Lógica Algebraica Abstracta *

Renato Lewin
Pontificia Universidad Católica de Chile

0 Introducción

Los cursos universitarios de matemática suelen comenzar con una unidad de *Lógica*, habitualmente dentro de un curso denominado *Introducción al Algebra* o algo similar. En esta unidad se estudia una suerte de traducción entre el castellano y un idioma, que algunos llaman *lenguaje matemático*, que contiene símbolos como $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow$ u otros. Enseguida se introduce las llamadas *tablas de verdad*, se aprende a manipularlas, se define conceptos como *tautología* y *contradicción*, con suerte se explica los conceptos de *consecuencia lógica* o de *consistencia*. Luego se hace un desarrollo, que podríamos llamar axiomático, en el que a partir de unas pocas tautologías y unas reglas que nos permiten reemplazar ciertos pedazos de una oración por otras expresiones que son *equivalentes*, podemos pasar de unas tautologías a otras. Todo lo anterior se llama *Lógica Proposicional*. Por último, se amplía el idioma y se introducen *variables, predicados, cuantificadores*, etc., se extiende la traducción a estos y se hace algunas manipulaciones parecidas a las anteriores. A esto se llama *lógica de predicados* o *lógica de primer orden*. Esto completa la unidad. La verdad es que salvo por el uso de los símbolos como una suerte de taquigrafía que nos permite ahorrar unas pocas palabras, rara vez se establece una conección entre esta "lógica" y el resto de las materias.

---

*Estas Notas han sido preparadas para un curso dictado en la Universidad Nacional de Colombia en diciembre de 2003. Ellas son una versión corregida de cursos similares dictados en la Universidad Nacional de La Plata, República Argentina, en noviembre de 1999, con el patrocinio de FOMEC, y en las XIV Jornadas de Matemática de la Zona Sur, Lican Ray, Chile, en abril de 2000.

Con todo, las personas más atentas no pueden dejar de percibir ciertas analogías entre esta manipulación simbólica y las operaciones aritméticas. Por ejemplo, reemplazando los símbolos adecuadamente, vemos que

$$\begin{aligned} p \wedge q &\leftrightarrow q \wedge p \\ A \cap B &= B \cap A \\ x \cdot y &= y \cdot x\,, \end{aligned}$$

o

$$\begin{aligned} p \wedge (q \vee r) &\leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \\ A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C) \\ x \cdot (y + z) &= (x \cdot y) + (x \cdot z)\,, \end{aligned}$$

son instancias de reglas muy similares, las que bien podemos llamar conmutatividad y distributividad, respectivamente.

Por supuesto, haciendo el mismo reemplazo, hay otras propiedades que no se cumplen, por ejemplo, mientras $p \vee p \leftrightarrow p$ es una tautología, la identidad asociada con ella, a saber, $x + x = x$ se cumple sólo si $x = 0$.

Podemos así pensar que esta relación entre oraciones tautológicamente equivalentes e identidades aritméticas genera un álgebra diferente, que comparte algunas propiedades con aquella de los números enteros, pero que difiere en otras. ¿Qué estructura tiene esta álgebra? ¿Se le puede asociar una clase de álgebras abstractas similar a los anillos, grupos, etc.? Estas son algunas de las motivaciones iniciales de la lógica algebraica.

Existe una retroalimentación entre la lógica y la matemática. Aunque lamentablemente nuestro curso introductorio de álgebra no lo puso de manifiesto, cuando demostramos un teorema estamos usando esas mismas reglas lógicas que aprendimos fuera de contexto. Por su parte, las analogías señaladas antes nos inducen a pensar que hay métodos matemáticos que pueden ser aplicados a la lógica.

Antes de proseguir y dado que lo que aprendimos, si no erróneo, es muy insuficiente, debemos ponernos de acuerdo en un punto. ¿Qué es la lógica?

0.1 Lógica

Cuando deseamos establecer una verdad, cuando queremos convencer a alguien de que nuestra posición o ideas son las correctas, recurrimos a un razonamiento o bien presentamos evidencia que respalda nuestras opiniones. Este razonamiento o evidencia presentada con el propósito de demostrar algo es un argumento.

Un *argumento* es un conjunto de una o más oraciones. La última de ellas se denomina *conclusión*, las anteriores se llaman *premisas.*

Intuitivamente, las premisas son la evidencia o razones que nos deben convencer de la veracidad de la conclusión. El argumento es la concatenación de las primeras con la última. El argumento podría no tener premisas.

¿Qué caracteriza a un "buen" argumento? No se trata aquí de definir argumentos convincentes en el sentido de la retórica, sino aquellos que garanticen el mínimo exigible, que no se saque conclusiones falsas a partir de premisas verdaderas.

Un argumento es *correcto* si en toda situación en la que sus premisas son verdaderas, su conclusión también debe serlo. En otras palabras, un argumento no puede producir una conclusión falsa a partir de premisas verdaderas.

La lógica es el estudio de los argumentos correctos.

Ni las premisas ni la conclusión tienen que ser verdaderas para que el argumento sea correcto. Es sólo que *si* las premisas son verdaderas, también debe serlo la conclusión. Se puede por lo tanto tener conclusiones falsas usando argumentos correctísimos.

Para una acabada discusión acerca de qué es un argumento correcto y su distinción de un buen argumento, ver [11].

Ejemplos:

1. Todos los hombres son mortales.
   Sócrates es hombre.
   ___
   Luego Sócrates es mortal.

2. Si Sócrates es hombre, entonces Sócrates es mortal.
   Sócrates es hombre.
   ___
   Luego Sócrates es mortal.

3. Algunos hombres son mortales.
Algunos mortales son mamíferos.
———
Luego algunos hombres son mamíferos.

Los ejemplos 1, 2 son argumentos correctos. La evidencia presentada por las premisas no es suficiente para afirmar la conclusión del argumentos 3. De hecho, basta reemplazar la palabra "mamífero" por "cuadrúpedo" y vemos que con premisas igualmente verdaderas, la conclusión es falsa. Claro, el argumento no es el mismo, pero obviamente tiene la misma forma.

0.2 Estructura Lógica de los Argumentos

Intuitivamente, la corrección de un argumento depende más de la forma en que se relacionan las oraciones que los componen que del tema del que se está hablando de tal manera que si alguien no conoce el significado de una palabra, igual debe poder determinar la corrección del argumento. Por ejemplo,

4. Si llueve, entonces todos se mojan.
Está lloviendo.
———
Luego todos se mojan.

es el *mismo* argumento que 2. en el sentido de tener la misma forma o *estructura lógica*. Si aceptamos la corrección del primero, debemos aceptar la del segundo, obsérvese sin embargo, que en este la conclusión es falsa.

De alguna manera, el contenido de lo que se dice más bien oculta que esclarece esta estructura. Por ejemplo, consideremos

5. Si ocurre que plin, entonces plum.
Es el caso que plin.
———
Luego plum.

Este es el mismo argumento que 2 y que 4 a pesar de que no sabemos sobre qué se está hablando. Demos un paso más y usemos sólo variables:

6. Si p entonces q
p
———
Luego q

El argumento 2, formalizado en 6, es conocido como Modus Ponens (M.P.). La corrección de este argumento puede considerarse como la definición de lo que en lógica clásica se entiende por implicación. Si es cierto que una oración implica a otra y que la primera es verdadera, entonces la segunda también debe serlo. Obsérvese que nada se dice si la primera oración es falsa, no interesa.

Por su parte, el argumento 1 se puede formalizar como

$$7. \qquad \begin{array}{l} \text{Todos los A son B.} \\ \text{c es un A.} \\ \hline \text{Luego c es un B.} \end{array}$$

Un simple razonamiento conjuntista usando diagramas de Venn nos convencer de que se trata de un argumento correcto.

La introducción de lenguajes más y más formales son una necesidad para obtener el esqueleto del argumento. Representan distintos grados de abstracción que nos permiten también eliminar las ambigüedades de los lenguajes naturales.

Los argumentos 1 y 2 son correctos por motivos muy distintos. En el primero, se habla de objetos de un cierto contexto o universo del discurso, con ciertas propiedades (ser hombre, ser mortal, ser flum y ser pran, todas ellas simbolizadas por $A(x)$ o por $B(x)$). La corrección del argumento se debe a cómo están relacionadas entre sí los objetos y las propiedades de esos objetos. En el segundo ejemplo, se relacionan oraciones por medio de conectivos lógicos, la corrección del argumento se debe a la particular estructura de los conectivos que aparecen en esas oraciones y reflejan lo que entendemos por ellos. Son la consecuencia directa de cómo los definimos y su significado está dado, o más bien resumido, en las tablas de verdad.

Los primeros corresponden a la lógica de predicados, los segundos a la lógica proposicional. En este curso nos concentraremos principalmente en la segunda, el estudio de la estructura de conectivos de los argumentos.

0.3 Consecuencia Lógica

La relación que se establece entre las premisas $\Gamma = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots\}$ y la conclusión ψ de un argumento correcto se denomina *consecuencia lógica* y la denotamos $\Gamma \models \psi$. También decimos que ψ es consecuencia lógica de Γ.

0.4 La Lógica y las *Lógicas*

¿Hay argumentos que son correctos en un contexto pero no en otro?, en otras palabras, ¿Existe una única lógica o hay lógicas alternativas? En un sentido bastante trivial, hemos visto que hay argumentos como el Ejemplo 1, que es correcto en el contexto de la lógica de predicados pero no lo es dentro de la lógica proposicional. En este caso, debemos contar con un lenguaje que nos permita expresar la estructura del argumento y el lenguaje del cálculo proposicional clásico es insuficiente para ello. Podemos pensar en otras lógicas, obtenidas de la Lógica Proposicional Clásica, ampliando el lenguaje, no ya con cuantificadores y símbolos de predicado, etc., sino con otros conectivos.

Un ejemplo bastante conocido es el de las *lógicas modales*. Estas se obtienen agregando a la lógica clásica las llamadas *modalidades*, a saber, para cada oración φ podemos afirmar *es necesario* que φ, y *es posible* que φ, simbolizados por $\Box\varphi$ y por $\Diamond\varphi$, respectivamente. Es razonable pensar que en esta lógica, por ejemplo, $\Box\varphi \models \varphi$ debe ser un argumento correcto: si suponemos que una oración es necesariamente verdadera, entonces ella debe ser verdadera. Podemos pensar en otros conectivos, los que en principio, darán origen a otras lógicas. Obsérvese que no es del todo claro que la lógica modal recién insinuada sea distinta de la Lógica Proposicional Clásica, bien podría ser que el nuevo conectivo se pudiera definir dentro del lenguaje de la Lógica Proposicional Clásica y luego probar sus propiedades dentro de esa lógica.

Las lógicas así obtenidas son extensiones más o menos naturales de la Lógica Proposicional Clásica. Sin embargo hay otras cuyas diferencias con ésta las convierten en lógicas alternativas o *no–estándar*. Hay algunas que se obtienen dando una interpretación distinta de la usual a los conectivos. Por ejemplo, el condicional $\varphi \to \psi$ tiene en la Lógica Proposicional Clásica una interpretación *material*, (todos los conectivos la tienen), es decir, su valor de verdad depende funcionalmente de los valores de verdad de φ y de ψ, y no de otras consideraciones. Esto es muy insatisfactorio fuera del contexto de la matemática, por ejemplo, nos vemos obligados a aceptar que la oración: "Si $2 + 2 = 5$, entonces el cielo es azul", es verdadera, ya que su antecedente es falso. El sentido común nos dirá que esta oración no es ni verdadera ni falsa, sino más bien, un sinsentido. Han sido propuestas varias lógicas en las que, para afirmar el condicional, se exige no los meros valores de verdad del antecedente y del consecuente, sino cierta relación entre ellos. Algunas de éstas reciben el nombre de lógicas *relevantes*. Algo similar sucede con distintas interpretaciones de la negación.

Hay otras lógicas en las que se cambia los posibles significados de las oraciones ampliando el espectro de valores de verdad que éstas pueden tomar, es decir, además de verdadero y falso, puede haber uno o más valores "intermedios", o bien "indeterminados". Esto da origen a lógicas llamadas *multi–valuadas*

Sin intentar agotar la gama de posibles lógicas distintas de la Lógica Proposicional Clásica, vemos que hay muchas alternativas. Esto nos indica que para comprender la Lógica se debe estudiar diversas lógicas.

0.5 Lógica Matemática

Determinar si $\Gamma \models \varphi$ es prácticamente imposible: tendríamos que ser capaces de verificar si la conclusión del argumento es verdadera en todas las instancias (o interpretaciones posibles de las palabras que componen el argumento) en las que las premisas son verdaderas.

Como dijimos en la introducción, el estudiante avispado nota que en sus estudios de lógica surge naturalmente una suerte de álgebra, o manipulación simbólica. Indicamos también cómo puede usarse los diagramas de Venn para demostrar la corrección de cierto tipo de argumentos. Por otra parte, hicimos notar que la relación de consecuencia lógica depende de la estructura sintáctica de las oraciones que componen un argumento y no de su significado. Resulta natural entonces pensar que se puede estudiar este concepto usando herramientas matemáticas. La *lógica matemática* no es un tipo de lógica como los mencionados más arriba, sino la disciplina que (entre otras cosas) desarrolla modelos matemáticos del concepto de consecuencia lógica, cualquiera sea la lógica involucrada.

Obviamente, no hay un único camino para hacerlo. Nosotros usaremos métodos conocidos como *estilo Hilbert*, los que, grosso modo, significan emplear el método axiomático.

0.6 Lógica Algebraica Abstracta

Incluso antes del nacimiento de la lógica matemática, George Boole, a mediados del siglo XIX, propuso ciertas "reglas del pensamiento" que anticipaban lo que más tarde se conocería como Algebras de Boole. Boole hizo notar que los conectivos lógicos obedecen a leyes similares a las que rigen a los números y las operaciones algebraicas.

