La obra de Gödel en lógica matemática y teoría de conjuntos

por

Ignacio Jané

Kurt Gödel nació en 1906 en Brünn (actualmente Brno), entonces parte del imperio austrohúngaro y ahora de la república Checa. Estudió en la universidad de Viena y en 1940 emigró a los Estados Unidos de América, donde se incorporó al Institute for Advanced Study de Princeton. Unánimemente considerado el lógico más importante del siglo XX, sus resultados fundamentales en lógica matemática y teoría de conjuntos, obtenidos entre 1929 y 1939, han ejercido, y todavía ejercen, una profunda influencia. A partir de 1943 se dedicó sobre todo a la filosofía, especialmente a la filosofía de la matemática. Gödel tuvo una intensa relación con Albert Einstein, también miembro del Instituto, e incluso contribuyó a la cosmología relativista ([14], vol. 2, 190-198 y 202-216), describiendo, entre otras, una solución de las ecuaciones del campo gravitatorio en la que es posible viajar al pasado. Murió en Princeton en año 1978.

La referencia principal a la obra de Gödel la constituyen los cinco volúmenes, cuidadosamente editados y con magníficas introducciones a los distintos trabajos, de *Collected Works* [14]. Los dos primeros volúmes comprenden su obra publicada, el tercero contiene un buen número de artículos y conferencias no publicados, mientras que los dos últimos (más de 1300 páginas en total) se dedican a la correspondencia científica que Gödel mantuvo a lo largo de su vida. *Logical Dilemmas* [9], de John W. Dawson es una buena biografía de Gödel. *Reflections on Kurt Gödel* [24], [25] y *A logical Journey* [26] de Hao Wang, así como *In the Light of Logic* [11], de Solomon Feferman, contienen valiosa información y comentarios sobre sus concepciones filosóficas y su actitud ante los fundamentos de la matemática. Hay una traducción al español de las obras publicadas de Gödel [15]. En ella se decidió alterar la terminología e incluso algunos símbolos de los trabajos originales, lo cual dificulta su uso como obra de consulta.

En este artículo me ocuparé de las dos aportaciones más influyentes de Gödel, a saber, su célebre teorema de incompletud y su demostración de la consistencia del axioma de elección y de la hipótesis del continuo. Mi presentación no consitirá en una descripción más o menos amplia de los artículos pertinentes, sino que procuraré poner de manifiesto sus aspectos esenciales, lo cual, en algunas ocasiones, me obligará a tratar algunos puntos con cierto detalle. Creo que esa actitud es adecuada en el caso del teorema de incompletud, que a menudo se trata con una ligereza inaceptable.

Muchas veces se ha apelado al teorema de incompletud de Gödel para obtener supuestas conclusiones de toda índole. Estas referencias a Gödel suelen basarse en una concepción deficiente de lo que el teorema afirma. Un buen lugar para conocer los malos usos del teorema de incompletud y descubrir el error o los errores en cada caso es el libro *Gödel's Theorem: An incomplete guide to its use and abuse* [13], del recientemente fallecido lógico y filósofo sueco Torkel Franzén.

1

El segundo de los veintitrés problemas que David Hilbert presentó en el Congreso Internacional de Matemáticos celebrado en París en 1900 lleva por nombre 'la consistencia de los axiomas aritméticos' (ver [16]). Aquí, 'aritmética' hace referencia a la teoría de los números reales, una axiomatización de la cual Hilbert había publicado ese mismo año [17]. Los axiomas de Hilbert caracterizan el cuerpo de los números reales como un cuerpo ordenado arquimediano maximal y el problema en cuestión consistía en demostrar que estos axiomas "no son contradictorios, es decir, que nunca pueden obtenerse resultados mutuamente contradictorios mediante un número finito de inferencias lógicas a partir de ellos". La importancia de este resultado era fundamental para Hilbert, puesto que, en sus propias palabras, "la demostración de la consistencia de los axiomas es a la vez la demostración de la existencia matemática de la totalidad de los números reales o del continuo". La razón de estas palabras reside en la identificación de la existencia matemática con la posibilidad lógica. Los axiomas caracterizan los números reales porque 1) definen la estructura de cuerpo ordenado arquimediano maximal, 2) los números reales (si existen) forman una estructura tal y 3) cualesquiera estructuras tales son isomorfas entre sí. Decir que los números reales existen no es otra cosa que afirmar la posibilidad lógica de un cuerpo arquimediano maximal, es decir, la consistencia de los axiomas que lo definen. Esta concepción de la existencia matemática es bastante natural y no sólo fue propuesta explícitamente por Hilbert. Así, Poincaré escribía en 1905 que "en matemáticas, la palabra existir no puede tener más que un significado, significa exento de contradicción" ([20], 819).

¿Cómo se demuestra que los axiomas de una teoría T no son contradictorios? Puede hacerse reinterpretando los términos primitivos de T como conceptos de otra teoría T' y mostrando que los axiomas así reinterpretados son teoremas de T'. Con este procedimiento, sin embargo, sólo reducimos la consistencia de T a la de T', pero no justificamos de manera definitiva que T es consistente, a no ser que ya hayamos establecido que T' lo es. La demostración de consistencia que Hilbert requería debía ser absoluta, no relativa a otra teoría, y sugirió que podría obtenerse "mediante un examen cuidadoso y una modificación apropiada de los métodos de razonamiento conocidos en la teoría de los números irracionales". Dejando a un lado la oscuridad de esta sugerencia, vale la pena observar que ni siquiera es claro que el problema de la consistencia formulado por Hilbert sea un problema matemático preciso, puesto que no está claro cuáles son las inferencias lógicas a que su definición hace referencia. Cuando, casi veinte años más tarde, Hilbert empezó a ocuparse seriamente de las demostraciones de consistencia, tuvo que empezar delimitando con precisión los instrumentos lógicos necesarios para la formulación de las teorías. Hacerlo no es sólo necesario para abordar el problema de la consistencia, sino también para poder identificar una teoría a partir de los axiomas. Damos por hecho que los axiomas de Hilbert (o cualesquiera otros axiomas) determinan una teoría, a saber, la totalidad de sus consecuencias lógicas, pero ¿está claro, e incluso, está determinado qué cuenta cómo consecuencia lógica?

