

Pseudodifferentialoperatoren

(2+0)-stündige Vorlesung im Wintersemester 2006/2007

JÖRG SEILER

Inhaltsverzeichnis

1	Fouriertransformation und Distributionen	3
2	Symbole und Pseudodifferentialoperatoren	6
3	Oszillator-Integrale	11
4	Doppelsymbole, Algebraeigenschaft und Elliptizität	16
5	Stetigkeit in Sobolevräumen	22
6	Elliptizität und Fredholm-Eigenschaft	26
7	Parameterabhängige ψ do	35
8	Resolventen und H_∞ -Funktionalkalkül	38
9	Wiederholung: Fredholm-Operatoren	44
10	Wiederholung: Unbeschränkte Operatoren	45

1 Fouriertransformation und Distributionen

Definition 1.1 Eine Funktion $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ heißt schnell fallend, falls sie unendlich oft partiell stetig differenzierbar ist und

$$\|u\|_k := \sup \left\{ |x^\alpha \partial_x^\beta u(x)| \mid x \in \mathbb{R}^n, |\alpha| + |\beta| \leq k \right\} < \infty \quad \forall k \in \mathbb{N}_0. \quad (1.1)$$

Den Vektorraum aller solcher Funktionen bezeichnen wir mit $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Mit den (Halb)normen aus (1.1) ist $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ein Frèchetraum.

Definition 1.2 Eine lineare Abbildung $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{C}$ heißt eine temperierte Distribution, falls eine der folgenden äquivalenten Eigenschaften gilt:

- a) T ist stetig.
- b) T ist folgenstetig.
- c) Es gibt eine Konstante $C \geq 0$ und ein $k \in \mathbb{N}_0$, sodass

$$|T(u)| \leq C \|u\|_k \quad \forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Wir schreiben oft $\langle T, u \rangle = T(u)$. Den Vektorraum aller temperierten Distribution bezeichnen wir mit $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Er ist ein lokalkonvexer Raum mit den Halbnormen

$$\|T\|_u = |\langle T, u \rangle| \quad u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n).^1$$

Beispiel 1.3 a) Reguläre Distributionen: Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ meßbar mit $(1+|x|)^{-N} f(x) \in L_1(\mathbb{R}^n)$ und

$$\langle T_f, u \rangle := \int_{\mathbb{R}^n} f(x) u(x) dx \quad \forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Die sogenannte Dichte f von T_f ist durch T_f eindeutig bestimmt.² Die Abbildung

$$f \mapsto T_f : L_p(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \quad (1 \leq p \leq \infty)$$

ist also injektiv; in diesem Sinne gilt $L_p(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

b) δ -Distribution(en): Für festes $y \in \mathbb{R}^n$ ist

$$\langle \delta_y, u \rangle := u(y) \quad \forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

c) Der Cauchysche Hauptwert:³

$$\left\langle \text{p.v.} \frac{1}{x}, u \right\rangle := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{u(x)}{x} dx \quad \forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

¹ $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ ist also der Dualraum von $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ versehen mit der schwach-*-Topologie.

²d.h. $T_f = 0$ impliziert $f = 0$ fast überall

³englisch: principal value

Wegen $\int_{\varepsilon \leq |x| \leq 1} \frac{1}{x} dx = 0$ gilt

$$\left\langle \text{p.v.} \frac{1}{x}, u \right\rangle = \int_{|x| \leq 1} \frac{u(x) - u(0)}{x} dx + \int_{|x| \geq 1} \frac{u(x)}{x} dx.$$

Definition 1.4 Es sei $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Die α -te partielle Ableitung $\partial^\alpha T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ ist definiert durch

$$\langle \partial^\alpha T, u \rangle := (-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial^\alpha u \rangle \quad \forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Ist $a \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ von temperiertem Wachstum, d.h.

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n \quad \exists C \geq 0, N \in \mathbb{N}: \quad |\partial^\alpha a(x)| \leq C(1 + |x|)^N \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

so ist $aT \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ definiert durch

$$\langle aT, u \rangle := \langle T, au \rangle \quad \forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

$T \mapsto \partial^\alpha T$ und $T \mapsto aT$ sind stetige Abbildungen $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Beispiel 1.5 Sei $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ die reguläre Distribution mit Dichte $h(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$.⁴

Dann ist $T' = \delta$, da

$$\langle T', u \rangle = -\langle T, u' \rangle = -\int_{-\infty}^{\infty} h(x)u'(x) dx = -\int_0^{\infty} u'(x) dx = u(0) = \langle \delta, u \rangle.$$

Definition 1.6 (Fouriertransformation) Für $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ definiere⁵

$$\widehat{u}(\xi) = (\mathcal{F}u)(\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} u(x) dx \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Dabei $x\xi = x \cdot \xi := (x, \xi)_{\mathbb{R}^n} = x_1\xi_1 + \dots + x_n\xi_n$.

Satz 1.7 $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ist linear und stetig: Für alle $k \in \mathbb{N}_0$ gibt es ein $C \geq 0$, sodass

$$\|\widehat{u}\|_k \leq C \|u\|_{k+n+1} \quad \forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n). \quad (1.2)$$

Weiterhin gilt

$$\langle \widehat{u}, v \rangle = \langle u, \widehat{v} \rangle \quad \forall u, v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n). \quad (1.3)$$

BEWEIS: Zunächst ist für $m \in \mathbb{N}$

$$(1 + |x|)^m \leq (1 + |x_1| + \dots + |x_n|)^m = \sum_{|\alpha| \leq m} c_{\alpha, m} |x^\alpha|$$

⁴Die Funktion h nennt man oft die Heavyside-Funktion.

⁵die selbe Definition macht auch Sinn für $u \in L_1(\mathbb{R}^n)$

für geeignete $c_{\alpha,m} \in \mathbb{N}$. Daher ist

$$\begin{aligned} |\widehat{u}(\xi)| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |u(x)| dx = \int_{\mathbb{R}^n} (1+|x|)^{-(n+1)} (1+|x|)^{n+1} |u(x)| dx \\ &\leq C \|u\|_{n+1} \int_{\mathbb{R}^n} (1+|x|)^{-(n+1)} dx = C \|u\|_{n+1} \end{aligned}$$

mit einer Konstante $C \geq 0$.⁶ Wegen partieller Integration und $\partial_\xi^\gamma e^{-ix\xi} = (-i)^{|\gamma|} x^\gamma e^{-ix\xi}$ ist

$$\xi^\alpha \partial_\xi^\beta \widehat{u}(\xi) = (-i)^{|\alpha|+|\beta|} \mathcal{F}[\partial_x^\alpha (x^\beta u(x))](\xi) \implies |\xi^\alpha \partial_\xi^\beta \widehat{u}(\xi)| \leq C \|\partial_x^\alpha (x^\beta u(x))\|_{n+1}.$$

Nach Produktregel (Leibniz-Formel) ist

$$\partial_x^\alpha (x^\beta u(x)) = \sum_{\gamma \leq \alpha} \binom{\alpha}{\gamma} (\partial_x^\gamma x^\beta) (\partial_x^{\alpha-\gamma} u(x)).$$

$$\text{Da } \partial_x^\gamma x^\beta = \begin{cases} \frac{\beta!}{(\beta-\gamma)!} x^{\beta-\gamma} & : \gamma \leq \beta \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}, \text{ folgt}$$

$$\|\partial_x^\alpha (x^\beta u(x))\|_{n+1} \leq C_{\alpha,\beta} \|u\|_{|\alpha|+|\beta|+n+1}.$$

Summiert man über alle Multiindizes mit $|\alpha| + |\beta| \leq k$, so folgt (1.2). Schließlich

$$\begin{aligned} \langle \widehat{u}, v \rangle &= \int \widehat{u}(\xi) v(\xi) d\xi = \int \left\{ \int e^{-ix\xi} u(x) dx \right\} v(\xi) d\xi = \int \left\{ \int e^{-ix\xi} v(\xi) d\xi \right\} u(x) dx \\ &= \int \widehat{v}(x) u(x) dx = \langle u, \widehat{v} \rangle \end{aligned}$$

nach Satz von Fubini. ■

Satz 1.8 Für $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ definiere

$$\langle \widehat{T}, u \rangle = \langle T, \widehat{u} \rangle \quad \forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Dann ist $\widehat{\cdot} = \mathcal{F} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ stetig und hat folgende Eigenschaften:

- a) $\partial^\alpha \widehat{T} = i^{|\alpha|} \xi^\alpha \widehat{T}$ und $\partial^\alpha \widehat{T} = (-i)^{|\alpha|} x^\alpha \widehat{T}$ für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$.
- b) Ist $C_0(\mathbb{R}^n) = \{f \in C(\mathbb{R}^n) \mid \lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = 0\}$ mit der Supremum-Norm versehen,⁷ so ist $\mathcal{F} : L_1(\mathbb{R}^n) \rightarrow C_0(\mathbb{R}^n)$ stetig.⁸
- d) Ist $(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y) dy$ die Faltung von $f, g \in L_1(\mathbb{R}^n)$, so ist

$$\mathcal{F}(f * g) = \widehat{f} \widehat{g}.$$

⁶Mit Polarkoordinaten: $\int_{\mathbb{R}^n} (1+|x|)^{-L} dx = \tau_n \int_0^\infty t^{n-1} (1+t)^{-L} dt < \infty$, falls $n-1-L < -1$, d.h. $L > n$.

⁷dann ist $C_0(\mathbb{R}^n)$ ein Banachraum

⁸Lemma von Riemann-Lebesgue

Beispiel 1.9 Fouriertransformation der δ -Distribution:

$$\langle \widehat{\delta}_y, u \rangle = \widehat{u}(y) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ixy} u(x) dx = \langle e^{-iy}, u \rangle.$$

Satz 1.10 Es sei

$$\check{u}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} u(\xi) d\xi, \quad d\xi = \frac{1}{(2\pi)^n} d\xi.$$

Dann ist $\check{u} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ stetig und es gilt

$$\mathcal{F}(\check{u}) = u, \quad (\mathcal{F}u)^\check{ } = u \quad \forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Also ist $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ bijektiv mit Inverse $\mathcal{F}^{-1} = \check{ }$. Durch

$$\langle \check{T}, u \rangle := \langle T, \check{u} \rangle \quad \forall T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \quad \forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

erhält man die Inverse \mathcal{F}^{-1} von $\mathcal{F} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Satz 1.11 (Plancherel) \mathcal{F} schränkt sich ein zu einer bijektiven Abbildung $\mathcal{F} : L_2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^n)$ mit

$$(\widehat{u}, \widehat{v})_{L_2(\mathbb{R}^n)} = (2\pi)^n (u, v)_{L_2(\mathbb{R}^n)} \quad \forall u \in L_2(\mathbb{R}^n).$$

2 Symbole und Pseudodifferentialoperatoren

Notation: Für $y \in \mathbb{R}^m$ schreiben wir

$$\langle y \rangle := \sqrt{1 + |y|^2}.$$

Dies ist eine glatte⁹ Funktion in y und es gilt

$$\langle y \rangle \leq (1 + |y|) \leq \sqrt{2} \langle y \rangle \quad \forall y \in \mathbb{R}^m.$$

Definition 2.1 Es sei $\mu \in \mathbb{R}$. Mit $S^\mu(\mathbb{R}^n)$ bezeichnen wir denjenigen Unterraum von $C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ ¹⁰, dessen Elemente folgende Eigenschaft haben: Für alle $k \in \mathbb{N}_0$ ist

$$\|p\|_k^{(\mu)} := \sup_{\substack{x, \xi \in \mathbb{R}^n, \\ |\alpha| + |\beta| \leq k}} \left| \partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha p(x, \xi) \right| \langle \xi \rangle^{|\alpha| - \mu} < \infty. \quad (2.1)$$

Wir nennen solche p ein (Links-)Symbol der Ordnung μ . Setze

$$S^{-\infty}(\mathbb{R}^n) = \bigcap_{\mu \in \mathbb{R}} S^\mu(\mathbb{R}^n).$$

Beispiel 2.2 Es sei $\mu \in \mathbb{N}_0$ und

$$p(x, \xi) = \sum_{|\alpha| \leq \mu} a_\alpha(x) \xi^\alpha, \quad a_\alpha \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n). \quad (2.2)$$

Dann ist $p \in S^\mu(\mathbb{R}^n)$ ein Linkssymbol der Ordnung μ .

⁹d.h. unendlich oft stetig partiell differenzierbare

¹⁰dies ist der Raum aller glatten Funktionen $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$

Beispiel 2.3 Für $\mu \in \mathbb{R}$ ist $\langle \xi \rangle^\mu \in S^\mu(\mathbb{R}^n)$ ein von x unabhängiges Symbol. Denn per Induktion zeigt man: $\partial_\xi^\alpha \langle \xi \rangle^\mu$ ist eine endliche Linearkombination von Termen der Form $p_k(\xi) \langle \xi \rangle^{\mu-2l}$ mit Polynomen p_k vom Grad $\leq k$ und $2l - k \geq |\alpha|$. Also

$$|\partial_\xi^\alpha \langle \xi \rangle^\mu| \leq C \langle \xi \rangle^{\mu-(2l-k)} \leq C \langle \xi \rangle^{\mu-|\alpha|}.$$

Beispiel 2.4 Es sei $\mu \in \mathbb{R}$ und $p \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ erfülle

$$p(x, t\xi) = t^\mu p(x, \xi) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad \forall |\xi| \geq 1 \quad \forall t \geq 1$$

(man sagt p ist positiv homogen vom Grad μ für große ξ) und

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n, |\xi| \leq 1} |\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta p(x, \xi)| < \infty \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n.$$

Dann ist $p \in S^\mu(\mathbb{R}^n)$ ein Linkssymbol der Ordnung μ .

Lemma 2.5 (Einfache Eigenschaften) *Im folgenden seien $\mu, \tilde{\mu} \in \mathbb{R}$.*

- a) $S^\mu(\mathbb{R}^n)$ ist ein Fréchetraum mit den (Halb-)Normen aus (2.1).
- b) $p \mapsto \partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta p : S^\mu(\mathbb{R}^n) \rightarrow S^{\mu-|\alpha|}(\mathbb{R}^n)$ ist linear und stetig.
- c) $(p, \tilde{p}) \mapsto p\tilde{p} : S^\mu(\mathbb{R}^n) \times S^{\tilde{\mu}}(\mathbb{R}^n) \rightarrow S^{\mu+\tilde{\mu}}(\mathbb{R}^n)$ ist bilinear und stetig.
- d) $S^{\tilde{\mu}}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow S^\mu(\mathbb{R}^n)$,¹¹ falls $\tilde{\mu} \leq \mu$.

Beispiel 2.6 Es sei $p(x, \xi)$ wie in (2.2) und $P : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ der Differentialoperator gegeben durch

$$(Pu)(x) = \sum_{|\alpha| \leq \mu} a_\alpha(x) D_x^\alpha u(x).$$

Wegen Satz 1.8.a) ist

$$\begin{aligned} a_\alpha(x) D_x^\alpha u(x) &= a_\alpha(x) \mathcal{F}^{-1}(\xi^\alpha \widehat{u}(\xi))(x) = a_\alpha(x) \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} \xi^\alpha \widehat{u}(\xi) \, d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} a_\alpha(x) \xi^\alpha \widehat{u}(\xi) \, d\xi. \end{aligned}$$

Also erhält man

$$(Pu)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} p(x, \xi) \widehat{u}(\xi) \, d\xi \quad \forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n). \quad (2.3)$$

Definition 2.7 *Für ein Linkssymbol $p \in S^\mu(\mathbb{R}^n)$ und $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ definiere*

$$[p(x, D)u](x) = [\text{op}(p)u](x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} p(x, \xi) \widehat{u}(\xi) \, d\xi, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

$p(x, D) = \text{op}(p)$ heißt der Pseudodifferentialoperator (kurz: ψdo) mit Symbol $p(x, \xi)$.

¹¹ $X \hookrightarrow Y$ meint hier, dass $X \subseteq Y$ und dass $x \mapsto x : X \rightarrow Y$ stetig ist, also dass die Topologie von X stärker ist als die Spurtopologie von X bzgl. Y .

Beispiel 2.8 Jeder Differentialoperator mit Koeffizienten aus $C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$ ist ein ψ do, vgl. Beispiel 2.6. Insbesondere gilt für den Laplace-Operatoren:

$$\Delta = \partial_{x_1}^2 + \dots + \partial_{x_n}^2 = -D_{x_1}^2 - \dots - D_{x_n}^2 = p(D), \quad p(\xi) = -\xi_1^2 - \dots - \xi_n^2 = -|\xi|^2.$$

Satz 2.9 *Es sei $p \in S^\mu(\mathbb{R}^n)$ ein Linkssymbol. Dann ist*

$$p(x, D) : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

stetig und linear. Genauer: Zu jedem $k \in \mathbb{N}_0$ gibt es ein $C \geq 0$ derart, dass

$$\|p(x, D)u\|_k \leq C \|p\|_k^{(\mu)} \|u\|_{k+2n+2+[\mu]} \quad \forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \quad \forall p \in S^\mu(\mathbb{R}^n),$$

wobei $[\mu]$ die kleinste natürliche Zahl mit $\max(\mu, 0) \leq [\mu]$ bezeichnet.

BEWEIS: Der Einfachheit halber sei $\mu \in \mathbb{N}_0$. Zunächst haben wir für beliebiges $q \in S^\mu(\mathbb{R}^n)$ und $v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, dass

$$\begin{aligned} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |[\text{op}(q)v](x)| &\leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \langle \xi \rangle^{-n-1} |\langle \xi \rangle^{-\mu} q(x, \xi)| |\langle \xi \rangle^{\mu+n+1} \widehat{v}(\xi)| \, d\xi \\ &\leq \|q\|_0^{(\mu)} \|\langle \xi \rangle^{\mu+n+1} \widehat{v}\|_\infty \int_{\mathbb{R}^n} \langle \xi \rangle^{-n-1} \, d\xi \\ &\leq C \|q\|_0^{(\mu)} \|\widehat{v}\|_{\mu+n+1} \stackrel{1.7}{\leq} C \|q\|_0^{(\mu)} \|v\|_{\mu+2n+2}. \end{aligned}$$

Für $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$ und $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ gilt nun

$$x^\alpha \partial_x^\beta [\text{op}(p)u](x) = \sum_{\beta_1 + \beta_2 = \beta} C_{\beta_1, \beta_2} x^\alpha \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} (\partial_x^{\beta_2} p)(x, \xi) \xi^{\beta_1} \widehat{u}(\xi) \, d\xi.$$

Verwendet man nun Satz 1.8.a), dass $x^\alpha e^{ix\xi} = D_\xi^\alpha e^{ix\xi}$ und partielle Integration, so folgt

$$\begin{aligned} x^\alpha \partial_x^\beta [\text{op}(p)u](x) &= \sum_{\substack{\beta_1 + \beta_2 = \beta \\ \alpha_1 + \alpha_2 = \alpha}} C_{\beta_1, \beta_2, \alpha_1, \alpha_2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} (\partial_x^{\beta_2} \partial_\xi^{\alpha_2} p)(x, \xi) \mathcal{F}(x_1^\alpha \partial_x^{\beta_1} u)(\xi) \, d\xi \\ &= \sum_{\substack{\beta_1 + \beta_2 = \beta \\ \alpha_1 + \alpha_2 = \alpha}} C_{\beta_1, \beta_2, \alpha_1, \alpha_2} [\text{op}(\partial_x^{\beta_2} \partial_\xi^{\alpha_2} p)(x_1^\alpha \partial_x^{\beta_1} u)](x). \end{aligned}$$

Anwenden obiger Abschätzung liefert

$$\begin{aligned} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial_x^\beta [\text{op}(p)u](x)| &\leq \sum_{\substack{\beta_1 + \beta_2 = \beta \\ \alpha_1 + \alpha_2 = \alpha}} C_{\beta_1, \beta_2, \alpha_1, \alpha_2} \|\partial_x^{\beta_2} \partial_\xi^{\alpha_2} p\|_0^{(\mu - |\alpha_2|)} \|x_1^\alpha \partial_x^{\beta_1} u\|_{\mu+2n+2} \\ &\leq C_{\alpha, \beta} \|p\|_{|\alpha| + |\beta|}^{(\mu)} \|u\|_{\mu+2n+2+|\alpha|+|\beta|}. \end{aligned}$$

Summation über alle $|\alpha| + |\beta| \leq k$ ergibt die Behauptung. ■

Definition 2.10 Es sei $\mu \in \mathbb{R}$ und $p_j \in S^{\mu_j}(\mathbb{R}^n)$ für $j \in \mathbb{N}_0$, wobei

$$\mu = \mu_0 \geq \mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \xrightarrow{j \rightarrow \infty} -\infty.$$

Wir sagen, dass $p \in S^\mu(\mathbb{R}^n)$ die asymptotische Summe der p_j ist und schreiben $p \sim \sum_{j=0}^{\infty} p_j$, falls

$$p - \sum_{j=0}^{N-1} p_j \in S^{\mu_N}(\mathbb{R}^n) \quad \forall N \in \mathbb{N}.$$

Notation: $\chi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ heißt eine 0-Ausschneidefunktion, falls $\chi(\xi) = \begin{cases} 0 & : |\xi| \leq 1 \\ 1 & : |\xi| \geq 2 \end{cases}$ ¹².