Durante el siglo XX muchos autores contribuyeron a profundizar estas ideas. Probablemente los más importantes son Lindenbaum y A. Tarski, quienes introdujeron la idea de identificar las oraciones de la Lógica Proposicional Clásica que son lógicamente equivalentes. Esta resulta ser una relación de equivalencia sobre el conjunto de todas las oraciones. Enseguida, dotaron a las clases de equivalencia con operaciones adecuadas construyendo así lo que se llamó un álgebra de Boole.

Algunas de las lógicas que se ha algebrizado de esta manera son la Lógica Proposicional Intuicionista, las Lógicas Modales y la Lógica de Primer Orden, etc.

H. Rasiowa y R. Sikorski en [19], [20] generalizaron el método de Lindenbaum–Tarski a sistemas muy amplios pero que tienen ciertas restricciones importantes, por ejemplo, el lenguaje contiene un símbolo de implicacion que debe satisfacer algunas propiedades. Ver más adelante la Sección 4.1.

En la década de los 80 W. Blok y D. Pigozzi decantaron en [1] el trabajo de muchos investigadores del tema. Inspirados por esa influyente monografía, un grupo de matemáticos ha desarrollado el área que ha terminado llamándose *Lógica Algebraica Abstracta* en alusión a la generalidad con que se ha abordado el tema. La exposición de esta teoría general es el propósito de este curso.

Por último, Paul Halmos en [13] nos hace notar que en matemática es frecuente que se inicie un estudio con un cierto objetivo en mente, por ejemplo una aplicación a la física, pero luego adquiere un interés puramente matemático. La teoría se generaliza y entra en contacto con otras ramas de la matemática y eventualmente se establece como una nueva área de estudio. Esta nueva rama no pretende en general resolver los problemas que le dieron origen. Algo de esto ha pasado con la lógica algebraica, la que ha desarrollado temas y problemas muy distintos de aquellos de la lógica formal, quien le diera origen.

1 Lógica Proposicional

Desarrollaremos aquí los conceptos básicos mínimos de lógica proposicional necesarios para entrar en el tema. Algunos libros para introducirse y profundizar en el tema son [5, 18, 19, 20, 23].

1.1 Lógicas y Sistemas Deductivos

En esta sección definiremos la relación de *derivabilidad* $\Gamma \vdash \psi$ entre conjuntos de fórmulas y fórmulas, que refleje las propiedades de la relación de consecuencia lógica en el siguiente sentido:

- Debe ser una relación sintáctica, es decir, debe depender sólo de la forma lógica de las oraciones y no de su significado, esta condición es la que facilita la aplicación de métodos matemáticos.
- Debe ser *correcta*, es decir, si $\Gamma \vdash \psi$, entonces $\Gamma \vDash \psi$. No debe ser posible demostrar cosas que no son consecuencia lógica de la premisas.
- Debe ser *completa*, o sea, si $\Gamma \vDash \psi$, entonces $\Gamma \vdash \psi$. Esta es la propiedad que andamos buscando, ser capaces de demostrar sintácticamente a partir de Γ, todas sus consecuencias lógicas.

Como hicimos notar más arriba, introducir un lenguaje formalizado es imprescindible para establecer la estructura lógica de las oraciones y argumentos. Es necesaria también para eliminar las ambiguedades de los lenguajes naturales. Resulta también útil para aplicarles herramientas matemáticas.

Un *lenguaje proposicional*, o simplemente un *lenguaje*, es un conjunto $\mathcal{L}$ de símbolos llamados *conectivos lógicos*. Cada conectivo está asociado con un número natural, su *aridad* (o rango). Estos definen el *tipo de similaridad* del lenguaje, una función $\rho : \mathcal{L} \longrightarrow \mathbb{N}$, que en adelante subentenderemos sin mayor mención. Las constantes son consideradas conectivos de aridad cero.

El conjunto $\mathcal{F}m_{\mathcal{L}}$ de las *fórmulas* de $\mathcal{L}$ se define recursivamente a partir de los conectivos lógicos y de un conjunto $\mathcal{P} = \{p_j : j \in \mathbb{N}\}$ de *variables proposicionales* aplicando un número finito de las reglas siguientes:

- $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{F}m_{\mathcal{L}}$.

- Si $\omega \in \mathcal{L}$ es un conectivo n–ario y $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in \mathcal{F}m_{\mathcal{L}}$, entonces $\omega(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n) \in \mathcal{F}m_{\mathcal{L}}$.

Si ω es un conectivo binario, usaremos la notación habitual $\varphi_1 \; \omega \; \varphi_2$, en lugar de $\omega(\varphi_1, \varphi_2)$.

Lema 1. *$\mathcal{F}m_{\mathcal{L}}$ es el conjunto mas pequeño que contiene a $\mathcal{P}$ y que es cerrado bajo todos los conectivos lógicos. Es decir, si consideramos los conectivos como funciones $\widehat{\omega} : \mathcal{F}m_{\mathcal{L}}{}^n \longrightarrow \mathcal{F}m_{\mathcal{L}}$, donde n es la aridad de ω, y $\widehat{\omega}(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n) = \omega(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$.*

Ejemplos:

1. El Cálculo Proposicional Clásico (CPC), tiene por lenguaje los conectivos $\mathcal{L} = \{\rightarrow, \wedge, \vee, \neg\}$ y su tipo de similaridad es $\langle 2, 2, 2, 1\rangle$. Las fórmulas, además de las variables proposicionales, son $\varphi_1 \rightarrow \varphi_2$, $\varphi_1 \wedge \varphi_2$, $\varphi_1 \vee \varphi_2$ y $\neg\varphi_1$.

2. El lenguaje de las lógicas modales agrega al anterior un conectivo unario $\Box$, llamado operador de necesitación de tal modo que si φ es una fórmula, $\Box\varphi$ también lo es.

Una función $s : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{F}m_{\mathcal{L}}$ se puede extender recursivamente de manera única a la función $\bar{s} : \mathcal{F}m_{\mathcal{L}} \longrightarrow \mathcal{F}m_{\mathcal{L}}$ como sigue:

$$\bar{s}(\varphi(p_1, \ldots, p_n)) = \varphi(s(p_1), \ldots, s(p_n)) \,.$$

Dicha función la llamaremos *substitución* y la denotaremos por la misma letra s. Para cada $\Gamma \subseteq \mathcal{F}m_{\mathcal{L}}$ denotaremos $s(\Gamma)$ al conjunto de fórmulas $s(\Gamma) = \{s(\gamma) \,:\, \gamma \in \Gamma\}$.

Una *regla de inferencia* sobre $\mathcal{L}$ es un par $\langle \Gamma, \varphi\rangle$, donde $\Gamma \subseteq \mathcal{F}m_{\mathcal{L}}$, Γ es finito y $\varphi \in \mathcal{F}m_{\mathcal{L}}$.

Diremos que ψ es *directamente demostrable* a partir de Δ por la regla $\langle \Gamma, \varphi\rangle$, si existe una substitución s tal que $s(\varphi) = \psi$ y $s(\Gamma) \subseteq \Delta$.

Un *axioma* es una regla de la forma $\langle \emptyset, \psi\rangle$. Cualquier sustitución de un axioma es directamente demostrable a partir de cualquier conjunto de fórmulas Δ. Cada sustitución será una *instancia* del axioma. Una formula tal que $\emptyset \vdash_{\mathcal{S}} \varphi$ es un *teorema* de $\mathcal{S}$ y lo denotamos simplemente $\vdash_{\mathcal{S}} \varphi$

Un *sistema deductivo* $\mathcal{S}$ sobre $\mathcal{L}$, está determinado por un conjunto de axiomas y de reglas de inferencia. Entenderemos a $\mathcal{S}$ como un par $\langle \mathcal{L}, \vdash_{\mathcal{S}} \rangle$ donde $\vdash_{\mathcal{S}}$ es una relación entre conjuntos de fórmulas y fórmulas definida de la manera siguiente:

$\Delta \vdash_{\mathcal{S}} \psi$ si y sólo si existe una sucesión finita $\langle \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \rangle$ de fórmulas de $\mathcal{F}m_{\mathcal{L}}$, tal que $\varphi_n = \psi$ y para todo $i \leq n$, se cumple alguna de las condiciones siguientes:

- φ_i es una instancia de un axioma.
- $\varphi_i \in \Delta$
- para ciertos $i_1, i_2, \ldots, i_k$ todos menores que i, φ_i es directamente demostrable a partir de $\{\varphi_{i_1}, \ldots, \varphi_{i_k}\}$.

Esta sucesión se llama una *demostración de* ψ *a partir de* Γ.

Ejemplos:

1. El Cálculo Proposicional Clásico (Versión 1).

Axiomas:

A1	$p \rightarrow (q \rightarrow p)$
A2	$(p \rightarrow q) \rightarrow ((p \rightarrow (q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r))$
A3	$(p \wedge q) \rightarrow p,$
A4	$(p \wedge q) \rightarrow q,$
A5	$p \rightarrow (q \rightarrow (p \wedge q)),$
A6	$p \rightarrow (p \vee q),$
A7	$q \rightarrow (p \vee q),$
A8	$(p \rightarrow z) \rightarrow ((q \rightarrow z) \rightarrow ((p \vee q) \rightarrow z)),$
A9	$(\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow (q \rightarrow p).$

Regla: Modus Ponens

MP $\qquad p \to q\ , p \vdash_{CPC}\ q\,.$

2. El Cálculo Proposicional Clásico (Versión 2). El lenguaje $\mathcal{L} = \{\to, \neg\}$.

Axiomas:

A1 $\qquad p\ \to (q \to p)$

A2 $\qquad (p\ \to\ q) \to ((p \to (q\ \to r) \to (p \to r))$

A3 $\qquad (\neg p \to \neg q \to (q \to p)$

Regla: Modus Ponens

Ejemplo. Demostrar $\vdash_{CPC}\ p\ \to p$.

$\varphi_1 = p\ \to\ (p\ \to p),$ (A1),
$\varphi_2 = (p\ \to (p \to p))\ \to\ ((p \to ((p \to p) \to p))\ \to\ (p \to p)),$ (A2),
$\varphi_3 = (p \to ((p \to p) \to p))\ \to\ (p \to p),$ (MP),
$\varphi_4 = p \to ((p \to p) \to p),$ (A1),
$\varphi_5 = p\ \to\ p,$ (MP).

$\langle \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5 \rangle$, es una demostración de $p\ \to\ p$ a partir del conjunto vacío, o sea, es un teorema de CPC.

3. El sistema de lógica modal S_4 tiene el lenguaje de CPC (versión 1 o 2) y el conectivo unario $\Box$.

Axiomas:

A1 Todas las tautologías del CPC son axiomas.

A2 $\qquad \Box(p\ \to\ q) \to (\Box p \to \Box q)\quad .$

A3 $\qquad \Box p\ \to\ p,$

A4 $\qquad \Box p\ \to\ \Box\Box p.$

Reglas:

MP $\qquad p \to q\ , p \vdash_{S4}\ q,$

N $\qquad p \vdash_{S4}\ \Box p.$

4. Un sistema deductivo puede ser aún más abstracto. Consideremos el lenguaje $\mathcal{L} = \{\,\cdot\,,\,{}^{-1}, e\}$ y sobre el definamos el sistema $\mathcal{G}$.

G1 $\quad ((p \cdot q) \cdot r) \cdot (p \cdot (q \cdot r))^{-1}$,

G2 $\quad (p \cdot e) \cdot p^{-1}$,

G3 $\quad (e \cdot p) \cdot p^{-1}$,

G4 $\quad p \cdot p^{-1}$,

G5 $\quad p^{-1} \cdot p$.

Reglas:

R1 $\quad p \cdot q^{-1} \vdash_{\mathcal{G}} q \cdot p^{-1}$,

R2 $\quad p \cdot q^{-1} \vdash_{\mathcal{G}} p^{-1} \cdot q^{-1^{-1}}$,

R3 $\quad \{p \cdot q^{-1}\ ,\ q \cdot r^{-1}\} \vdash_{\mathcal{G}} p \cdot r^{-1}$,

R4 $\quad \{p \cdot q^{-1}\ ,\ r \cdot s^{-1}\} \vdash_{\mathcal{G}} (p \cdot r) \cdot (q \cdot s)^{-1}$,

R5 $\quad p \vdash_{\mathcal{G}} p \cdot e^{-1}$,

R6 $\quad p \cdot e^{-1} \vdash_{\mathcal{G}} p$.

En los dos primeros ejemplos, los sistemas deductivos están asociados a la Lógica Proposicional Clásica, en el sentido de que ambos son sistemas correctos y completos:

$$\Gamma \vDash \varphi \qquad \text{si y sólo si} \qquad \Gamma \vdash \varphi\,.$$

La diferencia entre ambos es el lenguaje, sin embargo, si al primer sistema se agregan las definiciones:

$$\begin{aligned} p \vee q &:= \neg p \to q \\ p \wedge q &:= \neg(p \to \neg q), \end{aligned}$$

en él se puede probar todos los axiomas correspondientes del segundo sistema. La demostración de la completud de los sistemas CPC se puede encontrar en [5, 18].

En el caso del sistema de lógica modal $\mathcal{S}_4$ de Lewis, no hemos desarrollado una semántica con respecto a la cual el sistema sea completo, sin embargo ésta existe y se puede estudiar, por ejemplo, en [16].

La pregunta obvia aquí es ¿A qué lógica corresponde el sistema deductivo del cuarto ejemplo?

