Mini-Skript zur Mengentheoretischen Topologie

Karsten Evers

In diesem Skript sind alle Begriffe und Aussagen der Mengentheoretischen Topologie, die zum Verständnis der Algebraischen Topologie notwendig sind, zusammengefasst. Das Lemma von Urysohn, der Fortsetzungssatz von Tietze (beides in §3) und §8 bzw §9 sind für die Vorlesung (Einführung in die singuläre Homologietheorie mit Anwendungen) nicht relevant und können daher Übergangen werden.

Inhalt:

§1 Definition und einfachste Eigenschaften

Definition: Topologischer Raum, stetige Abbildung Ein Topologischer Raum ist ein geordnetes Paar (X, τ) wobei X eine Menge und τ folgenden Bedingungen genügt:
1) $X \in \tau \subseteq \mathcal{P}(X)$ 2) $\forall\, A, B \in \tau$ auch $A \cap B \in \tau$ 3) $\forall\, \sigma \subseteq \tau$ auch $\bigcup_{S \in \sigma} S \in \tau$
Die Elemente aus τ heißen offenen Mengen, deren Komplemente heißen abgeschlossene Mengen. Aus 3) folgt also z.B. $\emptyset \in \tau$. Eine Menge $V \subseteq X$ heißt Umgebung des Punktes x, wenn es ein $U \in \tau$ gibt mit $x \in U \subseteq V$. Eine Menge α von Umgebungen eines Punktes $x \in X$ heißt Umgebungsbasis, wenn es zu jedem $O \in \tau$ mit $x \in O$ ein $A \in \alpha$ gibt, mit $x \in A \subseteq O$.
Wenn wir zwei Topologien τ und σ auf X haben, so sagen wir τ ist feiner als σ bzw. σ ist gröber als τ, wenn $\sigma \subseteq \tau$.
Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt stetig bezüglich den topologischen Räumen $(X, \tau), (Y, \sigma)$, falls $\forall\, O \in \sigma\ f^{-1}(O) \in \tau$. Wenn klar ist welche Topologie wir auf

X bzw. Y betrachten schreiben wir auch einfach: Sei $f : X \to Y$ stetig.
Seien τ und σ zwei Topologien auf X. Offensichtlich ist τ feiner als σ genau dann, wenn $id_X : (X, \tau) \to (X, \sigma)$ stetig ist.
Eine bijektive Abbildung $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ heißt ein Homöomorphismus, falls f und f^{-1} stetig sind.
Die Potenzmenge ist offensichtlich eine Topologie und wird die diskrete Topologie genannt (Symbol: τ_{dis}).
$\{\emptyset, X\}$ ist offensichtlich auch eine Topologie auf einer Menge X. Sie wird die indiskrete Topologie genannt (Symbol: τ_{ind}).
Wenn (X, τ) ein topologischer Raum ist, so gilt $\tau_{ind} \subseteq \tau \subseteq \tau_{dis}$
Falls (X, τ) ein topologischer Raum ist und $\mathcal{B} \subseteq \tau$, mit der Eigenschaft: $\forall\, O \in \tau \;\exists\; \mathcal{B}_0 \subseteq \mathcal{B}$ derart, dass $O = \bigcup_{B \in \mathcal{B}_0} B$, dann heißt $\mathcal{B}$ eine Basis von τ. Desweiteren heißt $\mathcal{S}$ eine Subbasis von τ, falls es eine Basis $\mathcal{B}$ von τ gibt mit: $\forall, B \in \mathcal{B}\, \exists\, S_1, ..., S_n \in \mathcal{S}$ mit $B = S_1 \cap ... \cap S_n$.
Der Schnitt von beliebig vielen Topologien auf einer Menge X ist offensichtlich wieder eine Topologie. Die Vereinigung der Topologien, muss keine Topologie mehr sein (Gegenbeispiel?). Allerdings gilt:

Satz Sei X eine Menge und $\alpha \subseteq \mathcal{P}(X)$. Dann gibt es eine gröbste Topologie $top\,(\alpha)$ auf X, welche α umfasst (also $\alpha \subseteq top\,(\alpha) \subseteq \tau$ für jede Topologie τ mit $\alpha \subseteq \tau$).

Beweis: Setze $\mathcal{B} := \{\bigcap_{k=1}^{n} A_k \mid A_k \in \alpha$ für $k = 1...n \leq 1\} \cup \{X\}$ und $top\,(\alpha) := \{\bigcup \beta \mid \beta \subseteq \mathcal{B}\}$. Offensichtlich $top\,(\alpha) \subseteq \mathcal{P}(X)$ und $X \in top\,(\alpha)$. Seien $\bigcup \beta, \bigcup \beta' \in top\,(\alpha)$ dann ist $\bigcup \beta \cap \bigcup \beta' = \bigcup_{(B,B') \in \beta \times \beta'} B \cap B' = \bigcup \gamma$, wobei $\gamma := \{B \cap B' \mid (B, B') \in \beta \times \beta'\} \subseteq \mathcal{B}$. Also $\bigcup \beta \cap \bigcup \beta' \in top\,(\alpha)$. Für $\sigma \subseteq top\,(\alpha)$ gilt (offensichtlich) $\bigcup \sigma \in top\,(\alpha)$. Somit ist $top\,(\alpha)$ als Topologie erkannt. Andererseits muss jede Topologie, welche α umfasst auch $top\,(\alpha)$ umfassen (Def. der Topologie!), also ist $top\,(\alpha)$ die gröbste derartige Topologie (man kann sie auch so definieren: Setze $T := \{\tau \subseteq \mathcal{P}(X) \mid \tau$ ist eine Topologie und $\alpha \subseteq \tau\}$ und dann $top\,(\alpha) := \bigcap_{\tau \in T} \tau$. Da $T \neq \emptyset$ kann hier nichts schiefgehen.).
Wenn $X = \bigcup \alpha$ ist dann ist α eine Subbasis von $top\,(\alpha)$.

Definition Teilraum Sei (X, τ) ein topologischer Raum und $Y \subseteq X$, dann ist $\tau_Y := \{Y \cap O \mid O \in \tau\}$ eine Topologie auf Y, genannt die Teilraumtopologie. (**Beweis:** Übung!)

Definition offener Kern, Abschluß und Rand einer Menge Sei Y eine Teilmenge eines topologischen Raumes (X, τ). Dann heißt $Y^\circ := \{x \in Y \mid \exists O \in \tau$ mit $x \in O \subseteq Y\}$ der offenen Kern von Y und $\overline{Y} := \{x \in X \mid \forall\, O \in \tau$ mit $x \in O$ gilt $O \cap Y \neq \emptyset\}$ nennt man den Abschluss von Y.

Bemerkung: Es gilt: $Y^\circ = \bigcup_{O \in \tau} O \subseteq Y$, also ist Y° die größte offene Menge in Y (Beweis?). Analog ist $\overline{Y}$ die kleinste abgeschlossene Menge, welche Y enthält. $\partial Y := \overline{Y} \setminus Y^\circ$ wird als der Rand von Y definiert. Es gelten folgende Rechenregeln:
1) $Y^\circ \subseteq Y \subseteq \overline{Y}$, 2) $X \setminus Y^\circ = \overline{X \setminus Y}$ 3) $Y^{\circ\circ} = Y^\circ$ 4) $\overline{\overline{Y}} = \overline{Y}$ 5) $Y_1 \subseteq Y_2$ impliziert $Y_1^\circ \subseteq Y_2^\circ$ und $\overline{Y_1} \subseteq \overline{Y_2}$ 6) $\overline{Y_1} \cup \overline{Y_2} = \overline{Y_1 \cup Y_2}$ und $Y_1^\circ \cap Y_2^\circ = (Y_1 \cap Y_2)^\circ$ 7) $\emptyset^\circ = \emptyset$ und $\overline{\emptyset} = \emptyset$
Die Beweise sind allesamt Routine.
Wir sagen $Y \subseteq X$ liegt dicht in X, falls $\overline{Y} = X$. Jede nichtleere offene Menge enthält also Punkte aus Y.

Satz Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung, dann sind folgende Aussagen äquivalent:
1) f ist stetig,
2) Die Urbilder einer Subbasis für Y sind offen in X.
3) Urbilder abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen.
4) $\forall\, M \subseteq X$ gilt $f(\overline{M}) \subseteq \overline{f(M)}$.
5) Zu jedem $x \in X$ und zu jeder offenen Menge V mit $f(x) \in V$ gibt es eine offene Menge U mit $x \in U$ und $f(U) \subseteq V$.

Beweis: Übung.

Lemma (Klebelemma) Seien X und Y Mengen, $(X_a)_{a \in A}$ eine Familie von Mengen mit $X = \bigcup_{a \in A} X_a$ und sei $(f_a : X_a \to Y)_{a \in A}$ eine Familie zugehöriger Abbildungen mit der Eigenschaft: $\forall\, \alpha, \beta \in A$ gilt $f_\alpha|(X_\alpha \cap X_\beta) = f_\beta|(X_\alpha \cap X_\beta)$. Dann gibt es genau eine Abbildung $f : X \to Y$ mit $f|X_\alpha = f_\alpha$.
Wenn X und Y zusätzlich top. Räume sind und alle f_α stetig (bzgl. der Teilraumtopologie) sind, dann folgt aus jeder der beiden folgenden Bedingungen die Stetigkeit von f.
a) A ist endlich und alle X_α sind abgeschlossen in X,
b) alle X_α sind offen in X.

Beweis: Die Existenz der Abbildung ist klar, ebenso die Eindeutigkeit. Zu zeigen bleibt die Stetigkeit von f unter den gegebenen Bedingungen. Dies bleibt als Übung. Man beachte, dass eine Menge abgeschlossen in der Teiraumtopologie einer anderen abgeschlossenen Menge ist, g.d.w. sie abgeschlossen im Gesamtraum ist (analog für offene Mengen) und verwende die verschiedenen Charakterisierungen von Stetigkeit.

§2 Konstruktion topologischer Räume

Definition und Satz Sei X eine Menge und $(X_i, \tau_i)_{i \in I}$ eine Klasse von topologischen Räumen und zugehörigen Abbildungen $f_i : X \to X_i$.
a) Es gibt dann eine gröbste Topologie τ auf X, bezüglich derer alle f_i stetig sind. Diese Topologie heißt die Initialtopologie bezüglich der Daten $(X_i, \tau_i)_{i \in I}$ und $(f_i : X \to X_i)_{i \in I}$.
b) Die Initialtopologie τ ist durch folgende universelle Eigenschaft eindeutig bestimmt:
Für jeden topologischen Raum (Y, σ) und jede Abbildung $g : Y \to X$ gilt: g ist stetig genau dann, wenn $\forall\, i \in I \;\; f_i \circ g$ stetig ist (man male sich ein Diagramm).

