

**CONSIDERACIONES SOBRE EL USO DEL ANALISIS
MATEMATICO EN LA TEORIA ECONOMICA DE ANTOINE AUGUSTIN COURNOT**

**"Cournot's genius must give a new mental
activity to everyone who passes through his
hands"**

ALFRED MARSHALL

Martin Besfamilie

Universidad de San Andrés

Deseo agradecer a las siguientes personas los comentarios, críticas y sugerencias de lectura que sin lugar a dudas han contribuido a desarrollar las ideas expuestas en este trabajo: Juan C. Auernheimer, Rolf R. Mantel y Oreste Popescu.

INTRODUCCION

La importancia de la teoría como aproximación al estudio de la Economía no ha dejado de extenderse desde el nacimiento de esta disciplina como una materia separada de las discusiones ético - filosóficas más generales (1). A pesar del creciente consenso respecto al mencionado enfoque, subsisten, aún en la actualidad, disputas metodológicas sobre el uso de ciertos instrumentos en el análisis teórico. Con certeza, el que genera mayor controversia sobre su aplicabilidad a las cuestiones económicas es el matemático. En efecto, desde su introducción formal en los escritos de ciertos autores neoclásicos de fines del siglo XIX, la discusión sobre su utilización ha sido permanente (2).

Si bien, tal como fue señalado, suele reconocerse a los marginalistas como los precursores del empleo de esta herramienta en Economía, anteriormente varios autores habían intentado servirse de ella, con distinto resultado (3). Uno de éstos, Antoine Augustin Cournot, sobresalió por su originalidad y rigurosidad respecto a sus contemporáneos. Es por ello que, rindiéndole un reconocimiento frente a la Academia de Ciencias Morales y Políticas de París en 1873, Léon Walras dijo: "*M. Cournot es el primero que haya francamente intentado la aplicación de las matemáticas a la economía política; el la hizo en una obra, publicada en 1838, que ningún autor francés ha criticado jamás. Me he propuesto mencionar al autor de un intento notable, sobre el cual, lo repito, ningún juicio ha sido emitido, y al que osaría decir que no se ha hecho justicia*" (4).

Ante la osadía de estas palabras y debido a la importancia de quien las pronuncia, surge el deseo de profundizar sobre el pensamiento de este autor del siglo pasado. No obstante, como esta tarea exigiría un esfuerzo muy considerable, es necesario acotar el objeto de estudio. De esta forma, este ensayo tratará de examinar, lo más exhaustivamente posible, algunos temas referidos al uso del análisis matemático en sus obras.

Luego de una breve presentación biográfica del mencionado autor y de su atracción por la economía política, se intentará averiguar las posibles razones por las cuales Cournot optó por utilizar el análisis matemático en sus escritos de teoría económica. A partir de lo anterior, se considerarán los distintos conceptos y principios que, según el autor, eran adecuados para una correcta descripción del sistema económico. Por último, al señalar sus aplicaciones en la teoría económica, se procurará mostrar la fecundidad del camino metodológico abierto por Cournot.

VIDA Y OBRA DE COURNOT

Antoine Augustin Cournot (5) nació el 28 de Agosto de 1801 en Gray (Haute - Saône, Francia). R. Roy le dió una interpretación especial a su origen natal: "De su origen proveniente del Franco - Condado, Cournot probablemente heredó su gusto por los temas austeros y esa probidad intelectual (...) esa inclinación, marcada por la práctica de las ciencias abstractas, sin duda contribuyó a dar al estilo de Cournot ese rigor, y en alguna medida, esa austeridad que desalientan frecuentemente al lector" (6). Allí, en Gray, siguió sus estudios secundarios hasta los quince años. Luego hizo cuatro años de instrucción libre, los cuales consagró a lecturas de escritores científicos, como Bacon, Descartes, Leibniz y Kant. Enseguida Cournot se trasladó a Besançon para preparar el concurso de entrada a la Sección de Ciencias de la prestigiosa Ecole Normale Supérieure.

En 1821 logró ingresar a la misma pero, al año siguiente, ésta se cerró. Como los alumnos de la mencionada institución eran considerados sospechosos de ideas subversivas, Cournot se quedó en París "gracias" a una pequeña pensión otorgada por la policía. Constreñido a seguir los cursos en la Sorbonne, se convirtió en el discípulo de Lagrange y Laplace. En 1823 obtuvo la Licenciatura en Ciencias. Mientras tanto concurría a las sesiones de la Academia de Ciencias y se relacionaba con los principales funcionarios y sabios de la época.

En octubre de 1823, Cournot entró al servicio del mariscal Gouvion - Saint - Cyr para cumplir una doble tarea. Sería su consejero literario y preceptor de su hijo. Permaneció diez años en esa función. Paralelamente, continuaba sus trabajos científicos (especialmente en matemáticas (7)), obteniendo, al mismo tiempo que preparaba su Licenciatura en Derecho, el Doctorado en Ciencias. Su tesis fué halagada por el gran universitario S. D. Poisson. Este, en 1834, propuso y logró nombrar a Cournot para ocupar la cátedra de "Análisis y Mecánica" de la Facultad de Ciencias de Lyon. Un año más tarde fué llamado a ejercer el cargo de Rector de la Academia de Grenoble, la cual administró con mucho éxito.

Además de las traducciones de obras eminentemente técnicas y ensayos de matemática aplicada, Cournot se orientó principalmente hacia la economía política y la filosofía. Así, en 1838, año en que se lo eligió como Inspector General de la Universidad, editó su primera obra de economía: Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses. Le siguieron Principes de la théorie des richesses (1863) y Revue Sommaire des doctrines économiques (1877). Sin embargo, luego de la primera, abandonó parcialmente esta materia para publicar nuevamente algo relacionado con las ciencias exactas: Traité élémentaire de la théorie des fonctions et du calcul infinitésimal (1841). En 1843, comenzó una nueva fase, con una obra matemática Exposition des chances et des probabilités, cuyo tema iniciaba la transición hacia sus escritos propiamente filosóficos. Estos comprendieron los siguientes libros, donde también plasmó frecuentes alusiones a

fenómenos económicos Essai sur les fondements de nos connaissances et sur les caractères de la critique philosophique (1851), Traité de l'enchaînement des idées fondamentales dans les sciences et l'histoire (1861), Considérations sur la marche des idées et des événements dans les temps modernes (1872) y Matérialisme, Vitalisme, Rationalisme. Etudes sur l'emploi des données de la science en philosophie (1875).

Alrededor de la década del 40 comenzó a sufrir una afección a los ojos por lo que, si bien pudo continuar trabajando gracias a un secretario, como no le fue posible hallar uno que le leyera matemáticas (8), debió abandonarlas. En 1854 asumió como Rector en Dijon. En 1862 Cournot renunció a toda función pública y volvió a París. Murió el 30 de Marzo de 1877, justo antes de presentar su candidatura para la admisión al Instituto de la Academia de Ciencias.

Al igual que sus trabajos filosóficos y de historia, la obra económica de Cournot conocía muy poco suceso a lo largo del siglo XIX, especialmente en Francia (9). Prueba de ello es el silencio manifestado por un autor contemporáneo, J. Dupuit, que en 1844 publicó en los Annales des Ponts et Chaussées una memoria sobre la utilidad de las obras públicas sin ni siquiera citar el libro de 1838. No obstante, las ideas de Cournot recorrían lentamente su camino hacia el extranjero donde llegaron a provocar, en su momento, admiración. En una carta a Cournot, L. Walras le escribió: *"Usted, Señor, ha esperado 35 años para que alguien os siga en esa vía de aplicación de las matemáticas a la economía política y social, que será, tal vez una de las más fecundas de entre las aplicaciones de las matemáticas a las ciencias físicas que haya engendrado la concepción de Descartes sobre la generalidad de las relaciones entre variables"* (10).