Lema 2. *Si $\mathcal{S} = \langle \mathcal{L}, \vdash_{\mathcal{S}} \rangle$ es un sistema deductivo, entonces $\Delta \vdash_{\mathcal{S}} \psi$ si y sólo si ψ pertenece al conjunto más pequeño de fórmulas que contiene a Δ, a todas las substituciones de los axiomas y es cerrado bajo pruebas directas.*

La relación $\vdash_{\mathcal{S}}$, llamada *relación de consecuencia* de $\mathcal{S}$, satisface:

Lema 3. ([1], pag. 5) *Si $\mathcal{S} = \langle \mathcal{L}, \vdash_{\mathcal{S}} \rangle$ es un sistema deductivo, entonces para todo $\Gamma, \Delta \subseteq \mathcal{F}m_{\mathcal{L}}$ y $\varphi, \psi \in \mathcal{F}m_{\mathcal{L}}$ se tiene:*

1. *$\Delta \vdash_{\mathcal{S}} \varphi$, para todo $\varphi \in \Delta$.*
2. *Si $\Delta \vdash_{\mathcal{S}} \psi$ y $\Delta \subseteq \Gamma$, entonces $\Gamma \vdash_{\mathcal{S}} \psi$.*
3. *Si $\Delta \vdash_{\mathcal{S}} \psi$ y $\Gamma \vdash_{\mathcal{S}} \varphi$, para todo $\varphi \in \Delta$, entonces $\Gamma \vdash_{\mathcal{S}} \psi$.*
4. *Si $\Delta \vdash_{\mathcal{S}} \psi$, entonces existe $\Gamma \subseteq \Delta$ finito tal que $\Gamma \vdash_{\mathcal{S}} \psi$. Diremos que $\mathcal{S}$ es* finitario.
5. *Si $\Delta \vdash_{\mathcal{S}} \psi$, entonces $s(\Delta) \vdash_{\mathcal{S}} s(\psi)$, para toda substitución s. Diremos que $\mathcal{S}$ es* estructural

Cualquier relación que satisfaga 1–5 es la relación de consecuencia de algún sistema deductivo. Podemos así definir un sistema deductivo como un par $\mathcal{S} = \langle \mathcal{L}, \vdash_{\mathcal{S}} \rangle$, donde $\vdash_{\mathcal{S}}$ es una relación entre conjuntos de fórmulas y fórmulas que verifica 1–5. Nótese que esta definición no hace alusión alguna a reglas de inferencia ni a axiomas.

2 Algebra Universal

El Algebra Universal es la rama del álgebra que estudia propiedades comunes a distintos tipos de álgebras. En esta sección veremos algunos conceptos elementales que son necesarios para el desarrollo posterior. Para un estudio más profundos, se puede consultar [4, 17]

2.1 Algebras

Dado un lenguaje $\mathcal{L} = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$, una $\mathcal{L}$–*álgebra* es una estructura $\mathbf{A} = \langle A; {\omega_1}^{\mathbf{A}}, {\omega_2}^{\mathbf{A}}, \ldots, {\omega_n}^{\mathbf{A}} \rangle$, donde A es un conjunto no vacío llamado el *universo* de $\mathbf{A}$ y para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, ${\omega_i}^{\mathbf{A}}$ es una operación sobre A de la misma aridad que ω_i, i.e. una función ${\omega_i}^{\mathbf{A}} : A^n \longrightarrow A$, donde n es la aridad de ω_i. Para toda esta sección se puede consultar el excelente libro [4].

Obsérvese que mientras ω_i es un símbolo lingüístico, su asociada ${\omega_i}^{\mathbf{A}}$ es una función con un dominio y un rango bien determinados. Sin embargo, para aliviar la notación, generalmente omitimos el superíndice $\mathbf{A}$, si se subentiende el álgebra de la que se está hablando y no hay riesgo de confusión.

Ejemplos:

1. El conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$ con sus operaciones habituales es un álgebra. Más generalmente, cualquier anillo es un álgebra.

2. El grupo $\mathfrak{S}_n = \langle S_n, \circ, ^{-1}, Id \rangle$ de todas las permutaciones de un conjunto de n elementos. La operación binaria $\circ$ es la composición de funciones y la constante Id es la función identidad. Obviamente, cualquier grupo es un álgebra.

3. En general, la mayoría de las estructuras estudiadas en un curso de Algebra Abstracta son álgebras. Una excepción son los cuerpos: en ellos el inverso multiplicativo no es una operación ya que no está definida para 0. Llamamos a este tipo de estructura *álgebras parciales* y su teoría es mucho más compleja que la de las álgebras.

4. Definimos $\mathbf{2} = \langle \{0, 1\}; \vee \wedge \rangle$, donde $\vee, \wedge$ son las operaciones binarias:

$$\begin{aligned} x \vee y &:= \max\{x, y\} \\ x \wedge y &:= \min\{x, y\}. \end{aligned}$$

Esta corresponde a una clase de álgebras llamadas retículos.

5. Un ejemplo importante para nosotros es el álgebra $\boldsymbol{\mathcal{F}m_{\mathcal{L}}}$, cuyo universo es el conjunto $\mathcal{F}m_{\mathcal{L}}$ de las fórmulas de un lenguaje proposicional $\mathcal{L}$ y cuyas operaciones se definen de la manera obvia: para cada conectivo n–ario $\omega \in \mathcal{L}$ y fórmulas $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$,

$$\omega^{\boldsymbol{\mathcal{F}m_{\mathcal{L}}}}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) = \omega(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)\,.$$

$\boldsymbol{\mathcal{F}m_{\mathcal{L}}}$ es conocida también como el *álgebra fórmulas de* $\mathcal{L}$ o el álgebra *totalmente libre sobre el conjunto* $\mathcal{P}$ de las variables proposicionales.

6. Análogamente, dado un lenguaje algebraico $\mathcal{L}$ y un conjunto X de *variables*, construimos el conjunto $Term(X)$ de los *términos sobre* X de la misma manera como construimos las fórmulas de la lógica. Con este conjunto como universo construimos en el álgebra totalmente libre de términos $\mathbf{Term(X)}$.

2.2 Construcciones Básicas

A partir de un conjunto de álgebras del mismo tipo se puede construir otras. Tres son las construcciones más elementales: subálgebras, productos directos e imágenes homomorfas. Todas ellas han sido estudiadas por el lector en algún curso de estructuras algebraicas o similar, por lo que no es necesario dar ejemplos.

Sean $\mathbf{A} = \langle A; {\omega_1}^{\mathbf{A}}, {\omega_2}^{\mathbf{A}}, \ldots, {\omega_n}^{\mathbf{A}} \rangle$ y $\mathbf{B} = \langle B; {\omega_1}^{\mathbf{B}}, {\omega_2}^{\mathbf{B}}, \ldots, {\omega_n}^{\mathbf{B}} \rangle$ dos álgebras. $\mathbf{B}$ es *subálgebra* de $\mathbf{A}$, lo que denotamos $\mathbf{B} \leq \mathbf{A}$, si $B \subseteq A$ es no vacío y cada operación ${\omega_i}^{\mathbf{B}}$ de $\mathbf{B}$ es la restricción a B de la operación correspondiente de $\mathbf{A}$.

Si $B \subseteq A$, para que exista una subálgebra con universo B, basta que éste sea no vacío y cerrado bajo todas las operaciones de $\mathbf{A}$.

Un *homomorfismo* entre dos álgebras $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ del mismo tipo es una función $f : A \longrightarrow B$ tal que para cada operación n–aria ω

$$f(\omega^{\mathbf{A}}(a_1, a_2, \ldots, a_n)\,) = \omega^{\mathbf{B}}(f(a_1), f(a_2), \ldots, f(a_n)\,).$$

Es inmediato que $f(A)$ es no vacío y cerrado bajo las operaciones de $\mathbf{B}$, por lo tanto existe una subálgebra de $\mathbf{B}$ cuyo universo es $f(A)$. Esta se llama la *imagen homomorfa de* $\mathbf{A}$ y la denotamos $f(\mathbf{A})$.

Un homomorfismo biyectivo es un *isomorfismo*. En tal caso, $f(\mathbf{A}) = \mathbf{B}$ y decimos que $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son *isomorfas*, lo que denotamos $\mathbf{A} \cong \mathbf{B}$. Si bien lo presentamos como un caso particular, el concepto de isomorfismo es más elemental que el de homomorfismo. Dos álgebras isomorfas son *iguales* en todo sentido algebraico, sólo difieren en sus elementos y los símbolos usados para denotar sus operaciones.

Dada una familia $\langle \mathbf{A}_i : i \in I \rangle$ de álgebras del mismo tipo, su *producto directo* $\mathbf{A} = \prod_{i\in I} \mathbf{A}_i$ es el álgebra cuyo universo es el conjunto de todas las funciones

$$f : I \longrightarrow \bigcup_{i \in I} A_i$$

tales que para cada $i \in I$, $f(i) \in A_i$ y para cada operación n–aria ω, y $f_1, f_2, \ldots, f_n$ elementos de A,

$$\omega^{\mathbf{A}}(f_1, f_2, \ldots, f_n) \ : \ I \ \longrightarrow \bigcup_{i \in I} \mathbf{A}_i$$

esta definida por

$$\omega^{\mathbf{A}}(f_1, f_2, \ldots, f_n)(i) = \omega^{\mathbf{A}_i}(f_1(i), f_2(i), \ldots, f_n(i)).$$

Abusando un poco de la nomenclatura, podemos considerar I como el conjunto de las coordenadas de los elementos de A, de tal manera que cada coordenada de un elemento de A pertenece al (universo del) álgebra correspondiente y las operaciones se hacen coordenada a coordenada. De hecho, si I es finito, el producto directo de $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n$ es isomorfo al producto cartesiano $\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2 \times \cdots \times \mathbf{A}_n$.

Una *variedad* es una clase de álgebras cerrada bajo imágenes homomorfas, subálgebras y productos directos.

2.3 Ecuaciones

Una $\mathcal{L}$*–ecuación* (o simplemente *ecuación*) ([1], pag. 13), es una expresión de la forma $\varphi \approx \psi$, donde $\varphi, \psi \in Term(X)$, denotaremos al conjunto de las ecuaciones de CL por $Eq_{\mathcal{L}}$.

En el Algebra Abstracta se estudia clases de álgebras, de un tipo de similaridad dado, definidas por ciertas propiedades o axiomas. Para nosotros reviste especial importancia aquellas clases de álgebras que satisfacen ciertas ecuaciones, o *clases ecuacionales*. Un importante teorema demostrado por Birkhoff dice que una clase de álgebras es ecuacional si y sólo si es un variedad. (Ver [4] pag. 75).

Ejemplos:

1. La variedad de los *retículos* es la clase de todas las álgebras $\mathcal{L} = \langle L, \vee, \wedge \rangle$, donde $\vee$, $\wedge$ son operaciones binarias sobre L que verifican las identidades:

R1 $\quad x \vee x = x$

$\quad x \wedge x = x$ (Idempotencia)

R2 $\quad x \vee y = y \vee x$

$\quad x \wedge y = y \wedge x$ (Conmutatividad)

R3 $\quad x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$

$\quad x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$ (Asociatividad)

R4 $\quad x \vee (x \wedge y) = x$

$\quad x \wedge (y \vee z) = x$ (Absorción)

Si además verifica

R5 $\quad x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$

$\quad x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$ (Distributividad)

hablamos de la variedad de los retículos distributivos.

Por ejemplo, el álgebra **2** definida más arriba es un retículo distributivo.

2. La variedad de las *Algebras de Boole* es la clase de todas las álgebras $\mathbf{B} = \langle B, \vee, \wedge, ', \perp, \top \rangle$, tales que $\mathbf{B} = \langle B, \vee, \wedge \rangle$ es un retículo distributivo, $'$ es una operación unaria y $\perp, \top$ son constantes tales que:

B1 $\quad x \vee \top = \top$ (Ultimo elemento)

$\quad x \wedge \perp = x$ (Primer elemento), B2 $\quad x \vee x' = \top$

$\quad\quad x \wedge x' = \bot$ (Complemento).

3. Los anillos, grupos y algunas otras estructuras conocidas y definidas sobre un lenguaje apropiado son también variedades.

2.4 Algunos Resultados sobre Retículos

Dentro del Algebra Universal los retículos, además de ser objeto de estudio, son una herramienta importante debido a que muchos conceptos definen clases de objetos ordenados reticularmente. Veremos en esta sección algunas propiedades de los retículos que serán usadas más adelante.

Un retículo $\mathbf{L}$ se dice *completo* si para todo $A \subseteq L$, existen el supremo y el ínfimo de A, denotados $\bigvee A$ y $\bigwedge A$, respectivamente.

Debe notarse que $\bigvee L = \bigwedge \emptyset$ es el mayor elemento de $\mathbf{L}$ y que $\bigwedge L = \bigvee \emptyset$ es el menor elemento de $\mathbf{L}$ y que si $\mathbf{L}$ es completo, ambos existen.

Ejemplos:

1. El retículo $\langle \mathcal{P}(X); \cup, \cap \rangle$ de todos los subconjuntos de un conjunto X, es completo.

2. Los retículos $\langle \mathcal{SU}(\mathbf{G}); \vee, \wedge \rangle$ y $\langle \mathcal{SUN}(\mathbf{G}); \vee, \wedge \rangle$ de todos los subgrupos y de todos los subgrupos normales de un grupo $\mathbf{G}$, son completos. En ambos caso las operaciones son $\mathbf{H} \vee \mathbf{K} = \langle H \cup K \rangle$ y $\mathbf{H} \wedge \mathbf{K} = \mathbf{H} \cap \mathbf{K}$, donde $\langle A \rangle$ es el subgrupo generado por A.

3. $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$ con sus ordenes habituales no son retículos completos. Si a $\mathbb{R}$ le agregamos un punto final $+\infty$ y un punto inicial $-\infty$, entonces $\overline{\mathbb{R}}$ es completo.

Lema 4. *Un retículo es completo si y sólo si es cerrado bajo supremos. Lo mismo ocurre si es cerrado bajo ínfimos.*

Un elemento c de un retículo $\mathbf{L}$ es *compacto* si toda vez que $c \leq \bigvee A$ (obsérvese que esto presupone que tal supremo existe), hay un subconjunto finito $B \subseteq A$ tal que $c \leq \bigvee B$.

Un retículo es *algebraico* si es completo, y todos sus elementos son el supremo de un conjunto de elementos compactos.

Ejemplos:

1. El retículo $\mathcal{P}(X)$ es algebraico. Los elementos compactos son los subconjuntos finitos de X.

2. Los retículos $\mathcal{SU}(\mathbf{G})$ y $\mathcal{SUN}(\mathbf{G})$ son algebraicos. En ambos casos los elementos compactos son los subgrupos finitamente generados.

3. $\overline{\mathbb{R}}$ no es un retículo algebraico. De hecho, no tiene elementos compactos.

