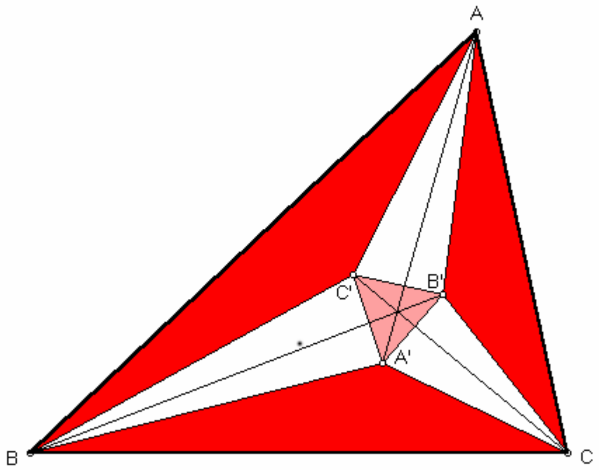
Ein einfacher Beweis des Satzes von Morley
(nach *D. J. Newman*)

Auf die Seiten eines Dreiecks *ABC* werden nach innen sich nicht überlappende Dreiecke *ABC'*, *BCA'* und *CAB'* so aufgesetzt, dass die Winkel des Dreiecks ABC in drei gleiche Teile geteilt werden. Das aus den Spitzen der aufgesetzten Dreiecke gebildete Dreieck A'B'C' heißt *Morley-Dreieck* des Dreiecks ABC (nach Frank Morley 1860-1937)

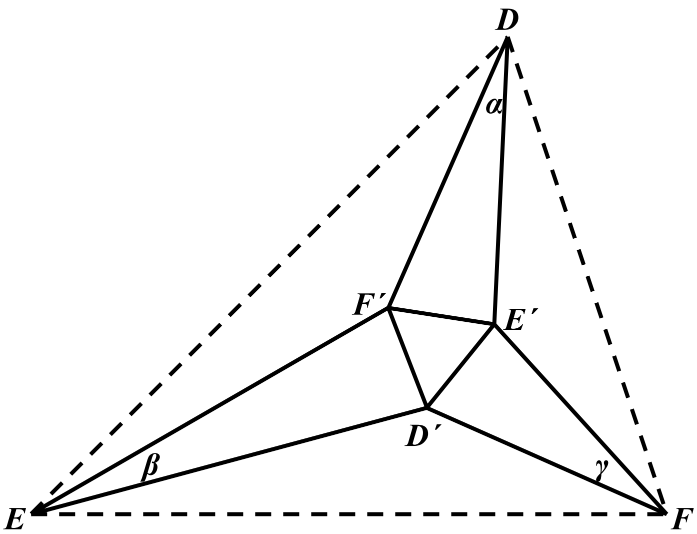


Satz von Morley (*the marvel of marvels*): *Das Morley-Dreieck eines Dreiecks ist gleichseitig.*

Beweis. Abweichend von Euler bezeichnen wir zur Vereinfachung der notwendigen Rechnungen die Winkel des gegebenen Dreiecks *ABC* mit 3α, 3β und 3γ. Dann gilt:

$$\alpha + \beta + \gamma = 60^\circ.$$

Wir arbeiten „von innen nach außen" und beginnen mit einem gleichseitigen Dreieck *D'E'F'*, dessen Seiten alle die Länge 1 haben. Auf die Seiten dieses Dreiecks setzen wir nach außen Dreiecke *F'E'D*, *F'E D'* und *FE'D'* so auf, dass die folgenden Winkel entstehen:



$\angle F'DE' = \alpha$,	$\angle E'F'D = \beta + 60^\circ$,	$\angle DE'F' = \gamma + 60^\circ$,
$\angle D'EF' = \beta$,	$\angle F'D'E = \gamma + 60^\circ$,	$\angle EF'D' = \alpha + 60^\circ$,
$\angle E'FD' = \gamma$,	$\angle D'E'F = \alpha + 60^\circ$,	$\angle FD'E' = \beta + 60^\circ$.

Dadurch ist die Konfiguration bestimmt. Wir benötigen noch die folgenden Winkel, die sich leicht ausrechnen lassen:

$$\angle DF'E = 360^\circ - \angle EF'D' - \angle D'F'E' - \angle E'F'D = 180^\circ - \alpha - \beta\,,$$
$$\angle ED'F = 360^\circ - \angle FD'E' - \angle E'D'F' - \angle F'D'E = 180^\circ - \beta - \gamma\,,$$
$$\angle FE'D = 360^\circ - \angle DE'F' - \angle F'E'D' - \angle D'E'F = 180^\circ - \gamma - \alpha\,.$$

Wenn wir zeigen können, dass gilt:

$$\angle EDF' = \angle E'DF = \alpha\,, \qquad \angle FED' = \angle F'ED = \beta\,, \qquad \angle DFE' = \angle D'FE = \gamma\,,$$

dann folgt:

1. das Dreieck *DEF* hat die Winkel 3α, 3β und 3γ und ist damit ähnlich zum Dreieck *ABC*,
2. das gleichseitige Dreieck D'E'F' ist das Morley-Dreieck des Dreiecks DEF.