2

La lógica subyacente a los axiomas de la teoría de los números reales de Hilbert es compleja, sobre todo en lo que respecta a los conceptos *arquimediano* y *maximal*. Normalmente caracterizamos los números reales como un cuerpo ordenado completo, pero incluso esta caracterización es compleja, puesto que el concepto de completud presupone el de conjunto arbitrario de elementos de un dominio: un cuerpo ordenado es completo si *todo conjunto* acotado superiormente tiene una cota superior mínima. Las dificultades inherentes a la lógica necesaria para dar cuenta de las consecuencias de estos axiomas son notables. Para formular los axiomas de cuerpo ordenado nos basta con cuantificar sobre los elementos del cuerpo, pero para expresar que el orden es completo debemos cuantificar también sobre los subconjuntos del cuerpo, lo cual comporta aceptar como dada la totalidad de tales subconjuntos. En el primer caso (cuantificación sobre los elementos de la estructura que describimos), hablamos de *lógica elemental* o *lógica de primer orden*. Si cuantificamos también sobre conjuntos de elementos de la estructura hablamos de *lógica de segundo orden*, que, de hecho, es un apartado de la teoría de conjuntos. Hilbert y sus colaboradores (entre ellos Wilhelm Ackermann y Paul Bernays) dieron un tratamiento formal riguroso a la lógica de primer orden.

Los símbolos comunes a todo lenguaje formal de primer orden son las variables individuales (v_1, v_2, v_3, ...), las conectivas ($\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, para la negación, la conjunción, la disyunción, el condicional y el bicondicional, respectivamente), los cuantificadores ($\forall$, $\exists$), el símbolo de igualdad ($=$) y los paréntesis como símbolos auxiliares. Además, cada lenguaje particular contiene distintos símbolos propios, que pueden ser constantes individuales, símbolos funcionales o símbolos relacionales, para referirnos a objetos distinguidos, a operaciones y a relaciones específicas, respectivamente. (El lenguaje apropiado para la teoría de los cuerpos ordenados contiene las constantes individuales 0 y 1, los símbolos funcionales $+$ y $\cdot$, y el símbolo relacional $<$.) Hay reglas precisas para la generación de las fórmulas de un lenguaje, así como una caracterización efectiva de las axiomas lógicos y de las reglas de inferencia. Con su ayuda definimos el concepto de *deducción* a partir de un conjunto Σ de fórmulas: una deducción a partir de Σ es una sucesión finita $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ de fórmulas tales que cada una de ellas es un axioma lógico, o una fórmula de Σ, o se obtiene de fórmulas anteriores aplicando una regla de inferencia. Usamos la notación $\Sigma \vdash \varphi$ para expresar que hay una deducción de la fórmula φ a partir de Σ, brevemente, que φ es *deducible* de Σ.

Tras toda presentación formal de la lógica de primer orden acecha la cuestión de su arbitrariedad. No en la elección de los símbolos y en la definición de las fórmulas, sino en la elección de los axiomas lógicos y de las reglas de inferencia (en suma, del *cálculo deductivo*). De la gran variedad de suposiciones y modos de inferencia que usamos en los argumentos matemáticos habituales y que podemos calificar de lógicos, ¿por qué elegimos unos en detrimento de otros? ¿Cómo sabemos que al limitar los modos de inferencia no limitamos los resultados? Hay muchos cálculos, ¿cómo sabemos que la elección de uno u otro no altera los resultados obtenidos?

Sea Σ un conjunto de fórmulas de un lenguaje de primer orden. Podemos pensar en Σ como en el conjunto de axiomas de una teoría, a saber, de la teoría cuyos teoremas son las consecuencias lógicas de los axiomas. Si hemos construido cuidadosamente el cálculo deductivo, este será *correcto*, es decir, las fórmulas deducibles a partir de Σ serán teoremas de la teoría en el sentido habitual. La cuestión es garantizar que todos los teoremas son deducibles en el cálculo a partir de los axiomas. Este es el requisito de la *completud* del cálculo. Desde el último tercio del siglo XIX, se entendió que los teoremas de una teoría axiomática son las fórmulas verdaderas en todos los modelos de los axiomas. Con esta concepción general de teorema, el problema de la completud de un cálculo deductivo consiste en determinar si toda fórmula verdadera en todos los modelos de los axiomas es deducible en el cálculo a partir de ellos. Este es un problema que se presentaba como abierto en la primera edición, aparecida en 1928, del influente texto *Grundzüge der theoretischen Logik* [18], de Hilbert y Ackermann. Su solución afirmativa, conocida como el *Teorema de completud* de la lógica de primer orden, la ofreció Gödel en 1929 en su tesis doctoral en la Universidad de Viena y en un artículo publicado el año siguiente ([14], vol. 1, 60-101 y 102-123).

Una formulación equivalente del teorema de completud de la lógica de primer orden es que todo conjunto consistente de fórmulas (*consistente* en el sentido del cálculo: a partir de él no es deducible una fórmula y su negación) tiene un modelo. Gödel demostró algo más fuerte, a saber, que todo conjunto consistente de fórmulas posee un modelo numerable (o sea o bien finito o bien biyectable con el conjunto de los números naturales). De ello se sigue que la teoría de los números reales axiomatizada por Hilbert no es formalizable en un lenguaje de primer orden, puesto que todos sus modelos son isomorfos al cuerpo ordenado de los números reales, que, como Cantor demostró en 1874 en [1], no forman un conjunto numerable. La caracterización de los números reales requiere apelar a la teoría de conjuntos, lo cual no es sorprendente si recordamos que tal caracterización fue un estímulo considerable para la creación de la teoría de conjuntos por Dedekind y de Cantor (ver [12]).

3

La demostración del teorema de completud fue la primera contribución de Gödel a la lógica, pero el resultado por el cual es más famoso es el llamado *Teorema de incompletud* ([14], vol 1, 144-195). Es conveniente aclarar el significado del término 'completud' en ambos teoremas. Como ya hemos visto, en el primer caso, 'completud' es una propiedad de cálculos deductivos: un cálculo deductivo es completo si toda consecuencia lógica de un conjunto de fórmulas Σ es deducible a partir de Σ en el cálculo. En el segundo caso, 'completud' se aplica a conjuntos de fórmulas. Un conjunto Σ de fórmulas de un lenguaje dado es completo si, para toda fórmula φ del lenguaje en cuestión, o bien φ o bien $\neg\varphi$ es consecuencia lógica de Σ. Si el lenguaje lo es de primer orden, el teorema de completud de Gödel nos permite reemplazar 'consecuencia lógica' por 'deducible' (en un cálculo dado).