Beweis: a) Setze $\alpha := \{f_i^{-1}(O_i) \mid O_i \in \tau_i \text{ und } i \in I\} \cup \{X\}$ (falls $I = \emptyset$) und setze $\tau := \mathit{top}\,(\alpha)$.
b) Sei τ die initiale Topologie auf X bezüglich der Daten $(X_i, \tau_i)_{i \in I}$ und $(f_i : X \to X_i)_{i \in I}$. Wir zeigen, dass (X, τ) die universelle Eigenschaft erfüllt. Sei dazu (Y, σ) ein beliebiger topologischer Raum mit einer Abbildung $g : Y \to X$. Falls g stetig ist, so sind auch alle Kompositionen $f_i \circ g$ stetig (die f_i sind schließlich stetig). Seien nun umgekehrt alle Kompositionen $f_i \circ g$ stetig. Wir müssen zeigen, dass dann auch g stetig ist. Nun ist α offensichtlich eine Subbasis für τ. Es reicht also sich die Urbilder unter g von Elementen aus α anzuschauen. $U \in \alpha$ impliziert $U = f_i^{-1}(O_i)$ für ein gewisses $i \in I$ (oder $U = X$). Dann folgt $g^{-1}(U) = g \circ f_i^{-1}(O_i)$. Letzteres ist aber offen, da $g \circ f_i$ stetig ist.
Nun sei τ' eine Topologie, welche ebenfalls die universelle Eigenschaft hat. Im ersten Schritt sieht man, wenn man $(Y, \sigma) = (X, \tau')$ und $g = id_X$ setzt und die universelle Eigenschaft für (X, τ) verwendet, dass alle $f_i : (X, \tau') \to (X_i, \tau_i)$ stetig sind (schließlich ist $f_i \circ id_X = f_i$). Also schon mal $\tau \subseteq \tau'$. Im zweiten Schritt setzt man $(Y, \sigma) = (X, \tau)$ und wieder $g = id_X$ (man male sich Diagramme). Nun wissen wir schon dass alle $f_i : (X, \tau') \to (X_i, \tau_i)$ stetig sind und da $f_i = f_i \circ id_X$ ist also auch $id_X : (X, \tau) \to (X, \tau')$ stetig und somit $\tau' \subseteq \tau$. Insgesamt also $\tau = \tau'$.

Definition und Satz Sei X eine Menge und $(X_i, \tau_i)_{i \in I}$ eine Klasse von topologischen Räumen und zugehörigen Abbildungen $f_i : X_i \to X$.
a) Es gibt dann eine feinste Topologie τ auf X, bezüglich derer alle f_i stetig sind. Diese Topologie heißt die Finaltopologie bezüglich der Daten $(X_i, \tau_i)_{i \in I}$ und $(f_i : X \to X_i)_{i \in I}$.
b) Die Finaltopologie τ ist durch folgende universelle Eigenschaft eindeutig bestimmt:
Für jeden topologischen Raum (Y, σ) und jede Abbildung $g : X \to Y$ gilt: g ist stetig genau dann, wenn $\forall\, i \in I \;\; g \circ f_i$ stetig ist (man male wieder sich ein Diagramm).

Beweis: a) Setze $\tau := \{O \subseteq X \mid \forall\, i \in I \text{ gilt } f_i^{-1}(O) \in \tau_i\}$.
b) Übung (ähnlich wie bei der Initialtopologie).

Definition Produkttopologie Sei $(X_i, \tau_i)_{i\in I}$ eine Familie von topologischen Räumen. Auf $X := \prod_{i\in I} X_i$ wird mittels den Daten $(X_i, \tau_i)_{i\in I}$ und $pr_i : X \to X_i$ die initiale Topologie konstruiert und von nun an Produkttopologie genannt.
Eine Typische Subbasismenge hat also die Gestalt: $\prod_{i\in I} O_i$ mit $O_i = X_i$ für $i \neq j$ und $O_i \in \tau_i$ für $i = j$ (j ist dabei beliebig). Eine typische Basismenge sieht dann so aus: $\prod_{i\in I} O_i$ mit $O_i = X_i$ für $i \in I \setminus J$ für ein endliches $J \subseteq I$ und $O_i \in \tau_i$ für $i \in J$.

Lemma Seien $(X_i)_{i\in I}$ und $(Y_i)_{i\in I}$ zwei Familien von topologischen Räumen, Z ein weiterer top. Raum und $(f_i : X_i \to Y_i)_{i\in I}$ bzw. $(g_i : Z \to Y_i)_{i\in I}$ zwei Familien von stetigen Abbildungen. Bezeichne X (bzw. Y) den Produktraum der $(X_i)_{i\in I}$ (bzw, $(Y_i)_{i\in I}$) und setze $f : X \to Y$ definiert durch $f((x_i)_{i\in I}) := (f_i(x_i))_{i\in I}$, bzw. $g : Z \to Y$ definiert durch $g(z) := (g_i(z))_{i\in I}$. Dann sind die Abbildungen f, g stetig.

Beweis: Übung (Hinweis: Initialtopologie).

§3 Trennungsaxiome

Definition: T_0 T_1, T_2 (Hausdorff-Eigenschaft), T_3, T_4
Ein top. Raum heißt T_0-Raum, wenn es zu je zwei verschiedenen Punkten eine offene Menge gibt, die genau einen der beiden Punkte enthält.
Ein top. Raum heißt T_1-Raum, wenn alle Einpunktmengen abgeschlossen sind.
Ein toplogischer Raum (X, τ) heißt Hausdorff-Raum (oder T_2), wenn zu je zwei verschiedenen Elementen $x, y \in X$ zwei **disjunkte** offene Mengen O, U gibt mit $x \in O$ und $y \in U$. Jeder Teilraum eines Hausdorff-Raumes ist wieder ein Hausdorff-Raum (Beweis?) Ein top. Raum heißt T_3-Raum, wenn es zu jedem Punkt $x \in X$ und jeder abgeschlossenen Menge A mit $x \notin A$ disjunkte offenen Mengen U, V gibt mit $x \in U$ und $A \subseteq V$. Ein top. Raum ist T_3, wenn jeder Punkt $x \in X$ eine Umgebungsbasis aus abgeschlossenen Mengen hat (Beweis?).
Ein top. Raum heißt T_4-Raum, wenn es zu zwei disjunkten abgeschlossenen Mengen A, B zwei disjunkte offene Mengen U, V gibt mit $A \subseteq U$ und $B \subseteq V$.

Satz Sei $i \in \{0, 1, 2, 3\}$. Ein Produkt $X = \prod_{i\in I} X_i$ nicht leerer topologischer

Räume $(X_i, \tau_i)_{i \in I}$ ist genau dann ein T_i-Raum, wenn jeder Faktor ein T_i-Raum ist.

Beweis: Exemplarisch sei der Beweis für T_2 geführt. Seien alle (X_i, τ_i) Hausdorff-Räume und $x = (x_i)_{i \in I} \neq y = (y_i)_{i \in I}$ zwei Punkte aus X. Dann gibt es ein $j \in I$ mit $x_j \neq y_j$ und somit gibt es zwei disjunkte offene Mengen $U_j, V_j \in \tau_j$ mit $x_j \in U_j$ und $y_j \in V_j$. Dann sind aber $f_j^{-1}(U_j)$ und $f_j^{-1}(V_j)$ disjunkte offene Mengen in X mit $x \in f_j^{-1}(U_j)$ und $y \in f_j^{-1}(V_j)$. Also ist auch X ein Hausdorff-Raum. Sei andererseits X ein Hausdorff-Raum. Also $X \neq \emptyset$. Wähle $a = (a_i)_{i \in I} \in X$ und $j \in I$ und setze $Y_j := \{(x_i)_{i \in I} \in X \mid x_i = a_i \text{ falls } i \neq j\}$. Man kann schnell nachrechnen, dass $pr_j|Y_j : Y_j \to X_j$ ein Homöomorphismus ist (bezüglich der Teilraumtopologie auf Y_j). Da Y_j als Teilraum von X nun aber hausdorff ist, ist es auch X_j.
Für den Nachweis von T_3 sei angeführt, dass das Produkt abgeschlossener Mengen im Produktraum wieder abgschlossen ist und ein top. Raum ein T_3-Raum ist, wenn jeder Punkt $x \in X$ eine Umgebungsbasis aus abgeschlossenen Mengen hat.

Bemerkung Für zwei Abbildungen $f, g : X \to \mathbb{R}$ und Elemente $a, b \in \mathbb{R}$ sind $fg, af + bg : X \to \mathbb{R}$ durch $fg(x) := f(x)g(x)$ bzw. $(af + bg)(x) := af(x) + bg(x)$ sinnvoll definiert. Abbildungen von einer Menge X in $\mathbb{R}$ werden reelle Abbildungen genannt.

Satz für einen topologischen Raum (X, τ) sind äquivalent:
1) (X, τ) ist ein T_4-Raum.
2) Zu jeder abgeschlossenen Menge A und jeder offenen Menge O mit $A \subseteq O$ gibt es eine offenen Menge U mit $A \subseteq U \subseteq \overline{U} \subseteq O$.
3) Zu je zwei disjunkten abgeschlossenen Mengen A, B gibt es eine stetige Abbildung $f : X \to [0, 1]$, mit $f(A) \subseteq \{0\}$ und $f(B) \subseteq \{1\}$ (Lemma von Urysohn).
4) Jede auf einer abgeschlossenen Menge definierte und stetige reelle Abbildung lässt sich zu einer reellen stetigen Abbildung auf X fortsetzen (Fortsetzungssatz von Tietze).

Beweis: 1) $\Leftrightarrow$ 2) ist eine leichte Übung.
1) $\Rightarrow$ 3) Seien A, B disjunkte abgeschlossene Mengen in X. Es gibt dann eine disjunkte offene Menge U_0 von A mit $A \subseteq U_0 \subseteq \overline{U_0} \subseteq U_1 := X \setminus B$. Für jede natürliche Zahl n setze $P_n := \{r \in \mathbb{Q}^{\geq 0} \mid \exists\, k \leq 2^n \text{ mit } r = k/2^n\}$ und $P := \bigcup_{n \geq 0} P_n$. Wir zeigen nun, dass es für jedes $r \in P$ eine offene Menge U_r gibt, mit $r < r' \Rightarrow \overline{U_r} \subseteq U_{r'}$. Da $n < n' \Rightarrow P_n \subseteq P_{n'}$ gilt und für P_0 offensichtlich U_0, U_1 das gewünschte tun, reicht es, wenn wir uns für die Elemente aus $P_{n+1} \setminus P_n$ entsprechende U_r besorgen, die zusammen mit denen, die wir (per

