FIZIČKI FAKULTET

Univerzitet u Beogradu

ELEMENTI DIFERENCIJALNE GEOMETRIJE I OPŠTE TEORIJE RELATIVNOSTI

M. Damnjanović

Y2K

Beograd, 2000. godine

Sadržaj

Glava 1

OSNOVI DIFERENCIJALNE GEOMETRIJE

1.1 Mnogostrukosti i raslojenja

Realni vektorski prostori su strukture na kojima je razvijen aparat analize, u ovom trenutku jedno od dva najvažnija matematička oruđa fizike. Međutim, ispostavilo se da različiti fizički sistemi ne dozvoljavaju opis u terminima vektorskih prostora (npr. konfiguracioni prostori različitih prostih sistema ne moraju biti linearni: konfiguracioni prostor dvostrukog klatna je torus), mada zadržavaju neophodnost diferencijalnog računa. Tako je došlo do uopštavanja pojma vektorskog prostora.

Definicija 1.1 *$|M|$-dimenzionalna glatka* mnogostrukost *je Hausdorff-ov topološki prostor $(M, \mathcal{T})$ za koji važi:*

(i) *postoji* atlas *skupa M, tj. skup uređenih parova (*karte*) $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}$ skupova U_α, koji obrazuju otvoreni pokrivač skupa M, i homeomorfizama ψ_α sa U_α u $\mathbb{R}^{|M|}$;*

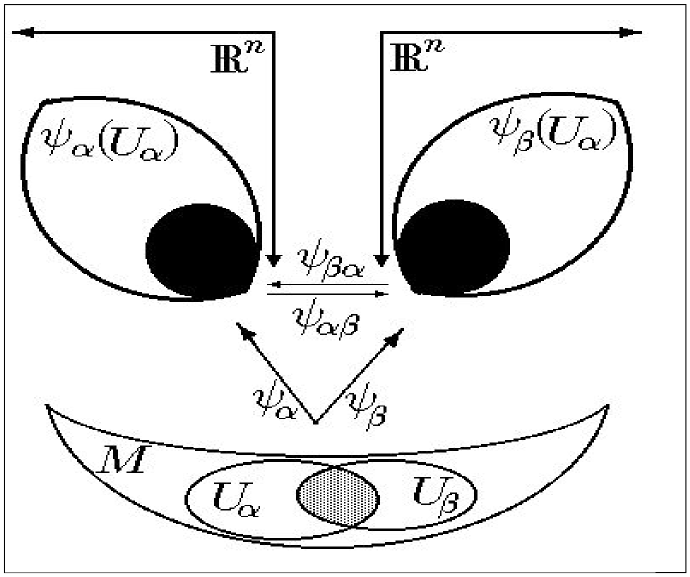
(ii) *atlas je gladak: za svaka dva nedisjunktna skupa U_α i U_β, realna funkcija realnih promenljivih $\psi_{\alpha\beta} = \psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1} : \psi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \psi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ je beskonačno diferencijabilna na $\psi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$.*

Drugim rečima, u okolini svake tačke mnogostrukost izgleda kao prostor $\mathbb{R}^{|M|}$, a sve okoline su glatko spojene. