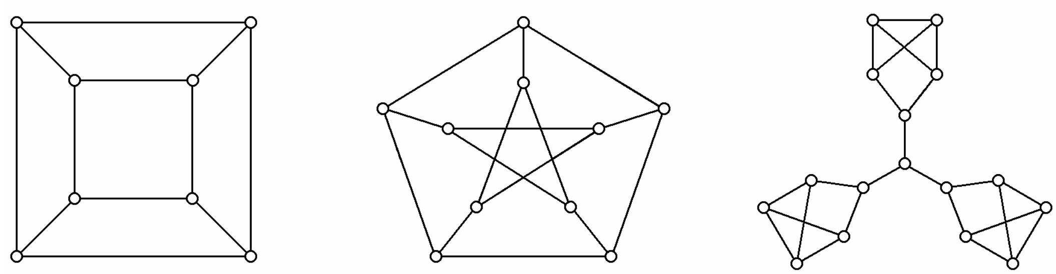
11 PÁRNE GRAFY

11.1 Párovania a transverzály

Definícia. Párovanie (matching) v grafe je taká množina hrán, z ktorých žiadne dve nemajú spoločný vrchol. Hrany ľubovoľného párovania tvoria množinu **navzájom nezávislých hrán**. **Maximové párovanie** je párovenie s najväčším počtom hrán a **kompletné párovanie** v grafe na n vrcholoch je párovanie, ktoré má $\frac{n}{2}$ hrán.

Poznamenajme, že každý graf má maximové párovanie, avšak kompletné párovanie mať nemusí.

Príklad 1. Na obr. 20 sú znázornené tri súvislé pravidelné grafy stupňa 3, všetky na párnom počte vrcholov. Prvý graf má kompletné párovanie, dokonca množinu jeho hrán možno rozložiť na tri kompletné párovania. Druhý graf má kompletné párovanie, ale množinu jeho hrán nemožno rozložiť na tri kompletné párovania. Tretí graf nemá kompletné párovanie.



Obr. 20

Párovania v párnych grafoch odpovedajú transverzálam. Nech je X množina dievčat a Y nech je množina mládencov. Nech je $G = (X, Y; E)$ párny graf, v ktorom sú vrcholy $x \in X$ a $y \in Y$ spojené hranou práve vtedy, keď sa mládenec y páči slečne x. Ak označíme $N(x)$ množinu vrcholov $y \in Y$, pre ktoré existuje (x, y) hrana v grafe G, tak systém $\{N(x); x \in X\}$ odpovedá zoznamom prípustných nápadníkov pre dievčatá a priradenie čo najväčšieho počtu nápadníkov dievčatám odpovedá maximovému párovaniu.

Definícia. Hrana **pokrýva** vrchol, ak je s týmto vrcholom susedná a množina hrán M pokrýva množinu vrcholov S ak pre každý vrchol $v \in S$ existuje hrana $e \in M$ pokrývajúca vrchol v. Nech je $G = (V, E)$ graf, $x \in V$ a $S \subseteq V$. Symbolom $N(x)$ označujeme množinu vrcholov $y \in V$, pre ktoré existuje (x, y) hrana v grafe G *a* symbolom $N(S)$ označujeme množinu $\bigcup_{x \in S} N(x)$.

Nasledujúca veta je ekvivalentná s Hallovou vetou 7.1, avšak formulovaná je v reči teórie grafov.

Veta 11.1 (Hallova veta). Párny graf $G = (X, Y; E)$ má párovanie pokrývajúce celú množinu X práve vtedy, keď $|N(S)| \geq |S|$ pre každú množinu $S \subseteq X$.

D ô k a z : Nech je $G = (X, Y; E)$ párny graf, pričom $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Podľa Hallovej vety 7.1 má systém $N(x_1), N(x_2), \ldots, N(x_n)$ podmnožín množiny Y transverzálu práve vtedy, keď pre každé $k = 1, 2, \ldots, n$ a pre každý výber $i_1, i_2, \ldots, i_k$ taký, že $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n$ platí

$$|N(x_{i_1}) \cup N(x_{i_2}) \cup \ldots \cup N(x_{i_k})| \geq k$$

Transverzála je priradenie rôznych prvkov y množiny Y rôznym množinám $N(x)$, pričom $y \in N(x)$. Preto dvojice prvkov (x, y) reprezentujúce toto priradenie tvoria navzájom nezávislé hrany grafu G.