Satz 2.11 Es sei $\mu_0 \in \mathbb{R}$ und $p_j \in S^{\mu_j}(\mathbb{R}^n)$, $j \in \mathbb{N}_0$, mit $\mu_j \searrow -\infty$. Dann gibt es ein $p \in S^{\mu_0}(\mathbb{R}^n)$ derart, dass $p \sim \sum_{j=0}^{\infty} p_j$. Dieses p ist modulo $S^{-\infty}(\mathbb{R}^n)$ eindeutig bestimmt.

BEWEIS: Existenz: Sei χ eine 0-Ausschneidefunktion und $0 < \varepsilon \leq 1$. Dann ist für $|\alpha| \geq 1$

$$|\partial_\xi^\alpha \chi(\varepsilon \xi)| \leq \begin{cases} C_\alpha \varepsilon^{|\alpha|} & : \xi \in \mathbb{R}^n \\ 0 & : |\xi| \leq \varepsilon^{-1} \text{ oder } 2\varepsilon^{-1} \leq |\xi| \end{cases}.$$

Da $\varepsilon \leq 2|\xi|^{-1} \leq 4\langle \xi \rangle^{-1}$ für $\varepsilon^{-1} \leq |\xi| \leq 2\varepsilon^{-1}$,¹³ folgt

$$|\partial_\xi^\alpha \chi(\varepsilon \xi)| \leq C_\alpha \langle \xi \rangle^{-|\alpha|} \quad \forall 0 < \varepsilon \leq 1 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n$$

für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$.¹⁴ Es folgt

$$\left| \partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta [\chi(\varepsilon \xi) p_j(x, \xi)] \right| \leq C_{j,\alpha,\beta} \langle \xi \rangle^{\mu_j - |\alpha|} = (C_{j,\alpha,\beta} \langle \xi \rangle^{-1}) \langle \xi \rangle^{\mu_j + 1 - |\alpha|} \quad (2.4)$$

Jetzt wähle eine Folge $1 \geq \varepsilon_0 > \varepsilon_1 > \dots > \varepsilon_j \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$ mit

$$C_{j,\alpha,\beta} \varepsilon_j \leq 2^{-j} \quad \forall |\alpha| + |\beta| \leq j.$$

Da $\langle \xi \rangle^{-1} \leq |\xi|^{-1}$ und $\chi(\varepsilon_j \xi) = 0$ für alle ξ mit $|\xi|^{-1} \geq \varepsilon_j$,¹⁵ folgt aus (2.4), dass

$$\left| \partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta [\chi(\varepsilon_j \xi) p_j(x, \xi)] \right| \leq 2^{-j} \langle \xi \rangle^{\mu_j + 1 - |\alpha|} \quad \forall (x, \xi) \quad \forall |\alpha| + |\beta| \leq j. \quad (2.5)$$

Jetzt definiere

$$p(x, \xi) = \sum_{j=0}^{\infty} \chi(\varepsilon_j \xi) p_j(x, \xi).$$

¹²Statt 1 bzw. 2 kann man auch beliebige Konstanten $0 < c_1 < c_2$ verwenden.

¹³Für $|\xi| \geq 1$ ist $\langle \xi \rangle^2 = 1 + |\xi|^2 \leq |\xi|^2$, also $|\xi|^{-1} \leq \sqrt{2} \langle \xi \rangle^{-1}$.

¹⁴d.h. $\{\chi(\varepsilon \xi) \mid 0 < \varepsilon \leq 1\}$ ist eine beschränkte Teilmenge in $S^0(\mathbb{R}^n)$.

¹⁵also auch für alle ξ mit $\langle \xi \rangle^{-1} \geq \varepsilon_j^{-1}$

Dies ist eine lokal endliche Summe, insbesondere $p \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. Für beliebig gegebenes $N \in \mathbb{N}$ ist

$$p - \sum_{j=0}^{N-1} p_j = \underbrace{\sum_{j=0}^{N-1} (\chi(\varepsilon_j \xi) - 1) p_j}_{\in S^{-\infty}(\mathbb{R}^n), \text{ da } \equiv 0 \text{ für } |\xi| \geq 2\varepsilon_{N-1}^{-1}} + \underbrace{\sum_{j=N}^{\infty} \chi(\varepsilon_j \xi) p_j}_{=: q_N(x, \xi)}$$

Wir müssen zeigen, dass $q_N \in S^{\mu_N}(\mathbb{R}^n)$ ist. Seien dazu $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$ beliebig vorgegeben. Wähle $j_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$j_0 \geq \max(N, |\alpha| + |\beta|) \text{ und } \mu_{j_0} + 1 \leq \mu_N.$$

Dann ist

$$q_N(x, \xi) = \underbrace{\sum_{j=N}^{j_0-1} \chi(\varepsilon_j \xi) p_j}_{\in S^{\mu_N}(\mathbb{R}^n)} + q_{j_0}(x, \xi).$$

Nach Wahl von j_0 und wegen (2.5) gilt

$$|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta q_{j_0}(x, \xi)| \leq \left(\sum_{j=j_0}^{\infty} 2^{-j} \right) \langle \xi \rangle^{\mu_N - |\alpha|} \leq \langle \xi \rangle^{\mu_N - |\alpha|}.$$

Daher ist

$$|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta q_N(x, \xi)| \leq C_{\alpha, \beta} \langle \xi \rangle^{\mu_N - |\alpha|}.$$

Eindeutigkeit: Seien $p^{(1)}, p^{(2)} \in S^{\mu_0}(\mathbb{R}^n)$ und $p^{(k)} \sim \sum p_j$. Dann ist

$$p^{(1)} - p^{(2)} = \left(p^{(1)} - \sum_{j=0}^{N-1} p_j \right) + \left(p^{(2)} - \sum_{j=0}^{N-1} p_j \right) \in S^{\mu_N}(\mathbb{R}^n).$$

Also $p^{(1)} - p^{(2)} \in \bigcap_{N \in \mathbb{N}} S^{\mu_N}(\mathbb{R}^n) = S^{-\infty}(\mathbb{R}^n)$. ■

Definition 2.12 *Das Symbol $p \in S^\mu(\mathbb{R}^n)$, $\mu \in \mathbb{R}$, heißt ein klassisches oder polyhomogenes Symbol, falls es $p_j \in S^{\mu-j}(\mathbb{R}^n)$, $j \in \mathbb{N}_0$, gibt mit*

$$p_j(x, t\xi) = t^{\mu-j} p_j(x, \xi) \quad \forall x \quad \forall |\xi| \geq 1 \quad \forall t \geq 1$$

und $p \sim \sum_j p_j$. Den Raum aller solcher Symbole nennen wir $S_{\text{cl}}^\mu(\mathbb{R}^n)$

Beispiel 2.13 a) $p(x, \xi) = \sum_{|\alpha| \leq \mu} a_\alpha(x) \xi^\alpha = \sum_{j=0}^{\mu} p_j(x, \xi)$ mit $p_j(x, \xi) = \sum_{|\alpha| = \mu-j} a_\alpha(x) \xi^\alpha$.

b) Es sei $p(\xi) = \langle \xi \rangle^{-2} = \frac{1}{1+|\xi|^2}$. Dann ist $p \in S^{-2}(\mathbb{R}^n)$ und

$$\frac{1}{1+|\xi|^2} - \sum_{j=0}^{N-1} \frac{(-1)^j}{|\xi|^{2(j+1)}} = (-1)^N \frac{1}{|\xi|^{2N}} \frac{1}{1+|\xi|^2} \quad \forall \xi \neq 0.^{16}$$

Sei χ eine 0-Ausschneidefunktion. Nach Beispiel 2.4 ist dann

$$p_j(\xi) = \chi(2\xi) \frac{(-1)^j}{|\xi|^{2(j+1)}} \in S^{-2(1+j)}(\mathbb{R}^n).$$

¹⁶Induktion!

Dann ist $p \sim \sum_{j=0}^{\infty} p_j$, da wegen oben und Lemma 2.5.c)

$$p(\xi) - \sum_{j=0}^{N-1} p_j(\xi) = \frac{\chi(2\xi)}{|\xi|^{2N}} \frac{(-1)^N}{(1+|\xi|^2)} + \underbrace{(1-\chi)(2\xi)p(\xi)}_{\in C_{\text{comp}}^{\infty}(\mathbb{R}^n) \subset S^{-\infty}(\mathbb{R}^n)} \in S^{-2(N+1)}(\mathbb{R}^n).$$

3 Oszillator-Integrale

Bemerkung 3.1 Seien $p_j \in S^{\mu_j}(\mathbb{R}^n)$ und $u, v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Dann

$$[\text{op}(p_j)v](x) = \int \left(\int e^{i(x-x')\xi} p_j(x, \xi) v(x') dx' \right) d\xi.$$

Wir führen jetzt eine formale (und tatsächlich falsche) Rechnung zur Komposition zweier ψ do durch.

$$\begin{aligned} [\text{op}(p_1)(\text{op}(p_2)u)](x) &= \iint e^{i(x-x')\xi'} p_1(x, \xi') \left(\iint e^{i(x'-z)\xi} p_2(x', \xi) u(z) dz d\xi \right) dx' d\xi' \\ &= \iiint e^{i(x-z)\xi} e^{-i(x-x')(\xi-\xi')} p_1(x, \xi') p_2(x', \xi) u(z) dx' d\xi' dz d\xi. \end{aligned}$$

Nach Variablensubstitution $y = x - x'$ und $\eta = \xi - \xi'$ folgt

$$\begin{aligned} &= \iint e^{i(x-z)\xi} \underbrace{\left(\iint e^{-iy\eta} p_1(x, \xi + \eta) p_2(x + y, \xi) dy d\eta \right)}_{=: p(x, \xi)} u(z) dz d\xi \\ &= [\text{op}(p)u](x) \end{aligned}$$

Problem: Der Integrand in der Definition von p ist im allgemeinen nicht integrierbar.

Lösung: Verallgemeinerter Integralbegriff!

Definition 3.2 (und Lemma) $A^{m, \tau}(\mathbb{R}^n)$ ($m, \tau \in \mathbb{R}$) sei der Raum aller glatter Funktionen $a : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$\|a\|_k^{m, \tau} := \sup_{\substack{|\alpha|+|\beta| \leq k \\ y, \eta \in \mathbb{R}^n}} \left\{ |\partial_{\eta}^{\alpha} \partial_y^{\beta} a(y, \eta)| \langle y \rangle^{-\tau} \langle \eta \rangle^{-m} \right\} < \infty.$$

Die Elemente von $A^{m, \tau}(\mathbb{R}^n)$ heißen Amplitudenfunktionen. Dann ist $A^{m, \tau}(\mathbb{R}^n)$ ein Frèchetraum und $S^m(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow A^{m, 0}(\mathbb{R}^n)$.

Satz 3.3 Es sei $a \in A^{m, \tau}(\mathbb{R}^n)$ und $\chi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ mit $\chi(0) = 1$. Dann existiert der Grenzwert

$$\text{Os}[a] = \text{Os} - \iint e^{-iy\eta} a(y, \eta) dy d\eta := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint e^{-iy\eta} \chi(\varepsilon y, \varepsilon \eta) a(y, \eta) dy d\eta. \quad (3.1)$$

Für beliebige $l, l' \in \mathbb{N}_0$ mit $2l > n + m$ und $2l' > n + \tau$ ist

$$\text{Os}[a] = \iint e^{-iy\eta} \langle y \rangle^{-2l'} (1 - \Delta_{\eta})^{l'} \left[\langle \eta \rangle^{-2l} (1 - \Delta_y)^l a(y, \eta) \right] dy d\eta.$$

BEWEIS: 1. Schritt: Setze $\chi_\varepsilon(y, \eta) = \chi(\varepsilon y, \varepsilon \eta)$. Dann gilt

i) $\chi_\varepsilon \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$ für alle $\varepsilon > 0$,

ii) $\sup \left\{ |\partial_\eta^\alpha \partial_y^\beta \chi_\varepsilon(y, \eta)| \mid 0 < \varepsilon \leq 1, (y, \eta) \in \mathbb{R}^{2n} \right\} < \infty$ für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$,

iii) $\partial_\eta^\alpha \partial_y^\beta \chi_\varepsilon(y, \eta) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \begin{cases} 1 & : |\alpha| + |\beta| = 0 \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}$ punktweise auf \mathbb{R}^{2n} .

1. Schritt: Es gilt

$$\langle y \rangle^{-2l} (1 - \Delta_\eta)^l e^{-iy\eta} = e^{-iy\eta} = \langle \eta \rangle^{-2l'} (1 - \Delta_y)^{l'} e^{-iy\eta}.$$

Bezeichnet I_ε die rechte Seite von (3.1), so folgt durch partielle Integration

$$\begin{aligned} I_\varepsilon &= \iint e^{-iy\eta} \langle \eta \rangle^{-2l} (1 - \Delta_y)^l (\chi_\varepsilon(y, \eta) a(y, \eta)) dy d\eta \\ &= \iint e^{-iy\eta} \underbrace{\langle y \rangle^{-2l'} (1 - \Delta_\eta)^{l'} \left[\langle \eta \rangle^{-2l} (1 - \Delta_y)^l (\chi_\varepsilon(y, \eta) a(y, \eta)) \right]}_{g_\varepsilon(y, \eta)} dy d\eta. \end{aligned}$$

Wegen $\langle \cdot \rangle^r \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, ii) und Produktregel gilt

$$|g_\varepsilon(y, \eta)| \leq C_{l, l'} \|a\|_{2l+2l'}^{m, \tau} \langle y \rangle^{\tau-2l'} \langle \eta \rangle^{m-2l}. \quad (3.2)$$

Also hat g_ε eine gleichmäßige L_1 -Majorante. Wegen iii) ist

$$g_\varepsilon(y, \eta) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \langle y \rangle^{-2l'} (1 - \Delta_\eta)^{l'} \left[\langle \eta \rangle^{-2l} (1 - \Delta_y)^l a(y, \eta) \right].$$

Die Behauptung folgt aus dem Satz von Lebesgue über dominierte Konvergenz. ■

Folgerung 3.4 (3.1) hängt nicht von der Wahl von $\chi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$ ab. Die Abbildung

$$a \mapsto \text{Os}[a] : A^{m, \tau}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{C}.$$

ist stetig (beachte (3.2)). Ist $a \in L^1(\mathbb{R}^{2q})$, so ist

$$\text{Os}[a] = \iint e^{-iy\eta} a(y, \eta) dy d\eta.$$

Satz 3.5 (Dominierte Konvergenz) Sei $(a_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset A^{m, \tau}(\mathbb{R}^n)$ eine beschränkte Folge, die punktweise auf \mathbb{R}^{2n} gegen die Funktion a konvergiere. Dann ist $a \in A^{m, \tau}(\mathbb{R}^n)$ und

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \text{Os}[a_j] = \text{Os}[a].$$

BEWEIS: Ein funktionalanalytisches Argument zeigt, dass $a \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ und dass $\partial_\eta^\alpha \partial_y^\beta a_j \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \partial_\eta^\alpha \partial_y^\beta a$ gleichmäßig auf beschränkten Mengen.¹⁷ Insbesondere gilt dann, dass

$$\langle y \rangle^{-2l'} (1 - \Delta_\eta)^{l'} \left[\langle \eta \rangle^{-2l} (1 - \Delta_y)^l a_j(y, \eta) \right] \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \langle y \rangle^{-2l'} (1 - \Delta_\eta)^{l'} \left[\langle \eta \rangle^{-2l} (1 - \Delta_y)^l a(y, \eta) \right]$$

punktweise auf \mathbb{R}^{2n} . Da (a_j) eine beschränkte Folge ist, liefert (3.2) eine gleichmäßige L_1 -Majorante. Die Behauptung folgt aus dem Satz von Lebesgue über dominierte Konvergenz. \blacksquare

Lemma 3.6 *Es sei $a \in A^{m,\tau}(\mathbb{R}^n)$. Dann gelten:*

- a) *Partielle Integration:* $\text{Os}[y^\alpha a] = \text{Os}[D_\eta^\alpha a]$, $\text{Os}[\eta^\beta a] = \text{Os}[D_y^\beta a]$.
- b) *Translationsinvarianz:* $\text{Os}[a] = \text{Os}[e^{-i(y\eta_0 + y_0\eta + y_0\eta_0)} a(y + y_0, \eta + \eta_0)]$.
- c) *Ist $a(y, \eta) = a(y)$, so ist $\text{Os}[e^{ix\eta} a] = a(x)$.*

BEWEIS: a) Wegen $y^\alpha e^{-iy\eta} = (-D_\eta)^\alpha$ und partieller Integration ist

$$\text{Os}[y^\alpha a] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint e^{-iy\eta} D_\eta^\alpha (\chi(\varepsilon y, \varepsilon \eta) a(y, \eta)) dy d\eta = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \text{Os}[D_\eta^\alpha (\chi(\varepsilon y, \varepsilon \eta) a(y, \eta))].$$

Nun ist aber $\{D_\eta^\alpha (\chi(\varepsilon y, \varepsilon \eta) a(y, \eta)) \mid 0 < \varepsilon \leq 1\}$ eine beschränkte Teilmenge von $A^{m,\tau}(\mathbb{R}^n)$ und

$$D_\eta^\alpha (\chi(\varepsilon y, \varepsilon \eta) a(y, \eta)) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} D_\eta^\alpha a(y, \eta)$$

punktweise auf \mathbb{R}^{2n} . Jetzt verwende Satz 3.5.

c) Wähle $\chi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ mit $\chi(0) = 1$. Dann

$$\begin{aligned} \text{Os}[e^{ix\eta} a] &= \text{Os} - \iint e^{i(x-y)\eta} a(y) dy d\eta = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \chi(\varepsilon y) a(y) \left(\int e^{i(x-y)\eta} \chi(\varepsilon \eta) d\eta \right) dy \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-n} \int \chi(\varepsilon y) a(y) (\mathcal{F}^{-1} \chi) \left(\frac{x-y}{\varepsilon} \right) dy \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \chi(\varepsilon(x - \varepsilon z)) a(x - \varepsilon z) (\mathcal{F}^{-1} \chi)(z) dz \\ &= a(x) \int (\mathcal{F}^{-1} \chi)(z) dz = a(x) \chi(0) = a(x). \end{aligned}$$

