழுதலாம். எனவே

$$AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

✓ (x_1, y_1), (x_2, y_2) இவற்றிற்கிடையே அமைந்த தூரம்

$$= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

எடுத்துக்காட்டாக,

(–4, –2), (3, –1) இவற்றுக்கிடையே அமைந்த தூரம்

$$= \sqrt{(-4-3)^2 + (-2-(-1))^2}$$

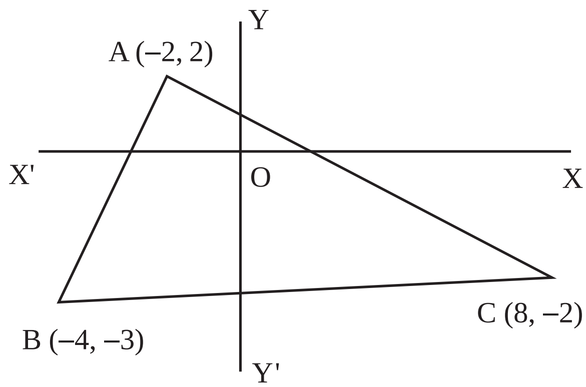
$$= \sqrt{(-7)^2 + (-1)^2}$$

$$= \sqrt{50}$$

$$= 5\sqrt{2}$$

வேறு சில எடுத்துக்காட்டுகளையும் பார்ப்போம்.

❖ படத்திலுள்ள ΔABC செங்கோணமுக்கோணமென நிரூபிக்கவும்.



ஒரு முக்கோணம் செங்கோண முக்கோணமென நிரூபிப்பதற்கு மிகப்பெரிய பக்கத்தின்

நீளத்தின் வர்க்கம் பிற இரு பக்கங்களின் நீளங்களின் வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகைக்குச் சமமென நிரூபித்தால் போதுமல்லவா?

கொடுக்கப்பட்டுள்ள அச்சுத்தூரங்கள் பயன்படுத்தி ΔABC யின் பக்கங்களின் வர்க்கம் கண்டுபிடிக்கலாம்.

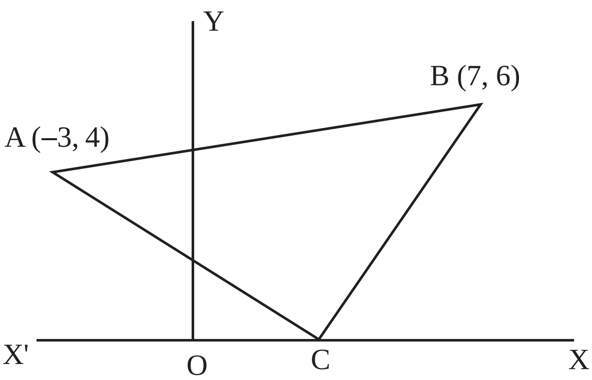
$$\begin{aligned} AB^2 &= [-2-(-4)]^2 + [2-(-3)]^2 \\ &= 2^2 + 5^2 \\ &= 29 \\ BC^2 &= (-4-8)^2 + [-3-(-2)]^2 \\ &= (-12)^2 + (-1)^2 \\ &= 145 \\ AC^2 &= (-2-8)^2 + [2-(-2)]^2 \\ &= (-10)^2 + 4^2 \\ &= 116 \end{aligned}$$

இவற்றில் இருந்து

$$AB^2 + AC^2 = 29 + 116 = 145 = BC^2$$

என்பதைக் கண்டறியலாமல்லவா? எனவே ΔABC ஒரு செங்கோணமுக்கோணமாகும்.

❖ படத்திலுள்ள முக்கோணத்தில் $AC = BC$ ஆகும். C ன் அச்சுத்தூரங்கள் கண்டறியவும்.