2.5 Relaciones de Equivalencia y Congruencias

Una *relación de equivalencia* sobre un conjunto A es una relación binaria ϑ tal que para todo a, b, $c \in A$ se satisface:

E1 : $a\vartheta a$. (reflexividad)
E2 : Si $a\vartheta b$, entonces $b\vartheta a$. (simetría)
E2 : Si $a\vartheta b$ y $b\vartheta c$, entonces $a\vartheta c$. (transitividad)

Una relación de equivalencia ϑ particiona al conjunto en *clases de equivalencia*, vale decir, conjuntos formados por elementos relacionados entre sí, más técnicamente, la *clase de equivalencia de a módulo* ϑ es el conjunto:

$$[a]_\vartheta = \{x \in A : x\vartheta a\}.$$

Es fácil ver que el conjunto $A \mid \vartheta$ de todas estas clases de equivalencia, llamado el *cuociente de A módulo* ϑ, es una partición de A.

Reflexividad, simetría y transitividad son en un sentido particular las propiedades esenciales de la identidad. Una relación con esas propiedades nos permite identificar objetos de un conjunto dado y tratarlos como un solo objeto.

Desde el punto de vista algebraico es interesante hacer notar que el par $\langle E(A), \subseteq \rangle$, de todas las relaciones de equivalencia sobre A ordenado por inclusión, es un retículo distributivo completo.

Antes de revisar este resultado, observemos que dada una familia de relaciones de equivalencia sobre A, su intersección también lo es, es decir, si para cada $i \in I$, ϑ_i es una relación de equivalencia sobre A, entonces $\bigcap_{i \in I} \vartheta_i$ es una relación de equivalencia sobre A. Por otra parte, notemos que tanto la identidad, denotada por $\triangle_A$, como la relación trivial ∇_A, son relaciones de equivalencia sobre A.

Las operaciones de supremo e ínfimo sobre $E(A)$ están dadas por:

$$\begin{array}{rcl} \vartheta_1 \wedge \vartheta_2 & = & \vartheta_1 \cap \vartheta_2 \\ \vartheta_1 \vee \vartheta_2 & = & \bigcap \{\vartheta : \vartheta_1 \cup \vartheta_2 \subseteq \vartheta\}, \end{array}$$

por las observaciones del párrafo anterior, $\bigcap\{\vartheta : \vartheta_1 \cup \vartheta_2 \subseteq \vartheta\}$ es la menor congruencia que contiene a ϑ_1 y a ϑ_2. Hay también una forma constructiva de definir el supremo.

$$\begin{array}{rl} \vartheta_1 \vee \vartheta_2 = \{\langle a, b\rangle : & \text{existen } \ c_0, \ldots, c_n \ \text{ tales que } \ c_0 = a, c_n = b \\ & \qquad \text{y para cada } \ i\,,\ c_i \vartheta_1 c_{i+1} \ \text{ o bien } \ c_i \vartheta_2 c_{i+1}\}. \end{array}$$

El lector debe verificar que esto efectivamente define la menor relación de equivalencia que contiene tanto a ϑ_1 como a ϑ_2. Por otra parte, la observación más arriba implica que el retículo es completo ya que

$$\bigwedge_{i \in I} \vartheta_i = \bigcap_{i \in I} \vartheta_i.$$

Una relación de equivalencia sobre (el universo de) un álgebra $\mathbf{A}$ es una *congruencia sobre* $\mathbf{A}$ si es compatible con todas las operaciones del álgebra, vale decir, para cada operación n–aria ω y elementos a_i, $b_i \in A$, si $a_i \vartheta b_i$ para $i \leq n$, se verifica

$$\omega^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n) \vartheta \omega^{\mathbf{A}}(b_1, \ldots, b_n).$$

La condición de compatibilidad nos dice que si escogemos elementos de distintas clases de equivalencia y los operamos, la clase a la que pertenece el resultado no depende de los elementos particulares que se usaron, sino de las clases de las que fueron tomados. Esto es lo que nos permite definir una estructura algebraica sobre el conjunto cuociente de la siguiente manera:

$$\mathbf{A} \mid \vartheta = \langle A \mid \vartheta, {\omega_1}^{\mathbf{A}|\vartheta}, {\omega_2}^{\mathbf{A}|\vartheta}, \ldots, {\omega_n}^{\mathbf{A}|\vartheta} \rangle,$$

donde dadas las clases $[a_1]_\vartheta, \ldots, [a_n]_\vartheta$, la operación

$$\omega^{\mathbf{A}|\vartheta}([a_1]_\vartheta, \ldots, [a_n]_\vartheta) = [\ \omega_i^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n)\ ]_\vartheta.$$

La compatibilidad garantiza que ésta está bien definida. $\mathbf{A} \mid \vartheta$ se denomina el *álgebra cuociente de* $\mathbf{A}$ *por* ϑ.

Para los efectos de estas Notas, lo más interesante es que el conjunto de todas las congruencias sobre un álgebra $\mathbf{A}$, ordenado por inclusión, es un retículo distributivo y algebraico al que denotamos $Con(\mathbf{A})$. Los elementos compactos son las congruencias finitamente generadas. Dejamos al lector la verificación de estas afirmaciones.

Ejemplos:

1. Si $\mathbf{G}$ es un grupo y $\mathbf{N}$ un subgrupo normal de $\mathbf{G}$, entonces la relación $x\vartheta y$ si y sólo si $x\,y^{-1} \in \mathbf{N}$ es una congruencia. El grupo cuociente $\mathbf{G} \mid \vartheta$ es por supuesto el mismo que el grupo cuociente $\mathbf{G} \mid \mathbf{N}$ que el lector ha estudiado en sus cursos de álgebra abstracta. Un caso particular interesante es cuando el grupo es $\mathbb{Z}$ y el subgrupo es $n\mathbb{Z}$. En este caso, la relación anterior es la conocida congruencia módulo n de la teoría de números, de donde se ha tomado prestado el nombre.

2 Sobre el retículo de cuatro elementos $0 < a < b < 1$, considere la congruencia que identifica 0 con a y 1 con b. El retículo cuociente tiene dos elementos $[0] < [1]$.

2.6 Operadores de Clausura

(Ver por ejemplo [4], Capítulo 1, §4 y §5.)

Un *operador de clausura* sobre un conjunto A es una función
$\mathbf{C} : \mathcal{P}(A) \longrightarrow \mathcal{P}(A)$ que satisface lo siguiente.

(C1) $\quad X \subseteq \mathbf{C}(X)$

(C2) $\quad \mathbf{C}(\mathbf{C}(X)) \subseteq \mathbf{C}(X)$

(C3) $\quad X \subseteq Y$ implica $\mathbf{C}(X) \subseteq \mathbf{C}(Y)$

Si además $\mathbf{C}$ verifica:

(C4) $\qquad \mathbf{C}(X) = \bigcup\{\mathbf{C}(Y) : Y \subseteq X \quad \text{es finito,}\}$

decimos que $\mathbf{C}$ es un operador de clausura *algebraico.*

Ejemplos:

1. En un espacio topológico $X \longmapsto \overline{X}$ es un operador de clausura sobre X.

2. La identidad es un operador de clausura sobre cualquier conjunto.

3. Si $\mathbf{G}$ es un grupo, entonces la función $X \longmapsto \langle X \rangle$ que envía cualquier subconjunto de G en el (universo del) subgrupo que genera, es un operador de clausura sobre G.

Teorema 1. *Sea* $\mathbf{C}$ *un operador de clausura sobre un conjunto* A. *Entonces el conjunto* $L_{\mathbf{C}} = \{X \subseteq A : \mathbf{C}(X) = X\}$ *dotado de las operaciones*

$$\bigvee_{i \in I} \mathbf{C}(A_i) = \mathbf{C}\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \qquad y \qquad \bigwedge_{i \in I} \mathbf{C}(A_i) = \bigcap_{i \in I} \mathbf{C}(A_i)\,,$$

es un retículo completo. Los elementos de $L_{\mathbf{C}}$ *se llaman* conjuntos cerrados.

Si además $\mathbf{C}$ *es un operador algebraico,* $\mathbf{L_C}$ *es un retículo algebraico en el que los elementos compactos son los subconjuntos cerrados* $\mathbf{C}(B)$*, para algún* B *finito.*

Teorema 2. *Todo retículo algebraico es isomorfo al retículo de los subconjuntos cerrados de algún conjunto dotado de un operador de clausura algebraico.*

Idea de la demostración.

Sea $\mathbf{L}$ un retículo algebraico y C el conjunto de sus elementos compactos. Para $X \subseteq L$ definimos

$$\mathbf{C}(X) = \{c \in C : c \leq \bigvee X\}.$$

Entonces $\mathbf{C}$ es un operador de clausura algebraico. La función

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbf{L} & \longrightarrow & \mathcal{P}(C) \\ x & \longmapsto & \{c \in C : c \leq x\}\,, \end{array}$$

es un isomorfismo. $\square$

2.7 Un Ejemplo Importante

Sea $\mathcal{S} = \langle \mathcal{L}, \vdash_{\mathcal{S}} \rangle$ un sistema deductivo. Si definimos

$$\mathcal{C}n_{\mathcal{S}}(\Delta) = \{\varphi \in \mathcal{F}m_{\mathcal{L}} \,:\, \Delta \vdash_{\mathcal{S}} \varphi\},$$

$\mathcal{C}n_{\mathcal{S}}$ define un operador

$$\mathcal{C}n_{\mathcal{S}} \,:\, \mathcal{P}(\mathcal{F}m_{\mathcal{L}}) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{F}m_{\mathcal{L}})$$

sobre el conjunto de las fórmulas, llamado *operador de consecuencia de* $\mathcal{S}$. Las propiedades 1–5 de $\vdash_{\mathcal{S}}$ que aparecen en el Lema 3, implican que $\mathcal{C}n_{\mathcal{S}}$ es un operador de clausura algebraico. Se puede hacer el estudio de sistemas deductivos a partir de operadores de consecuencia, (ver [1], pag. 6), pero no lo haremos en estas Notas.

Los conjuntos cerrados bajo este operador se llaman *$\mathcal{S}$–teorías.* En otras palabras, una teoría es un conjunto T de fórmulas que es cerrado bajo $\vdash_{\mathcal{S}}$,

$$T \vdash_{\mathcal{S}} \varphi \implies \varphi \in T.$$

El conjunto de los teoremas $\mathcal{S}$, (aquellas fórmulas φ tales que $\vdash_{\mathcal{S}} \varphi$, o equivalentemente, aquellas fórmulas directamente demostrables a partir de cualquier conjunto Δ de fórmulas), es la menor $\mathcal{S}$–teoría. Por otra parte, $\mathcal{F}m_{\mathcal{L}}$ es la mayor $\mathcal{S}$–teoría. Observemos que $\mathcal{C}n_{\mathcal{S}}(\Delta)$ es la menor $\mathcal{S}$–teoría que contiene a Δ.

El conjunto de todas las $\mathcal{S}$–teorías se denota $Th\mathcal{S}$ ([1], pag.7). Sobre este conjunto definimos las operaciones $\wedge^{\mathcal{S}}$ y $\vee^{\mathcal{S}}$, que son respectivamente, la intersección usual de conjuntos y la teoría generada por la unión conjuntista de teorías, es decir, para $T\,, U \in Th\mathcal{S}$,

$$T \wedge^{\mathcal{S}} U = T \cap U \quad \text{ y } \qquad T \vee^{\mathcal{S}} U = \mathcal{C}n_{\mathcal{S}}(T \cup U).$$

Observemos que la intersección arbitraria de teorías es una teoría y como $\mathcal{F}m_{\mathcal{L}}$ es la mayor $\mathcal{S}$–teoría, el retículo $\mathbf{Th}\mathcal{S} = \langle Th\mathcal{S}, \wedge^{\mathcal{S}}, \vee^{\mathcal{S}} \rangle$ es un retículo completo. El siguiente lema se desprende fácilmente de las propiedades de los operadores de clausura algebraicos.

Lema 5. ([1], Lema 1.1) *Sea $\mathcal{S} = \langle \mathcal{L}, \vdash_{\mathcal{S}} \rangle$ un sistema deductivo.*

1. Los elementos compactos de $\mathbf{Th}\mathcal{S}$ *son las* $\mathcal{S}$*–teorías finitamente generadas.*

2. El retículo $\mathbf{Th}\mathcal{S}$ *el algebraico.*

3. $Th\mathcal{S}$ *es cerrado bajo uniones dirigidas.*

2.8 La Lógica de las Ecuaciones

Lema 6. *Sean* $\sigma(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in Term(X)$ *y* $\mathbf{A}$ *una* $\mathcal{L}$*–álgebra. Una función* $I : X \longrightarrow A$*, definida por* $x_i \longmapsto a_i$ *,* $i \in \omega$*, se extiende de manera única a*

$$\begin{array}{rcl} \bar{I} : \mathcal{F}m_{\mathcal{L}} & \longrightarrow & A \\ \sigma(x_1, x_2, \ldots, x_n) & \longmapsto & \sigma^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n). \end{array}$$

I se llama una *interpretación* de las variables en $\mathbf{A}$. Por ejemplo, una sustitución s de las letras proposicionales $\mathcal{P}$ es una interpretación de $\mathcal{P}$ en el álgebra $\boldsymbol{\mathcal{F}m_{\mathcal{L}}}$ definida más arriba.

Sea $\mathcal{K}$ una clase de $\mathcal{L}$–álgebras. Definimos la relación $\models_{\mathcal{K}}$ entre un conjunto de ecuaciones y una ecuación de la manera siguiente ([1], pag. 13):

$\Gamma \models_{\mathcal{K}} \sigma \approx \tau$ si y sólo si para toda $\mathbf{A} \in \mathcal{K}$ y para toda interpretación $\bar{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ de las variables de $\Gamma \cup \{\sigma \approx \tau\}$ se tiene:

$$\xi^{\mathbf{A}}(\bar{a}) = \eta^{\mathbf{A}}(\bar{a}) \text{ , para } \xi \approx \eta \in \Gamma \implies \sigma^{\mathbf{A}}(\bar{a}) = \tau^{\mathbf{A}}(\bar{a}).$$

Esta relación es llamada *relación de consecuencia ecuacional determinada por* $\mathcal{K}$.