La importancia del concepto de completud en este segundo sentido es obvia si lo aplicamos al conjunto de los axiomas de una teoría. Que un conjunto consistente de axiomas sea completo significa que la teoría que determina (o sea el conjunto de sus consecuencias lógicas) contiene la respuesta a todas las preguntas formulables en su lenguaje. La exigencia de completud a ciertos conjuntos de axiomas está íntimamente relacionada con el interés del problema de su consistencia. ¿Por qué era tan importante para Hilbert demostrar la consistencia de su teoría los números reales? No porque fuera una teoría cualquiera de los números reales. Una teoría muy pobre no caracterizaría el cuerpo de los números reales y, por tanto, la demostración de su consistencia no podría garantizar lo que Hilbert pretendía, a saber, la existencia del continuo. Si bien la relación entre completud y categoricidad de una teoría (una teoría es categórica si todos sus modelos son mutuamente isomorfos) no era muy clara en 1900, Hilbert mantenía que sus axiomas de los números reales, al igual que los de la geometría euclídea, eran completos (aunque tampoco está del todo claro qué entendía entonces Hilbert por 'completud').

Como es habitual en los teoremas fundamentales, el teorema de incompletud de Gödel admite varias formulaciones, no todas ellas completamente equivalentes. La razón principal de este hecho es que estos teoremas suelen generalizarse, y algunas generalizaciones suelen serlo en direcciones distintas. En una formulación, el teorema dice que no hay ningún conjunto decidible de axiomas cuyas consecuencias sean exactamente todas las verdades aritméticas elementales. En otra formulación más general, el teorema de incompletud dice que todo conjunto decidible de axiomas en el lenguaje de la aritmética con un mínimo contenido matemático es incompleto. Esta es la formulación que discutiré y cuya demostración trataré de esbozar.

Empecemos aclarando algunos términos. El *lenguaje de la aritmética* es el lenguaje de primer orden cuyos símbolos primitivos no lógicos son $<$, $+$, $\cdot$, S, 0, para la relación de orden, las operaciones de suma y producto, la operación sucesor ($n \mapsto n+1$) y el número cero, respectivamente. Con ayuda de los dos últimos símbolos formamos los numerales, es decir, las expresiones 0, S0, SS0, SSS0, ... , $\underbrace{\mathrm{S}\ldots\mathrm{S}}_{n}0$, ... , que abreviamos como $\widetilde{0}$ $\widetilde{1}$, $\widetilde{2}$, ... , $\widetilde{n}$, ... (El numeral $\widetilde{n}$ es el nombre canónico del número n en el lenguaje de la aritmética).

Debemos distinguir entre *fórmulas abiertas* (con una o más variables libres) y fórmulas cerradas, o *sentencias* (sin variables libres). Las sentencias del lenguaje de la aritmética funcionan como enunciados sobre los números naturales, las fórmulas con una variable libre $\varphi(v_1)$ expresan propiedades de números, las fórmulas con dos variables libres $\varphi(v_1, v_2)$, expresan relaciones entre dos números, etc. Los axiomas y los teoremas de una teoría son siempre sentencias. Una sentencia del lenguaje de la aritmética es verdadera si es satisfecha en la estructura de los números naturales. No hay nada oscuro ni filosófico en este concepto de verdad en una estructura. Es un concepto preciso que admite una definición matemática (aunque no meramente aritmética), como puede constatarse consultando cualquier manual de lógica elemental.

Un conjunto de fórmulas es *decidible* si es computable, es decir, si hay un algoritmo que permita determinar de manera mecánica si una fórmula cualquiera pertenece o no al conjunto en cuestión. Las cuestiones relativas a la decidibilidad de conjuntos de fórmulas o de relaciones entre fórmulas son reducibles a cuestiones sobre la computabilidad de conjuntos de números naturales y de relaciones entre ellos. Estas últimas admiten un tratamiento matemático preciso, en términos de recursividad, de calculabilidad por una máquina de Turing, o mediante otra caracterización equivalente. Las múltiples especificaciones del concepto de computabilidad son posteriores al artículo de Gödel, quien consideró un concepto más limitado de función y de relación computable, a saber, lo que ahora conocemos como funciones y relaciones recursivas primitivas. En lo que sigue, hablaré de recursividad en vez de computabilidad cuando quiera referirme explícitamente al concepto matemático preciso. Que el concepto informal de computabilidad coincide con el de recursividad es lo afirma la *tesis de Church-Turing.* En lo que sigue, podemos apelar implícitamente a ella para convencernos de que ciertas relaciones o funciones claramente computables son recursivas.

Sea T una teoría en el lenguaje de la aritmética acerca de la cual sólo suponemos que 1) posee un conjunto decidible de axiomas (es recursivamente axiomatizable), y 2) a partir de sus axiomas son deducibles las verdades aritméticas más simples. Con toda precisión, entre los teoremas de T se hallan todas las ecuaciones particulares verdaderas de la forma $\widetilde{n}+\widetilde{m} = \widetilde{k}$ y $\widetilde{n}\cdot\widetilde{m} = \widetilde{k}$, todas las desigualdades verdaderas de la forma $\neg\,(\widetilde{n} = \widetilde{m})$, la sentencia $\forall x \neg\,(x < \widetilde{0})$, y todas las sentencias de la forma $\forall x(x < \mathrm{S}\widetilde{n} \leftrightarrow x = \widetilde{0} \vee x = \widetilde{1} \vee \ldots \vee x < \widetilde{n})$ y de la forma $\forall x(x < \widetilde{n} \vee x = \widetilde{n} \vee \widetilde{n} < x)$. Es obvio que el contenido aritmético mínimo exigido a T es muy débil. Sin embargo, es suficiente para garantizar que todas las relaciones y funciones recursivas son *representables* en T, es decir:

1. Si R es una relación k-aria recursiva, hay una fórmula del lenguaje de aritmética con k variables libres $\rho(v_1, \ldots, v_k)$ tal que para cualesquiera números $n_1, \ldots, n_k$:

$$\text{si } R(n_1, \ldots, n_k), \text{ entonces } T \vdash \rho(\widetilde{n}_1, \ldots, \widetilde{n}_k), \tag{R1}$$

$$\text{si no } R(n_1, \ldots, n_k), \text{ entonces } T \vdash \neg\rho(\widetilde{n}_1, \ldots, \widetilde{n}_k). \tag{R2}$$

2. Si h es una función k-aria recursiva, hay una fórmula del lenguaje de la aritmética con $k+1$ variables libres $\eta(v_1, \ldots, v_k, v_{k+1})$ tal que para cualesquiera números $n_1, \ldots n_k, m$: si $h(n_1, \ldots, n_k) = m$, entonces

$$T \vdash \eta(\widetilde{n}_1, \ldots, \widetilde{n}_k, \widetilde{m}), \tag{F1}$$

$$T \vdash \forall v_{k+1}\,((\eta(\widetilde{n}_1, \ldots, \widetilde{n}_k, v_{k+1}) \to v_{k+1} = \widetilde{m}). \tag{F2}$$