Lemma 3.7 *Es sei $0 \leq f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $a \in A^{m,\tau}(\mathbb{R}^n)$ und $\chi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ mit $\chi(0) = 1$.*

- a) *Ist $|a(y, \eta)| \leq C f(y) \langle \eta \rangle^m$, so gilt $\text{Os}[a] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint e^{-iy\eta} \chi(\varepsilon \eta) a(y, \eta) dy d\eta$.*

¹⁷Zunächst ist (a_j) eine beschränkte Folge in $C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$. Da $C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ montelsch ist, hat jede Teilfolge von (a_j) eine konvergente Teilfolge. Wegen der punktweisen Konvergenz gegen a , muss der Grenzwert immer a sein. Somit konvergiert (a_j) selbst in $C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ gegen a . Die Abschätzungen für eine Amplitudenfunktion bleiben unter dem Grenzwert erhalten.

b) Ist $|a(y, \eta)| \leq C \langle y \rangle^\tau f(\eta)$, so gilt $\text{Os}[a] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint e^{-iy\eta} \chi(\varepsilon y) a(y, \eta) dy d\eta$.

c) Gilt in a) zusätzlich, dass $\int e^{-iy\eta} a(y, \eta) dy \in L^1(\mathbb{R}_\eta^n)$, so ist

$$\text{Os}[a] = \int \left(\int e^{-iy\eta} a(y, \eta) dy \right) d\eta.$$

d) Gilt in b) zusätzlich, dass $\int e^{-iy\eta} a(y, \eta) d\eta \in L^1(\mathbb{R}_y^n)$, so ist

$$\text{Os}[a] = \int \left(\int e^{-iy\eta} a(y, \eta) d\eta \right) dy.$$

BEWEIS: Siehe Kumano-go, Theorem 6.9 in Chapter 1. ■

Lemma 3.8 (Ungleichung von Peetre) Es sei $s \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\langle \xi + \eta \rangle^s \leq 2^{|s|} \langle \xi \rangle^s \langle \eta \rangle^{|s|} \quad \text{bzw.} \quad \langle \xi \rangle^s \leq 2^{|s|} \langle \xi - \eta \rangle^s \langle \eta \rangle^{|s|} \quad \forall \xi, \eta \in \mathbb{R}^n.$$

BEWEIS: Zunächst gilt

$$\langle y \rangle \leq (1 + |y|) \leq \sqrt{2} \langle y \rangle \quad \forall y \in \mathbb{R}^n. \text{ }^{18}$$

Sei nun $s \geq 0$. Dann

$$1 + |\xi + \eta| \leq 1 + |\xi| + |\eta| \leq (1 + |\xi|)(1 + |\eta|) \implies \langle \xi + \eta \rangle^s \leq (1 + |\xi|)^s (1 + |\eta|)^s \leq 2^s \langle \xi \rangle^s \langle \eta \rangle^s.$$

Für $s \leq 0$ gilt analog

$$\langle \xi \rangle^{-s} \leq 2^{-s} \langle \xi + \eta \rangle^{-s} \langle -\eta \rangle^{-s} \iff \langle \xi + \eta \rangle^s \leq 2^{-s} \langle \xi \rangle^s \langle \eta \rangle^{-s}. \quad \blacksquare$$

Satz 3.9 (Fubini) Es sei $a = a(y, y', \eta, \eta') \in A^{m, \tau}(\mathbb{R}^{n+k})$. Dann ist

$$b(y, \eta) = \text{Os} - \iint e^{-iy'\eta'} a(y, y', \eta, \eta') dy' d\eta' \in A^{m, \tau}(\mathbb{R}^n)$$

und

$$\partial_\eta^\alpha \partial_{y'}^\beta b(y, \eta) = \text{Os} - \iint e^{-iy'\eta'} \partial_\eta^\alpha \partial_{y'}^\beta a(y, y', \eta, \eta') dy' d\eta'.$$

Weiterhin gilt

$$\begin{aligned} \text{Os} - \iint e^{-i(y, y')(\eta, \eta')} a(y, y', \eta, \eta') d(y, y') d(\eta, \eta') \\ = \text{Os} - \iint e^{-iy\eta} \left(\text{Os} - \iint e^{-iy'\eta'} a(y, y', \eta, \eta') dy' d\eta' \right) dy d\eta. \end{aligned}$$

¹⁸Sieht man leicht durch Quadrieren.

BEWEIS: OBdA $\tau, m \geq 0$. Wegen der Ungleichung von Peetre ist

$$\langle (y, y') \rangle^\tau \langle (\eta, \eta') \rangle^m \leq 2^{m+\tau} \langle y \rangle^\tau \langle y' \rangle^\tau \langle \eta \rangle^m \langle \eta' \rangle^m. \quad {}^{19}$$

Daher ist $\partial_\eta^\alpha \partial_y^\beta a(y, \cdot, \eta, \cdot) \in A^{m, \tau}(\mathbb{R}^k)$ mit

$$\|\partial_\eta^\alpha \partial_y^\beta a(y, \cdot, \eta, \cdot)\|_k^{m, \tau} \leq C_{k, m} \|a\|_{k+|\alpha|+|\beta|}^{m, \tau} \langle y \rangle^\tau \langle \eta \rangle^m$$

für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Aus Folgerung 3.4 (und (3.2)) folgt

$$\left| \text{Os}[\partial_\eta^\alpha \partial_y^\beta a(y, \cdot, \eta, \cdot)] \right| \leq C \|a\|_{2(l+l')+|\alpha|+|\beta|}^{m, \tau} \langle y \rangle^\tau \langle \eta \rangle^m,$$

wobei $2l > n + k + m$ und $2l' > n + k + \tau$. Wegen der zweiten Darstellung des Oszillator-Integrals in Satz 3.3 und des Satzes von Lebesgue über Differenzierbarkeit von Parameterintegralen gilt

$$\text{Os}[\partial_\eta^\alpha \partial_y^\beta a(y, \cdot, \eta, \cdot)] = \partial_\eta^\alpha \partial_y^\beta \text{Os}[a(y, \cdot, \eta, \cdot)].$$

Weiterhin folgt, dass

$$\begin{aligned} & \text{Os} - \iint e^{-iy\eta} b(y, \eta) dy d\eta \\ & \stackrel{3.3}{=} \int e^{-i(y, y')(\eta, \eta')} (\langle y \rangle \langle y' \rangle)^{-2l'} ((1 - \Delta_\eta)(1 - \Delta_{\eta'}))^{l'} \\ & \quad [(\langle \eta \rangle \langle \eta' \rangle)^{-2l} ((1 - \Delta_y)(1 - \Delta_{y'}))^l a(y, y', \eta, \eta')] \frac{d(y, y', \eta, \eta')}{(2\pi)^{n+k}} \\ & = \text{Os} - \iint e^{-i(y, y')(\eta, \eta')} (\langle \eta \rangle \langle \eta' \rangle)^{-2l} ((1 - \Delta_y)(1 - \Delta_{y'}))^l a(y, y', \eta, \eta') d(y, y') d(\eta, \eta') \\ & = \text{Os} - \iint e^{-i(y, y')(\eta, \eta')} a(y, y', \eta, \eta') d(y, y') d(\eta, \eta'), \end{aligned}$$

wobei die letzten beiden Gleichungen wegen Lemma 3.6.a) gelten. ■

Satz 3.10 *Es sei $p \in S^\mu(\mathbb{R}^n)$. Dann definiert*

$$[Pu](x) := \text{Os} - \iint e^{-iy\eta} p(x, \eta) u(x + y) dy d\eta, \quad u \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n),$$

eine stetige Abbildung $P : C_b^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit

$$Pu = \text{op}(p)u \quad \forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Schreibe daher wieder $\text{op}(p) := P$.

BEWEIS: Für festes x und $u \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$ ist

$$a(y, \eta) := p(x, \eta)u(x + y) \in A^{\mu, 0}(\mathbb{R}^n).$$

¹⁹Schreibe $(y, y') = (y, 0) + (0, y')$.

Also ist P wohldefiniert. Die Abbildungseigenschaft folgt dann mit der Darstellung aus Satz 3.3 ähnlich wie in Satz 2.9. Für $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ist

$$\begin{aligned} [\text{op}(p)u](x) &= \int \left(\int e^{i(x-y)\eta} p(x, \eta) u(y) dy \right) \bar{d}\eta = \int \underbrace{\left(\int e^{-iy\eta} p(x, \eta) u(x+y) dy \right)}_{\in \mathcal{S}(\mathbb{R}_\eta^n)} \bar{d}\eta \\ &\stackrel{3.7.c)}{=} \text{Os}[p(x, \eta)u(x+y)] \end{aligned}$$

■

Folgerung 3.11 *Es sei $p \in S^\mu(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt*

$$p(x, \xi) = e^{-ix\xi} [\text{op}(p)e^{i\xi \cdot}](x) \quad \forall x, \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Insbesondere hat jeder ψ do ein eindeutig bestimmtes Linkssymbol.

BEWEIS: Es ist $e^{i\xi \cdot} \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$. Wegen Satz 3.10 gilt also

$$\begin{aligned} e^{-ix\xi} [\text{op}(p)e^{i\xi \cdot}](x) &= \text{Os} - \iint e^{-iy\eta} e^{iy\xi} p(x, \eta) dy \bar{d}\eta \\ &\stackrel{3.6.b)}{=} \text{Os} - \iint e^{-iy\eta} p(x, \xi + \eta) dy \bar{d}\eta \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \left(\int e^{-iy\eta} \chi(\varepsilon y) dy \right) \chi(\varepsilon \eta) p(x, \xi + \eta) \bar{d}\eta \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \varepsilon^{-n} \widehat{\chi}(\eta/\varepsilon) \chi(\varepsilon \eta) p(x, \xi + \eta) \bar{d}\eta \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \widehat{\chi}(\eta) \chi(\varepsilon^2 \eta) p(x, \xi + \varepsilon \eta) \bar{d}\eta \\ &= p(x, \xi) \int \widehat{\chi}(\eta) \bar{d}\eta = p(x, \xi) \chi(0) = p(x, \xi), \end{aligned}$$

wobei $\chi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ mit $\chi(0) = 1$.

■

4 Doppelsymbole, Algebraeigenschaft und Elliptizität

Definition 4.1 *Es seien $\mu, \mu' \in \mathbb{R}$. Dann bezeichnet $S^{\mu, \mu'}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ den Raum aller glatten Funktionen $p : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ mit*

$$\|p\|_k^{\mu, \mu'} := \sup_{\substack{x, x', \xi, \xi' \in \mathbb{R}^n, \\ |\alpha| + |\alpha'| + |\beta| + |\beta'| \leq k}} \left| \partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \partial_{\xi'}^{\alpha'} \partial_{x'}^{\beta'} p(x, \xi, x', \xi') \right| < \infty$$

für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Dies ist ein Fréchetraum mit vorigen (Halb-)normen. Die Elemente nennen wir Doppelsymbole.

Satz 4.2 Es sei $p \in S^{\mu, \mu'}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. Dann definiert

$$Pu(x) := \text{Os} - \iiint e^{-i(y, y')(\eta, \eta')} p(x, \eta, x + y, \eta') u(x + y + y') d(y, y') d(\eta, \eta')$$

einen stetigen Operatoren $P : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ bzw. $P : C_b^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$. Wir schreiben wieder

$$P = \text{op}(p) = p(x, D_x, x', D_{x'}).$$

Es gilt

$$Pu(x) = \int e^{ix'\xi} \left(\int e^{-ix\xi} \left(\int e^{ix'\xi'} \left(\int e^{-ix''\xi''} p(x, \xi, x', \xi') u(x'') dx'' \right) d\xi' \right) dx' \right) d\xi.$$

BEWEIS: Für festes x ist

$$a(y, y', \eta, \eta') = p(x, \eta, x + y, \eta') u(x + y + y') \in A^{|\mu|+|\mu'|, 0}(\mathbb{R}^{2n}).$$

Daher ist $Pu(x)$ wohldefiniert. Für die zweite Darstellung von $Pu(x)$ siehe Kumano-go, Lemma 2.3 in Chapter 2. Die Abbildungseigenschaft von P folgt aus (4.2), siehe unten. ■

Beispiel 4.3 Es seien $a_j(x) \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$ und $p_j(\xi) \in S^{\mu_j}(\mathbb{R}^n)$. Dann ist

$$p(x, \xi, x', \xi') = a_1(x) p_1(\xi) a_s(x') p_2(\xi') \in S^{\mu_1, \mu_2}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$$

und

$$\text{op}(p) = M_{a_1} \circ p_1(D) \circ M_{a_2} \circ p_2(D),$$

wobei M_{a_j} den Operator der Multiplikation mit a_j bezeichnet.

Beispiel 4.4 Es seien $p_j \in S^{\mu_j}(\mathbb{R}^n)$ ($j = 0, 1$) zwei Linkssymbole. Dann ist

$$p(x, \xi, x', \xi') := p_1(x, \xi) p_2(x', \xi') \in S^{\mu_1, \mu_2}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n).$$

Der Satz von Fubini 3.9 zeigt, dass die formale Rechnung aus Bemerkung (3.1) korrekt ist, wenn man Oszillator-Integrale verwendet, d.h.

$$p(x, D_x, x', D_{x'}) u = (p_1(x, D) \circ p_2(x, D)) u, \quad u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Satz 4.5 Für $p \in S^{\mu, \mu'}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ setze

$$p_L(x, \xi) = \text{Os} - \iint e^{-iy\eta} p(x, \xi + \eta, x + y, \xi) dy d\eta.$$

Dann ist

$$p \mapsto p_L : S^{\mu, \mu'}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n) \longrightarrow S^{\mu + \mu'}(\mathbb{R}^n) \quad (4.1)$$

eine stetige Abbildung und

$$p_L(x, D) = p(x, D_x, x', D_{x'}). \quad (4.2)$$

Weiterhin gilt die asymptotische Entwicklung

$$p_L(x, \xi) \sim \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha!} \partial_\xi^\alpha D_{x'}^\alpha p(x, \xi, x', \xi') \Big|_{x'=x, \xi'=\xi}. \quad (4.3)$$

BEWEIS: Zunächst ist wegen der Peetreschen Ungleichung und der Kettenregel

$$\left| \partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \partial_\eta^{\alpha'} \partial_{x'}^{\beta'} p(x, \xi + \eta, x + y, \xi) \right| \leq C \|p\|_{|\alpha|+|\beta|+|\alpha'|+|\beta'|}^{\mu, \mu'} \langle \eta \rangle^{|\mu|+|\alpha|} \langle \xi \rangle^{\mu+\mu'-|\alpha|} \quad (4.4)$$

mit $C = C(\alpha, \alpha', \beta, \beta', \mu')$. Aus Satz 3.5 folgt,²⁰ dass $p_L \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ mit

$$\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta p_L(x, \xi) = \text{Os}_{y, \eta} \left[\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta p(x, \xi + \eta, x + y, \xi) \right].$$

Aus der Stetigkeit von $\text{Os}[\cdot]$, vgl. Folgerung 3.4, und (4.4) folgt (4.1).

Per Taylor-Entwicklung gilt

$$\begin{aligned} p(x, \xi + \eta, x + y, \xi) &= \sum_{|\alpha| < N} \frac{\eta^\alpha}{\alpha!} p_\alpha(x, \xi, x + y, \xi) + \\ &+ N \sum_{|\alpha| = N} \frac{\eta^\alpha}{\alpha!} \int_0^1 (1 - \theta)^{N-1} p_\alpha(x, \xi + \theta\eta, x + y, \xi) d\theta, \end{aligned}$$

wobei $p_\alpha(x, \xi, y, \eta) = \partial_\xi^\alpha p(x, \xi, y, \eta)$. Wegen Lemma 3.6.a) ist also

$$\begin{aligned} p_L(x, \xi) &= \sum_{|\alpha| < N} \frac{1}{\alpha!} \text{Os}_{y, \eta} [(D_{x'}^\alpha p_\alpha)(x, \xi, x + y, \xi)] + \\ &+ N \sum_{|\alpha| = N} \frac{1}{\alpha!} \int_0^1 \underbrace{\text{Os}_{y, \eta} [(D_{x'}^\alpha p_\alpha)(x, \xi + \theta\eta, x + y, \xi)]}_{=: r_{\alpha, \theta}(x, \xi)} d\theta. \end{aligned}$$

Nach Lemma 3.6.c) gilt

$$\text{Os}_{y, \eta} [(D_{x'}^\alpha p_\alpha)(x, \xi, x + y, \xi)] = (D_{x'}^\alpha p_\alpha)(x, \xi, x, \xi).$$

Gleichmäßige Abschätzungen in $0 \leq \theta \leq 1$ wie oben in (4.4) zeigen, dass $\{r_{\alpha, \theta} \mid 0 \leq \theta \leq 1\}$ eine beschränkte Menge in $S^{\mu+\mu'-|\alpha|}(\mathbb{R}^n)$ ist. Das zeigt (4.3).

Sein nun $\chi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ mit $\chi(0) = 1$. Dann ist

$$p_{L, \varepsilon}(x, \xi) := \chi(\varepsilon\xi) \iint e^{-iy\eta} \chi(\varepsilon y) \chi(\varepsilon\eta) p(x, \xi + \eta, x + y, \xi) dy d\eta \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} p_L(x, \xi)$$

und, gleichmäßig in $0 < \varepsilon \leq 1$,

$$|p_{L, \varepsilon}(x, \xi)| \leq C \langle \xi \rangle^{|\mu| + \mu'} \quad \forall x, \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Wegen dominierter Konvergenz ist also für beliebiges $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned} [p_L(x, D)u](x) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint e^{ix\xi'} p_{L, \varepsilon}(x, \xi') \widehat{u}(\xi') d\xi' \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int e^{ix\xi} \left(\int e^{-ix'\xi'} \left(\int e^{ix'\xi'} p_\varepsilon(x, \xi, x', \xi') \widehat{u}(\xi') d\xi' \right) dx' \right) d\xi \end{aligned}$$

mit

$$p_\varepsilon(x, \xi, x', \xi') = \chi(\varepsilon(\xi - \xi')) \chi(\varepsilon(x - x')) \chi(\varepsilon\xi') p(x, \xi, x', \xi').$$

Drei mal dominierte Konvergenz zeigt, dass man $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0}$ ganz nach Innen ziehen kann. (4.2) folgt dann aus Satz 4.2. ■

²⁰als Analogon zu den klassischen über Differenzierbarkeit von Parameter-Integralen

Satz 4.6 Für $p_j \in S^{\mu_j}(\mathbb{R}^n)$ setze

$$(p_1 \# p_2)(x, \xi) = \text{Os} - \iint e^{-iy\eta} p_1(x, \xi + \eta) p_2(x + y, \xi) dy d\eta. \quad {}^{21}$$

Dann ist

$$(p_1, p_2) \mapsto p_1 \# p_2 : S^{\mu_1}(\mathbb{R}^n) \times S^{\mu_2}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow S^{\mu_1 + \mu_2}(\mathbb{R}^n) \quad (4.5)$$

bilinear und stetig und

$$\text{op}(p_1)\text{op}(p_2) = \text{op}(p_1 \# p_2).$$

Es gilt die asymptotische Entwicklung

$$p_1 \# p_2 \sim \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha!} (\partial_{\xi}^{\alpha} p_1)(D_x^{\alpha} p_2). \quad (4.6)$$

BEWEIS: Folgt sofort aus Beispiel 4.4 und Satz 4.5. ■

Folgerung 4.7 a) Sind $p_j \in S^{\mu_j}(\mathbb{R}^n)$, so gilt

$$p_1 \# p_2 - p_1 p_2 \in S^{\mu_1 + \mu_2 - 1}(\mathbb{R}^n).$$

b) Ist $[A, B] = AB - BA$ der Kommutator von A und B , so gilt

$$[\text{op}(p_1), \text{op}(p_2)] \in S^{\mu_1 + \mu_2 - 1}(\mathbb{R}^n).$$

c) Seien $p \in S^{\mu}(\mathbb{R}^n)$ und $\varphi, \psi \in C_b^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ mit $\varphi\psi = 0$. Dann ist

$$\varphi \circ \text{op}(p) \circ \psi \in S^{-\infty}(\mathbb{R}^n).$$

Definition 4.8 Das Symbol $p \in S^{\mu}(\mathbb{R}^n)$ bzw. der Operator $\text{op}(p)$ heißen elliptisch, falls es $C, R \geq 0$ gibt derart, dass $p(x, \xi) \neq 0$ für alle $|\xi| \geq R$ und

$$\left| \frac{1}{p(x, \xi)} \right| \leq C \langle \xi \rangle^{-\mu} \quad \forall x \quad \forall |\xi| \geq R. \quad (4.7)$$

Beispiel 4.9 a) Δ ist elliptisch der Ordnung 2, da $\Delta = \text{op}(p)$ mit $p(\xi) = -|\xi|^2$.

b) Es sei $p \in S^{\mu}(\mathbb{R}^n)$ elliptisch und $p' \in S^{\mu'}(\mathbb{R}^n)$ mit $\mu' < \mu$. Dann ist $p + p'$ elliptisch der Ordnung μ : Für $|\xi|$ hinreichend groß ist

$$p + p' = p(1 + p'/p) \quad \text{und} \quad |p'(x, \xi)/p(x, \xi)| \leq 1/2.$$

Satz 4.10 Es sei $p \in S^{\mu}(\mathbb{R}^n)$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

a) p ist elliptisch.

b) Es gibt ein $q_L \in S^{-\mu}(\mathbb{R}^n)$ mit $1 - q_L \# p \in S^{-\infty}(\mathbb{R}^n)$.