Keďže v transverzále má každá množina $N(x)$, $x \in X$, reprezentanta $y \in Y$, tak navzájom nezávislé hrany reprezentujúce transverzálu pokrývajú celú množinu X. Teda systém $N(x_1)$, $N(x_2)$, …, $N(x_n)$ má transverzálu práve vtedy, keď v grafe G existuje párovanie pokrývajúce celú množinu X. Na druhej strane

$$N(x_{i_1}) \cup N(x_{i_2}) \cup \ldots \cup N(x_{i_k}) = N(\{x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}\})$$

čiže pre každú množinu $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ platí $|N(x_{i_1}) \cup N(x_{i_2}) \cup \ldots \cup N(x_{i_k})| \geq k$ práve vtedy, keď $|N(S)| \geq |S|$. □

Veta 11.2. Nech je $H = (X, Y; F)$ pravidelný párny graf stupňa p. Potom množinu hrán F možno rozložiť na p kompletných párovaní grafu H.

D ô k a z : Všimnite si, že $|X| = |Y|$, keďže H má $p|X| = p|Y|$ hrán. Vetu dokážeme indukciou podľa stupňa p grafu H.

1° Ak $p = 1$, tak niet čo dokazovať, lebo hrany tvoria kompletné párovanie grafu H.

2° Nech veta platí pre grafy stupňa $p - 1$, pričom párny graf H má stupeň p. Ukážeme, že H má kompletné párovanie. Nech $S \subseteq X$. S vrcholmi množiny S je susedných $p|S|$ hrán, pričom všetky tieto hrany majú druhého suseda v množine $N(S)$. Ak by platilo $|N(S)| < |S|$, tak by podľa Dirichletovho princípu existoval vrchol $y \in N(S)$, ktorého stupeň je aspoň $\dfrac{p|S|}{|N(S)|} > p$, čo je spor s predpokladom, že párny graf H je pravidelný stupňa p. To znamená, že $|N(S)| \geq |S|$ platí pre každú množinu $S \subseteq X$, čiže podľa Hallovej vety 11.1 má párny graf H párovanie M pokrývajúce celú množinu X. Keďže $|X| = |Y|$, tak M je kompletné párovanie grafu H. Označme H' graf, ktorý vznikne z H vynechaním všetkých hrán párovania M. Graf H' je pravidelný párny graf stupňa $p - 1$ a podľa indukčného predpokladu možno množinu hrán grafu H' rozložiť na $p - 1$ kompletných párovaní $M_1, M_2, \ldots, M_{p-1}$. Teda $M_1, M_2, \ldots, M_{p-1}, M$ je rozklad množiny hrán grafu H na p kompletných párovaní. □

Porovnajte vetu 11.2 s cvičením 7.5. Nasledujúca veta je ekvivalentná so zovšeobecnenou Hallovou vetou 7.3, avšak formulovaná je v reči teórie grafov.

Veta 11.3 (zovšeobecnená Hallova veta). Nech je $G = (X, Y; E)$ párny graf. Označme S_0, takú podmnožinu množiny X, pre ktorú je číslo $|S_0| - |N(S_0)|$ najväčšie. Potom maximové párovanie párneho grafu G má

$$|X| = (|S_0| - |N(S_0)|)$$

hrán.

D ô k a z : Najprv si všimnime, že platí $|S_0| - |N(S_0)| \geq 0$, keďže pre prázdnu množinu sa tento výraz rovná 0. Podľa zovšeobecnenej Hallovej vety 7.3 má párny graf $G = (X, Y; E)$, kde $|X| = n$, párovanie veľkosti r práve vtedy, keď pre každé $k = 1, 2, \ldots, n$ a pre každú k-prvkovú podmnožinu S množiny X platí

$$|N(S_0)| \geq k - (n - r)$$

To znamená, že párny graf G má párovanie veľkosti r práve vtedy, keď pre každú podmnožinu S množiny X platí

$$|N(S)| \geq |S| - |X| + r, \quad \text{čiže} \quad r \leq |X| - (|S| - |N(S)|)$$

Teda ak označíme S_0 takú podmnožinu množiny X, pre ktorú je hodnota $|S_0| - |N(S_0)|$ najväčšia, tak maximové párovanie grafu G má

$$|X| - (|S_0| - |N(S_0)|)$$

hrán. □

11.2 Petersenova a Königova veta

Definícia. Nech je $G = (V, E)$ graf a nech je $H = (V, F)$ podgraf grafu G. Ak je H pravidelný graf stupňa k, tak H nazývame ***k*-faktor** grafu G.