LA PREOCUPACION DE COURNOT POR LA TEORIA ECONOMICA

No es sencillo comprender porqué, siendo un matemático, Cournot se había decidido a escribir sobre teoría económica. Es tal la incógnita que G. Luftalla se preguntó en la introducción a las Recherches: *"¿Cómo este joven matemático, encargado de las memorias de un valiente capitán, preocupado por problemas de análisis o de epistemología, fue llevado a unir la geometría y la teoría de las riquezas?"* (11). Aunque concluyó que: *"No se ha dado ninguna respuesta aceptable a la pregunta"*, se pueden plantear y estudiar algunas hipótesis.

Justamente por el hecho de haber sido, ante todo, un filósofo y un matemático es que Cournot se consagró a la Economía (12). En efecto, ya en 1838, las distintas ideas que iban a conformar su pensamiento general posterior influían en la determinación de redactar su primera obra. Concretamente, su inclinación probabilística lo llevó a interesarse en estas cuestiones.

Cournot distinguía las ciencias que él denominaba "de la cantidad" (como por ejemplo la física) y, por otra parte, las "de las combinaciones" (a las cuales se referían todos los estudios sociales). Las primeras requerían poca verificación experimental mientras que, las segundas, exigían un control permanente de los hechos, para poder apreciar su conformidad a las teorías que los habían intentado explicar.

Como fue señalado, estas teorías tenían el objetivo de descifrar las leyes que regían el comportamiento social. Para Cournot, éstas mostraban un carácter puramente contingente. Imbuído del racionalismo francés (13), sostenía que las relaciones interpersonales e intergrupales que se habían establecido en el seno de cualquier sociedad tenían por finalidad eliminar, poco a poco, la influencia de fenómenos accidentales. De esta forma, en un estadio avanzado de la civilización, esas relaciones se habrían manifestado estrictamente de acuerdo al enunciado de las leyes que gobernaban al todo social por lo que habría sido posible prever las consecuencias de cualquier alteración de una situación dada. Esta perspectiva de progreso indefinido de las ciencias sociales se sostenía en el hecho que las observaciones se habrían hecho sobre una gran cantidad de individuos, a los cuales se les podría haber aplicado la "ley de los grandes números" (14). Así, como aseveraba R. Roy, *"la materia social es singularmente apta para las aplicaciones de la teoría de las probabilidades..."* (15).

Si bien la explicación anterior parece aclarar algo sobre la predilección de Cournot por el estudio de los fenómenos humanos, aún no es tan evidente el motivo por el cual se sumergió en las consideraciones específicamente económicas. G. Luftalla sugirió una posible razón: Cournot podría haber quedado sorprendido por las elogiosas expresiones de Leibniz sobre la Economía. Por eso planteó que: *"Con que celo citó el a su filósofo de predilección en las Considérations: 'el genio universal de Leibniz, escribió el, presentía la importancia futura de lo que llamaba las Facultades económicas'"* (16). ¿Fue posible que, al leer esas apreciaciones del filósofo alemán, Cournot haya sentido la curiosidad intelectual de conocer la ciencia económica? Precisamente, reafirmando su conjetura, aseguró Luftalla: *"Sólo motivos de orden intelectual, y no el azar de las circunstancias, pudieron arrojar a Cournot al campo de la economía..."* (17).

Si fue verificable la gran erudición que había mostrado sobre estas cuestiones. El profesor H. L. Moore, quien profundizó minuciosamente en la vida de este autor y en la naturaleza de sus trabajos, da cuenta que Cournot había leído a Aristóteles, Montchrestien, los economistas ingleses del siglo XVIII, los fisiócratas (en particular a Turgot), Smith, a los maestros de la escuela liberal (Say, Ricardo, Mill y Bastiat) y que no ignoraba la obra de List. Además, durante toda su vida, siguió la evolución de los problemas económicos, especialmente los monetarios y los referidos al comercio internacional (18).

A la luz de estos múltiples escritos, Cournot hacía una distinción muy clara entre la economía "política" y "social". Esta última era la ciencia de las sociedades humanas. Por lo tanto, siempre habría de ser imperfecta y estar plagada de controversias, principalmente por dos razones. No solamente englobaba a nociones como "fuerza" y "vida", las cuales, permaneciendo bajo un halo de misterio, se habrían de oponer a toda expresión exacta, sino que también implicaba la noción de progreso, la cual le resultaba, a Cournot, difícil de definir por no tener un contenido preciso y objetivo. Por el contrario, la economía política, al ser la ciencia de la riqueza, era absolutamente rigurosa. Los problemas que ella se planteaba eran comparables a los de la mecánica. Su solución era independiente de las opiniones religiosas, filosóficas, políticas o morales (19).

Consecuentemente, Cournot se halló, en el momento de comenzar a escribir, frente a una disyuntiva. Debía optar por un estudio riguroso, científico y objetivo, pero restringido (puesto que la economía política es una fracción de la realidad social) o bien por un enfoque más amplio, comprensivo y sintético, pero que perdía rigor lógico. Como no pudo ser de otro modo, por su profunda educación matemática, Cournot optó por analizar los problemas de la economía política. No solamente el título de su principal obra adelantaba su elección, sino que ésta se veía ya confirmada en la primera frase del Prefacio: *"La ciencia que recibe el nombre de Economía Política, y que tan intensamente ha ocupado a los pensadores desde hace un siglo, está hoy más extendida que nunca"* (20).

A pesar de esa supuesta generalización, Cournot, como lo mencionó apenas comenzaba su libro, había decidido apartarse de la metodología dominante. En efecto, debido al hartazgo de la gente ante los estudios teóricos o los sistemas (21), el uso de lo que Cournot denominaba "lo positivo" (se refería, con esta expresión, a los datos estadísticos o administrativos) había pasado a ser la forma más habitual en la cual se presentaban los escritos económicos de la época: *"sin embargo, de tal modo se ha abusado de teorías y sistemas, que ahora lo que se desea conocer es las llamadas cuestiones positivas..."* (22). Si bien no la objetó, puesto que la consideraba como una expresión del estado de las ciencias, conforme a las leyes que guiaban su desarrollo, sí la diferenció sustancialmente del método abstracto que él seguiría en el estudio particular de estos temas (23): *"la teoría no debe confundirse con los sistemas..."* (24). Más aún, reclamó un lugar para ella dentro de la ciencia de la economía política: *"Añadiré que la teoría siempre debe tener su parte (...) a un hombre de mi profesión se le debe permitir (...) que contemple exclusivamente bajo el punto de vista teórico un tema de interés general..."* (25). La razón, esgrimida en muy pocas palabras (26), apunta al quid de una de las cuestiones metodológicas fundamentales de la Economía y eje de la disputa entre los clásicos y los históricos (27). Cournot, en ese sentido, fue un clásico. Y finalmente, tal como lo señalara J. Bertrand, la aplicó: *"El estudia las leyes, dejando a otros las cifras"* (28). El resultado obtenido no pudo ser mejor

descripto que por la afirmación que hizo en su homenaje H. Guitton: "*El gran mérito de Cournot es el de haber sido el primero en construir, sin decirlo, una verdadera teoría de los precios y de los mercados*" (29).