²¹ $p_1 \# p_2$ heißt das Leibniz-Produkt von p_1 mit p_2 .

c) Es gibt ein $q_R \in S^{-\mu}(\mathbb{R}^n)$ mit $1 - p \# q_R \in S^{-\infty}(\mathbb{R}^n)$.

q_L heißt eine Linksparmetrix, q_R eine Rechtsparmetrix.

BEWEIS: b) \Rightarrow a): Sei $r := 1 - q_L \# p \in S^{-\infty}(\mathbb{R}^n)$. Nach Folgerung 4.7.a) gibt es dann ein $s \in S^{-1}(\mathbb{R}^n)$ mit

$$1 - r = q_L \# p = q_L p + s \implies q_L p = 1 - (r + s).$$

Da $t := r + s \in S^{-1}(\mathbb{R}^n)$ gibt es ein $R \geq 0$ mit

$$|t(x, \xi)| \leq \frac{1}{2} \quad \forall x \quad \forall |\xi| \geq R.$$

Für $|\xi| \geq R$ gilt also

$$\frac{1}{p(x, \xi)} = \frac{1}{1 + t(x, \xi)} q_L(x, \xi).$$

Offenbar gilt dann (4.7).

a) \Rightarrow b): Wähle eine Ausschidefunktion χ mit $\chi(\xi) = 0$, falls $|\xi| \leq R$. Setze dann

$$q(x, \xi) := \chi(\xi) \frac{1}{p(x, \xi)} \quad \forall x, \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Dann gilt

$$\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta q(x, \xi) \equiv \chi(\xi) \partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \frac{1}{p(x, \xi)} \pmod{S^{-\infty}(\mathbb{R}^n)}.$$

Per Induktion

$$\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \frac{1}{p} = \sum_{k=1}^{|\alpha|+|\beta|} \sum_{\substack{\alpha_1+\dots+\alpha_k=\alpha \\ \beta_1+\dots+\beta_k=\beta}} C_{\alpha_1, \dots, \beta_k} (\partial_\xi^{\alpha_1} \partial_x^{\beta_1} p) \cdots (\partial_\xi^{\alpha_k} \partial_x^{\beta_k} p) \left(\frac{1}{p}\right)^{1+k}.$$

Es folgt, dass $q \in S^{-m}(\mathbb{R}^n)$. Nach Folgerung 4.7.a) gibt es ein $\tilde{r} \in S^{-1}$ mit

$$q \# p = qp + \tilde{r} = \chi + \tilde{r} = 1 - \underbrace{((1 - \chi) - \tilde{r})}_{=: r \in S^{-1}(\mathbb{R}^n)}.$$

Nach Satz 4.6 und Satz 2.11 gibt es ein $\tilde{q} \in S^0(\mathbb{R}^n)$ mit

$$\tilde{q} \sim \sum_{j=0}^{\infty} r \#^j, \quad r \#^j = \underbrace{r \# \dots \# r}_{j\text{-mal}}.$$

Setze dann $q_L := \tilde{q} \# q$. Dann gilt

$$q_L \# p = \tilde{q} \# (1 - r) \equiv \sum_{j=0}^{N-1} r \#^j \# (1 - r) = 1 - r \#^N \equiv 1 \pmod{S^{-N}(\mathbb{R}^n)}.$$

Da man $N \in \mathbb{N}$ beliebig wählen kann, gilt $q_L \# p - 1 \in S^{-\infty}(\mathbb{R}^n)$.

a) \Leftrightarrow c): Analog. ■

Folgerung 4.11 Ist $p \in S^\mu(\mathbb{R}^n)$ elliptisch, so ist jede Linksparmetrix auch eine Rechtsparmetrix und umgekehrt. Wir sprechen daher nur von einer Parametrix.

BEWEIS: Seien q_L und q_R die Links- bzw. Rechtsparmetrix. Dann, modulo $S^{-\infty}(\mathbb{R}^n)$,

$$q_L = q_L \# 1 \equiv q_L \# (p \# q_R) = (q_L \# p) \# q_R \equiv 1 \# q_R = q_R.$$

Also folgt $p \# q_L \equiv p \# q_R \equiv 1$, sowie $q_R \# p \equiv q_L \# p \equiv 1$. ■

Satz 4.12 Es sei $p \in S^\mu(\mathbb{R}^n)$. Dann gibt es genau ein Symbol $p^t \in S^\mu(\mathbb{R}^n)$ bzw. $p^* \in S^\mu(\mathbb{R}^n)$ mit

$$\langle \text{op}(p)u, v \rangle = \langle u, \text{op}(p^t)v \rangle \quad \text{bzw.} \quad (\text{op}(p)u, v)_{L^2(\mathbb{R}^n)} = (u, \text{op}(p^*)v)_{L^2(\mathbb{R}^n)} \quad {}^{22}$$

für alle $u, v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Es ist

$$p^t(x, \xi) \sim \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \frac{(-1)^{|\alpha|}}{\alpha!} (\partial_\xi^\alpha D_x^\alpha p)(x, -\xi), \quad p^*(x, \xi) \sim \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha!} \partial_\xi^\alpha D_x^\alpha \overline{p(x, \xi)}.$$

$\text{op}(p^t)$ bzw. $\text{op}(p^*)$ heißen der transponierte bzw. formal adjungierte Operator von $\text{op}(p)$.

BEWEIS: Sei $\chi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ mit $\chi(0) = 1$ und $\chi(-\xi) = \chi(\xi)$. Da $\chi(\varepsilon\xi)p(x, \xi) \in S^\mu(\mathbb{R}^n)$ gleichmäßig in $0 < \varepsilon \leq 1$ gilt

$$\begin{aligned} \langle \text{op}(p)u, v \rangle &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \left(\iint e^{i(x-y)\xi} \chi(\varepsilon\xi) p(x, \xi) u(y) dy d\eta \right) v(x) dx \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \left(\iint e^{i(y-x')\xi} \chi(\varepsilon\xi) \tilde{p}(x', \xi) v(x') dx' d\xi \right) u(y) dy = \langle u, \text{op}(\tilde{p})v \rangle \end{aligned}$$

mit dem (von x, ξ' unabhängigen) Doppelsymbol $\tilde{p}(x', \xi) = p(x', -\xi)$. Nach Satz 4.5 gilt dann die Behauptung mit

$$p^t(x, \xi) = \text{Os} - \iint e^{-iy\eta} \tilde{p}(x+y, \xi) dy d\eta.$$

Die asymptotische Entwicklung ist gerade (4.3). Der formal adjungierte Operator geht analog. ■

Folgerung 4.13 Es sei $p \in S^\mu(\mathbb{R}^n)$. Für $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ definiert

$$(\text{op}(p)T, \varphi) := (T, \text{op}(p^t)\varphi) \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

eine Distribution $\text{op}(p)T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. In diesem Sinne ist

$$\text{op}(p) : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n).$$

Die Einschränkung auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ bzw. $C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$ stimmen mit den Abbildungen aus Definition 2.7 bzw. Definition 3.10 überein.

²²Dabei: $\langle f, g \rangle = \int f(x)g(x) dx$

5 Stetigkeit in Sobolevräumen

Definition 5.1 (und Satz) Es sei $s \in \mathbb{R}$ und

$$H^s(\mathbb{R}^n) := \left\{ u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \mid \widehat{u} \text{ ist regulär und } \|u\|_s := \left(\int \langle \xi \rangle^{2s} |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2} < \infty \right\}.$$

Dann ist $H^s(\mathbb{R}^n)$ ein Hilbertraum mit Skalarprodukt

$$(u, v)_s = \int \langle \xi \rangle^{2s} \widehat{u}(\xi) \overline{\widehat{v}(\xi)} d\xi.$$

$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ist eine dichte Teilmenge von $H^s(\mathbb{R}^n)$. Ist $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ und $s \in \mathbb{N}_0$ so gilt:

$$u \in H^s(\mathbb{R}^n) \iff \partial^\alpha u \in L_2(\mathbb{R}^n) \quad \forall |\alpha| \leq s. \quad (5.1)$$

Jedes Funktional $T \in (H^s(\mathbb{R}^n))'$ ist von der Form

$$u \mapsto (u, v)_{L^2(\mathbb{R}^n)}, \quad v \in H^{-s}(\mathbb{R}^n).^{23}$$

Definieren wir

$$\Lambda^\mu := \langle D \rangle^\mu = \text{op}(\langle \xi \rangle^\mu) : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n),$$

so gilt

$$\Lambda^0 = 1, \quad \Lambda^\mu \circ \Lambda^{\mu'} = \Lambda^{\mu+\mu'}.$$

Inbesondere induziert Λ^μ Isomorphismen

$$\Lambda^\mu : H^s(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H^{s-\mu}(\mathbb{R}^n) \quad \forall s \in \mathbb{R}.^{24} \quad (5.2)$$

Man nennt Λ^μ eine Ordnungs-Reduktion.

BEWEIS: Zur Dichtheit: Die Abbildung $\Phi_s : u \mapsto \langle \cdot \rangle^s \widehat{u}$ ist ein isometrischer Isomorphismus $H^s(\mathbb{R}^n) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^n)$ mit $\Phi_s^{-1}(v) = \mathcal{F}^{-1}(\langle \cdot \rangle^{-s} v)$. Jetzt verwende, dass $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dicht in $L_2(\mathbb{R}^n)$ ist und dass $\Phi_s^{-1} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Für (5.1) zeige allgemeiner:

$$u \in H^s(\mathbb{R}^n) \iff u, D_1 u, \dots, D_n u \in H^{s-1}(\mathbb{R}^n).$$

Wegen $\langle \xi \rangle^2 = 1 + \xi_1^2 + \dots + \xi_n^2$ ist

$$|\langle \xi \rangle^{s+1} \widehat{u}(\xi)|^2 = |\langle \xi \rangle^s \widehat{u}(\xi)|^2 + \sum_{j=1}^n |\langle \xi \rangle^s \xi_j \widehat{u}(\xi)|^2 = |\langle \xi \rangle^s \widehat{u}(\xi)|^2 + \sum_{j=1}^n |\langle \xi \rangle^s \widehat{\partial_j u}(\xi)|^2.$$

Es folgt

$$\|u\|_{s+1}^2 = \|u\|_s^2 + \sum_{j=1}^n \|\partial_j u\|_s^2.$$

(5.2) folgt aus $\widehat{\Lambda^\mu u}(\xi) = \langle \xi \rangle^\mu \widehat{u}(\xi)$. ■

²³Kurz gesagt: $(H^s(\mathbb{R}^n))' = H^{-s}(\mathbb{R}^n)$.

Satz 5.2 Es sei $a : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ $2n$ -mal stetig differenzierbar und

$$\pi(a) := \sup_{\substack{x, \xi \in \mathbb{R}^n, \\ \alpha, \beta \leq (1, \dots, 1)}} \left| \partial_\eta^\alpha \partial_y^\beta a(x, \xi) \right| < \infty,$$

sowie

$$[\text{op}(a)u](x) := \int e^{ix\xi} a(x, \xi) \widehat{u}(\xi) d\xi, \quad u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Dann gibt es ein $C \geq 0$, das nicht von a abhängt, mit

$$\|\text{op}(a)u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq c \pi(a) \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \quad \forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Insbesondere induziert $\text{op}(a)$ einen stetigen Operatoren

$$\text{op}(a) : L^2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n).$$

BEWEIS: Wir verwenden folgende Notationen: Für $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ und $x \in \mathbb{R}^n$ sei

$$(i+x)^\alpha = (i+x_1)^{\alpha_1} \cdots (i+x_n)^{\alpha_n}, \quad (i+D)^\alpha = (i+D_1)^{\alpha_1} \cdots (i+D_n)^{\alpha_n}.$$

Dann ist

$$(i+D_x)^\alpha e^{ixy} = (i+y)^\alpha e^{ixy}.$$

Wir setzen $\delta = (1, \dots, 1)$ und im folgenden sind $u, v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

1. Schritt: $\text{op}(a)u \in L^2(\mathbb{R}^n)$, da nach partieller Integration

$$\text{op}(a)u(x) = \underbrace{(i+x)^{-\delta}}_{\in L^2(\mathbb{R}_x^n)} \underbrace{\int e^{ix\xi} (i-D_\xi)^\delta [a(x, \xi) \widehat{u}(\xi)] d\xi}_{\text{beschränkt}}.$$

Nach dem Satz von Riesz und wegen der Dichtheit von $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ in $L^2(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$\|\text{op}(a)u\|_{L^2} = \sup_{0 \neq v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)} \frac{(\text{op}(a)u, v)_{L^2}}{\|v\|_{L^2}}. \quad (5.3)$$

2. Schritt: Wir nehmen nun an, dass a kompakten Träger in \mathbb{R}^{2n} hat. Dann

$$\begin{aligned} (\text{op}(a)u, v)_{L^2} &= \iiint e^{i(x-y)\xi} a(x, \xi) u(y) \overline{v(x)} dy d\xi dx \\ &= \iiint e^{i(x-y)\xi - ix\eta} a(x, \xi) u(y) \overline{\widehat{v}(\eta)} dy d\xi dx d\eta. \end{aligned}$$

Partielle Integration liefert

$$\begin{aligned} (\text{op}(a)u, v)_{L^2} &= \iiint e^{i(x-y)\xi - ix\eta} (i-D_x)^\delta \\ &\quad \left\{ (i-D_\xi)^\delta a(x, \xi) \frac{u(y)}{(i+x-y)^\delta} \right\} \frac{\overline{\widehat{v}(\eta)}}{(i+\xi-\eta)^\delta} dy d\xi dx d\eta. \end{aligned}$$

Aus

$$(i - D)^\delta (fg) = \sum_{\alpha \leq \delta} (-1)^{|\alpha|} ((i - D)^{\delta - \alpha} f) D^\alpha g$$

folgt dann

$$\begin{aligned} (\text{op}(a)u, v)_{L^2} &= \sum_{\alpha \leq \delta} \iiint e^{i(x-y)\xi - ix\eta} (-1)^{|\alpha|} \left\{ D_x^\alpha (i - D_\xi)^\delta a(x, \xi) \right\} \times \\ &\quad \times \left\{ (i - D_x)^{\delta - \alpha} \frac{u(y)}{(i + x - y)^\delta} \right\} \frac{\overline{\widehat{v}(\eta)}}{(i + \xi - \eta)^\delta} dy d\xi dx d\eta \\ &= \sum_{\alpha \leq \delta} \iint e^{ix\xi} \left\{ D_x^\alpha (i - D_\xi)^\delta a(x, \xi) \right\} f_\alpha(x, \xi) g(x, \xi) dx d\xi, \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned} g(x, \xi) &= g(x, \xi; v) = \int e^{-ix\eta} \frac{\overline{\widehat{v}(\eta)}}{(i + \xi - \eta)^\delta} d\eta \\ f_\alpha(x, \xi) &= f_\alpha(x, \xi; u) = (-1)^{|\alpha|} \int e^{-iy\xi} (i - D_x)^{\delta - \alpha} \frac{u(y)}{(i + x - y)^\delta} dy. \end{aligned}$$

Die Hölder-Ungleichung impliziert

$$|(\text{op}(a)u, v)_{L^2}| \leq C \pi(a) \sum_{\alpha \leq \delta} \|f_\alpha\|_{L^2(\mathbb{R}^{2n})} \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^{2n})}.$$

Wegen des Satzes von Plancherel ist

$$\|g(x, \xi)\|_{L^2(\mathbb{R}_x^n)}^2 = (2\pi)^n \left\| \frac{\overline{\widehat{v}(\eta)}}{(i + \xi - \eta)^\delta} \right\|_{L^2(\mathbb{R}_\eta^n)}^2$$

und

$$\begin{aligned} \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^{2n})}^2 &= \int \|g(x, \xi)\|_{L^2(\mathbb{R}_x^n)}^2 d\xi = (2\pi)^n \iint \left| \frac{\widehat{v}(\eta)}{(i + \xi - \eta)^\delta} \right|^2 d\xi d\eta \\ &= (2\pi)^n \int \frac{1}{(i + \xi)^{2\delta}} d\xi \int |\widehat{v}(\eta)|^2 d\eta = C \|v\|_{L^2}^2 \end{aligned}$$

Analog hat man

$$\begin{aligned} \|f_\alpha\|_{L^2(\mathbb{R}^{2n})}^2 &= \int \|f_\alpha(x, \xi)\|_{L^2(\mathbb{R}_\xi^n)}^2 dx = (2\pi)^n \iint \left| (i - D_x)^{\delta - \alpha} \frac{u(y)}{(i + x - y)^\delta} \right|^2 dx dy \\ &= (2\pi)^n \int \left| (i - D_x)^{\delta - \alpha} \frac{1}{(i + x)^\delta} \right|^2 dx \int |u(y)|^2 dy = C_\alpha \|u\|_{L^2}^2 \end{aligned}$$

Insgesamt folgt

$$|(\text{op}(a)u, v)_{L^2}| \leq C \pi(a) \|u\|_{L^2} \|v\|_{L^2}.$$

3. Schritt: Sei nun a allgemein. Wähle $\chi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ mit $\chi(0, 0) = 1$ und setze

$$a_\varepsilon(x, \xi) = \chi(\varepsilon x, \varepsilon \xi) a(x, \xi), \quad 0 < \varepsilon \leq 1.$$