Da die Ähnlichkeitsabbildung, die das Dreieck *DEF* in das Dreieck *ABC* überführt winkeltreu ist, bildet sie auch die jeweiligen Morley-Dreiecke aufeinander ab. Das Bild eines gleichseitigen Dreiecks unter einer Ähnlichkeitsabbildung ist ein gleichseitiges Dreieck; also ist auch das Morley-Dreieck des Dreiecks *ABC* gleichseitig.

Wir bestimmen nun den Winkel $\varphi = \angle EDF'$. Dazu berechnen wir mit Hilfe des Sinussatzes die Länge der Seite *DF'* des Dreiecks *F'E'D*:

$$\overline{DF'} = \frac{\sin \gamma + 60^\circ}{\sin \alpha}\,.$$

Im Dreieck *DEF'* liegt dieser Seite der Winkel

$$180^\circ - \angle DF'E - \angle EDF' = 180^\circ - (180^\circ - \alpha - \beta) - \varphi = \alpha + \beta - \varphi$$

gegenüber. Analog erhalten wir die Länge der Seite *EF'* des Dreiecks *D'F'E*:

$$\overline{EF'} = \frac{\sin \gamma + 60^\circ}{\sin \beta}\,,$$

der im Dreieck *DEF'* der Winkel φ gegenüberliegt. Aus dem Sinussatz für das Dreieck *DEF'* folgt nun:

$$\frac{\sin \varphi}{\sin(\alpha + \beta - \varphi)} = \frac{\overline{EF'}}{\overline{DF'}} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}\,.$$

Aus dieser Gleichung lässt sich der gesuchte Winkel φ auf zweierlei Weise bestimmen

1. (Martin Härting) Die Gleichung hat mindestens die Lösung $\varphi = \alpha$. Für mögliche weitere Lösungen muss gelten: $0 < \varphi < \alpha + \beta < 60^\circ$. Auf dem Intervall $[0, \alpha + \beta]$ ist die linke Seite Gleichung als Funktion von φ streng monoton, also hat die Gleichung höchstens eine Lösung. Damit ist $\varphi = \alpha$ die einzige Lösung.

   Diese Betrachtung setzt die Kenntnis des Monotoniebegriffes voraus; es geht aber auch ohne, unter Verwendung goniometrischer Umformungen.

2. Durch geeignete Multiplikation ergibt sich

   $$\sin\beta \sin\varphi = \sin\alpha \sin(\alpha+\beta-\varphi) = \sin\alpha \sin(\alpha+\beta)\cos\varphi - \sin\alpha\cos(\alpha+\beta)\sin\varphi.$$

   Durch Umformung erhalten wir

   $$(\sin\beta + \sin\alpha\cos(\alpha+\beta))\sin\varphi = \sin\alpha\sin(\alpha+\beta)\cos\varphi$$

   Nun kommt ein Trick:

   $$\sin\beta = \sin((\alpha+\beta)-\alpha) = \sin(\alpha+\beta)\cos\alpha - \cos(\alpha+\beta)\sin\alpha,$$

   also

   $$\sin\beta + \sin\alpha\cos(\alpha+\beta) = \sin(\alpha+\beta)\cos\alpha.$$

   Damit erhalten wir für φ die Gleichung:

   $$\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha\sin\varphi = \sin\alpha\sin(\alpha+\beta)\cos\varphi,$$

   bei der die auftretenden Sinus- und Cosinuswerte wegen $0 < \alpha < \alpha+\beta < 60^{\circ}$ alle von Null verschieden sind. Also können wir dividieren und finden

   $$\tan\varphi = \tan\alpha,$$

   woraus wieder $\varphi = \alpha$ folgt. Die anderen Winkel berechnet man analog und damit ist alles bewiesen.

Ergänzende Bemerkungen. Der Mittelpunkt des Morley-Dreiecks eines Dreiecks wird gelegentlich als *Erster Morley-Punkt* des Ausgangsdreiecks bezeichnet. Im Jahr 1967 bewies Peter Yff mit Hilfe von trilinearen Koordinaten, dass ein Dreieck und sein Morley-Dreieck – wie in der ersten Abbildung gezeigt – perspektive Lage zueinander haben. Er bezeichnete das Zentrum der Perspektivität als *Zweiten Morley-Punkt* des Ausgangsdreiecks.

Literatur

Donald J. Newman: The Morley miracle, *The Mathematical Intelligencer* **18** (1996), 31-32

Cletus O. Oakley and Justine C. Baker: The Morley trisector theorem, *American Mathematical Monthly* **85** (1978), 737-745 – da findet man historische Bemerkungen und viele weitere Literaturangaben zu den Morley-Dreiecken.

Internetseiten:

http://www-cabri.imag.fr/abracadabri/GeoPlane/Classiques/Morley/MorleyCompl.htm