Asignemos un número natural positivo a cada símbolo del lenguaje de la aritmética. Por ejemplo, asignamos los números 1 y 2 a los dos paréntesis, los números del 3 a 10 a los ocho símbolos lógicos (conectivas, cuantificadores, símbolo de igualdad), los números del 11 al 15 a los cinco símbolos primitivos de la artitmética y el número $15+n$ a la variable v_n $(n \geq 1)$. Sea $\#s$ el número asignado al símbolo s. De este modo, a cada expresión, o sea, a cada sucesión finita $\mathbf{s} = s_1, s_2, \ldots s_n$ de símbolos del lenguaje le corresponde la sucesión finita de números $\#s_1, \#s_2, \ldots, \#s_n$, que podemos cifrar mediante un número, $\mathrm{G}(\mathbf{s})$, el *número de Gödel* de $\mathbf{s}$. Por ejemplo, podemos definir $\mathrm{G}(\mathbf{s}) = 2^{\#s_1} \cdot 3^{\#s_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{\#s_n}$, donde p_i es el i-ésimo número primo. Finalmente, a cada sucesión finita de expresiones del lenguaje le corresponde la sucesión de sus números de Gödel, que a su vez podemos cifrar con un único número natural. De este modo, símbolos, fórmulas y demostraciones pueden verse como números, y las operaciones y relaciones entre elementos sintácticos corresponden a relaciones entre números.

Las relaciones y funciones sintácticas son recursivas, mejor dicho, lo son las correspondientes relaciones y funciones de números naturales. En particular, es recursivo el conjunto de los números de Gödel de las fórmulas, así como el del conjunto de números de Gödel de las sentencias. Además, dado que hemos supuesto T posee un conjunto decidible de axiomas, Σ, también es recursivo el conjunto de los números de Gödel de los axiomas de T, al igual que relación Ded que se da entre un número n y un número m cuando *m es el número de una deducción a partir de Σ de la fórmula cuyo número de Gödel es n.*

Introducimos ahora una función recursiva que merece particular atención. Si φ es una fórmula, la *diagonalización* de φ es la fórmula obtenida al substituir en φ la variable v_1 por el numeral del número de Gödel de φ. O sea, si $\mathrm{G}(\varphi(v_1)) = n$, la diagonalización de $\varphi(v_1)$ es la fórmula $\varphi(\widetilde{n})$. Definimos ahora la función diag, que es la versión aritmetizada de la diagonalización: Si n es el número de Gödel de una fórmula φ, $\mathsf{diag}(n)$ es el número de Gödel de la diagonalización de φ. La función diag es recursiva (es obviamente calculable en sentido informal).

La importancia de la diagonalización es que nos permite obtener *sentencias autoreferentes.* Dada una fórmula con una única variable libre $\varphi(v_1)$ hallaremos una sentencia σ tal que, si n es el número de Gödel de σ, $T \vdash \sigma \leftrightarrow \varphi(\widetilde{n})$. (De modo sugerente, aunque impreciso, podemos decir que, demostrablemente en T, la sentencia σ dice se sí misma que tiene la propiedad expresada por φ.) La proposición de que una sentencia σ tal existe es el llamado *Lema de diagonalización*, que ahora demostramos.

Sea $\delta(v_1, v_2)$ una fórmula que representa la función diag en T y consideremos la fórmula $\psi(v_1) = \forall v_2\, (\delta(v_1, v_2) \to \varphi(v_2))$. Sea n el número de Gödel de ψ. La sentencia buscada σ es $\psi(\widetilde{n})$, o sea, σ es la diagonalización de ψ. Con todo detalle, σ es la sentencia:

$$\forall v_2\, (\delta(\widetilde{n}, v_2) \to \varphi(v_2)).^2$$

Sea k el número de Gödel de σ. Así, $\mathsf{diag}(n) = k$. Puesto que $\delta(v_1, v_2)$ representa a diag en T, por (F1) tenemos que $T \vdash \delta(\widetilde{n}, \widetilde{k})$, de modo que:

$$T \vdash \sigma \to \varphi(\widetilde{k}). \qquad (*_1)$$

Por otra parte, por (F2), $T \vdash \forall v_2\, (\delta(\widetilde{n}, v_2) \to v_2 = \widetilde{k})$, de donde se sigue (simplemente por lógica) que $T \vdash \varphi(\widetilde{k}) \to \forall v_2\, (\delta(\widetilde{n}, v_2) \to \varphi(v_2))$, es decir:

$$T \vdash \varphi(\widetilde{k}) \to \sigma, \qquad (*_2)$$

De $(*_1)$ y $(*_2)$ concluimos que $T \vdash \sigma \leftrightarrow \varphi(\widetilde{k})$, como debíamos mostrar.

Puesto que T es recursivamente axiomatizable, la relación Ded es recursiva y por tanto representable en T. Fijemos una fórmula $\alpha(v_1, v_2)$ que representa a Ded en T. Por (R1) y (R2) tenemos que, para cualesquiera números n y m, $T \vdash \alpha(\widetilde{n}, \widetilde{m})$ o $T \vdash \neg\alpha(\widetilde{n}, \widetilde{m})$, según $\mathsf{Ded}(n, m)$ o no $\mathsf{Ded}(n, m)$. Por el lema de diagonalización aplicado a la fórmula $\forall v_2 \neg\alpha(v_1, v_2)$, obtenemos una sentencia γ con número de Gödel e tal que

$$T \vdash \gamma \leftrightarrow \forall v_2 \neg\alpha(\widetilde{e}, v_2). \qquad (*_3)$$

[2] Sea F_n la fórmula con número de Gödel n. Si leemos '$\delta(v_1, v_2)$' como 'F_{v_2} es la diagonalización de F_{v_1}', podemos leer 'σ' como: 'la diagonalización de F_n tiene la propiedad φ'. Pero la diagonalización de F_n es precisamente σ. Por tanto, σ dice de sí misma que tiene la propiedad φ. El argumento que sigue muestra que T es capaz de desentrañar estas relaciones.

Decimos que γ es la *sentencia de Gödel de la teoría* T. Tenemos que:

- *Si* T *es consistente, entonces* $T \nvdash \gamma$.

Pues supongamos que $T \vdash \gamma$. Hay, pues, una deducción de γ a partir de los axiomas de T, es decir, hay un número m tal que $\mathsf{Ded}(e, m)$, de modo que, por (R1), $T \vdash \alpha(\widetilde{e}, \widetilde{m})$. Por otra parte, por $(*_3)$, $T \vdash \forall v_2 \neg\alpha(\widetilde{e}, v_2)$, de donde se sigue que $T \vdash \neg\alpha(\widetilde{e}, \widetilde{m})$, por lo que T es inconsistente.