C ன் இடம் x அச்சிலுள்ள ஒரு புள்ளி என்பதினால் y அச்சுத்தூரம் 0 ஆகும். C யின் x அச்சுத் தூரம் x எனக் கொள்ளவும். அவ்வாறெனில்

$$AC^2 = (x-7)^2 + 6^2 = x^2 - 14x + 85$$
$$BC^2 = (x+3)^2 + 4^2 = x^2 + 6x + 25$$

எனக் கிடைக்கும். $AC = BC$ என்பது கொடுக்கப்பட்டுள்ளதல்லவா?

$$\therefore x^2 - 14x + 85 = x^2 + 6x + 25$$

இச்சமன்பாட்டைச் சுருக்கினால்,

$$14x + 6x = 85 - 25 = 60$$

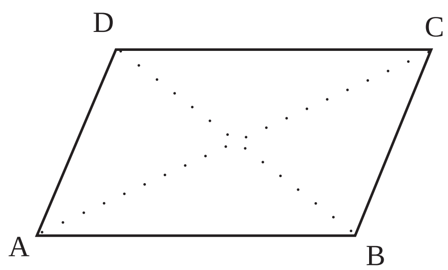
என்பது கிடைக்கும். அதாவது

$$20x = 60$$
$$\therefore x = 3$$

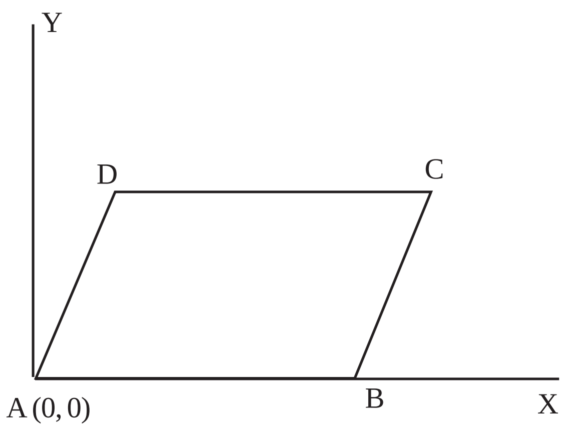
C ன் அச்சுத்தூரங்கள் (3, 0) ஆகும்.

❖ ஒரு இணைகரத்தின் நான்கு பக்கங்களின் வர்க்கங்களின் தொகை அதன் மூலைவிட்டங்களின் வர்க்கங்களின் தொகைக்குச் சமமென்பதை நிரூபிக்கவும்.

படத்தில் இணைரம் ABCD யில் $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2$ என நிரூபீக்கவும்.

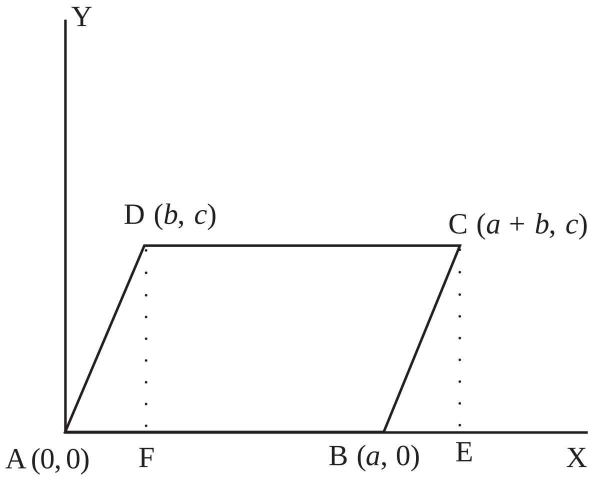


AB என்னும் கோடு x அச்சாகவும், A வழியுள்ள AB ன் குத்துக்கோடு y அச்சாகவும் கொள்ளவும். அப்போது A மூலப்புள்ளியாகும்.



B யின் இடம் x அச்சில் இருப்பதினால் y அச்சு தூரம் 0 ஆகும். B யின் x அச்சுத்தூரம் a எனக் கொள்க. D யின் அச்சுத்தூரங்கள் (b, c) என்றிருக்கட்டும். C யின் அச்சுத்தூரங்கள் எவை?

D, C என்பவற்றில் இருந்து x அச்சுக்குக் குத்துக் கோடுகள் வரையவும்.