Dann gilt

$$\pi(a_\varepsilon) \leq C_\chi \pi(a) \quad \forall 0 < \varepsilon \leq 1$$

und, nach Schritt 2,

$$(\text{op}(a)u, v)_{L^2} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} (\text{op}(a_\varepsilon)u, v)_{L^2} \leq C_\chi \pi(a) \|u\|_{L^2} \|v\|_{L^2}.$$

Für die Konvergenz setze $b_\varepsilon = a_\varepsilon - a$. Dann ist

$$[\text{op}(b_\varepsilon)u](x) = \int e^{ix\xi} b_\varepsilon(x, \xi) \widehat{u}(\xi) d\xi \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$$

wegen dominierter Konvergenz und $\text{op}(b_\varepsilon)u$ ist beschränkt, gleichmäßig in ε . Wieder mit dominierter Konvergenz folgt

$$(\text{op}(b_\varepsilon)u, v)_{L^2} = \int (B_\varepsilon u)(x) \overline{v(x)} dx \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

Aus (5.3) folgt die Behauptung. ■

Satz 5.3 *Es sei $p \in S^\mu(\mathbb{R}^n)$. Dann ist*

$$\text{op}(p) : H^s(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H^{s-\mu}(\mathbb{R}^n), \quad s \in \mathbb{R},$$

stetig und ebenso

$$p \mapsto \text{op}(p) : S^\mu(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{L}(H^s(\mathbb{R}^n), H^{s-\mu}(\mathbb{R}^n)), \quad s \in \mathbb{R}.$$

BEWEIS: Nach Satz 5.2 gelten die Behauptungen für $\mu = s = 0$. Im allgemeinen setzen wir

$$a_p(x, \xi) = \langle \xi \rangle^{s-\mu} \# (p(x, \xi) \langle \xi \rangle^{-s}).$$

Dann ist

$$p \mapsto a_p : S^\mu(\mathbb{R}^n) \longrightarrow S^0(\mathbb{R}^n)$$

stetig und

$$\text{op}(p) = \Lambda^{\mu-s} \circ \text{op}(a_p) \circ \Lambda^s.$$

Anders gesagt, das folgende Diagramm ist kommutativ:

$$\begin{array}{ccc} L^2(\mathbb{R}^n) & \xrightarrow{\text{op}(a_p)} & L^2(\mathbb{R}^n) \\ \Lambda^s \uparrow & & \downarrow \Lambda^{\mu-s} \\ H^s(\mathbb{R}^n) & \xrightarrow{\text{op}(p)} & H^{s-\mu}(\mathbb{R}^n) \end{array}$$

Da Ordnungsreduktionen stetig sind folgt die Behauptung. ■

Folgerung 5.4 (Elliptische Regularität) *Es sei $p \in S^\mu(\mathbb{R}^n)$ elliptisch. Es sei $u \in \cup_{t \in \mathbb{R}} H^t(\mathbb{R}^n)$ eine Lösung von $\text{op}(p)u = f$ und $f \in H^s(\mathbb{R}^n)$. Dann ist $u \in H^{s+\mu}(\mathbb{R}^n)$.*

BEWEIS: Sei $q \in S^{-\mu}(\mathbb{R}^n)$ eine Parametrix von p . Dann ist $r := q\#p - 1 \in S^{-\infty}(\mathbb{R}^n)$ und

$$\text{op}(q)f = \text{op}(q\#p)u = u - \text{op}(r)u.$$

Nach Satz 5.3 sind $\text{op}(q)f \in H^{s+\mu}(\mathbb{R}^n)$ und $\text{op}(r)u \in H^\infty(\mathbb{R}^n)$. ■

Folgerung 5.5 a) Ist $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$ harmonisch,²⁵ so ist $u \in H^\infty(\mathbb{R}^n)$.

a) Ist $p \in S^\mu(\mathbb{R}^n)$ elliptisch und $\mu > 0$. Ist $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$ und $Pu = \lambda u$ mit $\lambda \in \mathbb{C}$, so ist $u \in H^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Folgerung 5.6 Ist $p \in S^\mu(\mathbb{R}^n)$ so gilt

$$(\text{op}(p)u, v)_{L^2(\mathbb{R}^n)} = (u, \text{op}(p^*)v) \quad \forall u \in H^s(\mathbb{R}^n) \quad \forall v \in H^{\mu-s}(\mathbb{R}^n).$$

6 Elliptizität und Fredholm-Eigenschaft

Definition 6.1 (Gewichtete Sobolevräume) Es seien $s, \delta \in \mathbb{R}$. Dann setze

$$H^{s,\delta}(\mathbb{R}^n) = \left\{ u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \mid \langle \cdot \rangle^\delta u \in H^s(\mathbb{R}^n) \right\}, \quad (u, v)_{s,\delta} = (\langle \cdot \rangle^\delta u, \langle \cdot \rangle^\delta v)_s.$$

Man kann zeigen, dass

$$\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) = \bigcup_{s,\delta \in \mathbb{R}} H^{s,\delta}(\mathbb{R}^n).$$

Satz 6.2 (Kolmogorov) Es sei $1 \leq p < \infty$ und $A \subset L^p(\mathbb{R}^n)$. Genau dann ist A relativ kompakt, wenn:

i) A ist beschränkt.

ii) Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ mit

$$\int |u(x+h) - u(x)|^p dx < \varepsilon \quad \forall |h| < \delta \quad \forall u \in A.$$

iii) Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $R > 0$ mit

$$\int_{|x| \geq R} |u(x)|^p dx < \varepsilon \quad \forall u \in A.$$

Satz 6.3 Für $s \geq s'$ und $\delta \geq \delta'$ ist

$$H^{s,\delta}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^{s',\delta'}(\mathbb{R}^n).$$

Die Einbettung ist kompakt, falls $s > s'$ und $\delta > \delta'$.

²⁵d.h. $\Delta u = 0$

BEWEIS: Wir beweisen die Aussage für $s' = \delta' = 0$.²⁶ Wegen $H^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ ist

$$\|u\|_{L^2} \leq C_s \|u\|_s = C_s \|\langle \cdot \rangle^{-\delta} \langle \cdot \rangle^\delta u\|_s \stackrel{5.3}{\leq} C_{s,\delta} \|\langle \cdot \rangle^\delta u\|_s = C_{s,\delta} \|u\|_{s,\delta} \quad \forall u \in H^{s,\delta}(\mathbb{R}^n).$$

Wir müssen jetzt zeigen, dass

$$A := \{u \in H^{s,\delta} \mid \|u\|_{s,\delta} \leq 1\}$$

relativ kompakt in $L^2(\mathbb{R}^n)$ ist. Eigenschaft 6.2.i) ist klar, und

$$\int_{|x| \geq R} |u(x)|^2 dx \leq \|\langle \cdot \rangle^\delta u\|_{L^2}^2 \sup_{|x| \geq R} \langle x \rangle^{-2\delta} \leq C_s^2 (1 + R^2)^{-\delta} \quad \forall u \in A$$

zeigt Eigenschaft 6.2.iii). Nach dem Satz von Plancherel gilt

$$\int |u(x+h) - u(x)|^2 dx = (2\pi)^{2n} \int |e^{ih\xi} \widehat{u}(\xi) - \widehat{u}(\xi)|^2 d\xi \leq C_{s,\delta} \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} |e^{ih\xi} - 1|^2 \langle \xi \rangle^{-2s}.$$

Zu gegebenem $\varepsilon > 0$ gibt es offenbar ein $R \geq 0$ mit

$$|e^{ih\xi} - 1|^2 \langle \xi \rangle^{-2s} \leq 4 \langle \xi \rangle^{-2s} < \varepsilon \quad \forall |\xi| \geq R \quad \forall h.$$

Nach Taylorformel ist

$$|e^{ih\xi} - 1|^2 \langle \xi \rangle^{-2s} \leq C |h\xi| \sup_{y \in \mathbb{R}^n} |e^{ihy}| \leq CR|h| \quad \forall |\xi| \leq R \quad \forall h.$$

Also gilt Eigenschaft 6.2.ii). ■

Satz 6.4 *Es seien $\mu, m \in \mathbb{R}$. Wir definieren $S^{\mu,m}(\mathbb{R}^n)$ als Raum aller C^∞ -Funktionen mit*

$$\|p\|_k^{\mu,m} := \sup_{\substack{x, \xi \in \mathbb{R}^n \\ |\alpha| + |\beta| \leq k}} |\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta p(x, \xi)| \langle x \rangle^{|\beta| - m} \langle \xi \rangle^{|\alpha| - \mu} < \infty$$

für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Dann „verallgemeinern“ sich alle bisherigen Resultate entsprechend:

a) Für $p \in S^{\mu,m}(\mathbb{R}^n)$ ist $\text{op}(p) : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $\text{op}(p) : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ und

$$\text{op}(p) : H^{s,\delta}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H^{s-\mu,\delta-m}(\mathbb{R}^n) \quad \forall s, \delta \in \mathbb{R}.$$

b) Für $p_j \in S^{\mu_j, m_j}(\mathbb{R}^n)$ ist

$$\text{op}(p_1)\text{op}(p_2) = \text{op}(p_1 \# p_2) \quad \text{mit} \quad p_1 \# p_2 \in S^{\mu_1 + \mu_2, m_1 + m_2}(\mathbb{R}^n),$$

mit der asymptotischen Entwicklung

$$p_1 \# p_2 \sim \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha!} \underbrace{(\partial_\xi^\alpha p_1)(D_x^\alpha p_2)}_{\in S^{\mu_1 + \mu_2 - |\alpha|, m_1 + m_2 - |\alpha|}(\mathbb{R}^n)},$$

d.h. für alle $N \in \mathbb{N}_0$ ist

$$p_1 \# p_2 - \sum_{|\alpha|=0}^{N-1} \frac{1}{\alpha!} (\partial_\xi^\alpha p_1)(D_x^\alpha p_2) \in S^{\mu_1 + \mu_2 - N, m_1 + m_2 - N}(\mathbb{R}^n).$$

²⁶Der allgemeine Fall benötigt unten folgende Resultate.

c) $p \in S^{\mu,m}(\mathbb{R}^n)$ heißt elliptisch, falls es $C, R \geq 0$ gibt mit

$$\left| \frac{1}{p(x, \xi)} \right| \leq C \langle x \rangle^{-m} \langle \xi \rangle^{-\mu} \quad \forall |(x, \xi)| \geq R.$$

Dann (und nur dann!) hat p eine Parametrix $q \in S^{-\mu,-m}(\mathbb{R}^n)$, d.h.

$$p \# q - 1, q \# p - 1 \in S^{-\infty,-\infty}(\mathbb{R}^n).$$

Beispiel 6.5 $P = 1 - \Delta = \text{op}(\langle \xi \rangle^2)$ ist ein elliptischer Operator in $S^{2,0}(\mathbb{R}^n)$.

Folgerung 6.6 a) Satz 6.3 gilt für beliebige s', δ' .

b) $p \in S^{\mu-\varepsilon, m-\varepsilon}(\mathbb{R}^n)$ mit $\varepsilon > 0$ induziert kompakte Operatoren

$$\text{op}(p) : H^{s,\delta}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H^{s-\mu,\delta-m}(\mathbb{R}^n) \quad \forall s, \delta \in \mathbb{R}.$$

BEWEIS: a) Das folgende Diagramm ist kommutativ:

$$\begin{array}{ccc} H^{s-s', \delta-\delta'}(\mathbb{R}^n) & \xrightarrow{\text{id}} & L^2(\mathbb{R}^n) \\ \text{op}(\langle \xi \rangle^{s'}) \text{op}(\langle x \rangle^{\delta'}) \uparrow & & \downarrow \text{op}(\langle x \rangle^{-\delta'}) \text{op}(\langle \xi \rangle^{s'}) \\ H^{s,\delta}(\mathbb{R}^n) & \xrightarrow{\text{id}} & H^{s',\delta'}(\mathbb{R}^n) \end{array}$$

Die Einbettung in der oberen Zeile ist kompakt. Jetzt verwende Satz 9.1.ii).

b) Nach a) ist $H^{s,\delta}(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{\text{op}(p)} H^{s-\mu+\varepsilon, \delta-m+\varepsilon}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^{s-\mu, \delta-m}(\mathbb{R}^n)$ kompakt. ■

Satz 6.7 Es sei $p \in S^{\mu,m}(\mathbb{R}^n)$ elliptisch und

$$P_{s,\delta} := \text{op}(p) : H^{s,\delta}(\mathbb{R}^n) \rightarrow H^{s-\mu, \delta-m}(\mathbb{R}^n), \quad s, \delta \in \mathbb{R}.$$

Dann gelten:

a) $P_{s,\delta}$ sind Fredholm-Operatoren.

b) Kern $P_{s,\delta} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ und $\text{ind } P_{s,\delta}$ sind unabhängig von s, δ .

BEWEIS: a) Eine Parametrix $q \in S^{-\mu,-m}(\mathbb{R}^n)$ liefert eine Inverse von $P_{s,\delta}$ modulo Operatoren aus $S^{-\infty,-\infty}(\mathbb{R}^n)$. Diese sind kompakt.

b) Nach Elliptischer Regularität gilt

$$\text{Kern } P_{s,\delta} \subset \bigcap_{t,\rho \in \mathbb{R}} H^{t,\rho}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Da mit p auch $p^* \in S^{\mu,m}(\mathbb{R}^n)$ elliptisch ist, ist

$$V := \text{Kern}(\text{op}(p^*)|_{H^{s,\delta}}) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

unabhängig von s, δ und endlichdimensional.

Sei nun $J_{s,\delta} : H^{s,\delta}(\mathbb{R}^n) \rightarrow H^{-s,-\delta}(\mathbb{R}^n)$ derjenige Isomorphismus mit

$$(u, v)_{s,\delta} = (u, Jv)_{L^2} \quad \forall u, v \in H^{s,\delta}(\mathbb{R}^n).^{27}$$

Dann gilt für alle $u \in H^{s,\delta}(\mathbb{R}^n)$ und $v \in H^{s-\mu,\delta-\mu}(\mathbb{R}^n)$

$$(\text{op}(p)u, v)_{s-\mu,\delta-\mu} = (\text{op}(p)u, J_{s-\mu,\delta-m}v)_{L^2} = (u, \text{op}(p^*)(J_{s-\mu,\delta-m}v))_{L^2}.$$

Also ist

$$v \in (\text{Bild } P_{s,\delta})^\perp \iff J_{s-\mu,\delta-m}v \in V.$$

Insbesondere ist

$$\text{codim Bild } P_{s,\delta} = \dim (\text{Bild } P_{s,\delta})^\perp = \dim V$$

unabhängig von s, δ . ■

Lemma 6.8 (und Definition) *Es sei $0 < \tau < \frac{1}{2}$ fest. Für $y, \eta \in \mathbb{R}^n$ und $s > 0$ setze*

$$[I(s, y, \eta)u](x) = s^{\tau n/2} e^{isx\eta} u(s^\tau(x - y)), \quad u \in L_2(\mathbb{R}^n).$$

Dann ist $I(s, y, \eta) \in \mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n))$ eine Isometrie mit Inverse

$$[I(s, y, \eta)^{-1}u](x) = s^{-\tau n/2} e^{-is(y+s^{-\tau}x)\eta} u(y + s^{-\tau}x).$$

Für $p \in S^{0,0}(\mathbb{R}^n)$ ist

$$I(s, y, \eta)^{-1} \text{op}(p) I(s, y, \eta) = \text{op}(p(s, y, \eta))$$

mit

$$p(x, \xi; s, y, \eta) := p(y + s^{-\tau}x, s\eta + s^\tau\xi) \in S^{0,0}(\mathbb{R}^n).$$

Für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$ gelten die Abschätzungen

$$|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta p(x, \xi; s, y, \eta)| \leq 2^{|\alpha|} \|p\|_{|\alpha|+|\beta|}^{0,0} \frac{\langle \xi \rangle^{|\alpha|}}{|\eta|^{|\alpha|}} s^{-\tau|\beta|} s^{-(1-2\tau)|\alpha|},$$

gleichmäßig für $s \geq 1$ und $x, \xi, y, \eta \in \mathbb{R}^n$.

BEWEIS: Die ersten Aussagen sind elementar. Wegen der Kettenregel ist

$$|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta p(x, \xi; s, y, \eta)| \leq \|p\|_{|\alpha|+|\beta|}^{0,0} \langle s\eta + s^\tau\xi \rangle^{-|\alpha|} s^{-\tau|\beta|} s^{\tau|\alpha|}.$$

Mit der Peetreschen Ungleichung folgt

$$\langle s\eta + s^\tau\xi \rangle^{-|\alpha|} s^{\tau|\alpha|} \leq 2^{|\alpha|} \langle s\eta \rangle^{-|\alpha|} (\langle s^\tau\xi \rangle s^\tau)^{|\alpha|} \leq 2^{|\alpha|} \left(\frac{s^{2\tau}(1 + s^{2\tau}|\xi|^2)}{s^2|\eta|^2} \right)^{|\alpha|/2}.$$

Schließlich ist, für $\lambda \geq 1$,

$$s^{2\tau}(1 + s^{2\tau}|\xi|^2) = s^{4\tau}(s^{-2\tau} + |\xi|^2) \leq s^{4\tau}(1 + |\xi|^2) = s^{4\tau} \langle \xi \rangle^2.$$

Einsetzen liefert die Abschätzung. ■

²⁷Nach dem Darstellungssatz von Riesz jedes Funktional auf einem Hilbertraum H von der Form $x \mapsto (x, y)$ mit $y \in H$.

Satz 6.9 Es seien $p \in S^{\mu,m}(\mathbb{R}^n)$, $s_0, \delta_0 \in \mathbb{R}$ und

$$P := \text{op}(p) : H^{s_0, \delta_0}(\mathbb{R}^n) \rightarrow H^{s_0 - \mu, \delta_0 - m}(\mathbb{R}^n)$$

sei ein Fredholm-Operator. Dann ist p elliptisch (der Ordnung μ, m).