TEORIA ECONOMICA Y USO DEL ANALISIS MATEMATICO

Si bien, por todo lo expuesto en el capítulo anterior, parecerían aclararse los motivos de la decisión tomada por Cournot respecto al tratamiento teórico de los temas relacionados con la economía política, el último comentario de H. Guitton plantea una nueva cuestión. En efecto, es difícil dilucidar si, al escribir las *Recherches*, Cournot tenía en mente reemplazar la teoría vigente o simplemente deseaba expresarla mucho más correctamente, haciendo uso de nuevos instrumentos metodológicos. Las dos conjeturas fueron estudiadas por diferentes autores. J. Schumpeter avaló la segunda puesto que, para él: "*Ni la completitud sistemática ni la novedad de principio eran objetivo ni fueron resultado. Cournot reformuló de un modo más riguroso unos cuantos conceptos y unas cuantas proposiciones que existían ya, aunque en presencia nebulosa y confusa*" (30). G. Jorland fué más allá de esa interpretación ya que, en su opinión, Cournot anticipaba la revolución marginalista. Precisamente, por su forma de exponer algunas ideas con un enfoque desde todo punto de vista distinto (no solamente matemático), dijo que: "*La obra de Cournot tiene una naturaleza tal que nos hace comprender el pasaje de la economía política clásica a la economía marginalista, es decir la ruptura que se efectuó en la historia del pensamiento económico del siglo XIX*" (31).

De cualquier modo, inmediatamente después de ensalzar al método teórico, en el mismo prefacio de sus *Recherches*, Cournot anunció que iba a recurrir a los símbolos y aplicaciones del análisis matemático: "*Pero el título de esta obra no anuncia solamente investigaciones teóricas; indica que tengo la intención de aplicar a las mismas las fórmulas y los símbolos del análisis matemático...*" (32).

Cournot sabía que el empleo de esos conceptos matemáticos habría de ser rechazado por otros economistas teóricos: "*Este plan, lo confieso, ha de atraerme inmediatamente la reprobación de los teóricos acreditados*" (33). Este juicio anticipó la indiferencia académica sufrida por el autor durante toda su vida. Esta le llevó a escribir, poco antes de morir: "*Yo soy el único economista francés que no ha sido nunca citado por los otros...*" (34).

Aceptándolo como inevitable, Cournot describió dos posibles causas por las cuales su método seguramente habría de ser resistido. La primera se refería a que los anteriores economistas que habían probado introducir esos instrumentos analíticos habían llegado a falsos puntos de vista teóricos, provocando así el repudio generalizado, tanto hacia sus aportes como a la metodología en cuestión. Al referirse a esas tentativas, Cournot no ahorró calificativos: "*Los intentos de que hablo han permanecido muy*

ignorados y sólo he podido conocerlos por sus títulos, con excepción de uno: los Principes d'Économie Politique, de Canard, obrita publicada en el año X, y premiada por el Instituto. Estos pretendidos principios son tan radicalmente falsos y su aplicación de tal modo errónea, que ni el veredicto de una eminente institución ha podido preservar del olvido a la obra" (36).

El segundo motivo se fundaba en un prejuicio erróneo, muy difundido por cierto, respecto a la principal función del análisis matemático y su aplicación a un campo tan complejo como la realidad económica. En efecto, algunos autores (37) sostenían la siguiente opinión, mencionada por Cournot: "*Han creído que el único fin posible del empleo de símbolos y fórmulas era conducir a cálculos numéricos, y como se comprendía que esta disciplina rechaza la determinación numérica de valores cuando se basa exclusivamente en la teoría, se concluyó que el aparato de fórmulas era, si no susceptible de inducir a error, por lo menos inútil y pedante*" (38).

En parte, fue a partir de los considerandos de esta corriente de opinión que Cournot comenzó a construir su edificio teórico basado en la utilización de los instrumentos apropiados del análisis matemático. El punto de partida lo constituyó la refutación de las mencionadas creencias, contraponiéndolas con el objetivo principal de esa rama de las matemáticas. Este fue presentado de tal forma (39) que sobresalían, por su importancia, dos ideas, a saber la búsqueda de relaciones entre cantidades y funciones y el carácter no-numérico de las mismas.

Habiendo precisado ese primer asunto, procedió a explicar, aunque no siempre de forma explícita y ordenada, porqué consideraba adecuada la aplicación de las antedichas herramientas matemáticas para la discusión de problemas económicos. Es posible hallar, a lo largo de los capítulos de las Recherches, tres razones para fundamentar esa toma de posición. Las dos primeras podrían ser llamadas necesarias, siendo la última la suficiente (y más importante como se verá enseguida).

La primera tenía una raíz de tipo formal. Para Cournot, como el planteo de estos temas bajo las formas analíticas podía simplificar tanto la exposición de los mismos como su razonamiento, su utilización era sensata: "*aun cuando no fueran rigurosamente necesarios, si pueden facilitar la exposición, hacerla más concisa, ponerla en el camino de desarrollos más extensos, o evitar las digresiones de una argumentación imprecisa, sería poco racional desecharlos porque no sean igualmente familiares a todos los lectores y porque algunas veces se hayan utilizado erróneamente*" (40) (41).

Además, la lectura de otros teóricos (los cuales no habían empleado esos instrumentos en cuestión) le había producido una sensación de que faltaba rigor en esos escritos (42). Contra los que se habían atenido a teorizar literariamente, entre los cuales incluía a A. Smith y a J. B. Say (43), Cournot consideró sus

escritos duramente: "un análisis que se presenta tan vago y frecuentemente tan oscuro en los autores que han estimado suficientes los recursos del lenguaje común" (44). Más severo se mostró con los que habían intentado aplicar, sin resultado aparentemente fructífero, algunas sencillas herramientas del álgebra: "pero hay otros, como Ricardo, que por abordar cuestiones más abstractas o buscando una mayor precisión, no han podido evitar el álgebra y se han limitado a disfrazarla en forma de cálculos aritméticos de una extensión cansadora" (45).

La importancia del último motivo se fundamentaba en una característica del análisis matemático que se acomodaba a una particular visión de Cournot de todo el entorno económico dentro del cual se desenvolvían los distintos agentes. Contrariamente a lo expuesto en los escritos de los clásicos, Cournot no concebía a dicho escenario como un conjunto bien determinable de relaciones causales sino que tenía una visión netamente sistémica (46). En efecto, para él, las relaciones dentro de ese tipo de sistema eran de mutua dependencia: "pero en realidad el sistema económico es un conjunto en el cual todas las partes son interdependientes y actúan unas sobre otras" (47). Esto eliminaba a la lógica formal, basada en los silogismos, como método para desentrañar las leyes del mercado, puesto que no lograría abarcar todo el espectro de fenómenos llamados a modificarse constantemente, al reaccionar los unos sobre los otros (48). Inclusive llegó a considerarla peligrosa para tal fin científico: "Además, tantas causas pueden influir, al mismo tiempo, sobre los hechos económicos que no se ve cómo podría (...) prevenirse suficientemente contra el sofisma tan peligroso *post hoc, ergo propter hoc*" (49). De esta forma, por sus propiedades esenciales, el análisis matemático se convertía en el instrumento por excelencia para estudiar los fenómenos económicos: "El empleo de los signos matemáticos es perfectamente natural siempre que se trata de discutir relaciones entre magnitudes..." (50). Años más tarde, los marginalistas redescubrieron estas apreciaciones. Pareto llegó a decir, refiriéndose al cálculo diferencial, en su "Manuel d'économie politique, que: "es precisamente la interdependencia de los fenómenos económicos que hace indispensable el uso de las matemáticas para estudiar esos fenómenos; la lógica ordinaria puede sernos muy útil para estudiar las relaciones de causa a efecto, pero deviene bien pronto impotente cuando se trata de relaciones de mutua dependencia. Estas, en mecánica racional y en economía pura, necesitan el uso de las matemáticas" (51). Incluso Marshall reconoció en Cournot un precursor porque: "ha señalado que es necesario enfrentarse con la dificultad que supone el considerar los diversos elementos de un problema económico no como determinándose los unos a los otros en una cadena de causalidad - A determinando a B, B determinando a C, y así sucesivamente -, sino determinándose mutuamente los unos a los otros. La acción de la Naturaleza es compleja, y no se gana nada a la larga con la pretensión de que es simple y tratando de describirla por medio de una serie de proposiciones elementales (...) No es fácil formarse clara idea a este respecto sin la ayuda de símbolos matemáticos..." (52).