Induktion) bereits für P_n haben, dann das gewünschte für P_{n+1} tun (man mache sich klar welche Elemente in $P_{n+1} \setminus P_n$ liegen und wie sie mit denen aus P_n in Beziehung stehen). Seien also entsprechende $(V_t)_{t\in P_n}$ gegeben und $r \in P_{n+1}$. Falls $r = 2k/2^{k+1}$, dann setze $U_r := V_{k/2^k}$ (diese werden also übernommen). Falls hingegen $r = (2k+1)/2^{k+1}$, so gilt ja $\overline{V}_{2k/2^{k+1}} \subseteq V_{(2k+2)/2^{k+1}}$, also existiert ein offenes U mit $\overline{V}_{2k/2^{k+1}} \subseteq U \subseteq \overline{U} \subseteq V_{(2k+2)/2^{k+1}}$. Setze dann $U_r := U$.
Wir sind noch nicht ganz fertig...
Für $t \in [0,1)$ setze $V_t := \bigcup_{r\in P, r\leq t} U_r$ und $V_1 := X$. Für $t < t'$ gilt ebenfalls $\overline{V_t} \subseteq V_{t'}$ (Beweis als Übung). Nun können wir $f : X \to [0,1]$ durch $f(x) := inf\{t \in [0,1] \mid x \in U_t\}$ definieren. Dieses f ist stetig ($\mathcal{S} := \{[0,q) \mid q \in [0,1]\} \cup \{(q,1] \mid q \in [0,1]\}$ ist eine Subbasis für $\tau_{[0,1]}$ und es gilt $x \in f^{-1}([0,q)) \Leftrightarrow x \in \bigcup_{t<q} U_t$, bzw. $x \in f^{-1}((q,1]) \Leftrightarrow \exists s$ mit $f(x) > s > q$ und $x \notin \overline{U_s}$) und aus der Konstruktion folgern wir $f(U_0) \subseteq \{0\}$ (man beachte $U_0 = V_0$). Dieses f hat dann die geforderten Eigenschaften ($f(A) \subseteq \{0\}$ ist klar, und für $f(B) \subseteq \{1\}$ beachte man $B = X \setminus U_1$).
Sei $c > 0$, und definiere $g : X \to [-c,c]$ durch $g(x) := 2c(f(x) - 1/2)$, dann ist g ebenfalls stetig mit $g(A) \subseteq \{-c\}$ und $g(B) \subseteq \{c\}$.
3) $\Rightarrow$ 4) Wir zeigen die Aussage erst für beschränkte Abbildungen. Sei also $f : A \to \mathbb{R}$ stetig und beschränkt. Dann gibt es ein $c > 0$ mit $f : A \to [-c,c]$. Doch zunächst noch eine kleine Vorbemerkung:
Sei $f : A \to [-c,c]$ stetig, dann gibt es ein $g : X \to [-c/3, c/3]$ mit $|f(x) - g(x)| \leq 2c/3$ für $x \in A$. Der Beweis ist einfach (Setze $A_1 := f^{-1}([-c,-c/3])$ und $A_2 := f^{-1}([c/3,c])$. A Aus dem Urysohn-Lemma schließen wir auf die Existenz eines $g : X \to [-c/3, c/3]$ mit $g(A_1) \subseteq \{-c/3\}$ und $g(A_2) \subseteq \{c/3\}$, insbesondere also $|f_0(x) - g(x)| \leq 2c/3$ für $x \in A$.).
Sei nun also $f : A \to [-c,c]$ stetig. Dann gibt es ein $g_0 : X \to [-c/3, c/3]$ mit $|f(x) - g_0(x)| \leq 2c/3$ für $x \in A$. Nun ist $f - g_0 : A \to [-2c/3, 2c/3]$ stetig, also gibt es ein $g_1 : X \to [-2c/9, 2c/9]$ mit $|f(x) - g_0(x) - g_1(x)| \leq 4c/9$ für $x \in A$. Den Prozess fortgesetzt ergibt: $f - g_0 - ... - g_n : A \to [-(2/3)^{n+1}c, (2/3)^{n+1}c]$ also existiert ein stetiges $g_{n+1} : X \to [-(2/3)^{n+1}c/3, (2/3)^{n+1}c/3]$, mit $|f(x) - g_0(x) - ... - g_{n+1}(x)| \leq (2/3)^{n+2}c$ für $x \in A$. Setze dann noch $f_n(x) := g_0(x) + ... + g_n(x)$ und $h(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Die f_n sind stetig und die Folge ist gleichmäßig konvergent, also ist auch h stetig und offensichtlich gilt $h_{|A} = f$.
Nun kommen wir zum allgemeinen Fall: Sei $f : A \to \mathbb{R}$ stetig. Nun wird $\mathbb{R}$ durch $\phi : \mathbb{R} \to (-1,1)$, $\phi(x) := x/(1+|x|)$ homöomorph auf $(-1,1)$ abgebildet. Also gibt es ein stetiges $g : X \to [-1,1]$ mit $g_{|A} = \phi \circ f$. Nun ist $B := g^{-1}(\{-1,1\})$ abgeschlossen in X und $A \cap B = \emptyset$. Aus dem Urysohn-Lemma schließen wir auf die Existenz eines $k : X \to [0,1]$ mit $k(A) \subseteq \{1\}$ und $k(B) \subseteq \{0\}$. Also $gk : X \to (-1,1)$ (!!!). Schließlich ist $\phi^{-1} \circ (gk) : X \to \mathbb{R}$ die gesuchte Fortsetzung (von dem sich der Leser mit Freuden überzeugt).
4) $\Rightarrow$ 1) Seien A, B disjunkte (nichtleere) abgeschlossene Mengen. Dann ist auch $Y := A \cup B$ abgeschlossen und A, B sind in Y sowohl offen, als auch abge-

schlossen!. Das heißt $f : Y \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(a) = 0$ und $f(b) = 1$ für $a \in A$ und $b \in B$ ist stetig. Also gibt es ein stetiges $g : X \to \mathbb{R}$ mit $g_{|Y} = f$. $U := g^{-1}((-1/3, 1/3))$ bzw. $V := g^{-1}((2/3, 5/3))$ sind dann disjunkte offene Obermengen.

Lemma Seien $f, g : (X, \tau) \to (y, \sigma)$ zwei stetige Abbildungen, welche auf einer in X dichten Teilmenge D übereinstimmen. Ferner Sei Y ein Hausdorff-Raum. Dann stimmen sie auf ganz X überein.

Beweis: Annahme es gibt ein $x \in X$ mit $f(x) \neq g(x)$. Dann gibt es disjunkte offene Mengen U, V in Y, mit $f(x) \in U$ und $g(x) \in V$. Nun enthält aber $f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V)$ das Element x, ist also nicht leer und enthält somit sogar ein Element $d \in D$. Damit gilt dann $f(d) \in U$ und $g(d) \in V$. Da aber $f(d) = g(d)$, ist dies ein Widerspruch.

Lemma Sei $f : X \to Y$ stetig und Y ein Hausdorff Raum. Dann ist $G_f := \{(x, y) \in X \times Y \mid y = f(x)\}$ (der Graph von f) abgeschlossen in $X \times Y$.

Beweisskizze: $\Delta_Y := \{(y, y) \mid y \in Y\}$ (die Diagonale) ist abgeschlossen in $Y \times Y$ (Y ist Hausdorff). $\phi : X \times Y \to Y \times Y$ definiert durch $\phi(x, y) := (f(x), y)$ ist stetig und es gilt $G_f = \phi^{-1}(\Delta_Y)$.

§4 Kompaktheitsbegriffe

Definition kompakt, lokalkompakt Ein topologischer Raum (X, τ) wird kompakt genannt, wenn jede Überdeckung von X durch offene Mengen eine endliche Teilüberdeckung hat (eine Überdeckung ist eine Menge $\sigma \subseteq \tau$ mit $X = \bigcup_{O \in \sigma} O$). Offenbar äquivalent ist die Formulierung: Für jede Familie abgeschlossener Mengen $(A_i)_{i \in I}$ mit leerem Schnitt gilt, dass bereits endlich viele einen leeren Schnitt haben.
Ein topologischer Raum (X, τ) wird lokalkompakt genannt, wenn jeder Punkt eine kompakte Umgebung hat.

Lemma (Lebesgue) Sei (X, d) ein kompakter metrischer Raum. und $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung. Dann gibt es ein positive Zahl δ derart, dass jede Teilmenge A von X mit einem Durchmesser kleiner als δ bereits in einem der U_i liegt.

Beweis: Jeder Punkt $x \in X$ liegt in wenigstens einem der U_i. Wähle für jedes $x \in X$ ein $\delta_x > 0$, derart, dass die offene Kugel $K(x, 2\delta_x)$ um x mit Radius 2δ bereits in einem der U_i liegt (das geht, da die U_i offen sind). Also ist $(K(x, \delta_x))_{x \in X}$ auch eine offene Überdeckung von X. Nun ist X kompakt, also gibt es $x_1, ..., x_n \in X$ mit $X = \bigcup_{k=1}^{n} K(x_k, \delta_{x_k})$ Setze $\delta := min\,(d_{x_1}, ..., \delta_{x_n})$ Mit Hilfe der Dreiecksungleichung macht man sich schnell klar, dass δ die geforderte Eigenschaft hat.

Lemma Sei (X, τ) ein kompakter Raum, (Y, σ) ein weiterer topologischer Raum und $f : X \to Y$ eine stetige surjektive Abbildung, dann ist auch (Y, σ) kompakt.

Beweis: Sei $(V_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von Y. Dann ist offenbar $(f^{-1}(V_i))_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von X, welche eine endliche Teilüberdeckung $(f^{-1}(V_{i_k}))_{k=1}^{n}$ von X hat. Dann ist $(V_{i_k})_{k=1}^{n}$ eine endliche Teilüberdeckung von Y. Also ist auch Y kompakt.

Lemma Sei X ein Hausdorff Raum und $A \subseteq X$ kompakt. Dann ist A auch abgeschlossen.

Beweis: Übung.

Alexanderscher Subbasis Satz: Ein topologischer Raum (X, τ) ist kompakt, genau dann wenn es eine Subbasis gibt derart, dass jede Überdeckung mit Elementen aus der Subbasis eine endliche Teilüberdeckung hat.

Beweis: Wir zeigen: Falls (X, τ) nicht kompakt ist, so gilt $\forall\, \mathcal{S}$: Subbasis $\exists\, \tilde{\Gamma} \subseteq \mathcal{S}$ derart, dass $\tilde{\Gamma}$ keine endliche Teilüberdeckung hat.
Sei also $\mathcal{S}$ eine Subbasis von (X, τ). Setze $\mathcal{R} := \{\Gamma \subseteq \tau \mid \forall\, \Lambda \subseteq \Gamma$ (Λ: endlich $\Rightarrow\ \bigcup_{O \in \Lambda} O \neq X)\}$. Mit Hilfe des Zornschen Lemmas schließt man auf die Existenz eines bezüglich $\subseteq$ maximalen Elementes Γ. Explizit bedeutet dies:
1) Γ ist eine offene Überdeckung.
2) Γ hat keine endliche Teilüberdeckung.
3) $\forall\, V \in \tau \setminus \Gamma$: $\Gamma \cup \{V\}$ hat eine endliche Teilüberdeckung.
Setze $\tilde{\Gamma} : \Gamma \cap \mathcal{S}$. Ofensichtlich hat dann auch $\tilde{\Gamma}$ keine endliche Teilüberdeckung. Wenn wir nun noch zeigen können, dass $\tilde{\Gamma}$ eine offene Überdeckung von X ist, so sind wir fertig. Also ans Werk: Annahme $\tilde{\Gamma}$ ist keine Überdeckung, so $\exists\, x \in X$ mit $\forall\, V \in \tilde{\Gamma}$ gilt $x \notin V$. Nun existiert aber ein $W \in \Gamma$ mit $x \in \Gamma$. Dann existieren aber $V_1, ...V_n \in \mathcal{S}$ mit $x \in \bigcap_{i=1}^{n} V_i \subseteq W$ ($\mathcal{S}$ ist eine Subbasis!). Also erhalten wir $\forall\, i = 1, ..., n$: $V_i \notin \tilde{\Gamma}$ und damit $\forall\, i = 1, ..., n$: $V_i \notin \Gamma$. Aus 3) schließen wir dann $\forall\, i = 1, ..., n\ \exists\, \Lambda_i \subseteq \Gamma$, Λ_i: endlich mit $X = (\bigcup_{O \in \Lambda_i} O) \cup V_i$. Also

$X \backslash V_i \subseteq \bigcup_{O \in \Lambda_i} O$ und damit dann $X \backslash \bigcap_{i=1}^n V_i = \bigcup_{i=1}^n (X \backslash V_i) = \bigcup_{i=1}^n \bigcup_{O \in \Lambda_i} O$. Alles in allem erhalten wir: $X = (\bigcup_{i=1}^n \bigcup_{O \in \Lambda_i} O) \cup (\bigcap_{i=1}^n V_i) \subseteq (\bigcup_{i=1}^n \bigcup_{O \in \Lambda_i} O) \cup W$. Aber $(\bigcup_{i=1}^n \Lambda_i) \cup \{W\}$ ist eine endliche Teilüberdeckung von Γ. Die ist ein Widerspruch!