BEWEIS: **1. Schritt:** Wir definieren $\tilde{p} \in S^{0,0}$ durch

$$\tilde{p}(x, \xi) = (\langle x \rangle^{\delta_0 - m} \langle \xi \rangle^{s_0 - \mu}) \# p(x, \xi) \# (\langle x \rangle^{-\delta_0} \langle \xi \rangle^{-s_0}).$$

das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H^{s_0, \delta_0}(\mathbb{R}^n) & \xrightarrow{\text{op}(p)} & H^{s_0 - \mu, \delta_0 - m}(\mathbb{R}^n) \\ \text{op}(\langle x \rangle^{-\delta_0} \langle \xi \rangle^{-s_0}) \uparrow & & \downarrow \text{op}(\langle x \rangle^{\delta_0 - m} \langle \xi \rangle^{s_0 - \mu}) \\ L^2(\mathbb{R}^n) & \xrightarrow{\text{op}(\tilde{p})} & L^2(\mathbb{R}^n) \end{array}$$

kommutativ und die vertikalen Abbildungen sind Isomorphismen. Also ist $\text{op}(\tilde{p}) : L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ fredholmsch. Ist \tilde{p} elliptisch, so auch p , da

$$\tilde{p}(x, \xi) = p(x, \xi) \langle x \rangle^{-m} \langle \xi \rangle^{-\mu} \pmod{S^{-1, -1}(\mathbb{R}^n)}.$$

In anderen Worten: OBdA ist $\mu = m = s_0 = \delta_0 = 0$ und wir müssen zeigen, dass

$$|p(x, \xi)| \geq C > 0 \quad \forall |(x, \xi)| \geq R.$$

2. Schritt: Es sei $Q \in \mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n))$ derart, dass $K := 1 - QP$ kompakt ist. Wir zeigen, dass es ein $R \geq 0$ gibt mit

$$|p(x, \xi)| \geq \frac{1}{2\|Q\|} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad \forall |\xi| \geq R. \quad (6.1)$$

Angenommen nicht. Dann

$$\exists ((x_k, \xi_k))_k \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : |\xi_k| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty \quad \text{und} \quad |p(x_k, \xi_k)| \leq \frac{1}{2\|Q\|}.$$

OBdA ist

$$p(x_k, \xi_k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} p^* \quad (\text{mit } |p^*| \leq \frac{1}{2\|Q\|}).$$

Wir setzen dann

$$s_k := |\xi_k|, \quad I_k := I\left(s_k, x_k, \frac{\xi_k}{|\xi_k|}\right), \quad p_k(x, \xi) := p\left(x, \xi; s_k, x_k, \frac{\xi_k}{|\xi_k|}\right).$$

Sei nun $0 \neq u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ fest gewählt. Wir werden unten zeigen, dass

$$I_k^{-1} \text{op}(p) I_k u = \text{op}(p_k) u \xrightarrow{k \rightarrow \infty} p^* u \quad \text{in } L^2(\mathbb{R}^n). \quad (6.2)$$

Ist $v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, so gilt

$$\begin{aligned} |(I_k u, v)_{L^2}| &= \left| \int s_k^{\tau n/2} e^{ix_k \xi_k} u(s_k^\tau(x - x_k)) \overline{v(x)} dx \right| \\ &\leq s_k^{-\tau n/2} \int |u(y)| |v(x_k + s_k^{-\tau} y)| dy \leq s_k^{-\tau n/2} \|v\|_{L^\infty} \|u\|_{L^1} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Da I_k Isometrien sind und $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dicht in $L^2(\mathbb{R}^n)$, folgt

$$|(I_k u, v)_{L^2}| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \quad \forall v \in L^2(\mathbb{R}^n) \quad (6.3)$$

(d.h. $(I_k u)_k$ konvergiert schwach gegen 0 in $L^2(\mathbb{R}^n)$). Jetzt folgt

$$\begin{aligned} \|u\| &= \|(QP + K)I_k u\| \leq \|QI_k\| \|I_k^{-1} \text{op}(p)I_k u\| + \|KI_k u\| \\ &= \|Q\| \|\text{op}(p_k)u\| + \|KI_k u\| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \|Q\| |p^*| \|u\| \end{aligned}$$

wegen (6.2), (6.3) und Satz 9.1.i). Dies steht im Widerspruch zu $|p^*| \leq \frac{1}{2\|Q\|}$. Also gilt (6.1).

3. Schritt: Mit $\text{op}(p)$ ist auch

$$\mathcal{F} \text{op}(p) \mathcal{F}^{-1} : L^2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$$

ein Fredholm-Operator. Wir werden unten zeigen, dass

$$\mathcal{F} \text{op}(p) \mathcal{F}^{-1} = \text{op}(\tilde{p}) \quad \text{mit} \quad \tilde{p}(x, \xi) = p(-\xi, x) \text{ mod } S^{-1,-1}(\mathbb{R}^n). \quad (6.4)$$

(6.1) gilt für \tilde{p} und es folgt, dass

$$|p(x, \xi)| \geq \frac{1}{4\|Q\|} \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n \quad \forall |x| \geq R$$

für ein hinreichen großes $R \geq 0$. Also ist p elliptisch. ■

BEWEIS (von (6.2)): Nach Lemma 6.8 mit $\eta = \xi_k/|\xi_k|$ gilt insbesondere

$$|\partial_\xi^\alpha (p_k(x, \xi) - p^*)| \leq 2^{|\alpha|+1} \|p\|_{|\alpha|}^{0,0} \langle \xi \rangle^{|\alpha|} \quad \forall x, \xi, k.$$

Zusammen mit partieller Integration folgt

$$\left| \langle x \rangle^{2l} ([\text{op}(p_k)u](x) - p^*u(x)) \right| = \left| \int e^{ix\xi} (1 - \Delta_\xi)^l \{ (p_k(x, \xi) - p^*) \hat{u}(\xi) \} d\xi \right| \leq C_{l,u}.$$

Daher ist

$$|[\text{op}(p_k)u](x) - p^*u(x)|^2 \leq C_{l,u}^2 \langle x \rangle^{-4l} \in L^1(\mathbb{R}_x^n),$$

wenn man $l > n/4$ wählt. Nach dominierter Konvergenz genügt es also zu zeigen, dass

$$[\text{op}(p_k)u](x) - p^*u(x) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Da

$$[\text{op}(p_k)u](x) - p^*u(x) = \int e^{ix\xi} (p_k(x, \xi) - p^*) \hat{u}(\xi) d\xi$$

gilt dies, falls

$$p_k(x, \xi) - p^* \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \quad \forall x, \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Mit Taylor-Formel ist

$$\begin{aligned}
|p_k(x, \xi) - p(x_k, \xi_k)| &= |p_k(x_k + s_k^{-\tau}x, \xi_k + s_k^\tau\xi) - p(x_k, \xi_k)| \\
&= \left| \int_0^1 (\nabla_{(x,\xi)} p)(x_k + \theta s_k^{-\tau}x, \xi_k + \theta s_k^\tau\xi) \begin{pmatrix} s_k^{-\tau}x \\ s_k^\tau\xi \end{pmatrix} d\theta \right| \\
&\leq \underbrace{\sqrt{n} \|p\|_1^{0,0}}_{=:c} \left(s_k^{-\tau}|x| + s_k^\tau|\xi| \int_0^1 \langle \xi_k + \theta s_k^\tau\xi \rangle^{-1} d\theta \right) \\
&\leq c \left(s_k^{-\tau}|x| + s_k^\tau|\xi| \int_0^1 |\xi_k + \theta s_k^\tau\xi|^{-1} d\theta \right) \\
&\stackrel{\xi \neq 0}{=} c \left(s_k^{-\tau}|x| + \int_0^1 \left| \frac{\xi_k}{s_k^\tau|\xi|} + \theta \frac{\xi}{|\xi|} \right|^{-1} d\theta \right) \\
&= c \left(s_k^{-\tau}|x| + \int_0^1 \left| \frac{\xi_k}{|\xi_k|} \frac{s_k^{1-\tau}}{|\xi|} + \theta \frac{\xi}{|\xi|} \right|^{-1} d\theta \right) \\
&\leq c \left(s_k^{-\tau}|x| + \int_0^1 \left(\left| \frac{\xi_k}{|\xi_k|} \frac{s_k^{1-\tau}}{|\xi|} \right| - 1 \right)^{-1} d\theta \right) \\
&= c \left(s_k^{-\tau}|x| + \left(\frac{s_k^{1-\tau}}{|\xi|} - 1 \right)^{-1} \right) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0,
\end{aligned}$$

da $s_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty$ (für $\xi = 0$ ist man nach der zweiten Zeilen fertig). Also

$$p_k(x, \xi) - p^* = (p_k(x, \xi) - p(x_k, \xi_k)) + (p(x_k, \xi_k) - p^*) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0. \quad \blacksquare$$

BEWEIS (von (6.4)): Es ist

$$[\text{op}(p)u](\xi) = \int e^{i\xi x'} p(\xi, x') \widehat{u}(x') \, dx',$$

also

$$\begin{aligned}
(\mathcal{F}_{\xi \rightarrow x} [\text{op}(p)\check{u}])(x) &= \int e^{-i\xi x} \left(\int e^{i\xi x'} p(\xi, x') u(x') \, dx' \right) d\xi \\
&= \text{Os} - \iint e^{i(x-x')\xi} p(-\xi, x') u(x') \, dx' \, d\xi.
\end{aligned}$$

Also ist $\mathcal{F}\text{op}(p)\mathcal{F}^{-1}$ der ψ do mit Doppelsymbol $p(-\xi, x')$. Die asymptotische Entwicklung in Satz 4.5²⁸ liefert die Behauptung. \blacksquare

Lemma 6.10 *Es sei $R : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Dann sind äquivalent:*

a) $R = \text{op}(r)$ für ein $r \in S^{-\infty, -\infty}(\mathbb{R}^n)$.

²⁸in der Version für Doppelsymbolklassen $S^{m, \mu, m', \mu'}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, die definiert sind durch

$$|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \partial_{\xi'}^{\alpha'} \partial_{x'}^{\beta'} p(x, \xi, x', \xi')| \leq C \langle x \rangle^{m-|\beta|} \langle \xi \rangle^{\mu-|\alpha|} \langle x' \rangle^{m'-|\beta'|} \langle \xi' \rangle^{\mu'-|\alpha'|}.$$

b) Es gibt ein $k \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$ mit $(Ru)(x) = \int k(x, y)u(y) dy$ für alle $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

BEWEIS: a) \Rightarrow b): Da $S^{-\infty, -\infty}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{S}(\mathbb{R}_{(x, \xi)}^{2n})$, ist

$$\tilde{k}(x, z) := \int e^{iz\xi} r(x, \xi) d\xi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_{(x, z)}^{2n}).$$

Wegen der Peetreschen Ungleichung ist also auch

$$k(x, y) := \tilde{k}(x, x - y) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_{(x, y)}^{2n}).$$

Offenbar ist

$$[\text{op}(r)u](x) = \int \left(\int e^{i(x-y)\xi} r(x, \xi) d\xi \right) u(y) dy = \int k(x, y)u(y) dy.$$

b) \Rightarrow a): Es ist

$$(Ru)(x) = \int k(x, y) \left(\int e^{iy\xi} \hat{u}(\xi) d\xi \right) dy = \int e^{ix\xi} \underbrace{\left(\int e^{i(y-x)\xi} k(x, y) dy \right)}_{=: r(x, \xi)} \hat{u}(\xi) d\xi.$$

Es ist $r \in S^{-\infty, -\infty}(\mathbb{R}^n)$. ■

Satz 6.11 (Spektralinvarianz) Es sei $p \in S^{\mu, m}(\mathbb{R}^n)$ und

$$\text{op}(p) : H^{s, \delta}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H^{s-\mu, \delta-m}(\mathbb{R}^n)$$

ein Isomorphismus für ein $s = s_0$ und $\delta = \delta_0$. Dann ist $\text{op}(p)$ ein Isomorphismus für alle $s, \delta \in \mathbb{R}$ und

$$\text{op}(p)^{-1} = \text{op}(p^{(-1)}) \quad \text{für ein } p^{(-1)} \in S^{-\mu, -m}(\mathbb{R}^n).$$

BEWEIS: Wie im Beweis von Satz 6.9 können wir oBdA annehmen, dass $\mu = m = 0$ und $\text{op}(p) : L^2(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{\cong} L^2(\mathbb{R}^n)$.

1. Schritt: Nach Satz 6.9 ist p elliptisch. Also gibt es eine Parametrix $q \in S^{0,0}(\mathbb{R}^n)$, also

$$r_0 := q \# p - 1, \quad r_1 := p \# q - 1 \in S^{-\infty, -\infty}(\mathbb{R}^n).$$

Auf $L^2(\mathbb{R}^n)$ gilt daher

$$\text{op}(p)^{-1} = \text{op}(q) - \text{op}(r_0)\text{op}(p)^{-1}, \quad \text{op}(p)^{-1} = \text{op}(q) - \text{op}(p)^{-1}\text{op}(r_1).$$

Setzt man die erste in die zweite Gleichung ein, so folgt

$$\text{op}(p)^{-1} = \text{op}(q) - \text{op}(q)\text{op}(r_1) + \text{op}(r_0)\text{op}(p)^{-1}\text{op}(r_1) =: \text{op}(q - q \# r_1) + R.$$

Offenbar ist $q - q \# r_1 \in S^{0,0}(\mathbb{R}^n)$.

2. Schritt: Seien $k_j(x, y) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$ die Integralkerne von $\text{op}(r_j)$, vgl. Lemma 6.10. Betrachte k_j als

$$k_0(x, y) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_x^n, L^2(\mathbb{R}_y^n)), \quad k_1(x, y) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_y^n, L^2(\mathbb{R}_x^n)).$$

Dann hat $\text{op}(p)^{-1}\text{op}(r_1)$ den Integralkern

$$\tilde{k}_1(x, y) = [\text{op}(p)^{-1}k_1(\cdot, y)](x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_y^n, L^2(\mathbb{R}_x^n))$$

und R hat den Integralkern

$$k(x, y) = \int k_0(x, z)\tilde{k}_1(z, y) dz \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_{(x,y)}^{2n}).$$

Also ist $R = \text{op}(r)$ mit $r \in S^{-\infty, -\infty}$.

3. Schritt: Es ist $p^{(-1)} := q - q\#r_1 + r \in S^{0,0}(\mathbb{R}^n)$ und $\text{op}(p)^{-1} = \text{op}(p^{(-1)})$ auf $L^2(\mathbb{R}^n)$. Offenbar

$$\text{op}(p), \text{op}(p^{(-1)}) \in \mathcal{L}(H^{s,\delta}(\mathbb{R}^n)) \quad \forall s, \delta \in \mathbb{R}.$$

Zu $u \in H^{s,\delta}(\mathbb{R}^n)$ gibt es Folge $(u_k)_k \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ mit $u_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} u$ in $H^{s,\delta}(\mathbb{R}^n)$. Dann ist

$$\text{op}(p)\text{op}(p^{(-1)})u = \text{op}(p\#p^{(-1)})u \xleftarrow{k \rightarrow \infty} \text{op}(p\#p^{(-1)})u_k = \text{op}(p)\text{op}(p^{(-1)})u_k = u_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} u$$

(Konvergenz in $H^{s,\delta}(\mathbb{R}^n)$) und analog

$$\text{op}(p^{(-1)})\text{op}(p)u = u.$$

Dies zeigt die Behauptung. ■

Satz 6.12 *Es sei $p \in S^\mu(\mathbb{R}^n)$ elliptisch und $\mu > 0$. Es sei $s \in \mathbb{R}$. Dann gibt es genau einen abgeschlossenen Operatoren*

$$P : \mathcal{D}(P) \subset H^s(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H^s(\mathbb{R}^n)$$

mit $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{D}(P)$ und $P = \text{op}(p)$ auf $\mathcal{D}(P)$. Dieser ist gegeben durch

$$\mathcal{D}(P) = H^{s+\mu}(\mathbb{R}^n), \quad Pu = \text{op}(p)u.^{29}$$

BEWEIS: **1. Schritt:** Definiere P_{\max} durch

$$P_{\max} = \text{op}(p) \quad \text{auf} \quad \mathcal{D}(P_{\max}) := \{u \in H^s(\mathbb{R}^n) \mid \text{op}(p)u \in H^s(\mathbb{R}^n)\}.$$

Dann ist P_{\max} abgeschlossen: Sei dazu $(u_k)_k \subset \mathcal{D}(P_{\max})$ mit

$$u_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} u \quad \text{und} \quad P_{\max}u_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} v \quad \text{in} \quad H^s(\mathbb{R}^n).$$

Aus Satz 5.3 folgt, dass $P_{\max}u_k = \text{op}(p)u_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \text{op}(p)u$ in $H^{s-\mu}(\mathbb{R}^n)$. Wegen der Eindeutigkeit des Grenzwertes muss also $\text{op}(p)u = v \in H^s(\mathbb{R}^n)$ sein, d.h. $u \in \mathcal{D}(P_{\max})$ und $P_{\max}u = v$.

²⁹die analoge Aussage gilt für $p \in S^{\mu,m}$ mit $\mu, m \geq 0$. Dann ist $\mathcal{D}(P) = H^{s+\mu,\delta+m}(\mathbb{R}^n) \subset H^{s,\delta}(\mathbb{R}^n)$.

2. Schritt: Sei nun P irgendeine abgeschlossener Operator mit $P = \text{op}(p)$ auf $\mathcal{D}(P)$. Sei $q \in S^{-\mu}(\mathbb{R}^n)$ eine Parametrix zu p und $r := q\#p - 1$. Dann ist $r \in S^{-\infty}(\mathbb{R}^n)$ und für $u \in \mathcal{D}(P)$ gilt

$$u = \text{op}(q\#p)u - \text{op}(r)u = \text{op}(q)(Pu) - \text{op}(r)u \in H^{s+\mu}(\mathbb{R}^n).$$

Also ist $\mathcal{D}(P) \subset H^{s+\mu}(\mathbb{R}^n)$.

3. Schritt: Nach dem ersten Schritt ist

$$\text{op}(p) : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset H^s(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H^s(\mathbb{R}^n)$$

abschließbar. Bezeichne mit P_{\min} den Abschluß. Dieser ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(P_{\min}) &= \{u \in H^s(\mathbb{R}^n) \mid \exists (u_k)_k \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \quad \exists v \in H^s(\mathbb{R}^n) : \\ &\quad u_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} u \text{ und } \text{op}(p)u_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} v \text{ in } H^s(\mathbb{R}^n)\}, \\ P_{\min}u &= v. \end{aligned}$$

Aus Satz 5.3 folgt, dass $P_{\min} = \text{op}(p)$ auf $\mathcal{D}(P_{\min})$. Wegen der Dichtheit von $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ in $H^{s+\mu}(\mathbb{R}^n)$ ist offenbar $H^{s+\mu}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{D}(P_{\min})$.

4. Schritt: Für irgendeine abgeschlossenen Operatoren mit $P = \text{op}(p)$ auf $\mathcal{D}(P)$ gilt also

$$H^{s+\mu}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{D}(P_{\min}) \subset \mathcal{D}(P) \subset H^{s+\mu}(\mathbb{R}^n).$$

Dies zeigt offenbar die Behauptung. ■

7 Parameterabhängige ψ do

Im folgenden sei Σ eine offene Teilmenge von \mathbb{R}^l für ein $l \in \mathbb{N}$.

Definition 7.1 *Es sei $\mu \in \mathbb{R}$. Wir definieren $S^\mu(\mathbb{R}^n; \Sigma)$ als Raum aller C^∞ -Funktionen $p : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \Sigma \rightarrow \mathbb{C}$ mit*

$$\|p\|_k^\mu := \sup_{\substack{x, \xi \in \mathbb{R}^n, \eta \in \Sigma, \\ |\alpha| + |\beta| \leq k}} |\partial_{(\xi, \eta)}^\alpha \partial_x^\beta p(x, \xi; \eta)| \langle \xi, \eta \rangle^{|\alpha| - \mu} < \infty$$

für alle $k \in \mathbb{N}_0$, wobei

$$\langle \xi, \eta \rangle := \langle (\xi, \eta) \rangle = (1 + |\xi|^2 + |\eta|^2)^{1/2}.$$

Wir sprechen von parameter-abhängigen Symbolen. Weiterhin definiert

$$[\text{op}(p)(\eta)u](x) = \int e^{ix\xi} p(x, \xi; \eta) d\xi, \quad u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n),$$

eine Familie von ψ do mit Parameter η .

Beispiel 7.2 a) Es sei $a(x, \xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \xi^\alpha$ mit $a_\alpha \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$ und $b(\eta)$ ein Polynom in η vom Grad m' . Dann ist

$$p(x, \xi; \eta) := a(x, \xi) + b(\eta) \in S^\mu(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^l)$$

für $\mu := \max(m, m')$, da p ein Polynom vom Grad μ in (ξ, η) ist.

b) Für Symbole $a(x, \xi) \in S^m(\mathbb{R}^n)$ ist die Aussage von a) im allgemeinen falsch!