Es fácil ver que la única propiedad de $\vdash_{\mathcal{S}}$ que $\models_{\mathcal{K}}$ no tiene necesariamente es la finitud. Por ejemplo, directamente de la definición se observa que $\models_{\mathcal{K}}$ es estructural.

Lema 7. ([1], Lema 3.1) *Si* $\mathcal{K}$ *es una clase de álgebras entonces para conjuntos de ecuaciones* $\Gamma, \Delta \subseteq Eq(X)$ *y toda ecuación* $\sigma \approx \tau$ *se tiene:*

1. $\Delta \models_{\mathcal{K}} \delta \approx \varepsilon$ *, para todo* $\delta \approx \varepsilon \in \Delta$*.*

2. Si $\Delta \models_{\mathcal{K}} \sigma \approx \tau$ *y* $\Delta \subseteq \Gamma$*, entonces* $\Gamma \models_{\mathcal{K}} \sigma \approx \tau$*.*

3. *Si* $\Delta \models_{\mathcal{K}} \sigma \approx \tau$ *y* $\Gamma \models_{\mathcal{K}} \delta \approx \varepsilon$*, para todo* $\delta \approx \varepsilon \in \Delta$*, entonces* $\Gamma \models_{\mathcal{K}} \sigma \approx \tau$*.*

4. *Si* $\Delta \models_{\mathcal{K}} \sigma \approx \tau$*, entonces* $s(\Delta) \models_{\mathcal{K}} s(\sigma) \approx s(\tau)$*, para toda substitución* s*. Es decir,* $\models_{\mathcal{K}}$ *es siempre* estructural.

Podemos definir el concepto de operador de clausura $\mathcal{C}n_{\mathcal{K}}$,el de *teoría ecuacional* y el retículo $\mathbf{Th}\mathcal{K}$ de todas las teorías ecuacionales respecto de $\models_{\mathcal{K}}$.

(Para una teoría general de lógica ecuacional, el lector puede consultar [4], Capítulo 2, §14).

3 Lógica Algebraica

Los orígenes del estudio algebraico de los sistemas deductivos se remontan, a los trabajos de G. Boole, vale decir, antes del nacimiento de la lógica matemática.

Los trabajos de Tarski, o más precisamente del grupo de Varsovia, (ver [21]) en los años 20 y 30 son el punto de partida del estudio de los sistemas deductivos en general y de la lógica algebraica tal como se la entiende hoy. En [22] (una versión en inglés aparece en [21]), Tarski introduce el álgebra de fórmulas del cálculo proposicional y define la relación:

$$\varphi \sim \psi \quad \text{si y sólo si} \quad \vdash_{CPC} \varphi \leftrightarrow \psi \,.$$

Enseguida muestra que ésta es lo que hoy llamamos una congruencia y que el álgebra cuociente, que ahora es conocida como el *álgebra de Lindenbaum–Tarski del cálculo proposicional clásico*, es un álgebra de Boole. Recíprocamente, indica como construir un sistema deductivo a partir de una axiomatización de las álgebras de Boole.

Conocida esta relación entre el Cálculo Proposicional Clásico y las Algebras de Boole, el método se aplicó a otras lógicas, representadas por otros sistemas deductivos, a los que les corresponden otras clases de álgebras. Entre los principales están:

Lógica Proposicional Clásica	Algebras de Boole
Lógica Prop. Intuicionista	Algebras de Heyting
Lógicas Multivaluadas	Algebras de Wajsberg, MV–álgebras
Lógicas Modales	Algebras Modales
Lógica de Primer Orden	Algebras Cilíndricas, álgebras Poliádicas
etc.	etc–álgebras

¿Cuál es la naturaleza de está relación? ¿Qué condiciones debe satisfacer un sistema deductivo para contar con una clase de álgebras asociada?

En los dos importantes libros de H. Rasiowa y R. Sikorski [20] y H. Rasiowa [19] se decantan varias décadas de resultados en esta línea. El tratamiento dado en estos libros se aplica a sistemas con ciertas particularidades, por ejemplo, presupone la existencia de una implicación con ciertas propiedades estándar. (Ver más adelante los ejemplos 4.1). Por lo tanto muchos sistemas no son en este sentido algebrizables simplemente porque no cuentan con una implicación, o porque la que tienen no goza de las propiedades adecuadas.

No ha sido sino hasta muy recientemente que se ha dado una definición general y precisa del concepto de algebrizabilidad. Esta ha sido propuesta por W. Blok y D. Pigozzi en [1]. Basados en una generalización del proceso de Lindenbaum–Tarski, ellos proponen un tratamiento más general o "abstracto" del problema, uno que no dependa del lenguaje subyacente del sistema ni de la presencia de ciertos axiomas o reglas predeterminados. Naturalmente, hay muchos sistemas que tampoco son algebrizables en este sentido, sin embargo, no lo son por motivos más profundos y generales que el lenguaje en el que se expresan. ¿Qué tan buena es esta noción de algebrizabilidad? Esta pregunta sólo podrá responderse al ver las aplicaciones que la teoría tenga, especialmente, el uso de técnicas del álgebra universal en las clases de álgebras para obtener resultados sobre las lógicas asociadas. En el último tiempo se ha llamado Lógica Algebraica Abstracta al estudio de sistemas deductivos usando herramientas del álgebra universal.

Varios autores han perfeccionado, extendido o modificado estos conceptos iniciales. Ver por ejemplo [2, 6, 7, 12, 14, 15]. Con todo, la idea esencial sigue siendo la misma, es por eso que he centrado estas charlas en una exposición de esta teoría, como punto de partida para quien se interese en la lógica algebraica.

3.1 Lógicas Algebrizables

Intuitivamente, un sistema deductivo $\mathcal{S}$ es algebrizable si existe una clase $\mathcal{K}$ de álgebras del mismo tipo y existe una correspondencia entre fórmulas de $\mathcal{F}m_{\mathcal{L}}$ y ecuaciones de $Eq_{\mathcal{L}}$ tal que las relaciones $\vdash_{\mathcal{S}}$ y $\models_{\mathcal{K}}$ sean "equivalentes". Es decir, dada una fórmula α existe una ecuación $\widehat{\alpha}$ y dada una ecuación $s \approx \tau$ existe una fórmula $\widetilde{s \approx \tau}$ tales que :

1. $\Gamma \vdash_{\mathcal{S}} \alpha$ si y sólo si $\widehat{\Gamma} \models_{\mathcal{K}} \widehat{\alpha}$,
2. $\Sigma \models_{\mathcal{K}} s \approx \tau$ si y sólo si $\widetilde{\Sigma} \models_{\mathcal{K}} \widetilde{s \approx \tau}$,
3. $\alpha \dashv\vdash_{\mathcal{S}} \widetilde{\widehat{\alpha}}$,
4. $s \approx \tau \;=\!\mid\models_{\mathcal{K}} \widehat{\widetilde{s \approx \tau}}$.

Por ejemplo, si $\mathcal{S}$ es CPC y $\mathcal{K}$ es la variedad de las álgebras de Boole, haciendo:

- $\widehat{\alpha} = \alpha \approx \top$
- $\widetilde{s \approx \tau} = s \leftrightarrow \tau$,

como sabemos, se verifican las cuatro condiciones de arriba.

3.2 Semánticas Algebraicas Equivalentes

Formalizaremos aquí las ideas intuitivas del párrafo anterior.

Definición 1. ([1], Def. 2.2) *Sea* $\mathcal{S} = \langle \mathcal{L}, \vdash_{\mathcal{S}} \rangle$ *un sistema deductivo y* $\mathcal{K}$ *una clase de* $\mathcal{L}$*-algebras.* $\mathcal{K}$ *es una* semántica algebraica *para* $\mathcal{S}$ *si* $\vdash_{\mathcal{S}}$ *puede ser interpretado en* $\models_{\mathcal{K}}$ *de la manera siguiente. Existe un conjunto finito* $\delta_i(p) \approx \varepsilon_i(p)$*, para* $i < n$*, de ecuaciones en una variable* p*, tal que para* $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq \mathcal{F}m_{\mathcal{L}}$ *para cada* $j < n$ *:*

(1) $\Gamma \vdash_{\mathcal{S}} \varphi$ *si y sólo si*
$\{\delta_i(\psi) \approx \varepsilon_i(\psi) \, : i < n \, , \, \psi \in \Gamma\} \models_{\mathcal{K}} \delta_j(\varphi) \approx \varepsilon_j(\varphi) \, ; \quad j < n \, .$

$\delta_i \approx \varepsilon_i$ *son llamadas* ecuaciones de definición *para* $\mathcal{S}$ *y* $\mathcal{K}$*.*

Definición 2. ([1], Def. 2.4]) $\mathcal{K}$ *es una semántica algebraica* equivalente *para un sistema deductivo* $\mathcal{S}$ *si existe un conjunto finito* $\Delta_j(p, q)$*, para* $j < m$ *, de fórmulas con dos variables tal que para todo* $\varphi \approx \psi \in Eq_{\mathcal{L}}$ *se tiene:*

(2) $\varphi \approx \psi \;\; =\!\!|\models_{\mathcal{K}} \;\; \delta_i(\varphi \Delta_j \psi) \approx \varepsilon_i(\varphi \Delta_j \psi) \, ; \quad i < n \, , \, j < m \, .$

El conjunto de fórmulas $\Delta_j(p, q)$ es llamado *sistema de fórmulas de equivalencia* para $\mathcal{S}$ y $\mathcal{K}$. Abreviaremos $\delta \approx \varepsilon$ para el sistema de ecuaciones de definición y $\Delta(p, q)$ para el sistema de fórmulas de equivalencia.

Lema 8. ([1], Lema 2.9) *Sea* $\mathcal{S} = \langle \mathcal{L}, \vdash_{\mathcal{S}} \rangle$ *un sistema deductivo y* $\mathcal{K}$ *una semántica algebraica equivalente con ecuaciones de definición* $\delta \approx \varepsilon$ *y fórmulas de equivalencia* $\Delta(p, q)$ *. Entonces para todo* $\Sigma \subseteq Eq_{\mathcal{L}}$ *y toda ecuación* $\varphi \approx \psi$*,*

(3) $\Sigma \models_{\mathcal{K}} \varphi \approx \psi$ *si y sólo si* $\{\xi \Delta \eta : \xi \approx \eta \in \Sigma\} \vdash_{\mathcal{S}} \varphi \Delta \psi$,

y para cada $\theta \in \mathcal{F}m_{\mathcal{L}}$,

(4) $\theta \dashv\vdash_{\mathcal{S}} \delta(\theta)\Delta\varepsilon(\theta)$.

Recíprocamente, si existen fórmulas Δ *y ecuaciones* $\delta \approx \varepsilon$ *que satisfagan (3) y (4), entonces* $\mathcal{K}$ *es una semántica álgebraica equivalente para* $\mathcal{S}$.

Definición 3. *Un sistema deductivo* $\mathcal{S}$ *se dice* algebrizable *si tiene una semántica algebraica equivalente.*

A continuación veremos que, esencialmente, todo sistema algebrizable tiene una única semántica equivalente.

Lema 9. ([1], Cor. 2.11) *Si* $\mathcal{K}$ *es una semántica algebraica para* $\mathcal{S}$*, entonces* $\mathcal{K}$ *es una semántica algebraica equivalente si y sólo si* $\mathcal{K}^{\mathrm{Q}}$*, la cuasivariedad generada por* $\mathcal{K}$*, lo es.*

Esto se debe a que la segunda parte de (2) es equivalente a un sistema de cuasi–identidades

$$\bigwedge_{\psi \in \Gamma} \delta(\psi) \approx \varepsilon(\psi) \quad \Longrightarrow \delta(\varphi) \approx \varepsilon(\varphi).$$

Teorema 3. ([1], Teo. 2.15) *Sean* $\mathcal{S}$ *un sistema deductivo algebrizable,* $\mathcal{K}$ *y* $\mathcal{K}'$ *dos semánticas algebraicas equivalentes. Entonces* $\mathcal{K}$ *y* $\mathcal{K}'$ *generan la misma cuasivariedad.*

Idea de la demostración.

(a) Usando las propiedades de $\approx$, se demuestra que $\vdash_{\mathcal{S}} x\Delta y$ define una relación de congruencia sobre $\mathcal{F}m_{\mathcal{L}}$.

(b) $x\,, x\Delta y \vdash_{\mathcal{S}} y\,.$

(i) $x \approx y\,,\ \delta(x) \approx \varepsilon(x) \models_{\mathcal{K}} \delta(y) \approx \varepsilon(y)\,,$	prop. de $\approx$,
(ii) $x \approx y \dashv\models_{\mathcal{K}} \delta(x\Delta y) \approx \varepsilon(x\Delta y)\,,$	(2),
(iii) $\delta(x\Delta y) \approx \varepsilon(x\Delta y)\,, \delta(x) \approx \varepsilon(x) \models_{\mathcal{K}} \delta(y) \approx \varepsilon(y)\,,$	(i), (ii),
(iv) $x\Delta y\,, x \vdash_{\mathcal{S}} y\,,$	(1).

Sean $\mathcal{K}$ y $\mathcal{K}'$ dos semánticas algebraicas equivalentes al sistema $\mathcal{S}$ y sean $x\Delta y$ y $x\Delta' y$ sus respectivas fórmulas de equivalencia.

(c) $x\Delta y \dashv\vdash_{\mathcal{S}} x\Delta' y$.

Consideramos $\alpha(p) = x\Delta' p$. Entonces

$$
\begin{array}{ll}
x\Delta y \vdash_{\mathcal{S}} \alpha(x)\Delta\alpha(y)\,, & \text{(a)},\\
x\Delta y \vdash_{\mathcal{S}} (x\Delta' x)\Delta(x\Delta' y)\,, & \text{def.},\\
x\Delta y \vdash_{\mathcal{S}} (x\Delta' y)\,, & \text{(a), (b)}.
\end{array}
$$

Similarmente probamos en la otra dirección.