Všimnite si, že vrcholová množina k-faktoru grafu G je totožná s vrcholovou množinou grafu G. Kompletné párovanie je 1-faktor grafu, a teda podľa vety 11.2 možno pravidelný párny graf stupňa p

rozložiť na p 1-faktorov. Ak však graf nie je párny, tak nie vždy je možné rozložiť pravidelný graf na 1-faktory, pretože tento graf nemusí obsahovať žiaden 1-faktor, pozri príklad 1. Napriek tomu pre 2-faktory platí nasledujúce tvrdenie, ktoré dokázal J. Petersen v roku 1891.

Veta 11.4 (Petersenova veta). Nech je $G = (V, E)$ pravidelný graf stupňa $2p$. Potom množinu hrán E možno rozložiť na p 2-faktorov grafu G.

Dôkaz: Vetu stačí dokázať pre súvislé grafy, pretože v nesúvislom grafe možno rozložiť každý komponent súvislosti samostatne. Teda predpokladajme, že G je súvislý graf. Keďže všetky vrcholy grafu G sú párneho stupňa, tak podľa Eulerovej vety 9.3 v grafe G existuje uzavretý Eulerovský ťah T. Zvoľme si orientáciu ťahu T a prejdime sa po grafe pozdĺž hrán T. Zvolená orientácia nám určila, ktorým smerom sme prešli každú hranu grafu G. Označme $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ vrcholy grafu G. Nech sú $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ a $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ disjunktné množiny. Zostrojme pomocný párny graf $H = (X, Y; F)$ tak, že dvojica (x_i, y_j), je hranou grafu H práve vtedy, keď je (v_i, v_j) hranou grafu G, pričom pri prechádzke pozdĺž hrán ťahu T sme túto hranu prešli v smere z v_i do v_j, $1 \le i \le n$ a $1 \le j \le n$. Keďže G je pravidelný graf stupňa $2p$, tak H je pravidelný párny graf stupňa p (do každého vrchola grafu G ťah T p krát „prišiel“ a p krát z neho „odišiel“). Podľa vety 11.2 možno množinu hrán F grafu H rozložiť na p kompletných párovaní $F_1, F_2, \dots, F_p$. Nech E_k obsahuje také hrany (v_i, v_j) grafu G, pre ktoré buď (x_i, x_j), alebo (x_j, y_i), patria do F_k, $k = 1, 2, \dots, p$ (všimnite si, že iba jedna z hrán (x_i, x_j) a (x_j, y_i) sa môže vyskytovať v grafe H). Keďže x_i aj y_i sú vrcholy stupňa 1 v 1-faktore F_k, tak stupeň vrchola v_i v E_k je 2 pre každé $i = 1, 2, \dots, n$ a $k = 1, 2, \dots, p$. To znamená, že $E_1, E_2, \dots, E_p$ sú 2-faktory grafu G. Tieto 2-faktory spolu obsahujú všetky hrany grafu G, a preto sú ich množiny hrán navzájom disjunktné. Teda systém $E_1, E_2, \dots, E_p$ tvorí rozklad množiny hrán grafu G na 2-faktory. □

Definícia. Nech je $G = (V, E)$ graf. Podmnožina P množiny vrcholov V tvorí **vrcholové pokrytie** grafu G, ak je každá hrana grafu G susedná s nejakým vrcholom z množiny P.

Veta 11.5 (Königova veta). Počet hrán maximového párovania párneho grafu sa rovná minimálnemu počtu vrcholov vrcholového pokrytia tohto grafu.

Dôkaz: Nech je $G = (V, E)$ párny graf. Označme m_e počet hrán maximového párovania a m_v minimálny počet vrcholov vrcholového pokrytia grafu G. Podľa vety 11.3 sa počet hrán maximového párovania rovná $|X| - (|S_0| - |N(S_0)|)$ pre nejakú množinu $S_0 \subseteq X$. Potom však $(X - S_0) \cup N(S_0)$ tvorí vrcholové pokrytie, lebo žiadna hrana nespája vrchol z množiny S_0 s vrcholom z $Y - N(S_0)$. Veľkosť tohoto pokrytia je

$$(|X| - |S_0|) + |N(S_0)| = |X| - (|S_0| - |N(S_0)|) = m_e$$

a preto pre minimálny počet vrcholov vrcholového pokrytia platí $m_v < m_e$. Na druhej strane každé vrcholové pokrytie obsahuje aspoň jeden vrchol z každej hrany maximového párovania, a preto $m_e < m_v$, čiže $m_e = m_v$. □

Königova veta je známejšia v inej formulácii.