Satz von Tychonoff: Für eine Familie topologischer Räume $(X_\alpha, \tau_\alpha)_{\alpha \in A}$ gilt: Der Produktraum (X, τ) ist genau dann kompakt, wenn alle (X_α, τ_α) kompakt sind.

Beweis: $\mathcal{S} := \{pr_\alpha^{-1}(O) \mid \alpha \in A \text{ und } O \in \tau_\alpha\}$ ist per Definition eine Subbasis von τ. Es genügt also zu zeigen, dass jede Überdeckung Γ von X mit Elementen aus $\mathcal{S}$ eine endliche Teilüberdeckung hat.
Sei also Γ eine solche. Setze $\mathcal{S}_\alpha := \{pr_\alpha^{-1}(O) \mid O \in \tau_\alpha\}$ (es gilt $\mathcal{S} = \bigcup_{\alpha \in A} \mathcal{S}_\alpha$).
Behauptung: $\exists\, \alpha \in A$ mit $\Gamma \cap \mathcal{S}_\alpha$ überdeckt X.
Beweis dazu: Annahme die ist nicht der Fall. Dann folgt $\forall\, \alpha \in A\ \exists\, x_\alpha \in X\ \forall\, O \in \Gamma \cap \mathcal{S}_\alpha$: $x_\alpha \notin O$ (*).
Setze $x := (y_\alpha)_{\alpha \in A}$ mit $Y_\alpha := pr_\alpha(x_\alpha)$.
Γ ist eine Überdeckung von X, also $\exists\, V \in \Gamma$ mit $x \in V$. Aber $V \in \mathcal{S}_\beta$ für ein gewisses $\beta \in A$. Also ist V von der Form $V = pr_\beta^{-1}(O)$, für ein gewisses $O \in \tau_\beta$.
Nun folgt aber $x_\beta \in V$, denn $pr_\beta(x_\beta) = pr_\beta(x) \in O$, im Widerspruch zu (*).
Also gilt die Negation von (*) und damit: $\exists \alpha \in A$ mit $\Gamma \cap \mathcal{S}_\alpha$ überdeckt ganz X. Nun ist $\Gamma \cap \mathcal{S}_\alpha = \{pr_\alpha^{-1}(O) \mid O \in \Gamma_\alpha\}$ für gewisses $\Gamma_\alpha \subseteq \tau_\alpha$. Da $\Gamma \cap \mathcal{S}_\alpha$ ganz X überdeckt, muss Γ_α also ganz X_α überdecken. Und da dieses nach Voraussetzung kompakt ist gibt es eine endliche Teilüberdeckung $\Lambda_\alpha \subseteq \Gamma_\alpha$. Folglich ist $\{pr_\alpha^{-1}(O) \mid O \in \Lambda_\alpha\} \subseteq \Gamma$ eine endliche Teilüberdeckung von X, also ist X kompakt. Die Rückrichtung ist sehr einfach und bleibt als Übungsaufgabe.

Satz Sei (X, τ) ein lokalkompakter Hausdorff Raum. Dann ist
1) X ein T_3 Raum,
2) jeder Punkt $x \in X$ hat eine Basis aus kompakten Umgebungen. Das heißt: $\forall\, x \in X\ \forall\, O \in \tau$ mit $x \in O\ \exists\, U \in \tau$, K : kompakt mit $x \in U \subseteq K \subseteq O$.

Beweis: 1) Sei $x \in O \in \tau$. Es existiert eine kompakte Umgebung K von x, es gibt also ein $U \in \tau$ mit $x \in U \subseteq K$. Setze $V := O \cap U$. Für $y \in K \setminus V$ existieren disjunkte $V_y, U_y \in \tau$ mit $x \in V_y$ und $y \in U_y$. Da K kompakt ist gibt es $y_1, ..., y_n \in K \setminus V$ mit $K \subseteq V \cup U_{y_1} \cup ... \cup U_{y_n}$. Setze $V' := V_{y_1} \cap ... \cap V_{y_n}$ und $U' := U_{y_1} \cup ... \cup U_{y_n}$. Dann gilt $x \in V' \subseteq K \setminus U' \subseteq V$. Da $K \setminus U'$ abgeschlossen ist folgt $\overline{V'} \subseteq V \subseteq O$, also ist X ein T_3 Raum.
Da $\overline{V'}$ auch kompakt ist ($\subseteq K$!), folgt auch 2) sofort.

§5 Quotientenräume

Definition Quotienten Topologie, identifizierende Abbildungen Sei (X,τ) ein topologischer Raum und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X. $X/\sim$ bezeichne die Menge der Äquivalenzklassen und $\pi : X \to X/\sim$ die standard Projektion. Die Finaltopologie auf $X/\sim$ bezüglich π nennt man Quotienten Topologie. Der Raum $X/\sim$ mit der entsprechenden Topologie wird auch Quotienten-Raum genannt. Seien (X,τ) und (Y,σ) top. Räume und $f : X \to Y$ eine Abbildung. Man nennt f identifizierend, falls f surjektiv ist und σ die Finaltopologie bzgl. X und f ist (also $O \in \sigma \;\Leftrightarrow\; f^{-1}(O) \in \tau$).

Definition verkleben von top. Räumen Seien X und Y top. Räume, mit $X \cap Y = \emptyset$, $A \subseteq X$ und $f : A \to Y$ eine stetige Abbildung. Wir versehen $X \cup Y$ mit der Finaltopologie bzgl. der standard Einbettungen $e_1 : X \to X \cup Y$ und $e_2 : Y \to X \cup Y$ und führen auf $X \cup Y$ folgendermaßen eine Äquivalenzrelation ein. $z_1 \sim z_2 \;:\Leftrightarrow\; (z_1 = z_2 \;\vee\; f(z_1) = f(z_2) \;\vee\; f(z_1) = z_2 \;\vee\; f(z_2) = z_1)$. Der Qutientenraum $(X \cup Y)/\sim$ wird als der von X und Y mittels f zusammengeklebte Raum bezeichnet und als $X \cup_f Y$ bezeichnet. Y ist übrigens (kanonisch) als Teilraum in $X \cup_f Y$ enthalten (Beweis als Übung).

Satz Seien X, Y, Z top. Räume und $f : X \to Z$ bzw. $\varphi : X \to Z$ identifizierende Abbildungen mit der zusätzlichen Eigenschaft $\forall\, a, b \in X \;:\; \varphi(a) = \varphi(b) \;\Leftrightarrow\; f(a) = f(b)$. Dann gibt es genau ein Homöomorphismus $g : Y \to Z$ mit $g \circ \varphi = f$.

Beweis: $y \in Y \;\;\Rightarrow\;\; y = \varphi(x)$, setze $g(y) := f(x)$. Dann ist g wohldefiniert, bijektiv und es gilt $g \circ \varphi = f$.
Sei O offen in Z. Dann ist $g^{-1}(O)$ offen in Y, denn $\varphi^{-1}(g^{-1}(O)) = f^{-1}(O)$ und dieses ist offen.
Sei O offen in Y. Zu zeigen ist, dass $g(O)$ offen in Z ist. Es gilt
$f^{-1}(g(O)) = f^{-1}(g(\varphi(\varphi^{-1}(O)))) = f^{-1}(f(\varphi^{-1}(O))) \supseteq \varphi^{-1}(O)$. Annahme: $\exists\, x \in f^{-1}(f(\varphi^{-1}(O))) \setminus \varphi^{-1}(O)$, dann folgt $\varphi(x) \notin O$ aber $f(x) \in f(\varphi^{-1}(O))$. Also $f(x) = f(x')$ für $x' \in \varphi^{-1}(O)$ und somit $\varphi(x) = \varphi(x') \in O$ - Widerspruch! Also $f^{-1}(g(O)) = \varphi^{-1}(O)$ Die letzte Menge ist aber offen, also ist auch $g(O)$ offen.

Satz Sei X ein kompakter und Z ein Hausdorff Raum. Ferner sei $f : X \to Z$ eine stetige surjektive Abbildung. Durch $x \sim x' \;\Leftrightarrow\; f(x) = f(x')$ bekommen wir eine Äquivalenzrelation auf X. Wenn Y den entstehenden Quotienten-Raum bezeichnet, dann gilt: Y und Z sind homöomorph.

Beweis: Sei $\varphi : X \to Y$ die standard Projektion ($\varphi(x) := [x]_\sim$). Definiere $g : Y \to Z$ durch $g([x]) := f(x)$. Dann ist g wohldefiniert und bijektiv ($g \circ \varphi = f$). Sei O offen in Z. Dann ist $g^{-1}(O)$ offen in Y, denn $\varphi^{-1}(g^{-1}(O)) = f^{-1}(O)$ ist offen (f ist stetig). Folglich ist g stetig.
Zu zeigen bleibt, dass g auch offen ist. Da g surjektiv ist, reicht es zu zeigen, dass g abgeschlossen ist. Na gut. Sei A abgeschlossen in Y. Da Y als Bild eines kompakten Raumes unter einer stetigen Abbildung selber auch kompakt ist, folgern wir, dass A auch kompakt ist. Das heißt aber $g(A)$ ist kompakt in Z. Da Z ein Hausdorff Raum ist, ist $g(A)$ dort auch abgeschlossen.

Satz von Whitehead Sei $f : X \to Y$ identifizierend und A ein lokalkompakter Hausdorff Raum. Dann ist auch $h = f \times id_A : X \times A \to Y \times A$ identifizierend ($f \times id_A(x, a) := (f(x), a)$).