(d) $\mathcal{K}^Q = \mathcal{K}'^Q$.

$$
\begin{array}{lll}
\Sigma \models_{\mathcal{K}} \varphi \approx \psi & \text{si y sólo si} & \{\alpha\Delta\beta : \alpha \approx \beta \in \Sigma\} \vdash_{\mathcal{S}} \varphi\Delta\psi\,, \quad (3),\\
\Sigma \models_{\mathcal{K}} \varphi \approx \psi & \text{si y sólo si} & \{\alpha\Delta'\beta : \alpha \approx \beta \in \Sigma\} \vdash_{\mathcal{S}} \varphi\Delta'\psi\,, \quad (c),\\
\Sigma \models_{\mathcal{K}} \varphi \approx \psi & \text{si y sólo si} & \Sigma \models_{\mathcal{K}'} \varphi \approx \psi\,, \quad (3).
\end{array}
$$

□

El recíproco de este teorema es falso. Existen sistemas deductivos distintos que tienen la misma semántica algebraica equivalente. Ver ejemplo en [1], Sección 5.2.4.

3.3 Semánticas Matriciales

Una *$\mathcal{L}$–matriz* ([1], pag. 8) es un par $\mathcal{A} = \langle \mathbf{A}, F\rangle$, donde $\mathbf{A}$ es una $\mathcal{L}$–álgebra y F es un subconjunto del universo de $\mathbf{A}$, los elementos de F son llamados *elementos designados de* $\mathcal{A}$. Para una clase de matrices $\mathcal{M}$ definimos la relación $\models_{\mathcal{M}}$ entre un conjunto de fórmulas y una fórmula de la manera siguiente:

$\Gamma \models_{\mathcal{K}} \varphi$ si y sólo si para toda $\mathcal{A} \in \mathcal{M}$ y para toda interpretación $\bar{a}$ de las variables de $\Gamma \cup \{\varphi\}$,

$$\psi^{\mathbf{A}}(\bar{a}) \in F\,, \ \text{para todo} \ \psi \in \Gamma \implies \varphi^{\mathbf{A}}(\bar{a}) \in F.$$

Una matriz $\mathcal{A}$ es un *modelo matricial* de $\mathcal{S}$ si

$$\Gamma \vdash_{\mathcal{S}} \varphi \implies \Gamma \models_{\{\mathcal{A}\}} \varphi,$$

en tal caso F se denomina un *$\mathcal{S}$–filtro.*

Observemos que si T es una $\mathcal{S}$–teoría, entonces $\langle \boldsymbol{\mathcal{F}m}_{\mathcal{L}}, T\rangle$ es un modelo matricial de $\mathcal{S}$. Estas matrices se llaman *matrices de Lindenbaum* para $\mathcal{S}$.

Definición 4. *Sea $\mathcal{S} = \langle \mathcal{L}, \vdash_{\mathcal{S}} \rangle$ un sistema deductivo. Una clase de matrices $\mathcal{M}$ es una* semántica matricial *de $\mathcal{S}$ si para todo $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq \mathcal{F}m_{\mathcal{L}}$ se tiene*

$$\Gamma \vdash_{\mathcal{S}} \varphi \quad \textit{si y sólo si} \quad \Gamma \models_{\mathcal{M}} \varphi\,.$$

Por ejemplo, la clase de todas las matrices de Lindenbaum para $\mathcal{S}$ y la clase de todos los modelos matriciales de $\mathcal{S}$ son semánticas matriciales.

3.4 El Operador de Leibniz

Definición 5. ([1], Def. 1.4) *Sean $\mathbf{A}$ una $\mathcal{L}$-álgebra y $F \subseteq A$. Definimos la relación binaria sobre A:*

$$\boldsymbol{\Omega}_{\mathbf{A}} F = \left\{ \begin{array}{rl} \langle a, b\rangle : & \varphi^{\mathbf{A}}(a, \bar{c}) \in F \iff \varphi^{A}(b, \bar{c}) \in F, \textit{ para todo} \\ & \varphi(p, q_1, \ldots, q_n) \in \mathcal{F}m_{\mathcal{L}} \textit{ y todo } \bar{c} \in A^n \end{array} \right\}.$$

La relación $\boldsymbol{\Omega}_{\mathbf{A}}$ se llama la *relación de Leibniz en* $\mathbf{A}$ *sobre* F. El operador sobre las partes de A, que denotaremos $\boldsymbol{\Omega}_{\mathbf{A}}$, es llamado *operador de Leibniz sobre* A. Si $\mathbf{A}$ es el álgebra de fórmulas $\boldsymbol{\mathcal{F}m}_{\mathcal{L}}$, el operador de Leibniz se denota simplemente $\boldsymbol{\Omega}$.

De la definición anterior se desprende inmediatamente que $\boldsymbol{\Omega}_{\mathbf{A}}$ es una congruencia sobre $\mathbf{A}$. Intuitivamente, nos dice que $\boldsymbol{\Omega}_{\mathbf{A}}$ identifica todos aquellos elementos de A que el álgebra $\mathbf{A}$ no puede distiguir relativamente a un conjunto F. Evidentemente esta definición es inmanejable desde el punto de vista práctico: difícilmente podremos calcular $\boldsymbol{\Omega}_{\mathbf{A}}$ en un caso particular a partir de ella. Un par de teoremas nos ayudarán en esto.

Una congruencia Θ de $\mathbf{A}$ se dice *compatible* con el subconjunto F de A, si para todo $a, b \in A$, si $a \in F$ y $\langle a\,,\, b\rangle \in \Theta$ entonces $b \in F$.

Teorema 4. ([1], Teo. 1.5) *Para toda álgebra $\mathbf{A}$ y cualquier $F \subseteq A$, $\boldsymbol{\Omega}_{\mathbf{A}} F$ es la mayor congruencia compatible con F.*

Teorema 5. ([1], Teo. 1.6) *Sea* $\mathbf{A}$ *un álgebra y* $F \subseteq A$. *Sea* Θ *una relación binaria sobre* A *que es elementalmente definible sobre la matriz* $\langle \mathbf{A}, F \rangle$ *con parámetros y sin igualdad:*

(i) Si Θ *es reflexiva, entonces* $\mathbf{\Omega_A} F \subseteq \Theta$.

(ii) Si además Θ *es una congruencia compatible con* F, *entonces* $\mathbf{\Omega_A} F = \Theta$.

3.5 Los Retículos de Teorías de $\mathcal{S}$ y de $\mathcal{K}$

La esencia de la teoría de algebrización desarrollada por Blok y Pigozzi, está en el siguiente teorema. Daremos su demostración porque ilustra cómo las ecuaciones de definición y las fórmulas de equivalencia aparecen más o menos naturalmente.

Teorema 6. ([1], Teo. 3.7) *Sea* $\mathcal{S}$ *un sistema deductivo y* $\mathcal{K}$ *una cuasivariedad. Entonces* $\mathcal{K}$ *es la semántica algebraica equivalente de* $\mathcal{S}$ *si y solamente si existe un isomorfismo entre* $\mathbf{Th}\mathcal{S}$ *y* $\mathbf{Th}\mathcal{K}$ *que conmuta con sustituciones.*

Idea de la demostración.

Supongamos que $\mathcal{K}$ es la semántica algebraica equivalente de $\mathcal{S}$. Entonces

$$\begin{aligned} \Omega_{\mathcal{K}} \; : \quad \mathbf{Th}\mathcal{S} &\longrightarrow \mathbf{Th}\mathcal{K} \\ T &\longmapsto \mathcal{C}n_{\mathcal{K}}\{\delta(\varphi) \approx \varepsilon(\varphi) \, : \, \varphi \in T\} \end{aligned}$$

preserva el orden y las uniones dirigidas. De ahí es fácil demostrar que $\Omega_{\mathcal{K}}$ es un isomorfismo de retículos que conmuta con sustituciones.

Por otro lado, supongamos que $h : \mathbf{Th}\mathcal{S} \longrightarrow \mathbf{Th}\mathcal{K}$ es un isomorfismo que conmuta con sustituciones.

Consideramos la $\mathcal{S}$–teoría $T = \mathcal{C}n_{\mathcal{S}}\{p\}$. Como T es compacta, su imagen $\theta = h(T)$ también lo es y por lo tanto, es finitamente generada, (ver Lema 5). O sea,

$$\theta = \mathcal{C}n_{\mathcal{K}}\{\kappa_i(p, r_1, \ldots, r_k) \approx \tau_i(p, r_1, \ldots, r_k) \, : \, i < n\}.$$

Sea s una sustitución tal que

$$\begin{array}{rcll} s(p) & \approx & p & \\ s(r_j) & \approx & p\,, & \qquad \text{para} \;\; j \leq k\,. \end{array}$$

Usando el hecho de que h conmuta con sustituciones, se demuestra que

$$s(T) = \mathcal{C}n_{\mathcal{S}}\{s(p)\} = T\,,$$

luego (con un abuso de notación),

$$\begin{array}{rcl} \theta = h(T) = h(s(T)) & = & s(h(T)) \\ & = & s(\mathcal{C}n_{\mathcal{K}}\{\kappa_i(p, r_1, \ldots, r_k) \approx \tau_i(p, r_1, \ldots, r_k) \,:\, i < n\} \\ & = & \mathcal{C}n_{\mathcal{K}}\{\kappa_i(p, p, \ldots, p) \approx \tau_i(p, p, \ldots, p) \,:\, i < n\}\,. \end{array}$$

Hagamos $\delta_i(p) = \kappa_i(p, p, \ldots, p)$ y $\varepsilon_i(p) = \tau_i(p, p, \ldots, p)$, para $i \leq n$. Entonces

$$\begin{array}{rll} \Gamma \vdash_{\mathcal{S}} \varphi & ssi & \mathcal{C}n_{\mathcal{S}}\{\varphi\} \subseteq \mathcal{C}n_{\mathcal{S}}T \\ & ssi & h(\mathcal{C}n_{\mathcal{S}}\{\varphi\}) \subseteq h(\mathcal{C}n_{\mathcal{S}}T) \\ & ssi & \mathcal{C}n_{\mathcal{K}}\{\delta(\varphi) \approx \varepsilon(\varphi)\} \subseteq \mathcal{C}n_{\mathcal{K}}\{\delta(\gamma) \approx \varepsilon(\gamma) \,:\, \gamma \in \Gamma\} \\ & ssi & \{\delta(\gamma) \approx \varepsilon(\gamma) \,:\, \gamma \in \Gamma\} \models_{\mathcal{K}} \delta(\varphi) \approx \varepsilon(\varphi)\,. \end{array}$$

Similarmente, $\theta = \mathcal{C}n_{\mathcal{K}}\{p \approx q\}$ es una $\mathcal{K}$–teoría compacta, luego $h^{-1}(\theta)$ también lo es y por lo tanto, es generada por un conjunto finito de fórmulas $\{\varphi_j(p, q, r_1, \ldots, r_k)\} \,:\, j < m$.

Haciendo $\Delta(p, q) = \varphi(p, q, p, \ldots, p)$, se cumple

$$p \approx q \;\;=\!\!|\!\models_{\mathcal{K}}\;\; \delta(p \Delta q) \approx \varepsilon(p \Delta q)\,,$$

completando la demostración del teorema. □

El isomorfismo $\Omega_{\mathcal{K}}T$ del teorema puede encontrarse de la siguiente manera.

Lema 10. ([1], Lema 3.8) *Sea $\mathcal{S}$ algebrizable y $\mathcal{K}$ su semántica algebraica equivalente. Sea Δ el sistema de equivalencias para $\mathcal{K}$. Entonces para $T \in Th\mathcal{S}$,*

$$\Omega_{\mathcal{K}}T = \{\varphi \approx \psi : \varphi \,\Delta\, \psi \in T\}.$$

3.6 Criterios de Algebrizabilidad

Hay dos importantes caracterizaciones para los sistemas algebrizables.

3.6.1 Algebrizabilidad y el Operador de Leibniz

Lema 11. ([1], Teo. 4.1) *Sea $\mathcal{S}$ algebrizable y $\mathcal{K}$ su semántica algebraica equivalente $\mathcal{K}$. Entonces para cada $T \in Th\mathcal{S}$*

$$\mathbf{\Omega}T = \{\langle\varphi, \psi\rangle : \varphi \approx \psi \in \Omega_{\mathcal{K}}T\} = \{\langle\varphi, \psi\rangle : \varphi\Delta\psi \in T\}.$$

Teorema 7. ([1], Teo. 4.2) *Un sistema deductivo $\mathcal{S}$ es algebrizable si y sólo si el operador de Leibniz sobre $\mathcal{F}m_{\mathcal{L}}$ cumple las condiciones:*

(i) $\mathbf{\Omega}$ *es inyectivo y preserva el orden de* $\mathbf{Th}\mathcal{S}$.

(ii) $\mathbf{\Omega}$ *preserva uniones de subconjuntos dirigidos en* $\mathbf{Th}\mathcal{S}$.

Idea de la demostración.

Se define

$$\mathcal{K} = \{\boldsymbol{\mathcal{F}m}_{\mathcal{L}}/\theta \ : \ \theta \in \mathbf{\Omega}Th\mathcal{S}\}$$

y se demuestra que $\mathbf{\Omega}$ es un isomorfismo entre $\mathbf{Th}\mathcal{S}$ y $\mathbf{Th}\mathcal{K}$. Aplicamos entonces el teorema 6. □

3.6.2 Algebrizabilidad y Términos

Teorema 8. ([1], Teo. 4.7) *Un sistema deductivo $\mathcal{S}$ es algebrizable si y sólo si existen un sistema de fórmulas de equivalencia Δ y un sistema de ecuaciones de definición $\delta \approx \varepsilon$ que satisfacen las condiciones siguientes para $\varphi\,, \psi\,, \theta \in \mathcal{F}m_{\mathcal{L}}$.*

(i) $\vdash_{\mathcal{S}} \ \varphi\,\Delta\,\varphi\,,$

(ii) $\{\varphi\,\Delta\,\psi\} \vdash_{\mathcal{S}} \ \psi\,\Delta\,\varphi\,,$

(iii) $\{\varphi\,\Delta\,\psi\,, \psi\,\Delta\,\theta\} \vdash_{\mathcal{S}} \ \varphi\,\Delta\,\theta\,,$

(iv) Para todo conectivo n–ario ω de $\mathcal{L}$,
$\{\varphi_1\,\Delta\,\psi_1, \ldots, \varphi_n\,\Delta\,\psi_n\} \vdash_{\mathcal{S}} \ \omega(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)\,\Delta\,\omega(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n)\,,$

(v) $\theta \dashv\vdash_{\mathcal{S}} \delta(\theta) \,\Delta\, \varepsilon(\theta)$.