Así, si T es consistente, T no demuestra su sentencia de Gödel. Quisiéramos concluir ahora que tampoco la refuta, es decir, que $\neg\gamma$ tampoco es un teorema de T. Sin embargo, para ello debemos exigir que T cumpla una condición adicional. Para motivarla, veamos qué ocurriría si $\neg\gamma$ fuera un teorema de la teoría consistente T. Por una parte, por $(*_3)$, tendríamos que $T \vdash \neg\forall v_2 \neg\alpha(\widetilde{e}, v_2)$; por otra parte, como acabamos de mostrar, no hay ninguna deducción de γ a partir de de los axiomas de T, de modo que, por (R2), para todo número m, $T \vdash \neg\alpha(\widetilde{e}, \widetilde{m})$. Vemos, pues, que debería haber una fórmula, $\varphi(v_2)$, con una variable libre, a saber la fórmula $\neg\alpha(\widetilde{e}, v_2)$, tal que (i) $T \vdash \neg\forall v_2 \varphi(v_2)$, a la vez que (ii) $T \vdash \varphi(\widetilde{m})$ *para todo número natural* m. De una teoría que que cumple (i) y (ii) para alguna fórmula φ se dice que es ω-inconsistente. Es claro que una teoría tal no es verdadera de los números naturales (es decir, no tiene a la estructura de los números naturales como modelo). Una teoría que no es ω-inconsistente es *ω-consistente.* Puesto que toda teoría ω-consistente es consistente, tenemos que:

- *Si* T *es* ω*-consistente, entonces* $T \nvdash \neg\gamma$.

Podemos formular, pues, el teorema de incompletud de Gödel de este modo: Toda teoría recursivamente axiomatizable que sea ω-consistente y que tenga por lo menos el contenido mínimo mencionado (suficiente para la representabilidad de las relaciones y funciones recursivas) es incompleta.

4

El lema de diagonalización nos permite obtener el teorema, demostrado por Alonzo Church en 1936 [7], según el cual toda teoría consistente con por lo menos el contenido mínimo indicado es indecidible, es decir, el conjunto de (los números de Gödel de) sus teoremas no es recursivo. El argumento es el siguiente: Si tal conjunto es recursivo, hay una fórmula $\tau(v_1)$ que lo representa en T; o sea, para toda sentencia α con número de Gödel m, si $T \vdash \alpha$, entonces $\vdash \tau(\widetilde{m})$, mientras que si $T \nvdash \alpha$, entonces $\vdash \neg\tau(\widetilde{m})$. Aplicamos ahora el lema de diagonalización a la fórmula $\neg\tau(v_1)$ y obtenemos una sentencia σ tal que $T \vdash \sigma \leftrightarrow \neg\tau(\widetilde{e})$ (donde e es el número de Gödel de σ). Pero entonces podemos concluir que $T \vdash \sigma$ si y sólo si $T \vdash \neg\sigma$, por lo que T es inconsistente.

No es difícil ver que toda toda teoría consistente recursivamente axiomatizable y completa es decidible (para decidir si una sentencia σ es un teorema de la teoría basta producir, una a una, todas las deducciones y verificar si su última fórmula es σ o $\neg\sigma$. La completud de la teoría garantiza que una u otra debe aparecer). Podemos, pues, aplicar el teorema de Church para concluir que toda teoría consistente y recursivamente axiomatizable con por lo menos el contenido mínimo indicado es incompleta. Esta es una nueva demostración del teorema de incompletud de Gödel en el que no interviene la ω-consistencia. La simple consistencia basta. En este aspecto, esta forma del teorema del completud es más fuerte que la anterior, ya sólo exige la consistencia, pero la demostración que de él hemos dado es menos informativa que la de Gödel, ya que no exhibe ninguna sentencia independiente de la teoría (es decir, ni ella ni su negación son deducibles de sus axiomas). Ahora bien, en el mismo año 1936, Barkley Rosser obtuvo una sentencia tal modificando la construcción de Gödel [21].

Church mostró también [6] que la lógica misma de primer orden es indecidible, en el sentido de que no hay ningún algoritmo que permita determinar si una sentencia es universalmente válida (o sea, verdadera en todas las estructuras). Para ello basta hallar una teoría consistente y finitamente axiomatizable T en el lenguaje de la aritmética con por lo menos el contenido mínimo mencionado. La razón es simple: Si la lógica fuera decidible lo sería también T, pues para determinar si σ es un teorema de T basta determinar si el condicional $\alpha \to \sigma$ es universalmente válido, donde α es la conjunción de los axiomas de T. (Los dos primeros artículos de la breve monografía *Undecidable theories* [22] de Tarski, Mostowski y Robinson constituyen una magnífica presentación general de estos temas.)

Vale la pena observar que el requisito repetidamente mencionado de poseer un mínimo contenido matemático no es eliminable, pues no es difícil describir teorías consistentes y completas en el lenguaje de la aritmética. Un ejemplo trivial: la teoría cuyos axiomas son las dos sentencias $\forall v_1 \forall v_2\, (v_1 = v_2)$ y $\forall v_1\, (v_1 < v_1)$. Su modelo (único salvo isomorfismo) contiene un único objeto a (esto fija la denotación de la constante 0 y las operaciones S, $+$ y $\cdot$) tal que $a < a$.

Falta decir algo sobre el llamado *segundo teorema de incompletud*. Tras la descripción de la sentencia de Gödel γ de una teoría T, hemos mostrado que si T es consistente, γ no es deducible en T. Tratemos de formular este resultado en el lenguaje de la aritmética. Puesto que $T \vdash \neg\,(\widetilde{0} = \widetilde{1})$, T es consistente si y sólo si $T \nvdash \widetilde{0} = \widetilde{1}$. Así, si c es el número de Gödel de la sentencia $\widetilde{0} = \widetilde{1}$, T es consistente si y sólo si para todo número m no es el caso que $\mathsf{Ded}(c, m)$. Si α es una fórmula que representa a Ded en T, podemos expresar en T la consistencia de T mediante la sentencia $\forall v_2 \neg\alpha(\widetilde{c}, v_2)$. Llamemos a esta sentencia $\mathsf{Con}(T)$.

Análogamente, dado que $\mathrm{G}(\gamma) = e$, expresamos que γ no es deducible en T como $\forall v_2 \neg\alpha(\widetilde{e}, v_2)$. Pero, por $(*_3)$, esta sentencia es equivalente a γ. Por tanto podemos formalizar que si T es consistente, entonces $T \nvdash \gamma$, como: $\mathsf{Con}(T) \to \gamma$.