Beweis: Das h surjektiv ist, ist klar. Zu zeigen bleibt also: W ist offen in $Y \times A \;\Leftrightarrow\; h^{-1}(W)$ ist offen in $X \times A$. Die eine Richtung ist klar, da h stetig ist.
Sei nun $h^{-1}(W)$ offen in $X \times A$ und $(y_0, a_0) \in W$, mit $f(x) = y_0$ für ein gewisses $x \in X$. Also $h(x, a_0) = (y_0, a_0) \in W$, also $(x, a_0) \in h^{-1}(W)$. Setze $A_0 := \{a \in A \mid (x, a) \in h^{-1}(W)\}$. also schon mal $a_0 \in A$. Außerdem ist A_0 offen (wie man so sieht: Sei $a \in A_0 \;\Rightarrow\; (x, a) \in h^{-1}(W)$. Aber $h^{-1}(W)$ ist offen, $\;\Rightarrow\; \exists U, V$ offen in X bzw. A, mit $(x, a) \in U \times V \subseteq h^{-1}(W)$. Also $a' \in V \;\Rightarrow\; (x, a') \in h^{-1}(W) \;\Rightarrow\; a' \in A_0$ und somit ist $a \in V \subseteq A_0$).
Da A lokalkompakt ist, gibt es eine kompakte Umgebung C von a_0, mit $C \subseteq A_0$. Nun ist $x \in U := \{y \in X \mid \{x\} \times C \subseteq h^{-1}\}$ offen, wie wir nun zeigen.
$y \in U \;\Rightarrow\; \{y\} \times C \subseteq h^{-}(W)$. Da $h^{-1}(W)$ offen ist, existiert ein V offen in X mit $\{y\} \times C \subseteq V \times C \subseteq h^{-1}(W)$ (ein Spezialfall des so genannten Wallace Theorem). Beweis dazu:
$\mathcal{B} := \{O \times O' \mid O, O'$ offen in X bzw. $A\}$ ist eine Basis von $X \times A$. Also $h^{-1}(W) = \bigcup_{i \in I} O_i \times O'_i$, für eine gewisse Familie von Mengen aus $\mathcal{B}$. Somit auch $\{y\} \times C \subseteq \bigcup_{i \in I} O_i \times O'_i$. Da C kompakt und $\{y\}$ einelementig ist, gibt es $i_1, ..., i_n$ mit $\{y\} \times C \subseteq \bigcup_{k=1}^n O_{i_k} \times O'_{i_k}$ und $y \in O_{i_k}$, für $k = 1, ..., n$. Setze nun $V := \bigcap_{k=1}^n O_{i_k} \;\Rightarrow\; \{y\} \times C \subseteq V \times C \subseteq \bigcup_{k=1}^n O_{i_k} \times O'_{i_k} \subseteq h^{-1}(W)$.
Da y beliebig, V offen und $y \in V \subseteq U$ ist, folgt U ist offen.
Nun gilt immer $U \subseteq f^{-1}(f(U))$. Andererseits haben wir $f^{-1}(f(U)) = h^{-1}(h(U \times C)) \subseteq h^{-1}(h(h^{-1}(W))) = h^{-1}(W)$, da $U \times C \subseteq h^{-1}(W)$, bzw. h surjektiv ist. Aus der Definition von U folgt $f^{-1}(f(U)) \subseteq U$. Insgesamt also $U = f^{-1}(f(U))$. Nun verwnden wir, dass f identifizierend ist, denn dann ist $f(U)$ nämlich offen! Also $(y_0, a_0) \in f(U) \times C = h(U \times C) \subseteq h(h^{-1}(W)) = W$. Da $f(U) \times C$ eine Umgebung von (y_0, a_0) ist und diese beliebig gewählt wurden, haben wir also gezeigt: W ist offen.

§6 Zusammenhang

Definition: Zusammenhang, Wegzusammenhang Sei (X, τ) ein top. Raum. $A \subseteq X$ heißt zusammenhängend $:\Leftrightarrow\ \neg\exists\, U, V \in \tau$ mit $A \subseteq U \cup V,\ A \cap U \cap V = \emptyset,\ A \cap U \neq \emptyset \neq A \cap V$.
A heißt hingegen wegzusammenhängend $:\Leftrightarrow\ \forall\, a, b \in A\, \exists\, r \leq 0,\ f : [0, 1] \to X$ stetig, mit $f(0) = a$ und $f(r) = b$.

Satz und Definition: Zusammenhangskomponenten und Wegzusammenhangskomponenten Sei (X, τ) ein top. Raum. Dann wird sowohl durch
1) es gibt ein zusammenhängendes $A \subseteq X$ mit $x, y \in A$, als auch
2) $x, y \in X$ sind durch einen Weg verbunden,
eine Äquivalenzrelation auf X definiert. Die Äquivalenzklassen heißen entsprechend Zusammenhangskomponenten bzw Wegzusammenhangskomponenten.

Beweis: Übung.

Lemma Bilder zusammenhängender (bzw. wegzusammenhängender) Mengen unter stetigen Abbildungen sind zusammenhängend (bzw. wegzusammenhängend).

Beweis: Übung.

Lemma a) Sei X ein top. Raum und A eine zusammenhängende Teilmenge von X. Wenn $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$, dann ist auch B zusammenhängend.
b) Wegzusammenhängende Mengen sind zusammenhängend.

Beweis: Übung.

Beispiel Sei $X := \{(x, \sin(1/x)) \mid x > 0\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Dann ist $\overline{X}$ zusammenhängend, aber nicht wegzusammenhängend.

Beweis: Wir haben $\overline{X} = \{(0, y) \mid |y| \leq 1\} \cup X$. Und das $\overline{X}$ zusammenhängend ist, folgt aus vorigem Lemma. Annahme es gibt ein stetiges $f : [0, 1] \to \overline{X}$, mit $f(0) = (0, 0)$ und $f(1) = (1/\pi, 0)$. Nun ist $f(t) = (f_1(t), f_2(t))$ mit f_1, f_2 stetig und $f_1(0) = 0$ bzw. $f_1(1) = 1$. Also existiert ein $t_1 \in [0, 1)$ mit $f_1(t_1) = 2/((2 \cdot 1 + 1)\pi)$. Also gibt es ein $t_2 \in [0, t_1)$ mit $f_1(t_2) = 2/((2 \cdot 2 + 1)\pi)$. ...

Es gibt ein $t_{n+1} \in [0, t_n)$ mit $f_1(t_{n+1}) = 2/((2 \cdot (n+1) + 1)\pi)$. (t_n) ist nun eine streng monoton fallende, nach unten durch 0 beschränkte Folge. Demzufolge existiert $lim\, t_n =: t \geq 0$. Da $(f_1(t_n), f_2(t_n)) \in X$ $(f_1(t_n) \neq 0)$, folgt $f_2(t_n) = \sin(1/(f_1(t_n))) = \sin(\pi(2n+1)/2) = (-1)^n$. Dann wäre aber $f(t_n)$ nicht konvergent - im Widerspruch zur Stetigkeit.

§7 Homotopie

Definition Homotopie, homotop Seien X, Y top. Räume und $I := [0, 1]$. Eine stetige Abbildung $F : X \times I \to Y$ heißt Homotopie ($X \times I$ mit Produkt-Topologie). Zwei stetige Abbildungen $f, g : X \to Y$ heißen homotop (in Zeichen: $f \simeq g$), wenn es eine Homotopie $F : X \times I \to Y$ gibt, mit $f(x) = F(x, 0)$ und $g(x) = F(x, 1)$ (für alle $x \in X$).

Lemma Die Relation $f \simeq g$ ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller stetigen Funktionen von X nach Y (Menge aller stetigen Funktionen $C(X, Y)$).

Beweis: 1) $f \simeq f$ durch $F(x, t) := f(x)$
2) $f \simeq g \Rightarrow g \simeq f$ durch $H(x, t) := F(x, 1 - t)$
3) wenn $f \simeq g$ durch F und $g \simeq h$ durch H, dann $f \simeq h$ durch G, wobei $G(x, t) := F(x, 2t)$ für $t \in [0, 1/2]$ und $G(X, t) := H(x, 2t - 1)$ für $t \in [1/2, 1]$. Aus dem Klebelemma folgt, dass G stetig ist.

Lemma Seien X, Y, Z top. Räume und $f, f' : X \to Y$ und $g, g' : Y \to Z$ stetige Abbildungen. Außerdem gelte $f \simeq f'$ durch F und $g \simeq g'$ durch G. Dann gilt auch $g \circ f \simeq g' \circ f'$.
Man kann nun also $\circ : (C(X, Y)/\simeq) \times (C(Y, Z)/\simeq) \to C(X, Z)/\simeq$ durch $[g] \circ [f] := [g \circ f]$ definieren.

Beweis $H(x, t) := G(F(x, t), t)$ ist eine Homotopie von $g \circ f$ nach $g' \circ f'$.

Satz Seien X, Y, Z top. Räume und $p : X \to Y$ identifizierend. Desweiteren Sei $K : Y \times I \to Z$ eine Abbildung derart, dass $H : X \times I \to Z$ definiert durch $H(x, t) := K(p(x), t)$ stetig ist. Dann ist auch K stetig.

Beweis: Es ist $H = K \circ (p \times id_I)$ stetig. Und da $p \times id_I$ identifizierend ist (Satz von Whitehead) ist K stetig (siehe Finaltopologie).

Satz Seien X, Y top. Räume und $\emptyset \neq A \subseteq X$ bzw $\emptyset \neq B \subseteq Y$. Setze $x \sim_X x' \;:\Leftrightarrow\; x = x' \;\vee\; x, x' \in A$ und bilde den Quotientenraum $X/\sim_X$, analog mit $Y/\sim_Y$; $p : X \to X/\sim_X$ bzw. $q : Y \to Y/\sim_Y$ seien die standard Projektionen. Schlussendlich sei $H : X \times I \to Y$ stetig, mit $H(A \times I) \subseteq B$.
Dann gibt es genau eine stetige Abbildung $\bar{H} : (X/\sim_X) \times I \to Y/\sim_Y$ derart, dass $\bar{H}(p(x), t) = q(H(x, t))$

Beweis: Übung.

§8 Lokal-endliche Systeme und Zerlegungen der Eins

Definitionen Sei (X, τ) ein topologischer Raum. Ein System $(S_i)_{i \in I}$ von Teilmengen von X heißt Punkt-endlich, wenn für jedes $x \in X$ die Menge $\{i \mid x \in S_i\}$ endlich ist.
Das System $(S_i)_{i \in I}$ heißt lokal-endlich, wenn für jedes $x \in X$ ein $U \in \tau$ existiert mit $x \in U$, derart dass die Menge $\{i \mid U \cap S_i \neq \emptyset\}$ endlich ist. $\mathcal{S}$ heißt σ-lokal-endlich, wenn $\mathcal{S} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{S}_n$ ist und die $\mathcal{S}_n$ lokal-endlich sind.
$(T_j)_{j \in J}$ heißt eine Verfeinerung (oder einfach feiner) von $(S_i)_{i \in I}$, falls $\forall\, j \in J\; \exists\, i \in I$ mit $T_j \subseteq S_i$.
Eine Familie $(f_i : X \to [0,1])_{i \in I}$ von stetigen Abbildungen nennt man eine Zerlegung der Eins (oder Partition der Eins, bzw. Teilung der Eins), wenn für alle $x \in X$ gilt: $\sum_{i \in I} f_i(x) = 1$.
$(f_i : X \to [0,1])_{i \in I}$ nennt man lokal-endlich, wenn es für alle $x \in X$ eine offene Menge $x \in V$ gibt derart, dass die Menge $\{i \in I \mid f_i|V \not\equiv 0\}$ endlich ist.
Eine Familie $(f_i : X \to [0,1])_{i \in I}$ von Abbildungen nennt man eine der offenen Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ des Raumes X untergeordnete Zerlegung der Eins, wenn:
a) $(f_i : X \to [0,1])_{i \in I}$ ist eine Zerlegung der Eins,
b) für alle $i \in I$ gilt $Tr\,(f_i) := \overline{\{x \in X \mid f_i(x) \neq 0\}} \subseteq U_i$.
Der topologischer Raum (X, τ) heißt parakompakt, falls jede offene Überdeckung von X eine lokal-endliche und offene, Verfeinerungs-Überdeckung hat.

Satz Sei $(f_i : X \to [0,1])_{i \in I}$ eine Zerlegung der Eins in einem topologischen Raum (X, τ). Dann gilt:
1) $\forall \varepsilon > 0\, \forall x \in X\, \exists O_x \in \tau$ mit $x \in O_x$ und $\{i \in I \mid \exists y \in O_x$ mit $f_i(y) \geq \varepsilon\}$ ist endlich.
2) $\mu : X \to (0,1]$ definiert durch $\mu(x) := sup\,\{f_i(x) \mid i \in I\} = max\,\{f_i(x) \mid i \in I\}$ ist stetig.
3) Es gibt eine lokal-endliche Zerlegung der Eins $(g_i)_{i \in I}$ mit $g_i^{-1}((0,1]) \subseteq f_i^{-1}((0,1])$,

für alle $i \in I$.