Idea de la demostración.

Se define
$$\Omega_{\Delta} T = \{\varphi \approx \psi : \varphi \,\Delta\, \psi \in T\}$$
y se demuestra que Ω_{Δ} es inyectivo y preserva uniones dirigidas. Por último se demuestra que $\Omega_{\Delta} = \mathbf{\Omega}$ y se aplica el teorema 7. □

Corolario 1. ([1], Cor. 4.8) *Una condición suficiente para que un sistema deductivo $\mathcal{S}$ sea algebrizable es que exista un sistema Δ de fórmulas de equivalencia que satisfaga las condiciones (i)-(iv) del teorema anterior y adicionalmente las condiciones.*

(vi) $\{\varphi \,, \varphi \,\Delta\, \psi\} \vdash_{\mathcal{S}} \psi$, *(conocida como regla de corte).*

(vii) $\{\varphi \,, \psi\} \vdash_{\mathcal{S}} \varphi \,\Delta\, \psi$, *(conocida como regla G, por Gödel).*

En este caso la ecuación de definición es $p \approx p \,\Delta\, p$.

3.7 Algebrizabilidad y Matrices

Existe una conexión estrecha entra las semánticas algebraicas y las semánticas matriciales de un sistema deductivo algebrizable.

El siguiente teorema es muy útil, especialmente para verificar que un sistema no es algebrizable. Dada una cuasivariedad $\mathcal{K}$ y una $\mathcal{L}$–álgebra $\mathbf{A}$, diremos que una congruencia Θ de $\mathbf{A}$ es una *$\mathcal{K}$–congruencia* si el cuociente $\mathbf{A}/\Theta \in \mathcal{K}$.

Teorema 9. ([1], Cor. 5.1) *Sea $\mathcal{S}$ algebrizable y $\mathcal{K}$ una cuasivariedad. Entonces $\mathcal{S}$ es algebrizable con semántica algebraica equivalente $\mathcal{K}$ si y sólo si para toda $\mathcal{L}$–álgebra $\mathbf{A}$, el operador de Leibniz $\mathbf{\Omega_A}$ es un isomorfismo entre los retículos de $\mathcal{S}$–filtros y de $\mathcal{K}$–congruencias de $\mathbf{A}$.*

Lema 12. ([1], Lema 5.2) *Sea $\mathcal{S}$ algebrizable y sea Δ un sistema de fórmulas de equivalencia. Entonces para toda $\mathcal{L}$–álgebra $\mathbf{A}$ y todo $\mathcal{S}$–filtro $F \subseteq A$*
$$\mathbf{\Omega_A} F = \{\langle \varphi, \psi \rangle : \varphi \,\Delta^{\mathbf{A}}\, \psi \in F\}.$$

Una matriz $\langle \mathbf{A}, F \rangle$ se dice *reducida* si $\mathbf{\Omega_A} F = I_{\mathbf{A}}$, la identidad sobre A. La matriz cuociente $\langle \mathbf{A}/\mathbf{\Omega_A} F, F/\mathbf{\Omega_A} F \rangle$ es una matriz reducida.

Teorema 10. ([1], Cor. 5.3) *Sean $\mathcal{S}$ algebrizable, $\mathcal{K}$ la cuasivariedad que es su semántica algebraica equivalente y $\mathcal{M}^*$ la clase de todas las $\mathcal{S}$–matrices reducidas. Entonces $\mathcal{K}$ es la clase de los reductos algebraicos de $\mathcal{M}$, es decir,*

$$\mathcal{K} = \{\mathbf{A} : \langle \mathbf{A}, F \rangle \in \mathcal{M}^*, \quad \textit{para algún } \mathcal{S}\textit{–filtro } F\}.$$

4 Ejemplos

4.1 Sistemas implicativos estándar

Como dijimos en la introducción, H. Rasiowa y R. Sikorski llevaron el método de Lindenbaum–Tarski a su mayor generalidad. Su teoría se aplica a los cálculos implicativos estándar (SIC), es decir, (i) el lenguaje $\mathcal{L}$ tiene un número finito de conectivos de rango 0, 1 y 2, pero no superiores. (ii) $\mathcal{L}$ contiene un conectivo binario que verifica

SIC1 $\quad \vdash A \to A$,

SIC2 $\quad A, A \to B \vdash B$,

SIC3 $\quad A \to B\,, B \to C \vdash A \to C$,

SIC4 $\quad A \vdash B \to A$,

SIC5 $\quad A \to B\,, B \to A \vdash A^\sharp \to B^\sharp$,
para toda operación unaria $^\sharp$.

SIC5 $\quad A \to B\,, B \to A,\ C \to D\,, D \to C \vdash (A * C) \to (B * D)$,
para toda operación binaria $*$.

Los cálculos proposicionales clásico, intuicionista, las lógicas modales normales, las lógicas multivaluadas y gran parte de sus fragmentos son sistemas implicativos estándar y pueden algebrizarse con una ecuación $A \approx A \to A$ y fórmulas de equivalencia $\Delta = \{A \to B\,, B \to A\}$.

4.2 El sistema modal $S5^G$ (Gödel)

4.2.1 El sistema

Axiomas

$S5^G1$ $\quad$ Todas las tautologías,

$S5^G2$ $\quad \Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$,

$S5^G3$ $\quad \Box A \to A$,

$S5^G4$ $\quad\quad \Diamond A \to \Box\Diamond A.$

Reglas de Inferencia

MP $\quad\quad A,\, A \to B \;\vdash\; B,$

G $\quad\quad A \;\vdash\; \Box A.$

4.2.2 $S5^G$ es algebrizable

El sistema $S5^G$ es SIC luego algebrizable.

4.3 El sistema modal $S5^C$ (Carnap)

4.3.1 El sistema

Axiomas

$S5^C1$ $\quad\quad \Box A$, para toda tautología A,

$S5^C2$ $\quad\quad \Box(\,\Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)\,),$

$S5^C3$ $\quad\quad \Box(\,\Box A \to A\,),$

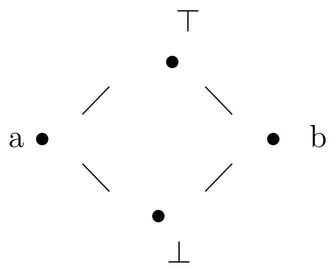
$S5^C4$ $\quad\quad \Box(\,\Diamond A \to \Box\Diamond A\,).$

Reglas de Inferencia

MP $\quad\quad A,\, A \to B \;\vdash\; B.$

4.3.2 $S5^C$ no es algebrizable

Considérese el álgebra $\langle\{\bot, a, b, \top\}, \to, \neg, \Box, \bot, \top\rangle$, donde $\langle\{\bot, a, b, \top\}, \to, \neg, \bot, \top\rangle$ es al álgebra de Boole del próximo diagrama y $\Box$ se define en la tabla siguiente.



	$\Box x$
$\top$	$\top$
a	$\bot$
b	$\bot$
$\bot$	$\bot$

Entonces $F_1 = \{a, \top\}$ y $F_2 = \{b, \top\}$ son filtros ya que todos los axiomas toman valor $\top$ y ambos conjuntos son cerrados bajo la regla de inferencia. Como $\mathbf{A}$ es simple, no hay congruencias más que las triviales y $\mathbf{\Omega_A}(F_1) = \mathbf{\Omega_A}(F_2) = Id$, luego $\mathbf{\Omega_A}$ no es inyectiva.

4.4 El sistema P^1 de Sette

4.4.1 El sistema

Axiomas

$P^1 1$	$A \to (B \to A)$,
$P^1 2$	$(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$,
$P^1 3$	$(\sim A \to \sim B) \to ((\sim A \to \sim\sim B) \to A)$,
$P^1 4$	$\sim (A \to \sim\sim A) \to A$,
$P^1 5$	$(A \to B) \to \sim\sim (A \to B)$.

Regla de Inferencia Modus Ponens

4.4.2 P^1 es algebrizable

Las ecuaciones de definición son

$$\begin{aligned} \delta(A) &= (A \to A) \to A, \\ \varepsilon(A) &= A \to A. \end{aligned}$$

y las fórmulas de equivalencia son

$$\begin{aligned}
\Delta_1(A,B) &= A \to B,\\
\Delta_2(A,B) &= B \to A,\\
\Delta_3(A,B) &= \sim A \to \sim B,\\
\Delta_4(A,B) &= \sim B \to \sim A.
\end{aligned}$$

4.4.3 Sette Algebras (P^1 Algebras)

Las álgebras de Sette (introducidas como P^1–álgebras en Lewin et. al. (3.) y en Pynko (4.)) son estructuras

$$\mathbf{A} = \langle A; \to, ', \mathbf{1} \rangle$$

que verifican los axiomas siguientes.

A1.- $x \to (y \to x) = \mathbf{1}$,

A2.- $(x \to (y \to z)) \to ((x \to y) \to (x \to z)) = \mathbf{1}$,

A3.- $(x' \to y') \to ((x' \to y'') \to x) = \mathbf{1}$,

A4.- $(x \to x'')' \to x = \mathbf{1}$,

A5.- $(x \to y) \to (x \to y)'' = \mathbf{1}$,

y las cuasi–identidades:

Q1.- $x \to y = \mathbf{1}$ and $(x \to x) \to x = \mathbf{1} \quad \Longrightarrow \quad (y \to y) \to y = \mathbf{1}$.

Q2.- $x \to y = \mathbf{1}$, $\quad y \to x = \mathbf{1}$, $\quad x' \to y' = \mathbf{1}$ and $y' \to x' = \mathbf{1} \Longrightarrow x = y$.

La semántica algebraica equivalente es una cuasi–variedad propia generada por el álgebra

$$\mathbf{A} = \langle \{0, a, 1\}; \to, \ ', 1 \rangle \qquad ,$$

donde $\langle \{0,1\}; \to, ' \rangle$ es el álgebra de Boole de dos elementos y las operaciones $\to$ y $'$ están definidas por:

$\to$	0	a	1
0	1	1	1
a	0	1	1
1	0	1	1

	$'$
0	1
a	1
1	0

4.4.4 Referencias para lógica y álgebras de Sette

1. Sette, A. M., *On the propositional calculus* P^1, Mathematica Japonica, **16** (1973), 173–188.

2. Lewin, R. Mikenberg, I. and Schwarze, M.G. *Algebraization of Paraconsistent Logic P1*, Journal of Non Classical Logic **7** 1-2 (1990), 79–88.

3. Lewin, R.A., Mikenberg, I.F. and Schwarze, M.G. *P1 algebras*, Studia Logica **53** 1 (1994),21–28.

4. Pynko, A. P., *Algebraic Study of Sette's maximal paraconsistent logic*, Studia Logica **54** (1995), 89–128.

4.5 Una extensión algebrizable de P^1 cuya semántica algebraica no es una extensión de las álgebras de Sette

Consideremos el sistema $P^{1\neg}$ obtenido al extender la lógica de Sette con un operador unario $\neg$ y los axiomas:

$P^1\neg_1$ $\quad (\neg A \to \neg B) \to (B \to A)$.

$P^1\neg_2$ $\quad \neg A \to \sim\sim \neg A$.

Es inmediato que a través de las mismas ecuaciones de definición y fórmulas de equivalencia este sistema es algebrizable.

Los axiomas $P^1 1$, $P^1 2$, $P^1\neg_1$ garantizan que los $\{\to, \neg\}$–reductos de las álgebras pertenecientes a la semántica equivalente a $P^{1\neg}$, son álgebras de Boole. Es claro que el álgebra de Sette $\mathbf{A}$ definida en la sección anterior no es reducto de ningún álgebra de la semántica de $P^{1\neg}$.

4.6 Dos lógicas con la misma semántica algebraica equivalente

$$\mathbf{A} = \langle \{0, \frac{1}{2}, 1\}; \rightarrowtail, \sim \rangle$$

$\rightarrowtail$	0	$\frac{1}{2}$	1
0	1	1	1
$\frac{1}{2}$	0	1	1
1	0	1	1

	$\sim$
0	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
1	0

$$\mathbf{Ł}_3 = \langle \mathbf{A}, \{1\} \rangle \qquad \text{and} \qquad \mathbf{J}_3 = \langle \mathbf{A}, \{\frac{1}{2}, 1\} \rangle$$

Estas matrices dan origen a dos lógicas diferentes con la misma semántica algebraica equivalente.

Ecuación de definición y formulas de equivalencia para $\mathbf{Ł}_3$:

$$p \approx \top$$
$$\Delta(p, q) = \{p \rightarrowtail q, q \rightarrowtail p\}$$

Ecuación de definición y formulas de equivalencia para $\mathbf{J}_3$:

$$(\sim p \rightarrowtail p) \rightarrowtail p \approx \top$$
$$\Delta(p, q) = \{p \rightarrowtail q, q \rightarrowtail p, \sim p \rightarrowtail \sim q, \sim q \rightarrowtail \sim p\}$$

4.7 El Sistema C_1 de da Costa

Axiomas

$C_1 1$ $\quad A \to (B \to A)$,

$C_1 2$ $\quad (A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$,

$C_1 3$ $\quad (A \wedge B) \to A$ and $(A \wedge B) \to B$,

$C_1 4$ $\quad (A \to B) \to ((A \to C) \to (A \to (B \wedge C)))$,

$C_1 5$ $\quad A \to (A \vee B)$ and $B \to (A \vee B)$,

$C_1 6$ $\quad (A \to C) \to ((B \to C) \to ((A \vee B) \to C))$,

$C_1 7$ $\quad A \vee \neg A$,

$C_1 8 \qquad \neg\neg A \to A,$

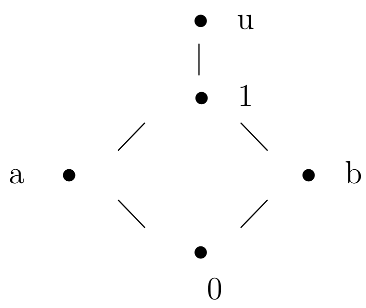
$C_1 9 \qquad B^\circ \to ((A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)),$

$C_1 10 \qquad (A^\circ \wedge B^\circ) \to ((A \wedge B)^\circ \wedge (A \vee B)^\circ \wedge (A \to B)^\circ)$
donde $A^\circ := \neg(A \wedge \neg A)$.

Regla de Inferencia Modus Ponens.

4.7.1 C_1 no es algebrizable

Considere la matriz $\langle \mathbf{A}, \{1, u\} \rangle$ definida por el retículo:



con las operaciones siguientes:

$\to$	u	1	a	b	0	$\neg x$	$\neg\neg x$	$x^\circ = \neg(x \wedge \neg x)$
u	u	u	a	b	0	1	0	0
1	u	1	a	b	0	0	1	1
a	u	1	1	b	b	b	a	1
b	u	1	a	1	a	a	b	1
0	u	1	1	1	1	1	0	1

La mayor congruencia compatible con los filtros

$$F_1 = \{a, 1, u\} \quad \text{and} \quad F_2 = \{b, 1, u\}$$

es la identidad, esto es, $\mathbf{\Omega_A}$ no es inyectiva.

4.7.2 Referencias para lógica de da Costa

1. da Costa, N. C. A., *On the Theory of Inconsistent Formal Systems*, Notre Dame Journal of Formal Logic **15** (1974), 497–510.

2. Mortensen, C., *Every Quotient Algebra for C1 is trivial*, Notre Dame Journal of Formal Logic **21** (1980), 694–700.

3. Lewin, R. Mikenberg, I. and Schwarze, M.G. *C1 is not algebraizable*, Notre Dame Journal of Formal Logic **32**, (1991), 609–611.

4.8 Lógicas Anotadas (Versión estructural de R.L. et.al.)

Subrahmanian, et al.Annotated Logics

Axiomas

- Axiomas de la Lógica Implicativa Positiva.

- Axiomas para la negación:

$\neg_1)$ $(A^\circ \wedge B^\circ) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A))$,

$\neg_2)$ $A^\circ \rightarrow (A \rightarrow (\neg A \rightarrow B))$,

$\neg_3)$ $A^\circ \rightarrow (A \vee \neg A)$.

$\neg_4)$ $\neg^{T+P} A \leftrightarrow \neg^T A$,

donde T y P son parámetros enteros determinados por el retículo $\mathcal{T}$.

- Axiomas para $^\circ$:

$\circ_1)$ $A^\circ \leftrightarrow (\neg A)^\circ$,

$\circ_2)$ $A^\circ \leftrightarrow (f_\lambda A)^\circ$,

$\circ_3)$ $(A^\circ)^\circ$ $\quad$ $(A \vee B)^\circ$
$(A \wedge B)^\circ$ $\quad$ $(A \rightarrow B)^\circ$.

- Axiomas para las anotaciones:

$\tau_1)$ $\neg(A^\circ) \rightarrow f_\perp A$,

$\tau_2)$ $\neg(A^\circ) \to (\neg^k f_\lambda A \leftrightarrow \neg^{k-1} f_{\sim\lambda} A)$, for $k \geq 1$,

$\tau_3)$ $(f_\mu A \to f_\lambda A)$, for $\mu \geq \lambda$,

$\tau_4)$ $f_\mu f_\lambda A \leftrightarrow f_\mu A$,

$\tau_5)$ $\neg(A^\circ) \to (f_\lambda A \leftrightarrow f_\lambda \neg A)$,

$\tau_6)$ $A^\circ \to (f_\lambda A \leftrightarrow A)$.

The last two axioms require some definitions.

$$S_\kappa(A) = f_\kappa A \wedge \bigwedge_{\lambda \not\leq \kappa} \neg(f_\lambda A \wedge f_\lambda A),$$

$$S_\top(A) = A^\circ \wedge f_\top A$$

and

$$T_{(\lambda,\kappa)}(A) = \bigwedge_{\substack{m<P+T \\ \sim^m \lambda \leq \kappa}} \neg^m A \wedge \bigwedge_{\substack{m<P+T \\ \sim^m \lambda \not\leq \kappa}} \neg(\neg^m A \wedge \neg^m A).$$

$\tau_7)$

$$\neg(A^\circ) \to \bigvee_{\kappa \in \tau} S_\kappa(A),$$

$\tau_8)$

$$S_\kappa(A) \to \bigvee_{\lambda \in \tau} T_{(\lambda,\kappa)}(A).$$

Reglas de Inferencia

MP $\quad A,\ A \to B \ \vdash\ B$,

R2

$$A \to f_\lambda B\ ,\ A \to f_\mu B \ \vdash\ A \to f_{\lambda \vee \mu} B.$$

4.8.1 Algebraization of $\mathcal{SAL}_\tau$

Ecuaciones de definición:

$$\begin{aligned}\delta(A) &= A \wedge A,\\ \varepsilon(A) &= A \rightarrow A.\end{aligned}$$

Fórmulas de equivalencia:

a)
$$\Delta_\circ(A,B) = A^\circ \leftrightarrow B^\circ.$$

b)
$$\begin{aligned}\Delta_0(A,B) &= A \leftrightarrow B,\\ &\vdots\\ \Delta_k(A,B) &= \neg^k A \leftrightarrow \neg^k B,\\ &\vdots\end{aligned}$$

c)
$$\Delta_\lambda(A,B) = f_\lambda A \leftrightarrow f_\lambda B,$$

para cada $\lambda \in \mathcal{T}$.

$\Delta = \{\Delta_j : j \in \{\circ\} \cup \omega \cup \tau\}$.

Si $\mathcal{T}$ es infinita, sea $\Lambda = \{\lambda_i : i < \kappa\} \subseteq \mathcal{T}$ un conjunto de generadores de $\mathcal{T}$ de cardinalidad mínima. Para $\gamma < \kappa$, definimos

$$T_\gamma = Cn\{f_{\lambda_i} p \leftrightarrow f_{\lambda_i} q : i < \gamma\} \cup \{\neg(p^\circ), \neg(q^\circ)\},$$

$$T = Cn \bigcup_{\gamma < \kappa} T_\gamma.$$

Es fácil probar que $T \vdash f_\top p \, \Delta f_\top q \quad$ y $\quad T_\gamma \nvdash f_\top p \, \Delta f_\top q$, para todo $\gamma < \kappa$, luego

$$(f_\top p, f_\top q) \in \mathbf{\Omega} T \quad \text{y} \quad (f_\top p, f_\top q) \notin \bigcup_{\gamma<\kappa} \mathbf{\Omega} T_\gamma.$$

Esto demuestra que $\mathbf{\Omega}$ no preserva conjuntos dirigidos de teorías, y que por lo tanto el sistema no es algebrizable.

Lema 13. *Supongamos que* $\perp \in \Gamma \subseteq \tau$. *Entonces*

$$\{f_\gamma p \leftrightarrow f_\gamma q : \gamma \in \Gamma\} \vdash f_\beta p \leftrightarrow f_\beta q$$

si y sólo si existe $\Lambda \subseteq \Gamma$ *tal que*

$$\beta = \bigvee_{\lambda \in \Lambda} \lambda.$$

Demostración del Teorema

Por definición

$$T \vdash \Delta_\circ(p, q),$$

y por el axioma $\circ_{2S}$,

$$T \vdash \Delta_\circ(f_\top p, f_\top q).$$

Como Λ genera τ, por el lema, para cualquier $\lambda \in \tau$,

$$T \vdash f_\lambda p \leftrightarrow f_\lambda q,$$

por el axioma τ_{4S},

$$T \vdash f_\lambda(f_\top p) \leftrightarrow f_\lambda(f_\top q),$$

o sea,

$$T \vdash \Delta_\lambda(f_\top p, f_\top q).$$

Como

$$\neg((f_\top p)^\circ) \vdash \neg^n(f_\top p) \leftrightarrow f_{\sim^n \top}(f_\top p)$$

y

$$\neg((f_\top q)^\circ) \vdash \neg^n(f_\top q) \leftrightarrow f_{\sim^n \top}(f_\top q),$$

luego

$$T \vdash \Delta_n(f_\top p, f_\top q),$$

para todo $n \geq 0$.

Luego,

$$T \vdash f_\top p \Delta f_\top q,$$

y por lo tanto,

$$(f_\top p, f_\top q) \in \mathbf{\Omega} T.$$

Supongamos que

$$(f_\top p, f_\top q) \in \bigcup_{\gamma<\kappa} \mathbf{\Omega} T_\gamma.$$

Entonces para $\gamma < \kappa$

$$(f_\top p, f_\top q) \in \mathbf{\Omega} T_\gamma.$$

Pero $\{\lambda_i : i < \gamma\}$ tiene cardinalidad menor que κ, luego no genera a τ y

$$T_\gamma \nvdash f_\lambda p \leftrightarrow f_\lambda q$$

para algún $\lambda \in \tau$. Pero entonces

$$T_\gamma \nvdash f_\lambda(f_\top p) \leftrightarrow f_\lambda(f_\top q),$$

y

$$T_\gamma \nvdash f_\top p \Delta f_\top q,$$

lo que es una contradicción.

Esto prueba que $\mathbf{\Omega}$ no preserva conjuntos dirigidos de teorías, luego si $\mathcal{T}$ es infinita, el sistema no es algebrizable.

4.8.2 Referencias para lógicas anotadas

1. da Costa, N. C. A., Subrahmanian, V. S. and Vago, C., *The Paraconsistent Logics $P\tau$*, Zeitschrift fur Math. Logic **37** (1991), 139–148.

2. Lewin, R. Mikenberg, I. and Schwarze, M.G. *On the algebraization of annotated logics*, Studia Logica, **59**, 3 (1997), 359–386.

3. Lewin, R. Mikenberg, I. and Schwarze, M.G. *Matrix Semantics for Annotated Logics.* In Models, Algebras, and Proofs. (Caicedo, X. and Montenegro, C., Eds.), Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics **203**, Proceedings of the X SLALM, Bogotá, (1999), 279–293.

4. Lewin, R. Mikenberg, I. and Schwarze, M.G. *On Free Annotated Algebras*, Annals of Pure and Applied Logic **108**(2001),249–260.

5. Lewin, R. Mikenberg, I. and Schwarze, M.G. *Algebras and Matrices for Annotated Logics* , Studia Logica **65** (2000), 137–153.

Bibliografía

[1] Blok, W. J. and Pigozzi, D., *Algebraizable Logics*, Memoirs of the A.M.S., **77** Nr. 396 (1989).

[2] Blok, W. J. and Pigozzi, D., *Algebraic Semantics for Universal Horn Logic without Equality*, in A. Romanowska, J. D. H. Smith (eds.) Universal Algebra and Quasigroup Theory, Heldermann, Berlin, (1992), 1–56.

[3] Blok, W. J. and Pigozzi, D., *Protoalgebraic Logics*, Studia Logica **45** (1986), 337–369.

[4] Burris, S., and Sankappanavar, H. P., *A Course in Universal Algebra*, Springer–Verlag, New York, 1981.

[5] Caicedo, X., *Elementos de Lógica y Calculabilidad*, Una Empresa Docente, Bogotá, (1990).

[6] Czelakowski, J., *Consequence Operations. Foundational Studies*, Reports of the Research Project: Theories, Models, Cognitive Schemata, Institute of Philosophy and Sociology, Polish Academy of Sciences, Warszawa, 1992.

[7] Czelakowski, J. *Equivalential logics I, II*, Studia Logica **40** (1981), 227–236 and 335–372.

[8] Czelakowski, J. *Reduced Products of Logical Matrices*, Studia Logica **39** (1980), 19–43.

[9] Czelakowski, J. *Protoalgebraic Logics*, Kluwer Academic Pub. 2001.

[10] Czelakowski, J., *Protoalgebraic Logics*, Kluwer Academic Publishers (2001).

[11] Epstein, R. L., *Five Ways of Saying "Therefore"*, Wadsworth Group, (2002).

[12] Font, J. and Jansana, R., *A General Algebraic Semantics for Deductive Systems*, Lecture Notes in Logic **7**, Springer Verlag, (1996).

[13] Halmos, P., *Algebraic Logic*, Chelsea Pub. Co. (1962).

[14] Herrmann, B., *Equivalential and Algebraizable Logics*, Studia Logica **57** (1997), 419–436.

[15] Herrmann, B., *Characterizing Equivalential and Algebraizable Logics and Definability by the Leibniz Operator*, Studia Logica **58** (1997), 305–323.

[16] Hughes, G. E. y Cresswell, M. J., *Introducción a la Lógica Modal*, Editorial Tecnos, Madrid, (1973).

[17] McKenzie, R. N., McNulty, G. F. y Taylor, W. F., *Algebras, Lattices, Varieties*, Wadsworth, (1987).

[18] Mendelson, E., *Introduction to Mathematical Logic*, van Nostrand, (1963).

[19] Rasiowa, R., *An Algebraic Approach to Non–Classical Logics*, North–Holland Pub. Co., Amsterdam, 1974.

[20] Rasiowa, R. and Sikorski, R., *The Mathematics of Metamathematics*, Polska Akademia Nauk, Warsawa, 1963.

[21] Tarski, A., *Logic, Semantics, and Metamathematics, papers from 1923 to 1938*, Hackett Pub. Co., Indianapolis, Indiana, 1983.

[22] Tarski, A., *Grundzüge des Systemenkalküs. Erster Teil.*, Fundamenta Mathematica, **25** (1935), 503–526.

[23] Wojcicki, R., *Theory of Logical Calculi*, Kluwer Academic Publishers, 1988.