**PRINCIPIOS Y CONCEPTOS DEL ANALISIS MATEMATICO UTILIZADOS
POR COURNOT**

Antes de aplicar al estudio teórico de la economía política los instrumentos básicos del análisis matemático, Cournot procedió a presentarlos, describirlos y examinar profundamente su esencia. Esto no lo hizo de forma desordenada, como más tarde sí lo efectuó J. Schumpeter. Este último autor dijo, refiriéndose a una rama específica del análisis matemático, que: "*se puede expresar mediante un reducido número de conceptos, como variable, función, límite, continuidad, derivada y diferencial, máximos y mínimos*" (53). Si bien en esta observación aparecían más temas de los efectivamente detallados por Cournot, tenía, por tres razones, un carácter poco preciso. En primer término, se presentaban conceptos que, tanto en la teoría como durante la historia de las matemáticas, habían tenido un orden lógico de aparición (54). Además confundía los fundamentos y sus posteriores aplicaciones. Pero más importante, con respecto a lo realizado por Cournot, era la diferencia que éste hacía entre ellos. En efecto, como para él la aplicación de esos conceptos y principios se basaba en una percepción particular del sistema económico, alguno de ellos debía ocupar un papel preponderante.

Si Cournot partía de una idea de interdependencia generalizada, la noción que coronaría su descripción matemática de la economía (y de la sociedad en general) tendría que haber sido, tanto por su naturaleza como la del sistema a analizar, la de función continua. De hecho, fue así y tal cual lo señaló en el prefacio de su *Traité élémentaire de la théorie des fonctions et du calcul infinitésimal* (dedicado a Poisson "en testimonio de reconocimiento y respetuoso afecto"): "*He intentado hacer comprender como, por el progreso de la abstracción matemática, se está llevado a concebir la existencia de una teoría que tiene por objeto las propiedades generales de las funciones continuas*" (55). En las aproximaciones iniciales del prefacio de las *Recherches* y en capítulos posteriores, como el famoso "De la loi du débit" (56), Cournot especificó más detalladamente esta importante noción. Pero, para ser más minucioso, procedió a separarla y a describir primeramente la de función, con todas sus características, para luego pasar a la de continuidad.

Para Cournot, la noción de función acompañaba la evolución de las ideas filosóficas de la Humanidad, "*noción cuya generalidad denota uno de los progresos más notables de la abstracción matemática*" (57). Aunque Cournot no citó a P. G. Lejeune Dirichlet ni a su definición de función presentada en 1837 (que, por cierto, se sigue utilizando hoy mismo) y que seguramente debía conocer (58), el elemento esencial de la misma era, para él, la correspondencia entre variables (59). Esto influyó tanto sobre sus escritos que H. Guitton exclamó, quizás demasiado efusivamente: "*Se tiene en mucha honra a Cournot por haber sacado a la luz el concepto de función, es decir, de correspondencia*" (60).

A su vez, estas relaciones de correspondencia expresadas como funciones tenían dos características importantes, que podían

visualizarse cuando Cournot dijo: "Me propongo demostrar en este ensayo que la solución de los problemas generales a que da lugar la teoría de la riqueza depende esencialmente, no del álgebra elemental, sino de aquella rama del análisis que tiene por objeto las funciones arbitrarias, sujetas solamente a satisfacer ciertas condiciones" (61).

La primera de ellas se refería al hecho de que las funciones utilizadas no eran paramétricas: "porque es sabido que una de las funciones más importantes del análisis consiste precisamente en asignar relaciones determinadas entre cantidades cuyos valores numéricos e incluso sus formas algebraicas son absolutamente imposibles de determinar" (62). El origen de tal particularidad se debía a la cantidad y tipo de variables que explicaban esas funciones, como por ejemplo la de la demanda: "Depende, evidentemente, de la utilidad del bien, de la naturaleza de los servicios que puede proporcionar o de las satisfacciones que procura, de los hábitos y costumbres de cada pueblo, de la riqueza media y de la escala con arreglo a la cual está repartida la riqueza. Puesto que tantas causas morales, que no se pueden enunciar ni medir, influyen sobre la ley de la demanda, es claro que no se debe esperar que la ley pueda expresarse mediante una fórmula algebraica..." (63).

La segunda característica de las mencionadas funciones era la sencillez de las pocas condiciones sobre su forma, éstas últimas sí eran conocidas (64): "Por una parte, funciones desconocidas pueden gozar de propiedades o de caracteres generales que son conocidos; por ejemplo, ser indefinidamente crecientes o decrecientes, o ser periódicas, o no ser reales sino entre ciertos límites" (65). Como se vería después, esas solas indicaciones hacían factible un sinnúmero de aplicaciones importantes. Evidentemente, estas sencillas condiciones se traducían matemáticamente a los instrumentos señalados por Schumpeter. Por ejemplo, la monotonía en las variaciones de una función $y = f(x)$ se planteaba según el signo de la derivada dy/dx en todo el dominio conocido o la visualización de la existencia de un período, bajo la forma $f(x) = f(x + n.t)$ donde t (período) $\in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{Z}$.

La continuidad de las funciones matemáticas era una propiedad tan importante para Cournot que, como también se puede ver en la cita (55), llegaba a equiparar el concepto de función y función continua: "Así, para Cournot, la noción de función y la de función continua parecen coincidir..." (66). De acuerdo con su pensamiento, una función que tenía ese atributo, era tal que: "no pasa súbitamente de un valor a otro, sino que en el intervalo adopta todos los valores intermedios" (67). Dos observaciones pueden hacerse ante esta definición.

La primera es que lo planteado por Cournot no corresponde al concepto moderno de continuidad. Este se define, siguiendo lo expuesto por Rey Pastor, de la siguiente forma: "Una función $y = f(x)$ se llamará continua en $x = a$;
si:

- 1º) existe $\lim f(x)$ para $x \rightarrow a$; y
 2º) existe $f(a)$ y es igual a dicho límite" (68).

Pero se podría pensar que la definición dada por Cournot haya sufrido una transformación hasta llegar a la recién mencionada. Sin embargo, ya B. Bolzano había demostrado, en 1817, que dicha explicación no era correcta (69), en el sentido de que el hecho de pasar de un valor a otro tomando todos los intermedios no era característico de una función continua. En efecto, una función puede tener esa propiedad (llamada por Rey Pastor "propiedad D") sin ser continua. J. Darboux y H. Lebesgue han dado ejemplos de funciones discontinuas en todo intervalo, por pequeño que sea, y que, sin embargo, tienen en cada uno la propiedad D. Lo que sí debe reconocerse es que, en funciones monótonas, como las que Cournot creía intuitivamente que podrían describir bien el sistema económico, esta propiedad sí equivale a la continuidad.

La observación final de Cournot respecto a esta propiedad de las funciones aplicadas a la teoría económica fue muy acertada. Cournot percibía que, en un mercado limitado, las funciones de comportamiento pueden presentar "discontinuidades no evitables de primera especie": *"Lo contrario podría suceder si el número de consumidores fuera muy limitado; en una economía de este tipo, la cantidad de madera para calefacción que se consumirá será la misma tanto si el estéreo cuesta 10 francos como si cuesta 15 francos y se reducirá bruscamente el consumo en una cantidad notable si el precio del estéreo llega a sobrepasar esta última cifra"* (70). Este tipo de discontinuidades se da cuando, a pesar de que existan los límites laterales al punto en cuestión, éstos no se igualan, por lo que no se llega a cumplir la 1ª condición de la moderna definición (71).