Satz 7.3 Es sei $\nu \geq \mu$ und $s \in \mathbb{R}$. Dann gibt es ein $k \in \mathbb{N}_0$ und ein $C \geq 0$ mit

$$\|\text{op}(p)(\eta)\|_{\mathcal{L}(H^s(\mathbb{R}^n), H^{s-\nu}(\mathbb{R}^n))} \leq C \|p\|_k^\mu \langle \eta \rangle^{\mu-\nu_-}, \quad \nu_- := \min(\nu, 0),$$

für alle $p \in S^\mu(\mathbb{R}^n; \Sigma)$. Ist $\mu \leq 0$, so gilt insbesondere

$$\|\text{op}(p)(\eta)\|_{\mathcal{L}(H^s(\mathbb{R}^n))} \leq C \|p\|_k^\mu \langle \eta \rangle^\mu.$$

BEWEIS: Für festes η ist $\tilde{p}(x, \xi) := p(x, \xi; \eta) \in S^\nu(\mathbb{R}^n)$. Nach Satz 5.3 ist $\text{op}(p)(\eta) \in \mathcal{L}(H^s(\mathbb{R}^n), H^{s-\nu}(\mathbb{R}^n))$ und

$$\|\text{op}(p)(\eta)\|_{\mathcal{L}(H^s(\mathbb{R}^n), H^{s-\nu}(\mathbb{R}^n))} \leq C_{s,\nu} \sup_{\substack{x, \xi \in \mathbb{R}^n, \\ |\alpha|+|\beta| \leq k}} |\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta p(x, \xi; \eta)| \langle \xi \rangle^{|\alpha|-\nu}$$

mit einem $k = k(s, \nu)$. Nun ist aber

$$|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta p(x, \xi; \eta)| \langle \xi \rangle^{|\alpha|-\nu} \leq \|p\|_k^\mu \langle \xi, \eta \rangle^{\mu-|\alpha|} \langle \xi \rangle^{|\alpha|-\nu} \leq \|p\|_k^\mu \langle \xi, \eta \rangle^\mu \langle \xi \rangle^{-\nu}.$$

Für $\mu \geq 0$ ist $\nu_- = 0$ und

$$\langle \xi, \eta \rangle^\mu \langle \xi \rangle^{-\nu} \leq 2^\mu \langle \xi \rangle^{\mu-\nu} \langle \eta \rangle^\mu \leq 2^\mu \langle \eta \rangle^\mu \quad (\text{da } \nu \geq \mu).^{30}$$

Für $\mu \leq 0$ ist

$$\langle \xi, \eta \rangle^\mu \langle \xi \rangle^{-\nu} \leq \langle \xi, \eta \rangle^{\mu-\nu_-} \langle \xi \rangle^{\nu_--\nu} \leq \langle \xi, \eta \rangle^{\mu-\nu_-} \leq \langle \eta \rangle^{\mu-\nu_-}.^{31}$$

Dies liefert offenbar die Behauptung. ■

Satz 7.4 Für $p_j \in S^{\mu_j}(\mathbb{R}^n; \Sigma)$ ist

$$\text{op}(p_1)(\eta) \text{op}(p_2)(\eta) = \text{op}(p_1 \# p_2)(\eta),$$

wobei $p_1 \# p_2 \sim \sum_{|\alpha|=0}^\infty \frac{1}{\alpha!} (\partial_\xi^\alpha p_1)(D_x^\alpha p_2)$, d.h. für alle $N \in \mathbb{N}_0$ ist

$$(p_1 \# p_2)(x, \xi; \eta) - \sum_{|\alpha|=0}^{N-1} \frac{1}{\alpha!} (\partial_\xi^\alpha p_1)(x, \xi; \eta) (D_x^\alpha p_2)(x, \xi; \eta) \in S^{\mu_1+\mu_2-N}(\mathbb{R}^n; \Sigma).$$

³⁰schreibe $\langle \xi, \eta \rangle = \langle (\xi, 0) + (0, \eta) \rangle$ und verwende die Peetresche Ungleichung

³¹die erste Ungleichung gilt, da $\nu_- \leq 0$ ist, die letzte wegen $\mu - \nu_- \leq 0$

Satz 7.5 $p \in S^\mu(\mathbb{R}^n; \Sigma)$ heißt (parameter-)elliptisch, falls es $C, R \geq 0$ gibt mit

$$\left| \frac{1}{p(x, \xi; \eta)} \right| \leq C \langle \xi, \eta \rangle^{-\mu} \quad \forall x \quad \forall |(\xi, \eta)| \geq R.$$

Dann (und nur dann!) hat p eine Parametrix $q \in S^{-\mu}(\mathbb{R}^n; \Sigma)$, d.h.

$$(p\#q)(x, \xi; \eta) - 1, (q\#p)(x, \xi; \eta) - 1 \in S^{-\infty, -\infty}(\mathbb{R}^n; \Sigma).$$

Notation: Für ein offenes U und einen Fréchetraum E setze

$$\mathcal{S}(U, E) = \left\{ a \in C^\infty(U, E) \mid \sup_{x \in U} \|\partial^\alpha a(x)\| \langle x \rangle^N < \infty \right. \\ \left. \text{für alle } \alpha, N \text{ und jede Halbnorm } \|\cdot\| \text{ von } E \right\}.$$

Satz 7.6 Es sei $p \in S^\mu(\mathbb{R}^n; \Sigma)$ elliptisch. Dann gibt es ein $R \geq 0$ derart, dass

$$\text{op}(p)(\eta) : H^{s+\mu}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H^s(\mathbb{R}^n)$$

ein Isomorphismus ist für alle $s \in \mathbb{R}$ und für alle

$$\eta \in \Sigma_R := \{\eta \in \Sigma \mid |\eta| > R\}.$$

Weiterhin ist für jede Parametrix $q \in S^{-\mu}(\mathbb{R}^n; \Sigma)$ von p

$$\text{op}(p)(\eta)^{-1} - \text{op}(q)(\eta) \in \mathcal{S}(\Sigma_R, \mathcal{L}(H^t(\mathbb{R}^n), H^{t'}(\mathbb{R}^n))) \quad \forall t, t' \in \mathbb{R}.$$

Insbesondere: Ist $\mu \geq 0$, so gilt

$$\|\text{op}(p)(\eta)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H^s(\mathbb{R}^n))} \leq C_s \langle \eta \rangle^{-\mu} \quad \forall |\eta| > R. \quad (7.1)$$

BEWEIS: Sei zunächst $s = s_0$ fixiert. Nach Wahl von q ist $\text{op}(q)(\eta) : H^{s_0}(\mathbb{R}^n) \rightarrow H^{s_0+\mu}(\mathbb{R}^n)$ und

$$\text{op}(p)(\eta)\text{op}(q)(\eta) = 1 - \text{op}(r)(\eta), \quad r \in S^{-\infty}(\mathbb{R}^n; \Sigma) = \mathcal{S}(\Sigma, S^{-\infty}(\mathbb{R}^n)).$$

Insbesondere ist nach Satz 5.3

$$\text{op}(r)(\eta) \in \mathcal{S}(\Sigma, \mathcal{L}(H^t(\mathbb{R}^n), H^{t'}(\mathbb{R}^n))) \quad \forall t, t' \in \mathbb{R}. \quad (7.2)$$

Also gibt es ein $R_r \geq 0$ mit

$$\|\text{op}(r)(\eta)\|_{\mathcal{L}(H^{s_0}(\mathbb{R}^n))} \leq \frac{1}{2} \quad \forall |\eta| \geq R_r.$$

Daher ist

$$\text{op}(p)(\eta)\text{op}(q)(\eta)(1 - \text{op}(r)(\eta))^{-1} = 1 \quad \forall |\eta| \geq R_r.$$

Analog konstruiert man eine Linksinverse von $\text{op}(p)(\eta)$ für $|\eta| \geq R_l$. Also ist $\text{op}(p)(\eta)$ invertierbar mit

$$\text{op}(p)(\eta)^{-1} = \text{op}(q)(\eta)(1 - \text{op}(r)(\eta))^{-1} \quad \forall |\eta| \geq R := \max(R_l, R_r).$$

Weiterhin ist

$$(1 - \text{op}(r)(\eta))^{-1} = 1 + \text{op}(r)(\eta) - \text{op}(r)(\eta)(1 - \text{op}(r)(\eta))^{-1} \text{op}(r)(\eta).$$

Setze nun

$$S(\eta) = \text{op}(q\#r)(\eta) - \text{op}(q\#r)(\eta)(1 - \text{op}(r)(\eta))^{-1} \text{op}(r)(\eta).$$

Wegen (7.2) ist

$$S(\eta) \in \mathcal{S}(\Sigma_R, \mathcal{L}(H^t(\mathbb{R}^n), H^{t'}(\mathbb{R}^n))) \quad \forall t, t' \in \mathbb{R}$$

und, als Operator $H^{s_0}(\mathbb{R}^n) \rightarrow H^{s_0+\mu}(\mathbb{R}^n)$,

$$\text{op}(p)(\eta)^{-1} = \text{op}(q)(\eta) + S(\eta) \quad \forall |\eta| \geq R.$$

Für beliebiges $s \in \mathbb{R}$ ist

$$A_s(\eta) := \text{op}(q)(\eta) + S(\eta) \in \mathcal{L}(H^s(\mathbb{R}^n), H^{s+\mu}(\mathbb{R}^n)).$$

Da $A_s(\eta) = A_{s_0}(\eta)$ auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ und $\text{op}(p)(\eta) : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$\text{op}(p)(\eta)A_s(\eta)u = u, \quad A_s(\eta)\text{op}(p)(\eta)v = v \quad \forall |\eta| \geq R$$

für alle $u, v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Per Dichtheitsargument gelten diese Identitäten dann auch für $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$ und $v \in H^{s+\mu}(\mathbb{R}^n)$. (7.1) folgt aus Satz 7.3 angewendet auf q . \blacksquare

8 Resolventen und H_∞ -Funktionalkalkül

Im folgenden sei

$$\Lambda_\theta = \{re^{i\varphi} \mid r > 0 \text{ und } \theta < \varphi < 2\pi - \theta\} \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad 0 < \theta < \pi. \quad (8.1)$$

Satz 8.1 (Erzeuger analytischer Halbgruppen) *Es sei $A : \mathcal{D}(A) \subset X \rightarrow X$ ein abgeschlossener, dicht definierter Operator im Banachraum X . Es gebe ein $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ und ein $\varepsilon > 0$ derart, dass $\lambda_0 + \Lambda_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} \subset \rho(A)$ und*

$$\|(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{C}{|\lambda - \lambda_0|} \quad \forall \lambda \in \lambda_0 + \Lambda_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}.^{32}$$

Dann ist

$$e^{-zA} := \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{-z\lambda} (\lambda - A)^{-1} d\lambda \in \mathcal{L}(X) \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \overline{\Lambda_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}}$$

holomorph in z und für $u(t) := e^{-tA}u_0$, $u_0 \in X$, ist $u \in C([0, \infty[, X) \cap C^\infty(]0, \infty[, X)$ mit

$$\dot{u}(t) + Au(t) = 0 \quad \forall t > 0, \quad u(0) = u_0.$$

Dabei ist Γ der Rand von $(\lambda_0 + \Lambda_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}) \setminus \{\lambda \mid |\lambda| < 1\}$.³³

³²Beachte: Wegen Satz 10.4.c) ist dann auch $\overline{\lambda_0 + \Lambda_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}} \setminus \{\lambda_0\} \subset \rho(A)$ und es gilt dort dieselbe Abschätzung.

³³von „unten nach oben“ durchlaufen

Definition 8.2 Es sei Λ wie in (8.1) und $A = \text{op}(a)$ mit $a(x, \xi) = \sum_{|\alpha| \leq \mu} a_\alpha(x) \xi^\alpha$ und $a_\alpha \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$. Weiterhin sei Σ ein Sektor derart, dass

$$\eta \mapsto \eta^\mu : \Sigma \longrightarrow \Lambda$$

eine Bijektion ist.³⁴ A heißt Λ -elliptisch, falls

$$p(x, \xi; \eta) := \eta^\mu - a(x, \xi) \in S^\mu(\mathbb{R}^n; \Sigma)$$

elliptisch ist.³⁵

Satz 8.3 Es sei A ein $\Lambda_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}$ -elliptischer Differentialoperator der Ordnung μ . Dann erfüllt A die Voraussetzungen von Satz 8.1 mit $X = H^s(\mathbb{R}^n)$ und $\mathcal{D}(A) = H^{s+\mu}(\mathbb{R}^n)$ für beliebiges $s \in \mathbb{R}$.

BEWEIS: Da $p(x, \xi; 0) = -a(x, \xi)$, impliziert die Elliptizität von p die von a . Nach Satz 6.12 ist A mit $\mathcal{D}(A) = H^{s+\mu}(\mathbb{R}^n)$ abgeschlossen in $H^s(\mathbb{R}^n)$. Für $\lambda = \eta^\mu$ ist nach Satz 7.3

$$\|(\lambda - A)^{-1}\| = \|\text{op}(p)(\eta)^{-1}\| \leq \frac{C}{|\eta|^\mu} = \frac{C}{|\lambda|}$$

falls $|\eta| > R$, d.h. $|\lambda| > R^\mu$, mit einem geeigneten $R \geq 0$. Wähle nun $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ derart, dass

$$\overline{\lambda_0 + \Lambda_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}} \subset \Lambda_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} \setminus \{\lambda \mid |\lambda| \leq R^\mu\}.$$

Dann gilt die gewünschte Resolventenabschätzung. ■

Satz 8.4 Es sei Λ wie in (8.1) und $A = \text{op}(a)$ mit $a(x, \xi) = \sum_{|\alpha| \leq \mu} a_\alpha(x) \xi^\alpha$ und $a_\alpha \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$. Dann sind äquivalent:

- a) A ist Λ -elliptisch.
- b) Für das sogenannte Hauptsymbol $\sigma(A)(x, \xi) = \sum_{|\alpha|=\mu} a_\alpha(x) \xi^\alpha$ von A gilt

$$D := \overline{\{\sigma(A)(x, \xi) \mid x \in \mathbb{R}^n, |\xi| = 1\}} \subset \mathbb{C} \setminus \overline{\Lambda}.$$

BEWEIS: Sei Σ zu Λ gewählt wie in Definition 8.2.

Vorbemerkung: Wegen

$$\begin{aligned} \eta^\mu - a(x, \xi) &= \eta^\mu - \sigma(A)(x, \xi) + (\sigma(A)(x, \xi) - a(x, \xi)) \\ &\equiv \eta^\mu - \sigma(A)(x, \xi) \pmod{S^{\mu-1}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^2)} \end{aligned}$$

ist A genau dann Λ -elliptisch, wenn es $\sigma(A)(x, D)$ ist. Wir können also oBdA annehmen, dass $a = \sigma(A)$ ist.

b) \Rightarrow a): Setze $p(x, \xi; \eta) = \eta^\mu - a(x, \xi)$. Da für $\xi \neq 0$

$$a(x, \xi) = |\xi|^{-\mu} a(x, \xi/|\xi|) \in |\xi|^{-\mu} D \subset \mathbb{C} \setminus \overline{\Lambda}$$

³⁴Für Λ_δ wähle zum Beispiel $\Sigma = \{s e^{i\alpha} \mid s > 0, \frac{\delta}{\mu} < \alpha < \frac{2\pi-\delta}{\mu}\}$.

³⁵fasse dabei η^μ als Polynom in $\eta \in \mathbb{R}^2$ auf

ist $p(x, \xi; \eta)^{-1} \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \Sigma)$. Weiterhin ist

$$p(x, \xi; \eta)^{-1} = |(\xi, \eta)|^{-\mu} p\left(x, \frac{\xi}{|(\xi, \eta)|}; \frac{\eta}{|(\xi, \eta)|}\right)^{-1} \quad \forall (\xi, \eta) \neq 0. \quad (8.2)$$

Wir zeigen jetzt, dass

$$\sup_{\substack{(x, \xi, \eta) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \Sigma, \\ |(\xi, \eta)|=1}} |p(x, \xi; \eta)^{-1}| < \infty. \quad (8.3)$$

Dies ist genau dann der Fall, wenn

$$m := \inf_{\substack{(x, \xi, \eta) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \Sigma, \\ |(\xi, \eta)|=1}} |\eta^\mu - a(x, \xi)| > 0.$$

Sei $((x_k, \xi_k, \eta_k))_k$ eine Folge mit $|(\xi_k, \eta_k)| = 1$ und $|\eta_k^\mu - a(x_k, \xi_k)| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} m$. OBdA gibt es $(\xi_*, \eta_*) \in \mathbb{R}^n \times \bar{\Sigma}$ mit $(\xi_k, \eta_k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} (\xi_*, \eta_*)$. Ist $\xi_* = 0$, so ist

$$|\eta_k^\mu - a(x_k, \xi_k)| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} |\eta_*^\mu - 0| = |\eta_*|^\mu = 1,$$

also $m = 1$. Ist $\xi_* \neq 0$, so gibt es $0 < a < b < \infty$ und ein $k_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$a(x_k, \xi_k) = |\xi_k|^{-\mu} a(x_k, \xi_k/|\xi_k|) \in \tilde{D} := \{rd \mid r \in [a, b], d \in D\} \subset \mathbb{C} \setminus \bar{\Lambda} \quad \forall k \geq k_0.$$

Als Bild von $[a, b] \times D$ unter der stetigen Funktion $(r, d) \mapsto rd$ ist \tilde{D} kompakt. Daher ist

$$|\eta_k^\mu - a(x_k, \xi_k)| \geq \text{dist}(\tilde{D}, \bar{\Lambda}) > 0 \quad \forall k \geq k_0$$

und somit auch $m > 0$. Aus (8.2) und (8.3) folgt offenbar, dass

$$|p(x, \xi; \eta)^{-1}| \leq C \langle \xi, \eta \rangle^{-\mu} \quad \forall |(\xi, \eta)| \geq 1.$$

a) \Rightarrow b): Ähnlich. ■

Beispiel 8.5 Es sei $b \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n \times n})$ punktweise symmetrisch mit

$$(b(x)\xi, \xi)_{\mathbb{R}^n} \geq c > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad \forall |\xi| = 1. \quad {}^{36}$$

Ist dann A ein Differentialoperator wie oben mit $\mu = 2$ und $\sigma(A)(x, \xi) = (b(x)\xi, \xi)$, so ist A Λ -elliptisch für jedes Λ mit $\bar{\Lambda} \subset \mathbb{C} \setminus]0, \infty[$. Insbesondere ist $A = -\Delta$ ein solcher Operator.

Definition 8.6 Es sei Λ wie in (8.1). Mit $H = H(\Lambda)$ bezeichne den Raum aller holomorphen, beschränkten Funktionen $f : \mathbb{C} \setminus \bar{\Lambda} \rightarrow \mathbb{C}$ für die ein $s = s(f) > 0$ existiert derart, dass

$$\sup_{\lambda \in \mathbb{C} \setminus \Lambda} (|\lambda|^{-s} + |\lambda|^s) |f(\lambda)| < \infty.$$

³⁶d.h. b ist gleichmäßig positiv definit

Bemerkung 8.7 Es sei $f \in H(\Lambda)$. Dann existieren die nicht-tangentialen Grenzwerte

$$f(z) = \lim_{\Lambda \ni \lambda \rightarrow z} f(\lambda) \quad \text{f.f.a. } z \in \partial\Lambda$$

und man kann $f|_{\partial\Lambda} \in L^\infty(\partial\Lambda)$ definieren. Ist $A : \mathcal{D}(A) \subset X \rightarrow X$ wie in Satz 8.1 mit $\lambda_0 = 0$, so existiert also

$$f(A) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Lambda} f(\lambda)(\lambda - A)^{-1} d\lambda \in \mathcal{L}(X). \quad (8.4)$$

Definition 8.8 Es sei $A : \mathcal{D}(A) \subset X \rightarrow X$ wie in Satz 8.1 mit $\lambda_0 = 0$. A besitzt einen beschränkten H_∞ -Kalkül bezüglich $\mathbb{C} \setminus \bar{\Lambda}$, falls es eine Konstante $M \geq 0$ gibt mit

$$\|f(A)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M \|f\|_\infty \quad \forall f \in H(\Lambda),$$

wobei $\|f\|_\infty = \sup_{\lambda \in \mathbb{C} \setminus \bar{\Lambda}} |f(\lambda)|$.

