§8 Поведение функции Шеннона для глубины функций алгебры логики

Рассмотрим ряд вопросов, связанных с поведением функции Шеннона для глубины ФАЛ. Для этого, как обычно, определим сначала глубину $D_{\text{Б}}(f)$ ФАЛ f в базисе Б как минимальную глубину схем из $\text{И}^c_{\text{Б}}$, реализующих f, а зетем введем соответствующую функцию Шеннона:

$$D_{\text{Б}}(n) = \max_{f \in P_2(n)} D_{\text{Б}}(f)$$

Заметим, что любая СФЭ Σ, $\Sigma \in \text{И}^c_{\text{Б}}$, эквивалентна системе $\mathcal{F}$, $\mathcal{F} \in \text{И}^{\Phi}_{\text{Б}}$, состоящей из формул, реализуемых на выходах Σ. При этом, очевидно, $D(\Sigma) = D(\mathcal{F})$, а система формул $\mathcal{F}$ может быть получена из СФЭ Σ в результате экыиывлентных преобразований с помощью системы тождеств $\{\tau^B_{\text{Б}}, \tau^C_{\text{Б}}\}$ (см. §1 главы III). Отсюда следует, что

$$D_{\text{Б}}(f) = \min D(\mathcal{F})$$

где минимум берется по множеству формул $\mathcal{F}$ из $\text{И}^{\Phi}_{\text{Б}}$, реализующих f.

Нижняя оценка для функции Шеннона $D(n) = D_{\text{Б}_0}(n)$ получается из обычных мощностных соображений (см. § 3) с использованием оценок леммы 2.2 из главы 2.

Лемма 8.1 Для $n = 1, 2...$ справедливо неравенство

$$D(n) \geq \lceil n - \log\log n - \bar{o}(1) \rceil \qquad (8.1).$$

Доказательство. Из равенства (3.1) для $\text{И} = \text{И}^{\Phi}$ и $\psi = D$ с учетом оценок леммы 2.2 главы 2 следует неравенство

$$(32n)^{2^{D(n)}} \geq 2^{2^n},$$

дважды логарифмируя которое приходим к (8.1)

Замечание. Аналогичным образом доказывается, что неравенство

$$D(n) \geq \lceil n - \log\log n - \underset{\smile}{o}(1) \rceil$$

выполняется для почти всех ФАЛ f, $f \in P_2(n)$

Лемма доказана.

Для получения верхней оценки функции Шеннона $D(n)$ воспользуемся результатами §6 и методами оптимизации подобных формул по глубине из §2 главы 2.

Теорема 8.1. Для любой ФАЛ f, $f \in P_2(n)$, в И^{Φ} существует реализующая ее формула $\mathcal{F}_f$, для которой $D(\mathcal{F}_f) \geq n - \log\log n + \underset{\smile}{o}(1)$.

Доказательство. Пусть параметры m, λ, q, p и Δ, наборы БП x, x' и x'', множество $\widehat{\delta}$ и разбиение Δ, ФАЛ χ_i и формулы $\mathfrak{A}_{\text{i}}$, $J_{\sigma'',i}$ имеют тот же смысл, что и в теореме 6.1. Пусть формула $\bar{\mathcal{F}}_f$ попрежнему реализует ФАЛ $f(x)$ и имеет вид:

$$\bar{\mathcal{F}}_f = \bigvee_{i=1}^{2^\lambda} \mathfrak{A}_{\text{i}}(x') \mathcal{F}_{n-q}(x'', J_{\bar{0},i}, ... J_{\bar{1},i}),$$

где $\mathcal{F}_{n-q}(x'', y_0, ...y_{2^{n-q}-1})$ - безповторная по информационным y_i формула из леммы 2.3, реализующая мультиплексорную ФАЛ $\mu_{n-q}(x'', y_0, ...y_{2^{n-q}-1})$.

Заметим, что

$$D(\mathcal{F}_n) = 2n + 1$$

и поэтому при тех значениях параметров, которые указаны в §6,

$$D(\bar{\mathcal{F}}_f) \geq D(\mathcal{F}_{n-q}) = 2(n-q) + 1 \sim 2n$$

Заметим также, что глубина формулы $\mathcal{F}_{n-q}$ составляет основную часть глубины формулы $\bar{\mathcal{F}}_f$ и поэтому оптимизация формулы $\bar{\mathcal{F}}_f$ по глубине должна опираться на оптимизацию по глубине формулы, реализующей мультиплексорную ФАЛ.