Sin embargo, Cournot halló, aunque no la demostró, la solución para esto. De acuerdo a la aplicación de la ley de los grandes números, a medida que el mercado se agrandaba, se irían perdiendo esas discontinuidades no evitables hasta llegar, o a la continuidad total: *"Pero cuanto más se extienda el mercado, más variarán las combinaciones de necesidades, fortunas e incluso caprichos entre los consumidores, y en forma tanto más continua se aproximará la función $F(p)$ a las variaciones de p "* (72) o, al menos, a la aparición de discontinuidades evitables, salvables hallando los "verdaderos valores" de la función en los puntos críticos (73): *"No olvidemos observar que el principio enunciado más arriba puede, en rigor, admitir excepciones, puesto que una función continua puede presentar soluciones de continuidad en algunos puntos de su trayectoria; pero lo mismo que el roce lima las asperezas y dulcifica los contornos, así la práctica del comercio tiende a suprimir estos casos excepcionales, al mismo tiempo que el mecanismo comercial modera las variaciones de los precios y tiende a mantenerlas dentro de los límites que facilitan la aplicación de la teoría"* (74).

Otros conceptos esenciales del análisis matemático utilizados a lo largo de las Recherches no fueron especialmente precisados por

el autor. Es evidente que, por el uso posterior de los mismos, sí los conocía, aunque no creyó importante ni necesario exponerlos con tanto detalle como los dos anteriores (por ejemplo, no analizó la idea de límite en las funciones económicas).

APLICACIONES TECNICAS A LA RESOLUCION DE PROBLEMAS CONCRETOS

Aunque, como ya fue señalado, Cournot había decidido emplear un enfoque puramente teórico para analizar el sistema económico, la mera especulación metodológica, en sí misma, no fue el objetivo de su obra principal. En efecto, luego de presentar algunos conceptos y principios del análisis matemático, procedió a utilizarlos, para intentar resolver problemas específicos: *"y creo que si este ensayo pudiera ser de alguna utilidad práctica, la principal sería de poner en evidencia todo lo que nos falta para resolver, con pleno conocimiento de causa, un sinfín de cuestiones que a diario se deciden con excesiva audacia"* (75). Estas distintas aplicaciones surgían de las características esenciales de los mencionados conceptos.

Siguiendo el orden del capítulo anterior, como regla para exponer sistemáticamente las aplicaciones realizadas a lo largo de todo el libro, ya efectuaba una por la sola noción de función. Se trataba de la adaptación de la idea de variación (76) a la dinámica del equilibrio económico general. Fue R. Roy quien lo notó, al opinar: *"Sin duda fue menos afortunado cuando formuló su principio de la compensación de las demandas, que no se trataba, según él, mas que de una aplicación de la teoría de los errores y, consecuentemente una aproximación, haciendo abstracción de las variaciones de segundo orden pero que, por sus contradicciones con la unidad del sistema económico y la interdependencia de los diversos elementos en juego, lo debía conducir a conclusiones manifestamente discutibles, a lo largo de sus estudios sobre las variaciones del ingreso social"* (77). Con el fin de explicar cuál era el camino hacia un nuevo punto de equilibrio (78), Cournot se basó en la variación decreciente de los ingresos: *"por el contrario, en general debe suceder que una perturbación experimentada por un elemento del sistema se haga sentir paulatinamente y por rebotes en el conjunto del sistema. Sin embargo, como la variación sobrevenida al precio del bien A y a las rentas de sus productores deja intacta la totalidad de los fondos aplicables a la demanda de las otras mercancías B, C, D, E, etc., se concibe que la suma detraída, por hipótesis, del artículo B, en virtud de la nueva dirección de las demandas, será necesariamente aplicada a la demanda de uno o varios de los bienes C, D, E, etc. Rigurosamente hablando esta perturbación de segundo orden, sobrevenida a las rentas de los productores de B, C, D, etc., reaccionaría a su vez sobre el sistema, hasta que se estableciera un nuevo equilibrio; pero aunque no podamos calcular esta serie de reacciones, los principios del análisis nos indican que deben ir disminuyendo gradualmente de amplitud; de suerte que se puede admitir, por aproximación, que la variación sobrevenida a las rentas de los productores de A, aún modificando el reparto del*

excedente de renta social entre los productores de B, C, D, E, etc., no altera su valor total, o sólo lo altera en una cantidad despreciable en comparación con la variación $p_0D_0 - p_1D_1$ que experimentan las rentas de los productores de A. La variación de la renta social se reduce así a $p_0D_0 - p_1D_1$, con un error no superior a cantidades de segundo orden, por emplear el lenguaje de los matemáticos" (79). A pesar de intuir claramente el uso de las variaciones, no llegó a plantearlo bajo un sistema simultáneo de ecuaciones en diferencia, tal como sí lo harían posteriormente, en sus respectivos modelos, autores como Duesenberry, Hicks o Smithies (80).

Fue a partir del principio de continuidad (e, implícitamente, de la monotonía) de las funciones utilizadas del cual Cournot logró las aplicaciones más útiles. Precisamente, gracias a la confirmación intuitiva de las mencionadas propiedades, Cournot pudo utilizar el cálculo diferencial e integral: "Como se trata de condiciones muy sencillas, las primeras nociones de cálculo diferencial e integral bastan para la comprensión de este breve tratado" (81). Esta idea de que la continuidad permitió a Cournot aplicar el cálculo diferencial puede fundamentarse, no solamente en la condición necesaria para la existencia de un diferencial en un punto dado de una función, sino también en que la introdujo luego de explicar el mecanismo a través del cual, por el juego del mercado, aparecía la continuidad en las funciones de demanda individual: "Por pequeña que sea la variación de p , habrá consumidores colocados en una posición tal que un ligero movimiento de alza o descenso experimentado por el bien, influirá sobre su consumo..." (82). Después, a lo largo de todo su libro, los conceptos como derivada o diferenciales habrían de ser, no solamente usuales sino los más importantes, como él mismo lo señaló: "En el curso de nuestras investigaciones, rara vez tendremos ocasión de considerar directamente la función $r(D)$, sino solamente su derivada $\frac{dr(D)}{dD}$ que designaremos mediante la expresión $r'(D)$. Esta derivada es una nueva función de D cuya forma ejerce gran influencia sobre la solución de los problemas principales de la ciencia económica" (83).

El manejo del cálculo diferencial era indispensable para la búsqueda de máximos y mínimos. Esto último era tan importante que R. Roy lo consideró una de las causas de la introducción de las matemáticas a la economía realizada por Cournot: "b) el uso de las matemáticas también permite utilizar las funciones, y por consiguiente, resolver los problemas de máximos y mínimos que frecuentemente se plantean en Economía política" (84).

La posibilidad de calcular estos puntos críticos se concretaba luego de un estudio detallado de las formas y significación económica de las funciones utilizadas (85): "Como la función $F(p)$ es continua, la función $pF(p)$, que expresa el valor total de la cantidad vendida anualmente, también lo será. Esta función se anularía si p fuera cero, ya que el consumo de un bien siempre

permanece finito, incluso en la hipótesis de una gratuidad absoluta; o, con otras palabras, siempre se puede imaginar un valor de p lo bastante pequeño para que el producto $pF(p)$ sea sensiblemente nulo. La función $pF(p)$ también se anula cuando p se hace infinito, o dicho de otro modo, siempre se puede imaginar un valor de p lo suficientemente grande como para que el bien cese de ser demandado y producido a ese precio. Por tanto, puesto que la función $pF(p)$ primero crece con p y finalmente decrece, hay un valor de p que la hace máxima..." (86).