Ahora bien, esta formalización puede ser deficiente. Que la fórmula α represente a la relación Ded en la teoría T sólo garantiza que T evalúa correctamente Ded *para cada par de números concretos*. Pero de ello no podemos inferir que α capture adecuadamente el concepto de deducibilidad y, por tanto, que la sentencia $\forall v_2 \neg\alpha(\widetilde{e}, v_2)$ exprese que γ no es deducible en T.

Sin embargo, si como T tomamos una teoría aritmética razonable y razonablemente potente (más potente que el mínimo requerido para las demostraciones anteriores), en particular, si como T tomamos la aritmética de Peano (entre cuyos axiomas se hallan las definiciones recursivas de la suma y el producto y el principio de inducción matemática), podemos representar las relaciones y funciones recursivas con fórmulas que expresan estas relaciones y funciones de modo natural. En tal caso, la fórmula $\mathsf{Con}(T) \to \gamma$ expresará lo que pretendemos expresar.

Supongamos, pues, que T es la aritmética de Peano. Supongamos también que las fórmulas elegidas para representar las funciones y relaciones recursivas son intensionalmente correctas. En la última sección de su artículo, Gödel observa que la demostración de que la consistencia de T implica la indemostrabilidad de γ en T puede llevarse a cabo en T, por lo que el condicional $\mathsf{Con}(T) \to \gamma$ es, de hecho, un teorema de T. Pero entonces, si T es consistente, $\mathsf{Con}(T)$ no es un teorema de T, pues si lo fuera también lo sería γ. Este es el segundo teorema de incompletud de Gödel, según el cual la consistencia de una teoría suficientemente potente no puede demostrarse con los medios formalizables en la misma teoría. Gödel no demostró propiamente este teorema, sólo argumentó en favor de su plausibilidad. La primera demostración completa, muy laboriosa, apareció en 1939, en el segundo volumen de *Grundlagen der Mathematik* [19], de Hilbert y Bernays.

Es preciso añadir que los resultados discutidos hasta ahora no sólo se aplican a teorías en el lenguaje de la aritmética, sino también a todas aquellas teorías en las que los conceptos aritméticos son definibles, en particular a la teoría de conjuntos.

5

El primero de los problemas propuestos por Hilbert en su conferencia de 1900 lleva por título *El problema cantoriano de la potencia del continuo*. La potencia (Mächtigkeit) de un conjunto es su cardinalidad, y el continuo es el conjunto de los números reales. El problema consiste en demostrar o refutar la *hipótesis del continuo*, que Cantor propuso por primera vez en 1878 en [2], según la cual todo conjunto de números reales o bien es numerable (o sea, biyectable con el conjunto de los números naturales) o bien tiene la potencia del continuo (es decir, es biyectable con el conjunto de todos los números reales).

Tras este problema, Hilbert presenta otro que, dice, está íntimamente relacionado con el primero y puede ser la clave de su solución. Se trata de demostrar o refutar la aseveración de Cantor de que todo conjunto, y el continuo en particular, es bien ordenable, es decir, admite un buen orden. Un buen orden de un conjunto A es un orden lineal de A con respecto al cual todo subconjunto no vacío de A tiene elemento mínimo.

En 1904, Zermelo introdujo el axioma de elección y con su ayuda demostró que todo conjunto es bien ordenable (brevemente, demostró el *principio del buen orden*) [27]. Cuatro años más tarde publicó otra prueba del mismo resultado [28]. En la formulación que le dio Zermelo cuando en 1908 presentó la primera axiomatización de la teoría de conjuntos [29], el axioma de elección dice que si A es un conjunto cuyos elementos son conjuntos no vacíos y disjuntos entre sí, hay un conjunto B que posee exactamente un elemento en común con cada uno de los elementos de A. Es obvio que si la unión del conjunto A (o sea el conjunto $\bigcup A$ cuyos elementos son los elementos de los elementos de A) es bien ordenable, tal conjunto B existe: dado un buen orden de la unión de A, definimos B como el conjunto de los elementos mínimos de los elementos de A. Así, módulo los restantes axiomas de Zermelo, el axioma de elección y el principio del buen orden son equivalentes.

¿Resolvió Zermelo el problema de Hilbert? La respuesta depende de cuáles sean los principios conjuntistas básicos que aceptemos. De hecho, tanto el problema del buen orden como el del continuo sólo tienen un sentido claro si fijamos con suficiente precisión la teoría de conjuntos en que están inmersos, y en 1900 Hilbert no estaba en disposición de hacerlo. En todo caso, tras la demostración de Zermelo y la axiomatización de la teoría de conjuntos, la pregunta natural a este respecto es si el axioma de elección es deducible de los axiomas restantes.

A partir de la axiomatización de Zermelo, la teoría de conjuntos se fue precisando hasta estabilizarse en la teoría de Zermelo-Fraenkel (ZF) o en la versión equivalente de von Neumann-Bernays-Gödel (NBG). Las dos teorías son equivalentes en cuanto los mismos teoremas sobre conjuntos son demostrables en una y otra, si bien ZF trata sólo de conjuntos y NBG admite también clases. En lo que sigue, sólo hablaremos de ZF.

En 1939 Gödel demostró que el axioma de elección y la hipótesis del continuo son consistentes con ZF ([14], vol. 2, 28-32). Esto es, demostró que si extendemos ZF con el axioma de elección y la hipótesis del continuo como nuevos axiomas, el resultado es una teoría consistente, si ZF lo es. De esto se sigue que ni el axioma de elección ni la hipótesis del continuo son refutables en ZF. En 1963, Paul Cohen mostró que tampoco son demostrables en ella [8]. Las dos proposiciones son, pues, independientes de ZF.

ZF es una teoría axiomática en un lenguaje de primer orden sobre los conjuntos puros, es decir, los conjuntos cuyos elementos son conjuntos, los elementos de cuyos elementos son conjuntos, etc. Sus axiomas son de dos clases. Por una lado, están aquellos que podemos calificar de estructurales: el axioma de extensionalidad, según el cual todo conjunto está determinado por sus elementos, y el de fundación o regularidad, que afirma que todo conjunto no vacío posee un elemento minimal, es decir que para todo conjunto $a \neq \emptyset$

hay un conjunto b tal que $b \in a$ y $b \cap a = \emptyset$. Por otro lado, están los axiomas de existencia de conjuntos: el axioma del par, el de separararación, el de la unión, el de infinitud, el de substitución y el del conjunto potencia (el conjunto potencia $\mathcal{P}(a)$ de un conjunto a es el conjunto de todos los subconjuntos de a).