Для $t \leq n$ положим

$$\breve{\mathcal{F}}_{n,t}(x_1, ...x_n, y_0, ...y_{2^n-1}) = \bigvee_{(\sigma_1,...\sigma_{n-t}) \in B^{n-t}} x_1^{\sigma_1}, ...x_{n-t}^{\sigma_{n-t}} \big(\bigvee_{(\sigma_{n-t+1},...\sigma_n) \in B^t} x_{n-t+1}^{\sigma_{n-t+1}}, ...x_n^{\sigma_n} \big)$$

Заметим, что $Alt(\breve{\mathcal{F}}_{n,t}) = 3$, а число вхождений в нее БП x_i равно $t2^n + (n-t)2^{n-t}$, причем половина из них приходится на вхождение операций БП. Отсюда следует, что для формулы $\breve{\mathcal{F}}_f$, которая получается из формулы $\bar{\mathcal{F}}_f$ заменой формулы $\mathcal{F}_{n-q}$ на формулу $\breve{\mathcal{F}}_{n-q,t}$ справедливо соотношение:

$$R(\breve{\mathcal{F}}_f) = (q2^m + t2^{n-q} + (n-q-t)2^{n-q-t} + p2^{n-q})2^{q-m} \quad (8.3),$$

$$Alt(\breve{\mathcal{F}}_f) \leq 6$$

Искомая формула $\mathcal{F}_f$ получается оптимизацией формулы $\breve{\mathcal{F}}_f$ по глубине с помощью преобразований подобия (см. §2 главы 2) и для нее, в силу теоремы 2.1 главы 2, будут справедливы неравенства

$$D(\mathcal{F}_f) \leq \lceil \log(L(\breve{\mathcal{F}}_f) + 1) \rceil + Alt(\breve{\mathcal{F}}_f) \leq \lceil \log R(\breve{\mathcal{F}}_f) \rceil + 7 \quad (8.4),$$

так как $L(\breve{\mathcal{F}}_f) + 1 \leq 2R(\breve{\mathcal{F}}_f)$. При этом требуемая оценка (8.2) вытекает из (8.3)-(8.4) при следующих значениях параметров:

$$m = \lfloor 3 \log\log n \rfloor, s = \lfloor \log n - 2\log\log n \rfloor - 1, t = \lceil \log n \rceil.$$

Теорема доказана.

Следствие. Из соотношений (8.1) и (8.2) следует, что

$$D(n) = n - \log\log n \pm \underline{o}(1)$$

Замечание. Формула $\dot{\mathcal{F}}_f$, которая получается из построенной выше формулы $\mathcal{F}_f$ оптимизацией по числу ФС $\neg$ (см. §2 главы 2) удовлетворяет соотношениям

$$D(\dot{\mathcal{F}}_f) \leq n - \log\log n + \underline{o}(1)$$

$$L(\dot{\mathcal{F}}_f) \le \frac{2^n}{\log n}(1+\bar{o}(1)),$$

то есть является асимптотически оптимальной по глубине и по сложности для почти всех ФАЛ f, $f \in P_2(n)$.

§9 Самокорректирующиеся контактные схемы и методы их постороения. Асимптотически наилучший метод синтеза контактных схем, корректирующих один обрыв (одно замыкание).

Рассмотрим вопрос повышения надежности схем на примере т. н. самокорректирующихся КС. Будем считать, что контакты рассматриваемых КС могут выходить из строя, переходя в одно из двух возможных неисправных состояний: состояние *обрыва*, когда контакт не проводит, и состояние *замыкания*, когда контакт проводит при любых значениях управляющей им БП.

Будем говорить, что КС Σ является (p,q) - самокорректирующейся КС или, иначе, корректирует p обрывов и q замыканий, где $p \ge 0$ и $q \ge 0$, если любая КС Σ', которая может быть получена из КС Σ в результате обрыва не более чем p, и замыкания не более, чем q, контактов, эквивалентна Σ. Обозначим через $\text{И}^{\text{К}}_{(p,q)}$ множество всех (p,q) - самокорректирующхся КС и заметим, что $\text{И}^{\text{К}}_{(0,0)} = \text{И}^{\text{К}}$. Заметим, также, что для любой КС Σ КС $\Sigma^{(p,q)}$, получающаяся из Σ в результате замены любого ее контакта вида x_i^σ π-схемой, состоящей из $(q+1)$ последовательно соединенного пучка, каждый из которых, включает в себя $(p+1)$ параллельно соединенный контакт вида x_i^σ, принадлежит $\text{И}^{\text{К}}_{(p,q)}$.

Построение КС $\Sigma^{(p,q)}$, основанное на последовательном и (или) параллельном дублировании контактов КС Σ, является простейшим способом получения самокорректирующихся КС, эквивалентных заданной КС. Он дает следующую тривиальную верхную оценку сложности самокорректирующихся КС, эквивалентных данной.

Лемма 9.1. Для любых $p \ge 0$, $q \ge 0$ и любой КС Σ существует эквивалентная ей КС Σ', $\Sigma' \in \text{И}^{\text{К}}_{(p,q)}$, для которой

$$L(\Sigma') \le (p+1)(q+1)L(\Sigma).$$

Рассмотрим, далее, нетривильный способ построения $(1,0)$или $(0,1)$-самокорректирующихся КС, связанный с коррекцией одного обрыва или одного замыкания в т. н. однородных подсхемах. Будем называть *однородной* любую связную КС с неразделенными полюсами, состоящую из контактов одного и того же типа. Заметим, что в любой такой КС, состоящей из контактов вида x_i^σ, ФАЛ проводимости между любыми двумя полюсами равна x_i^σ. Отсюда следует, в частности, что любые две однородные КС, состоящие из контактов одного типа и имеющие один и тот же набор полюсов, эквивалентны.