Para resolver este tipo de problemas recurría a los métodos analíticos convencionales, explicitando detalladamente las condiciones necesarias y suficientes. No obstante, en algunos casos como en el de la demanda, antes de proceder de la forma señalada, lo intentó de manera gráfica. Específicamente, en el capítulo IV, planteó cómo hallar el gasto máximo de los consumidores: "Si se traza la curva anb (fig. 1) cuyas abscisas oq y ordenadas qn representan las variables p y D , la raíz de la ecuación (1) (condición necesaria para dicha maximización) será la abscisa del punto n para el cual el triángulo ont , formado por la tangente nt y el radio vector on , es isósceles, de suerte que se obtiene $oq = qt$ " (87). Ante esta proposición en particular, es necesario comentar dos observaciones importantes. Esto anteriormente señalado resultaba ser un conocido resultado de los problemas de maximización de áreas de figuras geométricas cuyo perímetro estaba dado, debiéndose hallar a tal fin, las medidas de los lados. Además, anticipaba, aunque en forma embrionaria, al llamado "Primer método de Marshall" para el cálculo gráfico de la elasticidad de la demanda en un punto (88). De cualquier modo, el mismo Cournot señaló la dificultad de llegar a obtener, en casos concretos, dicho punto.

Es por ello que procedió a analizar meticulosamente las resoluciones puramente analíticas de los problemas puntuales. Es importante señalar que, en las sucesivas exposiciones, Cournot cometió algunos errores. Por ejemplo, al escribir la condición suficiente para la verificación de que el punto crítico, hallado resolviendo la ecuación que describía la condición necesaria, era un máximo de gasto total, puso que:

$$2 F'(p) + F''(p) < 0$$

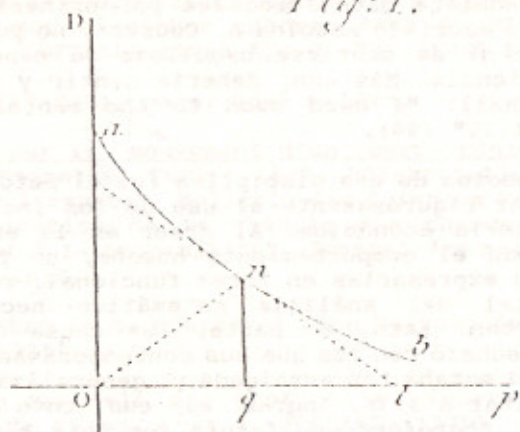
cuando, en realidad debería ser, como lo señaló G. Luftalla (89):

$$2 F'(p) + pF''(p) < 0 \quad (90)$$

El último gran aporte de Cournot se refería a la posibilidad de utilizar todas estas herramientas para hallar relaciones no evidentes entre variables: "Datos parecidos, por imperfectos que parezcan, en razón de la misma generalidad, y con ayuda de símbolos propios del análisis, pueden conducir a relaciones igualmente generales que difícilmente se hubieran descubierto sin este auxilio" (91). Al aplicar esta idea se conformó uno de los primeros intentos de hacer estática comparativa: "Después de la

Principes mathématiques de la Théorie des richesses.

Fig. 1.



Segunda Guerra Mundial, fueron ensanchadas también las bases de la estática comparativa, entre cuyos precursores debemos recordar a Antoine Augustin Cournot..." (92). Específicamente, el examen de las perturbaciones provocadas en el equilibrio del monopolio por la introducción de un impuesto se prestaba especialmente para este tipo de análisis: *"como los geómetras que, para determinar las oscilaciones de un sistema de cuerpos, los suponen perturbados tan solo un poco de la posición de equilibrio hacia la cual ellos gravitan, sin ocuparse de otras posiciones de equilibrio que podrían adoptar, luego de un transtorno completo del sistema"* (93).

CONCLUSION

Cuando un economista matemático lee por primera vez lo que hace más de 150 años escribió Antoine A. Cournot, no puede dejar de admirar su trabajo ni de sentirse orgulloso de tener semejante predecesor en su ciencia. Más aún, debería sentir y reconocer lo mismo que A. Marshall: *"I owed much to the mental discipline afforded by Cournot..."* (94).

Uno de los aspectos de esa disciplina fue el metodológico, es decir el fundamentar rigurosamente el uso de los instrumentos en sus escritos de teoría económica. Al creer en la existencia de leyes que gobernaban el comportamiento humano, no pudo, por su formación, dejar de expresarlas en forma funcional, recurriendo a todo el instrumental del análisis matemático necesario para completar sus aportes. Esto, en parte, fue causa del profundo desconocimiento y rechazo con los que sus contemporáneos recibieron su obra. Esa actitud estaba tan arraigada y generalizada que, como ejemplo se puede citar a J. K. Ingram, el cual tuvo el coraje de afirmar: *"There is, therefore, no future for this kind of study; and it is only waste of intellectual power to pursue it"* (95).

Pero, como reconoció R. Roy: *"podemos entonces afirmar decididamente que la posteridad rompió el freno puesto por sus contemporáneos, en beneficio de la verdad científica..."* (96). En efecto, la economía matemática, la cual en palabras de J. Schumpeter, empezó a *"desempeñar una función importante y realmente decisiva en la teoría pura de nuestra ciencia"* (97) tiene *"en el foro de la fama"* (98) a Cournot. Así, como concluyó R. Roy: *"sepamos reconocer en Cournot a uno de los precursores más eminentes del movimiento que se manifiesta hoy en todos los países, a la vista de asentar los estudios económicos sobre bases rigurosas y verdaderamente científicas"* (99).

NOTAS

- (1) Cf. O. POPESCU (1985), cap. I.
- (2) Cf. C. MENGER (1963); P. PAINLEVE (1909); M. ALLAIS (1949); D. NOVICK and others (1954); P. A. SAMUELSON (1952). Esta lista no agota ni pretende incluir las opiniones mejor tratadas sino dar una idea de lo vasto y fructífero que ha sido esta polémica en la Historia del Pensamiento Económico.
- (3) Cf. R. D. THEOCHARIS (1961).
- (4) Cf. J. BERTRAND (1883), pag. 499.
- (5) Esta reseña biográfica se apoyará en datos y testimonios presentados por distintos autores como G. PIROU (1934); R. ROY (1938 A); G. LUFTALLA (1938 A); R. ROY (1938 B).
- (6) R. ROY (1938 B), pags. 1548 - 1549.
- (7) Mémoire sur le mouvement d'un corps rigide soutenu par un plan fixe, Hachette, Paris, 1829; "Distribution des orbites des comètes dans l'espace", Bulletin des Sciences Mathématiques, t. XI, 1829; "Application de la théorie des chances à la statistique judiciaire et à la probabilité", Journal des mathématiques pures et appliquées, 1838.
- (8) Cf. "Lettre de A. Cournot à Léon Walras, Septembre 1873" en E. ANTONELLI (1935).
- (9) Para un análisis más profundo y riguroso sobre las reales causas de este rechazo ver G. JORLAND (1978).
- (10) "Lettre de Léon Walras à A. Cournot, Mars 1874" en E. ANTONELLI (1935), pag. 123.
- (11) G. LUFTALLA (1938 A), pag. VIII.
- (12) Cf. H. GUITTON (1978).
- (13) Cf. H. W. SPIEGEL (1984), cap. XXII.
- (14) La llamada "ley de los grandes números", debida a J. Bernouilli (1654 - 1705) puede enunciarse, como la presenta A. Vessereau, de la siguiente manera: "Si en una prueba, la probabilidad de un acontecimiento o suceso es p y si éste se repite una gran cantidad de veces, la relación entre las veces que se produce el suceso y la cantidad total de pruebas - es decir la frecuencia f del suceso - tiende a acercarse cada vez más a la probabilidad p . Más exactamente, si el número de pruebas es suficientemente grande, resulta totalmente improbable que la diferencia entre f y p supere cualquier valor prefijado por pequeño que sea". A. VESSEREAU (1962), pág. 16.