Beweis: 1) Sei $\varepsilon > 0$ und $x \in X$. Es gibt dann eine endliche Teilmenge $J \subseteq I$ mit $\sum_{i\in J} f_i(x) > 1-\varepsilon$. Setze $O_x := \{y \in X \mid \sum_{i\in J} f_i(y) > 1-\varepsilon\}$. O_x ist dann die gesuchte Menge. Man beachte dazu, dass $\sum_{i\in J} f_i$ stetig ist und wenn $f_i(y) > \varepsilon$ ist für $i \in I$, dann ist bereits $i \in J$ (sonst $\sum_{i\in J\cup\{i\}} f_i(y) > \varepsilon + 1 - \varepsilon$).
2) folgt aus 1).
3) Setze $\sigma_i(x) := max(0, 2f_i(x) - \mu(x))$. Dann ist σ stetig und $\sigma_i^{-1}((0,1]) \subseteq f_i^{-1}((0,1])$. Sei $y \in X$ und $\varepsilon := \mu(y)/4$. Nun gibt es eine offene Menge $O \ni y$ und ein endliches J mit $\mu(x) > 2\varepsilon$ und $f_i(x) < \varepsilon$ für $x \in O$ und $i \notin J$ (folgt aus 2) und 1)). Hieraus folgt $\sigma_i(x) = 0$ für $x \in O$, $i \in J$. Also ist $(\sigma_i)_{i\in I}$ lokal endlich. Es gilt aber $\mu(y) = f_k(y)$ für ein $k \in I$, also $\sigma_k(y) = f_k(y) = \mu(y) > 0$ und somit $\sum_{i\in I} \sigma_i(y) > 0$, für alle $y \in X$. $g_j(x) := \sigma_j(x)/\sum_{i\in I} \sigma_i(x)$ für $j \in J$ bildet dann die gesuchte Familie.

Satz Sei (X, τ) ein T_4-Raum und $(A_i)_{i\in I}$ eine Punkt-endliche offene Überdeckung einer abgeschlossenen Menge F. Dann gibt es eine offene Überdeckung $(B_i)_{i\in I}$ von F mit $\overline{B_i} \subseteq A_i$, für alle $i \in I$.

Beweis; Sei $M := \{G : I \to \tau \mid \forall i \in I\,(G(i) = A_i \text{ oder } \overline{G(i)} \subseteq A_i)$ und $F \subseteq \bigcup_{i\in I} G(i)\}$. Klarerweise gilt $M \neq \emptyset$. Wir werden M nun partiell ordnen. Setze dazu $G_1 \leq G_2 :\Leftrightarrow \forall i \in I : (G_1(i) \neq A_i \Rightarrow G_1(i) = G_2(i))$. Wir zeigen nun, dass M auf diese Weise sogar induktiv geordnet ist, also das Zornnsche Lemma maximale Elemente garantiert. Sei dazu M' eine total geordnete Teilmenge von M. Definiere $G_0(i) := \bigcap_{G\in M'} G(i)$. Dann ist $G_0 : I \to \tau$ eine Abbildung! Zu zeigen bleibt $G_0 \in M$. Annahme $G_0(i) \nsubseteq A_i$, dann gibt es ein $G' \in M'$ mit $\overline{G'(i)} \subseteq A_i$, also auch $\overline{G_0(i)} \subseteq A_i$. Bleibt noch $F \subseteq \bigcup_{i\in I} G_0(i)$ zu zeigen.
Sei $x \in F$. Dann ist $x \in A_i$ für $i \in \{i_1, ...i_n\}$ und $x \notin A_i$ für $i \notin \{i_1, ...i_n\}$ ($(A_i)_{i\in I}$ ist Punkt-endlich). Falls $G_0(i) = A_i$ für ein $i \in \{i_1, ...i_n\}$, so offensichtlich $x \in \bigcup_{i\in I} G_0(i)$. Sei also $G_0(i) \neq A_i$ für alle $i \in \{i_1, ...i_n\}$. Das heißt $\forall i \in \{i_1, ...i_n\}\, \exists G_i \in M'$ mit $G_i(i) \neq A_i$. Nun ist M' total geordnet, also $\exists i^* \in \{i_1, ...i_n\}\, \forall i \in \{i_1, ...i_n\} : G_i \leq G_{i^*}$. Dann folgt aber $\forall i \in \{i_1, ...i_n\} : G_{i^*}(i) \neq A_i$. Aber $x \in \bigcup_{i\in I} G_{i^*}(i)$, also $\exists j \in \{i_1, ...i_n\}$ mit $x \in G_{i^*}(j)$. Aus $G_0(j) = G_{i^*}(j)$ folgt dann $x \in \bigcup_{i\in I} G_0(i)$. Also $G_0 \in M$.
Sei nun G ein maximales Element aus M. Wir müssen $\overline{G(i)} \subseteq A_i$ für alle $i \in I$ zeigen. Nehmen wir mal an es gibt ein j mit $\overline{G(j)} \nsubseteq A_i$ (das hieße insbesondere $G(j) = A_j$). Nun ist $F \setminus \bigcup_{i\in I, i\neq j} G(i) \subseteq G(j)$. Also gibt es ein offenes U mit $F \setminus \bigcup_{i\in I, i\neq j}(i) \subseteq U \subseteq \overline{U} \subseteq G(j)$. $G_0 \in M$ definiert durch $G_0(i) = G(i)$, für $i \neq j$ und $\overline{G_0(i)} = U$ für $i = j$ führt dann zum Widerspruch, denn es gilt $G < G_0$. Also doch $\overline{G(i)} \subseteq A_i$ für alle $i \in I$. $(B_i)_{i\in I}$ definiert durch $B_i := G(i)$ ist dann die gewünschte Überdeckung.

Satz Sei $\mathcal{U}$ eine lokal-endliche offene Überdeckung eines T_4-Raumes. Dann gibt es eine lokal-endliche, der offenen Überdeckung $\mathcal{U}$ des Raumes X untergeordnete Zerlegung der Eins.

Beweis: Wir wählen entsprechend eines vorigen Satzes eine offene Überdeckung $\{V_U \mid U \in \mathcal{U}\}$ mit $\overline{V_U} \subseteq U$. Dann wählen wir weiter zu jedem $U \in \mathcal{U}$ ein offenes W_U mit $\overline{V_U} \subseteq W_U \subseteq \overline{W_U} \subseteq U$. Das Lemma von Urysohn verhilft uns nun zu stetigen Abbildungen $g_U : X \to [0,1]$ mit $g_U|\overline{V_U} \equiv 1$ und $g_U|W_U \equiv 0$. Damit sind wir fertig, denn $(g_V / \sum_{U\in\mathcal{U}} g_U)_{V\in\mathcal{U}}$ ist bereits die gesuchte Zerlegung.

Satz) Jeder parakompakte Hausdorff Raum (X,τ) ist normal (also T_4 und T_1).

Der Beweis benötigt folgendes Lemma:
Falls (X,τ) parakompakt , $A, B \subseteq X$ zwei abgeschlossene Mengen und $\forall\, x \in A\, \exists\, U_x, V_x \in \tau$ mit $x \in U_x$, $B \subseteq V_x$ und $U_x \cap V_x = \emptyset$, dann $\exists\, U, V \in \tau$ mit $A \subseteq U$, $B \subseteq V$ und $U \cap V = \emptyset$.

Beweis: $\mathcal{U} := \{U_x \mid x \in A\} \cup (X \setminus A)$ ist eine offene Überdeckung von X, zu der eine lokal-endliche Verfeinerung $(T_i)_{i\in I}$ existiert. Setze dann $T := \{T_i \mid i \in I$ und $A \cap T_i \neq \emptyset\}$, also insbesondere $A \subseteq T$.
Nun gilt aber $\forall\, y \in B\, \exists\, W_y \in \dot{y} \cap \tau$ derart, dass $\{i \in I \mid W_y \cap T_i \neq \emptyset\}$ endlich ist.
Für $y \in B$ ist also auch $J_y := \{i \in I \mid W_y \cap T_i \neq \emptyset \neq T_i \cap A\}$ endlich.
Falls für ein j gilt $T_j \cap A \neq \emptyset \;\Rightarrow\; \exists\, x_j \in A$ mit $T_j \subseteq U_{x_j}$, d.h. für $i \in J_y\, \exists\, x_i \in A$ mit $T_i \subseteq U_i$.
Für $y \in B$ sei $O_y := (\bigcap_{i\in J_y} V_{x_i}) \cap W_y$ und falls $J_y = \emptyset$ dann $O_y := W_y$. Sei nun $O := \bigcup_{y\in B} O_y$, dann haben die offenen Mengen T , O die gesuchten Eigenschaften. Denn angenommen für $y \in B$ ist$O_y \cap T \neq \emptyset$, dann gilt:
1 Fall $\quad J_y = \emptyset \quad\Rightarrow\quad O_y = W_y$ und damit $T_i \cap A \neq \emptyset \neq T_i \cap W_y$, also $J_y \neq \emptyset \;\Rightarrow$ Widerspruch.
2 Fall $\quad J_y \neq \emptyset$. Dann existiert $\in I$ mit $a \cap T_i \neq \emptyset$ und $\emptyset \neq O_y \cap T = (\bigcap_{i\in J_y} V_{x_i}) \cap W_y \cap (\bigcup_{i\in J_y} T_i)$, aber $T_i \subseteq U_{x_i}$ und $U_{x_i} \cap V_{x_i} = \emptyset$. $\Rightarrow$ Widerspruch.

Beweis vom Satz Seien nun A, B zwei disjunkte nichtleere abgeschlossene Mengen. Für alle $a \in A$ ist $\{a\} \cap B = \emptyset$ und $\{a\}$ ist abgeschlossen.Wir sind in einem Hausdorff Raum, also $\forall\, b \in B\, \exists$ disjunkte $V_b, U_b \in \tau$ mit $a \in U_b$ und $b \in V_b$. Nach dem eben bewiesenen $\exists$ disjunkte $U^a, V^a \in \tau$ mit $\{a\} \subseteq U^a$ und $B \subseteq V^a$. Nochmalige Anwendung führt zu zwei disjunkten $U, V \in \tau$ mit $A \subseteq U$ und $B \subseteq V$.

Bemerkung Jede offene Überdeckung eines parakompakten Hausdorff-Raumes besitzt also eine untergeordnete Zerlegung der Eins! Umgekehrt gilt für einen topologischen Raum (X, τ): Wenn jede offene Überdeckung eine untergeordnete Zerlegung der Eins besitzt, dann ist er parakompakt (Beweis: Sei $(f_i : X \to [0,1])_{i\in I}$ eine der Überdeckung $\sigma \subseteq \tau$ untergeordnete Zerlegung der Eins. Es gibt dann eine lokal-endliche Zerlegung der Eins $(g_i)_{i\in I}$ mit $g_i^{-1}((0,1]) \subseteq f_i^{-1}((0,1])$, für alle $i \in I$. Offensichtlich ist dann bereits $(g_i^{-1}((0,1]))_{i\in I}$ die gesuchte offene, lokal-endliche Verfeinerungsüberdeckung.)
Diese Tatsache ist in sofern wichtig, als das viele wichtige Räume parakompakt und Hausdorff sind, wie z.b. die metrische Räume, wie wir sogleich sehen werden.