Definícia. Riadky aj stĺpce matice nazývame spoločným názvom **línia**. Ak nejaký prvok matice leží v línii l, tak línia l **pokrýva** tento prvok. Prvky matice, ktoré neležia v spoločnej línii nazývame **nezávislé**. Matica $\boldsymbol{A}$ je **binárna**, ak sú všetky jej prvky 0 alebo 1.

Veta 11.6 (Königova veta). Maximálny počet navzájom nezávislých jednotiek binárnej matice sa rovná minimálnemu počtu línií, ktoré pokrývajú všetky jednotky v tejto matici.

Dôkaz: Nech je $\boldsymbol{A}$ matica typu $m \times n$ s prvkami $a_{i,j}$ a nech sú $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ a $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ disjunktné množiny. Zostrojme párny graf $G = (X, Y; E)$ tak, že $(x_i, y_j) \in E$ práve vtedy, keď $a_{i,j} = 1$. Teda jednotky matice $\boldsymbol{A}$ odpovedajú hranám a nuly „nehranám“ grafu G. Hrany každého párovania grafu G predstavujú v matici $\boldsymbol{A}$ navzájom nezávislé jednotky, pretože žiadna dvojica týchto hrán nemá spoločný vrchol, čiže žiadna dvojica odpovedajúcich jednotiek neleží v spoločnej línii. Na druhej strane, vrcholy každého vrcholového pokrytia grafu G predstavujú línie $\boldsymbol{A}$ pokrývajúce všetky jednotky, pretože každá hrana je susedná niektorému vrcholu z vrcholového pokrytia, čiže každá jednotka matice $\boldsymbol{A}$ leží v niektorej z pokrývajúcich línií. Podľa Königovej vety 11.5 sa veľkosť maximového párovania v grafe G rovná minimálnemu počtu vrcholov vrcholového pokrytia grafu G, a preto sa maximálny počet navzájom nezávislých jednotiek v $\boldsymbol{A}$ rovná minimálnemu počtu línií, pokrývajúcich všetky jednotky matice $\boldsymbol{A}$. □

Príklad 2. Uvažujme binárnu maticu $\boldsymbol{A}$ typu 5×5

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Táto matica neobsahuje žiadny nulový riadok ani nulový stĺpec. Napriek tomu na pokrytie tejto matice stačia štyri línie: druhý a štvrtý riadok a prvý a tretí stĺpec. V matici $\boldsymbol{A}$ sú štyri navzájom nezávislé jednoty, pretože $a_{1,3} = a_{2,4} = a_{3,1} = a_{4,2} = 1$. Podľa Königovej vety 11.6 už neexistuje väčší počet navzájom nezávislých jednotiek ani menší počet pokrývajúcich línií.

Königova veta je vetou minimaxového typu. Existuje metahypotéza, že každú hodnotu, ktorá je maximom jednej veličiny a zároveň minimom inej veličiny, možno nájsť v čase zhora ohraničenom polynómom, ktorého argument predstavuje veľkosť úlohy.

CVIČENIA

Cvičenie 11.1. Dokážte, že množinu hrán Petersenovho grafu nemožno rozložiť na kompletné párovania.

Cvičenie 11.2. Nájdite rozklad množiny hrán kompletného bipartitného grafu $K_{n,n}$, kde n je párne, na 2-faktory.

Cvičenie 11.3. Nájdite rozklad množiny hrán kompletného grafu K_n, kde n je párne, na 1-faktory.

Cvičenie 11.4. Nájdite rozklad množiny hrán kompletného grafu K_n, kde n je nepárne, na 2-faktory.

Cvičenie 11.5. Pre aké n môže existovať rozklad množiny hrán kompletného grafu K_n na trojuholníky? Akú štruktúru tvorí takýto rozklad?

Cvičenie 11.6. Dokážte, že v ľubovoľnom grafe má minimová množina vrcholov vrcholového pokrytia aspoň takú veľkosť, ako je veľkosť maximového párovania.

Cvičenie 11.7. Zostrojte párny graf odpovedajúci binárnej matici $\boldsymbol{A}$ z príkladu 2.

Cvičenie 11.8. Zostrojte binárnu maticu $\boldsymbol{A}$ odpovedajúcu prvému grafu z obrázku 20.