Esencial en el desarrollo de ZF es el concepto de *ordinal*. Los ordinales, que Cantor introdujo en 1883 ([3], [5]), pueden verse como una extensión de los números naturales. Cantor los introdujo mediante dos principios de generación. El primer principio permite pasar de un ordinal cualquiera α a su *sucesor* inmediato, $\alpha + 1$. El segundo principio se aplica a todo conjunto de ordinales sin elemento máximo para generar su *límite*, esto es, el menor ordinal mayor que todos los elementos del conjunto. Los ordinales obtenidos por el primer principio son los ordinales sucesores; los obtenidos por el segundo principio son los ordinales límites. Los números naturales son los ordinales generables mediante el uso exclusivo del primer principio de generación. Su límite es ω, el menor ordinal infinito. Exceptuando el menor ordinal, 0, todo ordinal es o bien un sucesor o bien un límite. Posteriormente Cantor definió los ordinales como los tipos de orden de los buenos órdenes, y actualmente se definen como conjuntos de cierta clase (conjuntos transitivos bien ordenados por la relación de pertenencia). Una ventaja de la definición actual, debida a von Neumann, es que la relación de orden entre ordinales es la relación de pertenencia ($\alpha < \beta$ si y sólo si $\alpha \in \beta$), de modo que cada ordinal es el conjunto de todos los ordinales que le preceden. Sin embargo, la definición original, aunque matemáticamente deficiente, es la más sugerente. Además, nos permite ver de modo inmediato por qué no hay ningún conjunto que contenga todos los ordinales. La razón es simple: si a es un conjunto cualquiera de ordinales, o bien a tiene elemento máximo o no lo tiene. Si lo tiene, su sucesor inmediato es un ordinal que no pertenece a a, si no lo tiene, el límite de a es un ordinal que no pertenece a a.

De acuerdo con ZF, el universo de los conjuntos V (que no es un conjunto) se estructura en una sucesión transfinita de estratos, los conjuntos V_α, uno para cada ordinal α, de modo que V_0 es el conjunto vacío, $V_{\alpha+1} = \mathcal{P}(V_\alpha)$ y, si α es un ordinal límite, $V_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} V_\beta$. Así, los elementos un estrato sucesor son los subconjuntos del estrato precedente, mientras que los elementos un estrato límite son todos aquellos conjuntos que ya aparecen en estratos anteriores. De esto se sigue que cada V_α es transitivo (o sea, contiene los elementos de sus elementos) y que si $\alpha < \beta$, entonces $V_\alpha \subseteq V_\beta$. Esta sucesión de estratos es la llamada *jerarquía acumulativa*. Su definición no depende del axioma de fundación. De hecho, este axioma es equivalente (módulo los restantes axiomas) a la proposición de que todo conjunto pertenece a algún estrato: $\forall x\, \exists \alpha\, (x \in V_\alpha)$.

Una seria dificultad en el estudio de los conjuntos es dar cuenta del contenido del conjunto potencia de un conjunto infinito cualquiera. En la jerarquía acumulativa, todos los subconjuntos de un estrato aparecen de golpe en el estrato posterior. No así en la *jerarquía constructible* que Gödel concibió para demostrar que el axioma de elección y la hipótesis del continuo son consistentes con ZF. Al igual que la acumulativa, la jerarquía que Gödel define es una sucesión transfinita de estratos, L_α, uno para cada ordinal α. También como en la jerarquía acumulativa, $L_0 = \emptyset$ y $L_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} L_\beta$, para cada ordinal límite α. La definición sólo cambia en los estratos sucesores: $L_{\alpha+1} = \mathcal{D}(L_\alpha)$, donde $\mathcal{D}(L_\alpha)$ es el conjunto de todos los subconjuntos de L_α definibles en L_α mediante una fórmula de primer orden con parámetros en L_α. Esto significa que un conjunto a aparece en el estrato $L_{\alpha+1}$ si y sólo si hay una fórmula φ y elementos $a_1, \dots a_n$ de L_α (los parámetros de la definición) tales que a es el conjunto de los elementos x de L_α que en L_α cumplen que $\varphi(x, a_1, \dots, a_n)$. Formalmente:

$$a = \{x \in L_\alpha : L_\alpha \models \varphi(x, a_1, \dots, a_n)\}\,.$$

(Este concepto de definibilidad es expresable ZF, por lo que la definición de la jerarquía constructible es inobjetable.)

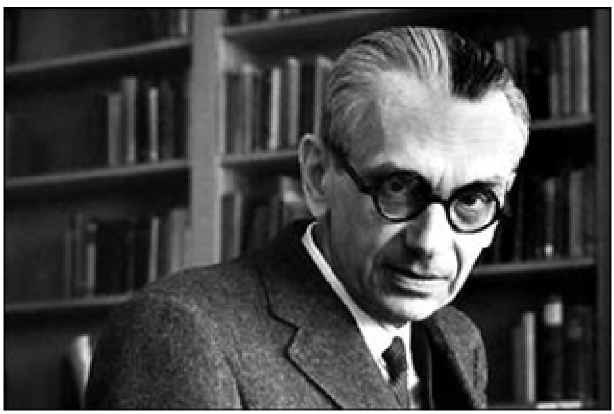
Un *conjunto constructible* es un conjunto que pertenece a algún L_α. Sea L a la totalidad de los conjuntos constructibles. L no es un conjunto, puesto que contiene todos los ordinales: de hecho, $\alpha \in L_{\alpha+1}$. En primer lugar, Gödel muestra que todos los axiomas de ZF se cumplen en L. Por ello decimos que L, el *universo constructible*, es un modelo de ZF. El universo constructible satisface el llamado *axioma de constructibilidad* ($\forall x \exists \alpha\, (x \in L_\alpha)$ o, brevemente, $V = L$) según el cual todo conjunto es constructible (esto no es inmediato).

Gödel muestra que todo conjunto constructible es bien ordenable, de modo que el axioma de elección se cumple en L. De hecho, Gödel define un buen del universo constructible. El punto crucial de la definición es cómo extender un buen orden de un estrato L_α a un buen orden del estrato sucesor $L_{\alpha+1}$. Puesto que todo elemento de $L_{\alpha+1}$ está determinado por una fórmula y una sucesión finita de elementos de L_α, ordenamos los nuevos elementos de $L_{\alpha+1}$ según el número de Gödel de la fórmula que los define y el orden que los parámetros tienen en L_α.