- (15) R. ROY (1938 A), pag. 135.
- (16) G. LUFTALLA (1938 A), pag. X.
- (17) G. LUFTALLA (1938 A), pag. X.
- (18) Cf. H. L. MOORE (1905).
- (19) Cf. A. A. COURNOT (1863).
- (20) A. A. COURNOT (1938), Préface, pag. V.
- (21) Como bien puntualizó J. Schumpeter, Cournot debía seguramente pensar en los sistemas de reglas políticas. Cf. J. A. SCHUMPETER (1971).
- (22) A. A. COURNOT (1938), Préface, pag. VI.
- (23) Debió sorprender esta toma de posición de Cournot, sobre todo por lo previamente señalado sobre el amplio rechazo a la teoría. Como se verá después, las especulaciones de Cournot fueron muy distintas a las realizadas por los clásicos.
- (24) A. A. COURNOT (1938), Préface, pag. VI.
- (25) A. A. COURNOT (1938), Préface, pag. VI.
- (26) *"un tema de interés general que presenta tantos aspectos diversos"*. A. A. COURNOT (1938), Préface, pag. VI.
- (27) Cf. O. POPESCU (1985), Caps. I - II.
- (28) J. BERTRAND (1883), pags. 501 - 502.
- (29) H. GUITTON (1978), pag. 9.
- (30) J. A. SCHUMPETER (1971), pag. 1045.
- (31) G. JORLAND (1978), pag. 13.
- (32) A. A. COURNOT (1938), Préface, pag. VI.
- (33) A. A. COURNOT (1938), Préface, pag. VI.
- (34) A. A. COURNOT (1877), Préface, pag. III.
- (35) J. Bertrand precisó algunos detalles sobre el escrito de Canard. El Instituto de Ciencias Morales y Políticas había planteado, para uno de sus concursos, la siguiente pregunta: "¿Es verdad que, en un país agrícola, todo tipo de contribución recae sobre los hacendados? ¿Y, si uno se decide por la afirmativa, las contribuciones indirectas recaen sobre los mismos hacendados con un recargo?". Al olvidar los elementos del análisis de funciones,

elaboró una falsa cadena de razonamientos causales. A pesar de todo, obtuvo el primer premio. Cf. J. BERTRAND (1883).

(36) A. A. COURNOT (1938), Préface, pag. VII.

(37) En el prefacio de las *Recherches*, pags. VI - VII, Cournot los describió como: "*mentes muy juiciosas y versadas en las materias de la economía política, pero casi desconocedoras de las ciencias matemáticas*".

(38) A. A. COURNOT (1938), Préface, pag. VII.

(39) "*el análisis matemático (...) también se emplea para encontrar relaciones entre magnitudes que no pueden evaluarse numéricamente, entre funciones cuya ley no puede expresarse mediante símbolos algebraicos*" A. A. COURNOT (1938), Préface, pag. VIII.

(40) A. A. COURNOT (1938), Préface, pags. VIII - IX. Nótese que Cournot fue más flexible, metodológicamente hablando, que J. Bertrand. De hecho, éste último aseguraba que: "*Las fórmulas y los símbolos del análisis matemático imponen la precisión y prometen el rigor, no inspiran ni dan cabida a ninguna indulgencia. Las fórmulas son verdaderas o falsas, las definiciones vagas o precisas, los razonamientos rigurosos o absurdos...*" mientras que Cournot solamente planteaba la preferencia metodológica en caso de comprobarse las bondades anteriormente reseñadas. J. BERTRAND (1883), pag. 500.

(41) Una buena crítica a este tipo de argumento en favor de la utilización de las matemáticas en Economía puede hallarse en J. C. CACHANOSKY: "*La ciencia económica vs. la economía matemática*" en *Libertas*, nº 4, Mayo, 1986.

(42) Algunos autores, como J. Schumpeter, llegaron a creer que esta fue la causa principal por la cual Cournot se dedicó a la Economía. Creo que la lectura de las *Recherches* permite únicamente aseverar que esa fue una de las razones por las cuales se decidió por el uso del análisis matemático en su obra.

(43) "*Hay autores, como Smith y Say, que han escrito sobre economía política conservando en su estilo todos los atractivos de la forma puramente literaria...*". A. A. COURNOT (1938), Préface, pag. IX.

(44) A. A. COURNOT (1938), Préface, pag. X.

(45) A. A. COURNOT (1938), Préface, pag. IX.

(46) Fue H. Guitton el que sostuvo que: "*como Cournot planteó implícitamente (...) lo que se halla en el corazón de la presente actualidad, la teoría de los sistemas...*". H. GUITTON (1978), pag. 10.

(47) A. A. COURNOT (1938), chap. XI, pag. 146.

- (48) Cf. R. ROY (1933).
- (49) A. A. COURNOT (1863), pag. 515.
- (50) A. A. COURNOT (1938), Préface, pag. VIII.
- (51) Cf. O. POPESCU (1985), pág. 93.
- (52) A. MARSHALL (1954), pág. XX del Prólogo a la primera edición inglesa.
- (53) J. A. SCHUMPETER (1971), pág. 1041.
- (54) Cf. J. REY PASTOR - J. BABINI (1951) y J. REY PASTOR - P. PI CALLEJA - C. A. TREJO (1969).
- (55) A. A. COURNOT (1841), Préface, pag. VIII.
- (56) Es en éste donde Cournot, al mismo tiempo que examinaba la demanda y el gasto total de los consumidores, explicó lo esencial de la teoría de las funciones. Por eso, de aquí en más, muchas observaciones matemáticas se referirán a esas dos leyes en particular. Pero, tal como lo hizo el autor, se pueden imputar también a otras.
- (57) A. A. COURNOT (1841), chap. I, pag. 1.
- (58) Esto es tanto más extraño por cuanto Cournot fue compañero de curso y amigo de Dirichlet. Cf. P. DUGAC (1978).
- (59) La más moderna definición de función se asienta, siguiendo el criterio de Dirichlet, en la teoría de los conjuntos, más precisamente en el concepto de producto cartesiano de conjuntos. Cf. F. REINHARDT - H. SOEDER (1984), cap. VII
- (60) H. GUITTON (1978), pag. 9.
- (61) A. A. COURNOT (1938), Préface, pag. IX.
- (62) A. A. COURNOT (1938), chap. IV, pag. 51.
- (63) A. A. COURNOT (1938), chap. IV, pag. 50.
- (64) Cournot aceptaba la posibilidad de que las observaciones estadísticas permitirían conocer esas condiciones generales. Para ello, también era importante la aplicación del análisis puesto que possibilitaba, al concentrarse en las relaciones principales, reducir el número de variables a observar. Cf. A. A. COURNOT (1938), chap. IV, pags. 50 - 51.
- (65) A. A. COURNOT (1938), chap. IV, pag. 51.
- (66) P. DUGAC (1978), pag. 69.

(67) A. A. COURNOT (1938), chap. IV, pag. 53.

(68) J. REY PASTOR - P. PI CALLEJA - C. A. TREJO (1969), cap. VI, pág. 387.

(69) Cf. B. BOLZANO: "Démonstration purement analytique du théorème: entre deux valeurs quelconques qui donnent deux résultats de signes opposés se trouve au moins une racine réelle de l'équation", traducido por J. SEBESTIK (1964).

(70) A. A. COURNOT (1938), chap. IV, pag. 53.

(71) Cf. J. REY PASTOR - P. PI CALLEJA - C. A. TREJO (1969), cap. VI, pág. 392.

(72) A. A. COURNOT (1938), chap. IV, pag. 53.

(73) Una discontinuidad evitable se da siempre que el $\lim f(x) \neq f(a)$ mientras $x \rightarrow a$. En el punto en que ocurre esto, se le asigna a $f(a)$ el valor del límite a que tiende la función cuando $x \rightarrow a$. Este número se denomina "verdadero valor" de $f(x)$. Cf. J. REY PASTOR - P. PI CALLEJA - C. A. TREJO (1969), cap. VI, págs. 389 - 390.