ΔADF, ΔBCE என்பவை சர்வசம முக்கோணங்கள் என்பதனால்,

AF = BE, DF = CE எனக் கிடைக்கும்.

$\therefore$ AE = AB + BE = AB + AF

A மூலப்புள்ளியும், B ன் அச்சுத்தூரங்கள் $(a, 0)$ ஆவதினால் AB = a எனவும், D யின் அச்சுத்தூரங்கள் (b, c) ம் ஆவதினால் AF = b என்பதையும் கண்டறியலாமல்லவா?

$\therefore$ AE = $a + b$

மேலும் CE = DF = c

எனவும் கண்டறியலாம். அதனால் C யின் அச்சுத் தூரங்கள் $(a + b, c)$ ஆகும்.

இனி, பக்கங்களின் நீளங்கள் கண்டறியலாமல்லவா?

$$AD^2 = (b-0)^2 + (c-0)^2$$
$$= b^2 + c^2$$

ABCD இணைகரம் என்பதனால்,

CD = AB BC = AD

இப்போது நான்கு பக்கங்களின் வர்க்கங்களின் தொகை கணக்கிடலாமல்லவா?

பக்கங்களின் வர்க்கங்களின் தொகை

$$= AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2$$
$$= AB^2 + DA^2 + AB^2 + DA^2$$
$$= 2\,(AB^2 + DA^2)$$
$$= 2\,(a^2 + b^2 + c^2)$$

இனி, மூலைவிட்டங்களின் நீளத்தைக் கவனிப்போம்.

$$AC^2 = [(a+b)-0]^2 + (c-0)^2 = (a+b)^2 + c^2$$

$$BD^2 = [(a-b)^2 + (0-c)^2] = (a-b)^2 + c^2$$

மூலைவிட்டங்களின் வர்க்கங்களின் தொகை,

$$= AC^2 + BD^2$$
$$= (a+b)^2 + c^2 + (a-b)^2 + c^2$$
$$= (a^2 + 2ab + b^2) + c^2 + (a^2 - 2ab + b^2) + c^2$$
$$= a^2 + b^2 + c^2 + a^2 + b^2 + c^2$$
$$= 2\,(a^2 + b^2 + c^2)$$

முதலில் கண்டறிந்த பக்கங்களின் வர்க்கங்களின் தொகையும் இது அல்லவா?

$\therefore$ பக்கங்களின் வர்க்கத் தொகை
= மூலைவிட்டங்களின் வர்க்கத் தொகை

சில செயல்பாடுகள்

- கீழ்க் கொடுக்கப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு புள்ளியும் மூலப்புள்ளியில் இருந்து எவ்வளவு தொலைவிலுள்ளன என்பதைக் கண்டறியவும்.

  (i) (3, 4) (ii) (−2, 5)

  (iii) (−7, −9) (iv) (x, y)

- ஒரு முக்கோணத்தின் உச்சிகள் (8, 2), (5, −3), (0, 0) ஆனால் அது ஒரு இருசம பக்க முக்கோணம் என்பதை நிரூபிக்கவும்.

- ஒரு முக்கோணத்தின் உச்சிகள் (0, 0), (10, 0), $(5, 5\sqrt{3})$ ஆனால், அம்முக் கோணம் ஒரு சமபக்க முக்கோணம் என்பதை நிரூபிக்கவும்.

- (−5, 5), (7, 10), (10, 6), (−2, 1) என்னும் புள்ளிகள் ஒரு இணைகரத்தின் உச்சிகள் ஆகும் என்பதை நிரூபிக்கவும்.

- (3, −2), (7, 6), (−1, 2), (−5, −6) என்னும் புள்ளிகள் ஒரு சாய்சதுரத்தின் உச்சிகள் ஆகும் என்பதை நிரூபிக்கவும்.

- (6, 4) என்னும் புள்ளியில் இருந்து 5 அலகு தூரத்தில் x அச்சில் எத்தனை புள்ளிகள் உள்ளன? அவற்றைக் கண்டறியவும்.