Обозначим через $C_m(x_i^\sigma)$ $(Z_m(x_i^\sigma))$ m-полюсную однородную КС, которая состоит из m контактов вида x_i^σ и представляет собой цикл, проходящий через все полюса (соответсвенно звезду из контактов, соединяющих ее центр с полюсами). Очевидно, что $C_m(x_i^\sigma) \in \text{И}^{\text{К}}_{(1,0)}$ и $Z_m(x_i^\sigma) \in \text{И}^{\text{К}}_{(0,1)}$.

Представление КС Σ в виде объединения ее однородных подсхем без общих контактов будем называть *однородным разбиением* КС Σ, а минимальное число подсхем в таких разбиениях будем обозначать через $\zeta(\Sigma)$. Если $\Sigma, ..\Sigma_\zeta$ - однородное разбиение КС Σ, а эквивалентная ей КС Σ' (Σ'') получается из КС Σ в результате замены каждой подсхемы Σ_i эквивалентной ей КС Σ'_i вида C_m (соответственно Σ''_i вида Z_m), то $\Sigma' \in \text{И}^{\text{К}}_{(1,0)}$ (соответственно $\Sigma'' \in \text{И}^{\text{К}}_{(0,1)}$). Заметим, что при этом

$$L(\Sigma'_i) \le L(\Sigma_i) + 1,\ L(\Sigma''_i) \le L(\Sigma_i) + 1$$

и, следовательно,

$$L(\Sigma') \le L(\Sigma) + \zeta,\ L(\Sigma'') \le L(\Sigma) + \zeta$$

Указанный (нетривиальный) способ построения $(0,1)$- или $(1,0)$-самокорректирующихся КС, эквивалентных заданной, дает следующую оценку их сложности.

Лемма 9.2. Для любой КС Σ существуют эквивалентные ей $(1,0)$- и $(0,1)$-самокорректирующиеся КС Σ' и Σ'' соответсвенно такие, что

$$L(\Sigma') \le L(\Sigma) + \zeta(\Sigma),\ L(\Sigma'') \le L(\Sigma) + \zeta(\Sigma). \quad (9.1)$$

Этот способ позволяет установить асимптотику функции Шеннона для сложности КС из $\text{И}^{\text{К}}_{(0,1)}$ и $\text{И}^{\text{К}}_{(1,0)}$.

Для ФАЛ f и $p \ge 0$, $q \ge 0$ определим ее (p,q)-самокорректирующуюся контактную сложность $L^{\text{К}}_{(p,q)}(f)$ как минимальную сложность КС Σ, $\Sigma \in \text{И}^{\text{К}}_{(0,1)}$, реализующий f, а затем введем соответствующую функцию Шеннона

$$L^{\text{К}}_{(p,q)}(n) = \max_{f \in P_2(n)} L^{\text{К}}_{(p,q)}(f).$$

Очевидно, что

$$L^{\text{К}}(f) \le L^{\text{К}}_{(p,q)}(f) \text{ и } L^{\text{К}}(n) \le L^{\text{К}}_{(p,q)}(n) \quad (9.2)$$

так как $\text{И}^{\text{К}}_{(p,q)} \in \text{И}^{\text{К}}$ (см. § 1).

Теорема 9.1. Для $n = 1, 2, ...$ имеет место следующие асимптотические равенства

$$L^{\text{К}}_{(1,0)}(n) \backsim L^{\text{К}}_{(0,1)}(n) \backsim \frac{2^n}{n}.$$

Доказательство. Требуемые нижние оценки для функций Шеннона $L^{\text{К}}_{(1,0)}(n)$ и $L^{\text{К}}_{(0,1)}(n)$ вытекают из (9.2) и мощностных нижних оценок функции Шеннона $L^{\text{К}}(n)$ из теоремы 3.1.

Для получения соответствующих верхних оценок возьмем произвольную ФАЛ f, $f \in P_2(n)$, и построим для нее КС Σ_f по теореме 7.1. Из замечания к этой теореме вытекает, что при указанных там значениях параметров

$$\zeta(\Sigma_f) = \underline{o}(\frac{2^n}{n\sqrt{n}})$$

и поэтому, в соответствии с леммой 9.2 и 9.1, существуют КС $\Sigma'_f \in \text{И}^{\text{К}}_{(1,0)}$ и КС $\Sigma''_f \in \text{И}^{\text{К}}_{(0,1)}$, которые реализуют ФАЛ f со сложностью, асимптотически не превосходящей $\frac{2^n}{n}$.

Теорема доказана.