(74) A. A. COURNOT (1938), chap. IV, pags. 54 - 55.

(75) A. A. COURNOT (1938), Préface, pag. XI.

(76) Cf. G. GANDOLFO (1976).

(77) R. ROY (1933), pag. 20.

(78) Estudio que es propio del análisis dinámico.

(79) A. A. COURNOT (1938), chap. XI, pags. 150 - 151.

(80) Cf. G. GANDOLFO (1976), cap. IX.

(81) A. A. COURNOT (1938), Préface, pag. IX.

(82) A. A. COURNOT (1938), chap. IV, pag. 53.

(83) A. A. COURNOT (1938), chap. V, pag. 65.

(84) R. ROY (1933), pag. 16. Si bien R. Roy planteó esto en su reseña de los argumentos dados como razones para la utilización de las matemáticas en Economía, no creo que sea posible asegurar tal cosa. Únicamente se debería plantear que la resolución de problemas de búsqueda de puntos críticos es una consecuencia, muy necesaria para la teorización de la economía por cierto, del empleo de funciones continuas para la descripción de comportamientos económicos. De hecho, esto es lo que dijo exactamente R. Roy, por lo que se podría decir que, al poner este juicio en el contexto ya señalado y en su expresión en sí, habría una contradicción.

(85) Años después, A. Wald criticó a Walras debido a lo limitado de su única condición de existencia del equilibrio dada por la igualdad del número de ecuaciones e incógnitas. Wald indicó que también era necesario examinar la forma de las funciones económicas. Cournot ya lo había hecho puesto que sí las había estudiado, cada vez que debía servirse de ellas para obtener algún resultado importante. Cf. H. W. SPIEGEL (1984), cap. XXIV.

(86) A. A. COURNOT (1938), chap. IV, pag. 56.

(87) A. A. COURNOT (1938), chap. IV, pag. 57.

(88) Cf. R. G. D. ALLEN (1964), cap. X.

(89) Cf. G. LUFTALLA (1938 B), pag. 207.

(90) Es notable encontrarse con esta clase de errores a lo largo de toda la obra. Algunos son tipográficos pero otros, no. Sin embargo, tal como lo señalara el mismo Cournot en sus *Considérations...*, gran parte de la culpa la tuvo su enfermedad ocular: "*a causa de la enfermedad de su vista, el autor tiene derecho de reclamar la indulgencia*".

(91) A. A. COURNOT (1938), chap. IV, pag. 51.

(92) O. POPESCU (1985), cap. VII, pág. 253.

(93) A. A. COURNOT (1863), pag. 104.

(94) Carta de A. MARSHALL al Profesor Colson.

(95) J. K. INGRAM (1888), pág. 182.

(96) R. ROY (1933), pag. 22.

(97) J. A. SCHUMPETER (1971), pág. 1040.

(98) J. A. SCHUMPETER (1971), pág. 1044.

(99) R. ROY (1933), pag. 22.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

- 1) ALLAIS, M.: "Le rôle des mathématiques en économie", *Metroeconomica*, Octubre, 1949.
- 2) ALLEN, R. G. D.: Análisis matemático para Economistas, Aguilar, Madrid, 1964.
- 3) ANTONELLI, E.: "Léon Walras et sa correspondance avec Augustin Cournot et Stanley Jevons", *Econometrica*, nº 1, January, 1935.
- 4) BERTRAND, J.: "Théorie mathématique de la richesse sociale", *Journal des Savants*, Septembre, 1883.
- 5) COURNOT, A. A.: Recherches sur les Principes Mathématiques de la Théorie des richesses, Marcel & Rivière et Cie, Paris, 1938.
- 6) COURNOT, A. A.: Traité élémentaire de la théorie des fonctions et du calcul infinitésimal, Hachette, Paris, 1841.
- 7) COURNOT, A. A.: Principes de la théorie des richesses, Hachette, Paris, 1863.
- 8) COURNOT, A. A.: Revue sommaire des doctrines économiques, Hachette, Paris, 1877.
- 9) DUJAC, P.: "Cournot et le calcul infinitésimal" en Cournot: Etudes pour le centenaire de sa mort 1877 - 1977, Table Ronde organisée par J. Brun et A. Robinet, Paris, *Economica*, 1978.
- 10) GANDOLFO, G.: Métodos y modelos matemáticos de la dinámica económica, Editorial Tecnos, S.A., Madrid, 1976.
- 11) GUITTON, H.: "Comment Cournot a mis la mathématique au service de l' économie: Economie mathématique et économétrie" en Cournot: Etudes...
- 12) INGRAM, J. K.: Historia de la economía política, Edimburgo y Londres, 1888.
- 13) JORLAND, G.: "Position historique de l'oeuvre de Cournot" en Cournot: Etudes...
- 14) LUFTALLA, G.: "Introduction" en Recherches... (1938 A).
- 15) LUFTALLA, G.: "Notes concernant les Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses, Apéndice a las Recherches... (1938 B).

- 16) MARSHALL, A.: Principios de Economía, Aguilar, Madrid, 1954.
- 17) MARSHALL, A.: Carta al Prof. Colson.
- 18) MENDER, C.: Problems of Economics and Sociology, University of Illinois Press, 1963.
- 19) MOORE, H. L.: "Antoine Augustin Cournot", *Revue de Méta-physique et de Morale*, Mai, 1905.
- 20) NOVICK, D. and others: "Mathematics: logic, quantity, and methods", *The Review of Economics and Statistics*, November, 1954.
- 21) PAINLEVE, P.: "La place du raisonnement mathématique en Economie" en La théorie de l'économie politique de W. S. JEVONS, V. Giard et E. Brière, Paris, 1909.
- 22) PIROU, G.: Les théories de l'équilibre économique, L. Walras et V. Pareto, Domat - Montchrestien, Paris, 1934.
- 23) POPESCU, O.: Introducción a la Ciencia Económica Contemporánea, Plaza & Janes Editores, Bogotá, 1985.
- 24) REINHARDT, F. - SOEDER, H.: Atlas de Matemáticas, Alianza Editorial, Madrid, 1984.
- 25) REY PASTOR, J - BABINI, J.: Historia de la matemática, Espasa - Calpe Argentina S.A., Buenos Aires, 1951.
- 26) REY PASTOR, J. - PI CALLEJA, P. - TREJO, C. A.: Análisis matemático, Editorial Kapelusz, Buenos Aires, 1969.
- 27) ROY, R.: "Cournot et l'école mathématique", *Econometrica*, nº 1, January, 1933.
- 28) ROY, R.: "L'oeuvre économique d'Augustin Cournot", Fourth Annual Research Conference of the Cowles Commission for Research in Economics, Colorado Springs, July, 1938 A.
- 29) ROY, R.: "A propos d'un centenaire Cournot et la théorie des richesses", *Revue d'Economie Politique*, nº 6, Novembre - Décembre, 1938 B.
- 30) SAMUELSON, P. A.: "Economic Theory and Mathematics - an appraisal", *American Economic Review*, nº 42, 1952.
- 31) SCHUMPETER, J. A.: Historia del Análisis Económico, Ariel, Barcelona, 1971.
- 32) SEBESTIK, J.: Traducción del teorema de los ceros de Bolzano, *Revue d'Histoire des Sciences*, 1964, vol. 17.

33) SPIEGEL, H. W.: El desarrollo del pensamiento económico, Ediciones Omega S.A., Barcelona, 1984.

34) THEOCHARIS, R. D.: Early developments in Mathematical Economics, Macmillan & Co. Ltd., London, 1961.

35) VESSEREAU, A.: La estadística, E. U. de B. A., Buenos Aires, 1962.