Satz Jede offene Überdeckung eines metrisierbaren Raumes (X, d) besitzt eine σ-lokal-endliche, offene Verfeinerungsüberdeckung.

Beweis: Sei $(V_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von X und $\leq$ eine Wohlordnung auf I.Weiter sei $A_{ni} := \{x \in X \mid d(x, X \setminus V_i) \geq 2^{-n}\} \subseteq V_i$. Offensichtlich $\bigcup_{n\in N} A_{ni} \subseteq V_i$. Das auch das Umgekehrte gilt sieht man so: $x \in V_i \Rightarrow \exists\, n \in N$ mit $K(x, 2^{-n}) \subseteq V_i$. Das heißt $\forall\, y \in X \setminus V_i$ gilt $d(x,y) \geq 2^{-n}$, also $d(x, X \setminus V_i) \geq 2^{-n} \Rightarrow x \in A_{ni} \subseteq \bigcup_{n\in N} A_{ni}$. Nun sei $B_{ni} := \{x \in A_{ni} \mid x \notin A_{n+1}\, j$ für $j < i\}$ und $U_{ni} := \{x \in X \mid d(x, B_{ni}) < 2^{-n-3}\}$. U_{ni} ist offen, denn für $x \in U_{ni}$ gilt $K(x, \delta) \subseteq U_{ni}$, mit $0 < delta < 2^{-n-3} - d(x, B_{ni})$. Außerdem gilt $U_{ni} \subseteq V_i$, denn aus $x \in U_{ni}$ folgt $d(x, B_{ni}) < 2^{-n-3}$. Es muss also ein $y \in B_{ni}$ geben mit $d(x,y) \leq 2^{-n-1}$. Nun ist y auch in A_{ni} und es folgt: $d(x, X\setminus V_i) \geq d(y, X\setminus V_i) - d(x,y) \geq 2^{-n} - 2^{-n-1} = 2^{-n-1}$ und damit $x \in A_{ni} \subseteq V_i$. Für $x \in X$ sei $i \in I$ der kleinste Index mit $x \in V_i$ also gibt es ein n mit $x \in A_{ni}$. Nach Definition von B_{ni} gilt dann auch $x \in B_{ni}$, also $x \in U_{ni}$. Sei dann $\mathcal{S}_n := \{U_{ni} \mid i \in I\}$ und $\mathcal{S} := \bigcup_{n\in N} \mathcal{S}_n$. Eine offene Verfeinerungsüberdeckung von $(V_i)_{i\in I}$ ist $\mathcal{S}$ schon mal. Wir zeigen nun noch, dass die $\mathcal{S}_n$ lokal-endlich sind. Sei $j < i$ und $x \in B_{ni}$ bzw. $y \in B_{nj}$, also $x \notin A_{n+1j}$ und $y \in A_{nj}$. Das heißt $d(x, X \setminus V_i) < 2^{-n-1}$ und $d(y, X \setminus V_i) \geq 2^{-n}$ und damit $d(x,y) \geq d(y, X \setminus V_i) - d(x, X \setminus V_i) > 2^{-n} - 2^{-n-1} = 2^{-n-1}$ und schließlich $d(B_{ni}, B_{nj}) \geq 2^{-n-1}$. Für $x \in U_{ni}$ und $y \in U_{nj}$ folgt nun $d(x, B_{ni}) < 2^{-n-3}$, $d(y, B_{nj}) < 2^{-n-3}$ und $d(B_{ni}, B_{nj}) \geq 2^{-n-1}$. Mit Hilfe von $d(x,y) + d(x, B_{ni}) + d(y, B_{nj}) \geq d(y, B_{ni}) + d(y, B_{nj}) \geq d(B_{ni}, B_{nj})$ schließt man $d(x,y) \geq d(B_{ni}, B_{nj}) - d(y, B_{nj}) - d(x, B_{ni})$, also $d(x,y) > 2^{-n-1} - 2 \cdot 2^{-n-3} = 2^{-n-2}$. Insgesamt also $d(U_{ni}, U_{nj}) \geq 2^{-n-2}$. Und daher kann für beliebiges $x \in X$ und genügend kleines ε die Kugel $K(x, \varepsilon)$ höchstens eine Menge aus $\mathcal{S}_n$ schneiden. Die $\mathcal{S}_n$ sind also lokal endlich.

Lemma Sei (X, τ) ein top. R. und $(A_i)_{i\in I}$ ein lokal-endliches System. Dann ist auch $(\overline{A_i})_{i\in I}$ lokal-endlich und es gilt: $\overline{\bigcup_{i\in I} A_i} = \bigcup_{i\in I} \overline{A_i}$

Beweis: Sei $(A_i)_{i\in I}$ eine lokal endliche Familie. Sei weiter $x \in \bigcup_{i\in I} \overline{A_i}$. Also $x \in \overline{A_i}$ für ein gewisses $i \in I$. Offensichtlich gilt dann $x \in \overline{\bigcup_{i\in I} A_i}$.
Sei nun $x \in \overline{\bigcup_{i\in I} A_i}$. Dann existiert ein $U \in \tau$ mit $x \in U$ und $\{i \in I \mid U \cap A_i \neq \emptyset\} = \{i_1, ..., i_n\}$.
Sei nun $V := \bigcap_{k=1}^n V_{i_k}$, dann folgt $\forall\, U \in \tau$ mit $x \in U$: $\emptyset \neq (V \cap U) \cap \bigcup_{i\in I} A_i = (V \cap U) \cap \bigcup_{k=1}^n A_{i_k}$. Also $x \in \overline{\bigcup_{k=1}^n A_{i_k}} = \bigcup_{k=1}^n \overline{A_{i_k}} \subseteq \bigcup_{i\in I} \overline{A_i}$

Satz Für einen topologischen Raum (X, τ) gelten:
1) Jede σ-lokal-endliche offenen Überdeckung hat eine lokal-endliche (nicht notwendig offene) Verfeinerungsüberdeckung.
2) Wenn (X, τ) ein T_1 und T_3-Raum (regulär) ist, und jede offene Überdeckung eine lokal-endliche (nicht notwendig offene) Verfeinerungsüberdeckung hat, dann hat jede offene Überdeckung auch eine lokal-endliche Verfeinerungsüberdeckung aus abgeschlossenen Mengen.
3) Wenn jede offene Überdeckung eine lokal-endliche Verfeinerungsüberdeckung aus abgeschlossenen Mengen hat, dann ist X parakompakt.

Beweis: 1) Sei dazu $\bigcup_{n=1}^\infty S_n$ eine offene Verfeinerung, in der jedes S_n lokal-endlich ist. Es folgen einige Bezeichnungen: $X_n := \bigcup_{S\in S_n} S$, $Y_m := \bigcup_{n=0}^m X_n$, und induktiv $A_0 := Y_0$ und $A_n := Y_n \setminus Y_{n-1}$.
$\mathcal{Z} := \{A_n \cap S \mid n = 0, 1, 2, ... \text{ und } S \in S_n\}$ ist dann die gesuchte lokal endliche Verfeinerung von $\bigcup_{n=1}^\infty S_n$. Denn für $x \in X$ existiert minimales n mit $\exists\, S \in S_n$ mit $x \in S$. Falls $n = 0$, dann $x \in X_0 = Y_0 = A_0$, also $x \in A_0 \cap S$. Falls nun $n > 0$, dann $x \in X_n$ und $\forall\, m < n$ gilt $x \notin X_m$, also $x \in Y_n \setminus Y_{n-1} = A_n$ und damit $x \in A_n \cap S$. $\mathcal{Z}$ ist also schon mal eine Überdeckung von X.
Offensichtlich ist $\mathcal{Z}$ eine Verfeinerung von $\bigcup_{n=1}^\infty S_n$.
Für $x \in X$ gilt $x \in A_n \cap S$ für gewisses n und $S \in S_n$. Nun existiert aber $V \in \dot{x} \cap \tau$ mit $\{S \in \bigcup_{k=0}^n S_k \mid S \cap V \neq \emptyset\}$ ist endlich. Weiter gilt $x \in W := Y_n \cap V$ und $W \cap Y_m = \emptyset$ für $m > n$, also auch $W \cap A_m = \emptyset$ für $m > n$. Zusammen ergibt dies, dass $\mathcal{Z}$ lokal endlich ist.
2) Sei wieder $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung. Für $x \in X$ sei $U_x \in \mathcal{U} \cap \dot{x}$. Aufgrund der Regularität $\exists\, W_x \in \dot{x} \cap \tau$ mit $x \in W_x \subseteq \overline{W_x} \subseteq U_x$. Da $(W_x)_{x\in X}$ eine offene Überdeckung ist $\exists$ lokal-endliche Verfeinerungsüberdeckung $(O_k)_{k\in K}$. Natürlich ist auch $(\overline{O_k})_{k\in K}$ eine Überdeckung. Nun gilt aber allgemein für beliebiges $V \in \tau$ $V \cap O \neq \emptyset \;\Leftrightarrow\; V \cap \overline{O} \neq \emptyset$. Also ist auch $(\overline{O_k})_{k\in K}$ lokal-endlich. Außerdem haben wir $\forall\, k \in K\; \exists\, x \in X$ mit $O_k \subseteq W_x$, also $\overline{O_k} \subseteq \overline{W_x} \subseteq U_x$. und damit ist $(\overline{O_k})_{k\in K}$ eine lokal-endliche Verfeinerung aus abgeschlossenen Mengen.
3)Sei $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung und $\mathcal{V}$ eine lokal endliche Verfeinerung (aus abgeschlossenen Mengen). Für $x \in X$ sei $W_x \in \dot{x} \cap \tau$ derart, dass W_x nur endlich viele $V \in \mathcal{V}$ nicht leer schneidet. Zu $(W_x)_{x\in X}$ existiert nun eine lokal-endliche

abgeschlossenen Verfeinerung $\mathcal{A}$.
Für ein beliebiges $V \in \mathcal{V}$ ist $\{A \in \mathcal{A} \mid A \cap V = \emptyset\}$ lokal-endlich.
Also ist $\overline{\bigcup\{A \in \mathcal{A} \mid A \cap V = \emptyset\}} = \bigcup\{\overline{A} \mid A \in \mathcal{A} \text{ und } A \cap V = \emptyset\} = \{A \in \mathcal{A} \mid A \cap V = \emptyset\}$. Demzufolge ist $V' := X \setminus \bigcup\{A \in \mathcal{A} \mid A \cap V = \emptyset\}$ offen und es bleibt noch zu zeigen, dass $(V')_{V \in \mathcal{V}}$ die gesuchte lokal-endliche offene Verfeinerung ist.
Für $x \in X$ existiert $T_x \in \dot{x} \cap \tau$ und $A_1, ...A_n \in \mathcal{A}$ mit $T_x \subseteq A_1 \cup ... \cup A_n$ und für alle anderen $A \in \mathcal{A}$ gilt $A \cap T_x = \emptyset$. Falls also $T_x \cap V' \neq \emptyset$ dann existiert $k \in \{1, ..., n\}$ mit $A_k \cap V' \neq \emptyset$. Also $A_k \notin \{A \in \mathcal{A} \mid A \cap V = \emptyset\}$ und damit $A_k \cap V \neq \emptyset$. Deshalb schneidet jedes $A \in \mathcal{A}$ nur endlich viele V' (es schneidet schließlich nur endlich viele $V \in \mathcal{V}$).
Für $V \in \mathcal{V}$ sei $U_V \in \mathcal{U}$ mit $V \subseteq U_V$, dann ist $\{U_V \cap V' \mid V \in \mathcal{V}\}$ eine lokal-endliche, offene Verfeinerungsüberdeckung.