Bemerkung 8.9 Besitzt $A : \mathcal{D}(A) \subset X \rightarrow X$ einen beschränkten H_∞ -Kalkül und hat zusätzlich dichtes Bild, so kann man durch geeignete Approximation für jedes beschränkte, holomorphe $F : \mathbb{C} \setminus \bar{\Lambda} \rightarrow \mathbb{C}$ ein $F(A) \in \mathcal{L}(X)$ definieren, für den wieder gilt

$$\|F(A)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M \|F\|_\infty.$$

Zum Beispiel mit $F(\lambda) = \lambda^{it}$ mit $t \in \mathbb{R}$ folgt

$$F(A) = A^{it} \in \mathcal{L}(X), \quad \|A^{it}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M e^{\theta|t|} \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (8.5)$$

wobei $\Lambda = \Lambda_\theta$ wie in (8.1). Man sagt, dass A beschränkte imaginäre Potenzen besitzt.

Satz 8.10 (Dore-Venni) $A : \mathcal{D}(A) \subset X \rightarrow X$ habe beschränkte imaginäre Potenzen und in (8.5) sei $\theta < \frac{\pi}{2}$. Dann hat

$$\dot{u}(t) + Au(t) = f(t) \quad \text{für } 0 < t < T, \quad u(0) = 0$$

für jedes $f \in L^p([0, T], X)$ mit $1 < p < \infty$ genau eine Lösung

$$u \in W_p^1([0, T], X) \cap L^p([0, 1], \mathcal{D}(A)).$$

Satz 8.11 Es sei $A = \sum_{|\alpha| \leq \mu} a_\alpha(x) D_x^\alpha$ mit $a_\alpha \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$ Λ -elliptisch. Dann gibt es ein $\lambda_0 \geq 0$ derart, dass

$$\lambda_0 + A : H^{s+\mu}(\mathbb{R}^n) \subset H^s(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H^s(\mathbb{R}^n) \quad (s \in \mathbb{R} \text{ beliebig})$$

einen beschränkten H_∞ -Kalkül bzgl. $\mathbb{C} \setminus \bar{\Lambda}$ besitzt.

Lemma 8.12 Es seien die Voraussetzungen und Bezeichnungen wie in Satz 8.11 und

$$a_t(x, \xi) := t + \sum_{|\alpha| \leq \mu} a_\alpha(x) \xi^\alpha, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Dann gibt es ein $t \geq 0$ derart, dass für jedes $t \geq t_0$ gilt:

$$\sup_{\substack{(\xi, \lambda) \in \mathbb{R}^n \times \bar{\Lambda}, \\ x \in \mathbb{R}^n}} \left| (\lambda - a_t(x, \xi))^{-1} \right| ((\xi)^\mu + |\lambda|) < \infty.$$

BEWEIS VON SATZ 8.11:

1. Schritt: Nach Lemma 8.12 und Satz 7.6 können wir $\lambda_0 \geq 0$ so wählen, dass $\tilde{A} := \lambda_0 + A$ folgende Eigenschaften hat:

$$\left| (\eta^\mu - \tilde{a}(x, \xi))^{-1} \right| \leq C \langle \xi, \eta \rangle \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad \forall (\xi, \eta) \in \mathbb{R}^n \times \bar{\Sigma}$$

(wobei $\tilde{a}(x, \xi)$ das Symbol von \tilde{A} bezeichnet) und

$$(\eta^\mu - \tilde{A})^{-1} = \text{op}(q)(\eta) + S(\eta) \quad \forall \eta \in \bar{\Sigma}$$

mit

$$q(x, \xi; \eta) \in S^{-\mu}(\mathbb{R}^n; \bar{\Sigma}), \quad S(\eta) \in \bigcap_{r, t \in \mathbb{R}} \mathcal{S}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(H^r(\mathbb{R}^n), H^t(\mathbb{R}^n))).$$

Insbesondere gilt

$$\|(\lambda - \tilde{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(H^s(\mathbb{R}^n))} \leq C \frac{1}{|\lambda|} \quad \forall 0 \neq \lambda \in \bar{\Lambda}.$$

Nach Konstruktion der Parametrix ist

$$r(x, \xi; \eta) := q(x, \xi; \eta) - (\eta^\mu - \tilde{a}(x, \xi))^{-1} \in S^{-\mu-1}(\mathbb{R}^n; \bar{\Sigma}). \quad (8.6)$$

2. Schritt: Nach Definition ist

$$f(\tilde{A}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Lambda} f(\lambda) (\lambda - \tilde{A})^{-1} d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Sigma} f(\eta^\mu) (\eta^\mu - \tilde{A})^{-1} \eta^{\mu-1} d\eta$$

für $f \in H(\Lambda)$. Wir wollen zeigen: Es gibt ein $M \geq 0$ mit

$$\|f(\tilde{A})\|_{\mathcal{L}(H^s(\mathbb{R}^n))} \leq M \|f\|_\infty \quad \forall f \in H(\Lambda).$$

3. Schritt: Offenbar ist

$$\left\| \int_{\partial\Sigma} f(\eta^\mu) S(\eta) \eta^{\mu-1} d\eta \right\|_{\mathcal{L}(H^s(\mathbb{R}^n))} \leq \|f\|_\infty \int_{\partial\Sigma} \|S(\eta)\|_{\mathcal{L}(H^s(\mathbb{R}^n))} |\eta|^{\mu-1} d\eta = M \|f\|_\infty$$

mit $M = M(S)$.

4. Schritt: Für $f \in H(\Lambda)$ setze

$$r_f(x, \xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Sigma} f(\eta^\mu) r(x, \xi; \eta) \eta^{\mu-1} d\eta$$

mit r aus (8.6). Bis auf Orientierung haben die beiden Teile von $\partial\Sigma$ eine Parametrisierung der Form $t \mapsto te^{i\varphi} : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{C}$. Es folgt, dass

$$\begin{aligned} |\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta r_f(x, \xi)| &\leq C_{\alpha\beta} \|f\|_\infty \int_0^\infty \langle \xi, t \rangle^{-\mu-1-|\alpha|} t^{\mu-1} dt \\ &\stackrel{t=s\langle\xi\rangle}{=} C_{\alpha\beta} \|f\|_\infty \int_0^\infty \langle \xi, s\langle\xi\rangle \rangle^{-\mu-1-|\alpha|} \langle \xi \rangle^\mu s^{\mu-1} ds. \end{aligned}$$

Nun ist aber

$$\langle \xi, s \langle \xi \rangle \rangle^2 = (1 + |\xi|^2 + s^2(1 + |\xi|^2)) = (1 + |\xi|^2)(1 + s^2) = \langle \xi \rangle^2 \langle s \rangle^2.$$

Wir erhalten also

$$\begin{aligned} |\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta r_f(x, \xi)| &\leq C_{\alpha\beta} \|f\|_\infty \int_0^\infty \langle \xi \rangle^{-\mu-1-|\alpha|} \langle s \rangle^{-\mu-1-|\alpha|} \langle \xi \rangle^\mu s^{\mu-1} ds \\ &\leq C_{\alpha\beta} \|f\|_\infty \langle \xi \rangle^{-1-|\alpha|} \int_0^\infty \langle s \rangle^{-2} ds = C'_{\alpha\beta} \|f\|_\infty \langle \xi \rangle^{-1-|\alpha|}. \end{aligned}$$

Also ist $\left\{ \frac{1}{\|f\|_\infty} r_f \mid 0 \neq f \in H(\Lambda) \right\}$ eine beschränkte Teilmenge von $S^{-1}(\mathbb{R}^n)$. Nach Satz 5.3 gibt es also ein $M \geq 0$ mit

$$\|\text{op}(r_f)\|_{\mathcal{L}(H^s(\mathbb{R}^n))} \leq M \|f\|_\infty \quad \forall f \in H(\Lambda).$$

5. Schritt: Für $f \in H(\Lambda)$ setze

$$p_f(x, \xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Lambda} f(\lambda) (\lambda - \tilde{a}(x, \xi))^{-1} d\lambda.$$

Sei nun (x, ξ) fixiert. Dann ist der Integrand außerhalb der Menge

$$\Lambda \cup \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \leq \|\tilde{a}\|_0^\mu \langle \xi \rangle^\mu\}$$

holomorph und ist dort $O(|\lambda|^{-1-\varepsilon})$ für ein $\varepsilon = \varepsilon(f) > 0$ (beachte das Abfallverhalten von Funktionen aus $H(\Lambda)$). Es folgt, dass

$$p_f(x, \xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}_\xi} f(\lambda) (\lambda - \tilde{a}(x, \xi))^{-1} d\lambda$$

mit dem in Abbildung 1 dargestellten Integrationsweg \mathcal{C}_ξ . Auf dem Kreisanteil von \mathcal{C}_ξ gilt die Abschätzung

$$\left| (\lambda - \tilde{a}(x, \xi))^{-1} \right| \leq \frac{1}{\|\tilde{a}\|_0^\mu} \langle \xi \rangle^{-\mu},$$

auf den radialen Teilen ist (insbesondere)

$$\left| (\lambda - \tilde{a}(x, \xi))^{-1} \right| \leq C \langle \xi \rangle^{-\mu}.$$

Es folgt, dass

$$|p_f(x, \xi)| \leq C \|f\|_\infty \text{Länge}(\mathcal{C}_\xi) \langle \xi \rangle^{-\mu} \leq 4C(\pi + 1) \|\tilde{a}\|_0^\mu \|f\|_\infty \quad \forall x, \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Unter Berücksichtigung der Kettenregel kann man analog zeigen, dass

$$|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta p_f(x, \xi)| \leq C_{\alpha\beta} \|f\|_\infty \langle \xi \rangle^{-|\alpha|} \quad \forall x, \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Also ist $\left\{ \frac{1}{\|f\|_\infty} p_f \mid 0 \neq f \in H(\Lambda) \right\}$ eine beschränkte Teilmenge von $S^0(\mathbb{R}^n)$. Wieder nach Satz 5.3 gibt es ein $M \geq 0$ mit

$$\|\text{op}(p_f)\|_{\mathcal{L}(H^s(\mathbb{R}^n))} \leq M \|f\|_\infty \quad \forall f \in H(\Lambda).$$

6. Schritt: Die Behauptung folgt nun aus

$$f(\tilde{A}) = \text{op}(p_f) + \text{op}(r_f) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Sigma} f(\eta^\mu) S(\eta) \eta^{\mu-1} d\eta.$$

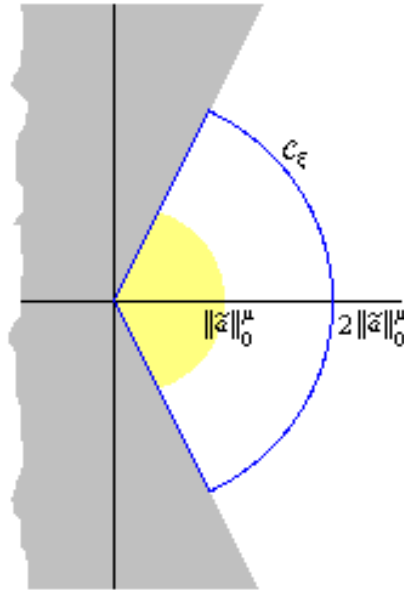


Abbildung 1: Der im Uhrzeiger Sinn zu durchlaufende Weg \mathcal{C}_ξ (blau)

9 Wiederholung: Fredholm-Operatoren

Satz 9.1 *Es seien X_0, X_1 Banachräume. Ein Operator $K \in \mathcal{L}(X_0, X_1)$ heißt kompakt, wenn eine der folgenden äquivalenten Eigenschaften gilt:*

- a) *K bildet beschränkte in relativ kompakte Mengen ab.*
- b) *Ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge, so hat $(Kx_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge.*

Sind X_0, X_1 Hilberträume, so sind a) und b) äquivalent zu

- c) *Es gibt $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\dim \text{Bild } K_n < \infty$ und $K_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} K$ in $\mathcal{L}(X_0, X_1)$.*

Die Menge

$$\mathcal{K}(X_0, X_1) := \{K \in \mathcal{L}(X_0, X_1) \mid K \text{ kompakt}\}$$

bildet einen abgeschlossenen Unterraum von $\mathcal{L}(X_0, X_1)$. Es gelten folgende Aussagen:

- i) *Ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ schwach konvergent gegen x ,³⁷ so ist $(Kx_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent gegen Kx .*
- ii) *Sind $P_0 \in \mathcal{L}(X, X_0)$, $P_1 \in \mathcal{L}(X_1, X)$, so sind $KP_0 \in \mathcal{K}(X, X_0)$ und $P_1K \in \mathcal{K}(X_0, X)$.*

Satz 9.2 *Es seien X_0, X_1 Banachräume. Ein $P \in \mathcal{L}(X_0, X_1)$ heißt ein Fredholm-Operator, falls eine der folgenden äquivalenten Eigenschaften gilt:*

³⁷d.h. $(y, x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (y, x)$ für alle $y \in X$

a) Es ist

$$\dim \text{Kern } P < \infty \quad \text{und} \quad \text{codim Bild } P := \dim X_1 / \text{Bild } P < \infty.$$

b) P ist invertierbar modulo kompakter Operatoren, d.h. es gibt $Q \in \mathcal{L}(X_1, X_0)$ mit

$$QP - 1 \in \mathcal{K}(X_0) \quad \text{und} \quad PQ - 1 \in \mathcal{K}(X_1).$$

In diesem Fall ist Bild P abgeschlossen in X_1 und wir setzen

$$\text{ind } P := \dim \text{Kern } P - \text{codim Bild } P.$$

Es gelten folgende Aussagen:

i) Sind $P \in \mathcal{F}(X_0, X_1)$ und $K \in \mathcal{K}(X_0, X_1)$, so ist $P + K \in \mathcal{F}(X_0, X_1)$ und

$$\text{ind}(P + K) = \text{ind } P.$$

ii) Sind $P_j \in \mathcal{F}(X_j, X_{j+1})$ für $j = 0, 1$, so ist $P_1 P_0 \in \mathcal{F}(X_0, X_2)$ und

$$\text{ind } P_1 P_0 = \text{ind } P_0 + \text{ind } P_1.$$

iii) $\mathcal{F}(X_0, X_1)$ ist eine offene Teilmenge von $\mathcal{L}(X_0, X_1)$ und $\text{ind} : \mathcal{F}(X_0, X_1) \rightarrow \mathbb{C}$ ist lokal konstant.³⁸

10 Wiederholung: Unbeschränkte Operatoren

Im folgenden sei X ein Banachraum mit Norm $\|\cdot\|$.

Definition 10.1 (und Satz) Eine lineare Abbildung $A : \mathcal{D}(A) \subset X \rightarrow X$ heißt ein abgeschlossener Operator in X , falls gilt:

i) Ist $(x_n)_n \subset \mathcal{D}(A)$ mit $x_n \rightarrow x$ und $Ax_n \rightarrow y$ in X , so ist $x \in \mathcal{D}(A)$ und $Ax = y$.

Dies ist äquivalent zu jeder der folgenden Eigenschaften:

ii) $\text{Graph}(A) := \{(x, Ax) \mid x \in \mathcal{D}(A)\}$ ist ein abgeschlossener Unterraum von $X \oplus X$.

iii) $\mathcal{D}(A)$ versehen mit der Norm

$$\|x\| := \|x\| + \|Ax\|, \quad x \in \mathcal{D}(A),$$

ist ein Banachraum.

Satz 10.2 (vom abgeschlossenen Graphen) Es sei $A : X \rightarrow X$ linear. Dann:

$$A \in \mathcal{L}(X) \iff A : \mathcal{D}(A) = X \rightarrow X \text{ abgeschlossen.}$$

³⁸Insbesondere ist ind konstant auf den Zusammenhangskomponenten von $\mathcal{F}(X_0, X_1)$.

Definition 10.3 (und Satz) Es sei $A : \mathcal{D}(A) \subset X \rightarrow X$ abgeschlossen. Die Resolventenmenge von A ist

$$\rho(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda - A : \mathcal{D}(A) \rightarrow X \text{ ist bijektiv}\}$$

(wir identifizieren $\lambda \in \mathbb{C}$ mit der Abbildung $x \mapsto \lambda x \in \mathcal{L}(X)$). Das Spektrum von A ist

$$\sigma(A) := \mathbb{C} \setminus \rho(A).$$

Für jedes $\lambda \in \rho(A)$ ist automatisch $(\lambda - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$.

Satz 10.4 Es sei $A : \mathcal{D}(A) \subset X \rightarrow X$ abgeschlossen. Dann gelten:

a) $\rho(A)$ ist offen in \mathbb{C} (und damit $\sigma(A)$ abgeschlossen). Ist $\lambda_0 \in \rho(A)$, so ist

$$(\lambda - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda)^n (\lambda_0 - A)^{-(n+1)} \quad \forall |\lambda - \lambda_0| < \frac{1}{\|(\lambda_0 - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)}}.$$

b) $\lambda \mapsto (\lambda - A)^{-1} : \rho(A) \rightarrow \mathcal{L}(X)$ ist holomorph und

$$\frac{d^n}{d\lambda^n} (\lambda - A)^{-1} = (-1)^n n! (\lambda - A)^{-(n+1)} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

c) Ist $\text{dist}(\lambda, \sigma(A)) := \inf\{|\lambda - z| \mid z \in \sigma(A)\}$ der Abstand von λ zu $\sigma(A)$, so ist

$$\frac{1}{\text{dist}(\lambda, \sigma(A))} \leq \|(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \quad \forall \lambda \in \rho(A).$$

Definition 10.5 Ein lineare Abbildung $A : \mathcal{D}(A) \subset X \rightarrow X$ heißt abschließbar, falls es einen abgeschlossenen Operatoren $B : \mathcal{D}(B) \subset X \rightarrow X$ gibt mit $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(B)$. Jedes solche B heißt eine abgeschlossene Erweiterung von A .

Satz 10.6 Es sei $A : \mathcal{D}(A) \subset X \rightarrow X$ linear. Dann sind äquivalent:

- A ist abschließbar.
- Es gibt ein lineares $B : \mathcal{D}(B) \subset X \rightarrow X$ mit $\text{Graph}(B) = \overline{\text{Graph}(A)}$.
- Ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine beliebige Nullfolge in X für die $(Ax_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in X konvergiert, so ist auch $(Ax_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge.

In diesem Fall ist B die kleinste abgeschlossene Erweiterung von A , d.h. $\mathcal{D}(B) \subset \mathcal{D}(\tilde{B})$ für jede beliebige abgeschlossene Erweiterung \tilde{B} von A . Man schreibt $\bar{A} = A_{\min} := B$ und spricht vom Abschluß bzw. der minimalen Erweiterung von A .

Definition 10.7 (und Satz) Es sei H ein Hilbertraum mit Skalarprodukt (\cdot, \cdot) . Es sei $A : \mathcal{D}(A) \subset H \rightarrow H$ linear und dicht definiert, d.h. $\mathcal{D}(A)$ sei dicht in H . Der adjungierte Operator A^* von A ist definiert durch

$$\mathcal{D}(A^*) = \{x \in H \mid \exists y \in H \quad \forall z \in \mathcal{D}(A) : (y, z) = (x, Az)\}, \quad A^*x = y.$$

A^* ist immer abgeschlossen. Ist A abschließbar, so ist $A_{\min} = (A^*)^*$. Gilt $A = A^*$, so heißt A selbstadjungiert.