Gödel muestra también que la hipótesis del continuo vale en el universo constructible. Puesto que 1) ω cumple el papel del conjunto de los números naturales, y 2) el conjunto de los números reales es biyectable con $\mathcal{P}(\omega)$, la hipótesis del continuo dice que todo subconjunto infinito de $\mathcal{P}(\omega)$ es o bien numerable o bien biyectable con $\mathcal{P}(\omega)$. La demostración de que la hipótesis del continuo vale en L es más compleja y delicada que la del axioma de elección, pero es posible indicar su punto principal. Antes, sin embargo, es conveniente reformular la hipótesis del continuo. La reformulación (que sólo es aceptable en presencia del axioma de elección, que, como ya sabemos, vale en L) es que $\mathcal{P}\omega$ es biyectable con ω_1, el menor ordinal no numerable. La razón de la equivalencia reside en que, puesto que $\mathcal{P}(\omega)$ es bien ordenable y no es numerable, posee un subconjunto biyectable con ω_1. Por tanto, decir que todo conjunto no numerable de $\mathcal{P}(\omega)$ es biyectable con $\mathcal{P}(\omega)$ es decir que $\mathcal{P}(\omega)$ es biyectable con ω_1. Gödel muestra esto se cumple en el universo constructible en dos pasos. En primer lugar, muestra que todo subconjunto constructible de ω pertenece a L_{ω_1} (de modo que si $V = L$, entonces $\mathcal{P}(\omega) \subseteq L_{\omega_1}$), en segundo lugar, muestra que L_{ω_1} es biyectable con ω_1.

De hecho, como demostró Gödel, no sólo la hipótesis del continuo vale en L, sino también la llamada *hipótesis generalizada del continuo*, donde el papel de ω y el de $\mathcal{P}(\omega)$ lo cumplen cualquier conjunto infinito y su conjunto potencia. En una de sus formulaciones equivalentes, la hipótesis generalizada del continuo dice que si a es un conjunto infinito, todo subconjunto de $\mathcal{P}(a)$ es biyectable o bien con un subconjunto de a o bien con $\mathcal{P}(a)$.

Tanto en el artículo de 1931 como en el de 1939, las aportaciones de Gödel van mucho más allá de los resultados obtenidos. Los métodos introducidos en la demostración del teorema de incompletud y la incorporación a la teoría de conjuntos del universo constructible han contribuido de modo esencial al desarrollo de los fundamentos de la matemática y de la teoría de conjuntos como disciplina autónoma.



REFERENCIAS

[1] GEORG CANTOR, Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen. 77:258–262, 1874. En [4], 115-118.

[2] GEORG CANTOR, Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre. 84:242–258, 1878. En [4], 119-133.

[3] GEORG CANTOR, *Grundlagen einer allgemeine Mannigfaltigkeitslehre*. Teubner, Leipzig, 1883. En [4], 165-208. Traducción española en [5], 81-135.

[4] GEORG CANTOR, *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*. Springer-Verlag, Berlin, 1932. Editado por Ernst Zermelo.

[5] GEORG CANTOR, *Fundamentos para una teoría general de conjuntos. Escritos y correspondencia selecta*. Crítica, Barcelona, 2006. Edición de José Ferreirós.

[6] ALONZO CHURCH, A note on the Entscheidungsproblem. *The Journal of Symbolic Logic*, 1:40–41, 1936.

[7] Alonzo Church, An unsolvable problem of elementary number theory. 58:345–363, 1936.

[8] Paul Cohen, The independence of the continuum hypothesis. *Proceedings of the National Academy of Sciences, U.S.A.*, 50:1143–1148, 1963.

[9] John W. Dawson, *Logical Dilemmas: The Life and Work of Kurt Gödel.* A K Peters, Wellesley, Massachusetts, 1997.

[10] William Ewald, editor, *From Kant to Hilbert: A Source Book in the Foundations of Mathematics*, volume II. Clarendon Press, Oxford, 1996.

[11] Solomon Feferman, *In the Light of Logic.* Oxford University Press, New York, 1998.

[12] José Ferreirós, *Labyrinth of Thought.* Birkhäuser, Basel, 1999.

[13] Torkel Franzén, *Gödel's Theorem. An Incomnplete Guide to Its Use and Abuse.* A K Peters, Wellesley, Massachusetts, 2005.

[14] Kurt Gödel, *Collected Works.* Volumes I-V. Edited by Solomon Feferman et al. Oxford University Press, New York, 1986-2003.

[15] Kurt Gödel, *Obras completas.* Alianza, Madrid, 1989. Introducción y traducción de Jesús Mosterín.

[16] David Hilbert, Mathematische Probleme. 1900. Traducción inglesa en el *Bulletin of the American Mathematical Society*, vol. 37 (2000), 407-436. Traducción parcial en [10], 1095-1105.

[17] David Hilbert, Über den Zahlbegriff. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 8:180–184, 1900. Traducción inglesa en [10], 1089-1095.

[18] David Hilbert y Wilhelm Ackermann, *Grundzüge der theoretischen Logik.* Springer, Berlin, 1928.

[19] David Hilbert y Paul Bernays, *Grundlagen der Mathematik*, Band 2. Springer, Berlin, 1939.

[20] Henri Poincaré, Les mathématiques et la logique. *Revue de Métaphysique et de Morale*, 13:815–835, 1905.

[21] Barkley Rosser, Extensions of some theorems of Gödel and Church. *The Journal of Symbolic Logic*, 1:87–91, 1936.

[22] Alfred Tarski, Andrzej Mostowski y Raphael M. Robinson, *Undecidable Theories.* North-Holland, Amsterdam, 1953.

[23] Jan van Heijenoort, editor, *From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931.* Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts, 1967.

[24] Hao Wang, *Reflections on Kurt Gödel.* The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1987.

[25] HAO WANG, *Reflexiones sobre Kurt Gödel.* Alianza, Madrid, 1991. Traducción española de [24] por Pilar Castillo.

[26] HAO WANG, *A Logical Journey.* The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1996.

[27] ERNST ZERMELO, Beweis, daß jede Menge wohlgeordnet werden kann. *Mathematische Annalen*, 59:514–516, 1904. Traducción inglesa en [23],139-141.

[28] ERNST ZERMELO, Neue Beweis für die Möglichkeit einer Wohlordnung. *Mathematische Annalen*, 65:107–128, 1908. Traducción inglesa en [23], 183-198.

[29] ERNST ZERMELO, Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I. *Mathematische Annalen*, 65:261–281, 1908. Traducción inglesa en [23], 199-215.

Ignacio Jané
Departament de Lògica
Universitat de Barcelona
Montalegre, 6
08001 Barcelona
Correo electrónico: `jane@ub.edu`