Verwendet wurde folgendes Lemma (An welcher Stelle?):
Sei X eine Menge, $\alpha, \beta, \gamma \subseteq P(X)$ und β zusätzlich eine Überdeckung von X mit:
1) jedes $c \in \gamma$ schneidet nur endlich viele $b \in \beta$ nicht leer
2) jedes $b \in \beta$ schneidet nur endlich viele $a \in \alpha$ nicht leer
dann schneidet auch jedes $c \in \gamma$ nur endlich viele $a \in \alpha$ nicht leer.
(Beweis: Annahme $\exists\, c \in \gamma$, welches unendlich viele $a \in \alpha$ nicht leer scheidet. Setze $\alpha' := \{a \in \alpha \mid a \cap c \neq \emptyset\}$. Nun gilt: $\forall\, a \in \alpha' \,\exists\, b \in \beta$ mit $a \cap c \cap b \neq \emptyset$, d.h. $\emptyset \neq \beta' := \{b \in \beta \mid \exists\, a \in \alpha' \text{ mit } a \cap c \cap b \neq \emptyset\}$ ist endlich. Für $b \in \beta'$ sei $\alpha_b := \{a \in \alpha' \mid a \cap b \neq \emptyset\}$. Nun gilt offensichtlich $\alpha' \subseteq \bigcup_{b \in \beta'} \alpha_b$. Also folgt $\aleph_0 \preceq \alpha' \subseteq \bigcup_{b \in \beta'} \alpha_b \prec \aleph_0$, denn β' und für jedes $b \in \beta'$ ist auch α_b endlich.$\Rightarrow$ Widerspruch.)

Es folgt sofort:

Korollar Jeder metrisierbare Raum ist parakompakt.

Korollar Sei (X, τ) ein lokalkompakter Hausdorfraum, der die Vereinigung abzählbar vieler kompakter Teilmengen ist. Dann ist X parakompakt.

Beweis: Sei $\sigma \subseteq \tau$ eine offene Überdeckung von $X = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$, wobei die A_i kompakt sind. Für $i \in \mathbb{N}$ gibt es σ_i: endlich $\subseteq \sigma$, mit $A_i \subseteq \bigcup \sigma_i$. Dann ist $\sigma^* := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \sigma_i$ eine abzählbare Teilüberdeckung (X ist also Lindelöf). Da X auch regulär ist, folgt aus obigem Satz und der Tatsache, dass abzählbare Systeme auch σ-lokal-endlich sind, dass X parakompakt ist.

§9 Metrisierbarkeit

Wir klären nun noch die Frage wann ein topologischer Raum metrisierbar ist.

Lemma In einem regulären Raum mit einer σ-lokal-endlichen Basis ist jede offene Menge Vereinigung abzählbar vieler abgeschlossener Mengen (Kurz: Eine F_σ Menge).

Beweis: Sei $\mathcal{S} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{S}_n$ eine σ-lokal-endliche Basis, mit den lokal-endlichen Teilsystem $\mathcal{S}_n = \{S_{ni} \mid n = 0, 1, 2... \text{ und } i \in I_n\}$ (die I_n sind irgendwelche Indexmengen). Da X regulär ist, gilt für $\emptyset \neq O \in \tau$: $\forall x \in O \, \exists V_x \in \tau$ mit $x \in V_x \subseteq \overline{V}_x \subseteq O$. Da $\mathcal{S}$ eine Basis ist, existiert $S_{n(x)i(x)}$ mit $x \in S_{n(x)i(x)} \subseteq V_x$, also $\overline{S}_{n(x)i(x)} \subseteq \overline{V}_x \subseteq O$. Sei $\underline{S}_k := \bigcup\{S_{n(x)i(x)} \mid n(x) = k \text{ und } x \in O\}$. Da $\mathcal{S}_k$ lokal-endlich, folgt $\overline{\underline{S}_k} = \bigcup\{\overline{S}_{n(x)i(x)} \mid n(x) = k \text{ und } x \in O\}$. Und damit $O = \bigcup_{k=0}^{\infty} \overline{\underline{S}_k}$.

Lemma Sei (X, τ) ein T_4-Raum und $\emptyset \neq A \subseteq X$ eine abgeschlossene Menge. Dann gilt: $\exists\, f : X \to [0,1]$ mit $f^{-1}(0) = A \;\Leftrightarrow\; A$ ist eine G_δ Menge.

Beweis: Falls f stetig mit $f^{-1}(0) = A$, dann ist $A = f^{-1}(0) = f^{-1}(\bigcap_{n=1}^{\infty}(-1/n, 1/n)) = \bigcap_{n=1}^{\infty} f^{-1}((-1/n, 1/n))$. Also ist A eine G_δ Menge.
Sei umgekehrt A eine G_δ Menge. Also $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} O_n$ mit O_n offen. Das Lemma von Urysohn garantiert für jedes n eine stetige Funktion $f_n : X \to [0,1]$ mit $f_n(A) = \{0\}$ und $f_n(X \setminus O_n) \subseteq \{1\}$. Setze nun $f := \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} f_n$. f ist nun stetig (gleichmäßige Konvergenz) und es gilt $f^{-1}(0) = A$. q.e.d.

Satz (Metrisationssatz von Bing, Nagata, Smirnow) Ein top. Raum (X, τ) ist genau dann metrisierbar, wenn er regulär ist und eine σ-lokal-endliche Basis hat.

Beweis: Sei (X, τ) zuerst als metrisierbar vorausgesetzt. Die Regularität ist klar, bleibt die Existenz einer σ-lokal-endlichen Basis zu zeigen.
Nun ist $\mathcal{B}_n := \{K(x, 1/n) \mid x \in X\}$ eine offene Überdeckung von X mit Kugeln vom Radius $1/n$, zu der es nach Voraussetzung eine lokal-endliche, offene Verfeinerungsüberdeckung $\mathcal{Z}_n$ gibt. Dann ist $\mathcal{B} := \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{Z}_n$ eine σ-lokal-endliche Basis ist. $x \in O \in \tau \;\Rightarrow\; \exists\, n$ mit $K(x, 1/n) \subseteq O$. Dann existiert aber auch $Z \in \mathcal{Z}_{2n}$ mit $x \in Z \subseteq K(y, 1/2n)$ für ein gewisses $y \in X$. Damit haben wir dann

$x \in Z \subseteq K(y, 1/2n) \subseteq K(x, 1/n) \subseteq O$.
Für die andere Richtung sei X nun als regulär mit σ-lokal-endlicher Basis vorausgesetzt. Zuerst wird nun gezeigt, dass X parakompakt ist. Sei $(U_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von X und $\mathcal{S} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{S}_n$ eine σ-lokal-endliche Basis, mit lokal-endlichen $\mathcal{S}_n = \{S_{ni} \mid i \in I_n\}$. Dann ist auch $\mathcal{V}_n := \{S_{ni} \in \mathcal{S}_n \mid \exists\, i \in I_n$ mit $S_{ni} \subseteq U_i\}$ lokal endlich und $\mathcal{V} := \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{V}_n$ ist eine σ-lokal-endliche Verfeinerung. Wir haben bereits weiter oben gesehen, dass in reguläre Räume (T_1 und T_2) für Parakompakteit reicht.
Nun zur Konstruktion der Metrik. Da S_{ni} offen ist, ist S_{ni} eine F_σ-Menge ist. Also ist $X \setminus S_{ni}$ eine G_δ-Menge und zu dieser existiert eine stetige Abbildung $\varphi_{ni} : X \to [0, 1]$ mit $S_{ni} := \{x \in X \mid \varphi_{ni}(x) > 0\}$. Wegen der lokalen Endlichkeit von $\mathcal{S}_n$ ist $\sum_{j\in I_n} \varphi_{nj}(x)$ definiert und stetig. Also ist auch $\psi_{ni}(x) := 2^{-n}\varphi_{ni}(x)(1+ \sum_{j\in I_n} \varphi_{nj}(x))$ stetig. Dann ist $0 \leq \psi_{ni}(x) < 2^{-n}$ und $S_{ni} : \{x \mid \psi_{ni}(x) > 0\}$ und sogar $0 \leq \sum_{i\in I_n} \psi_{ni}(x) < 2^{-n}$. Also ist $d(x, y) := \sum_{n=1}^{\infty}(\sum_{i\in I_n} |\psi_{ni}(x) - \psi_{ni}(y)|)$ sinnvoll definiert und stellt eine Metrik dar. Für $x \neq y$ existiert S_{ni} mit $x \in S_{ni}$ und $y \notin S_{ni}$ (X ist T_1) und somit $\psi_{ni}(x) > 0$, $\psi_{ni}(y) = 0$, also $d(x, y) = 0 \iff x = y$. Der Rest ist klar.
Bleibt noch zu zeigen: d induziert die Metrik. Die durch d induzierte Topologie ist schon mal gröber als die Ausgangstopologie, denn für $x \in X$ ist die Funktion $f_x : X \to R$ definiert durch $f_x(y) := d(x, y)$ stetig bezüglich τ. Sei dann O offen bzgl. d und $x \in O$. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $K(x, \varepsilon) \subseteq O$. Setze $W := (f_x(x) - \varepsilon, f_x(x) + \varepsilon)$. Dann gibt es $U_x \in \tau$ mit $x \in U_x$ und $f_x(U_x) \subseteq W$. Es gilt nun $U_x \subseteq K(x, \varepsilon)$. $y \in U_x$ impliziert $f_x(y) \in W$, also $d(x, y) < \varepsilon$. Also ist O auch offen bzgl. τ.
Sei umgekehrt $x \in U \in \tau$. Dann existiert n, i mit $x \in S_{ni} \subseteq U$. Definiere $\delta := \psi_{ni}(x)$ dann folgt für $y \in K(x, \delta)$: $|\psi_{ni}(x) - \psi_{ni}(y)| \leq \sum_k \sum_{i\in I_k} |\psi_{ki}(x) - \psi_{ki}(y)| = d(x, y) < \delta = \psi_{ni}(x)$ und damit $\psi_{ni}(y) > 0$. Also $y \in S_{ni}$ und somit $K(x, \delta) \subseteq U$. Das heißt U ist offen in der durch d induzierten Topologie.

Literatur:

Mengentheoretische Topologie:
Arkhangelskii: Fundamentals of General Topology
Bourbaki: General Topology
Engelking: General Topology
Preuß: Allgemeine Topologie
Querenburg: Mengentheoretische Topologie

Algebraische Topologie:
Dold: Lectures on Algebraic Topology
Eilenberg/Steenrod: Foundations of Algebraic Topology
Mayer: Algebraische Topologie
Spanier: Algebraic Topology

Grundlagen aus der Analysis:
Dieudonne: Grundzüge der modernen Analysis
Königsberger: Analysis 1
Rudin: Analysis
Rudin: Functional Analysis

Anregungen, Kritiken, Fehlermeldungen, ... sind stets willkommen.
karsten.evers@uni-rostock.de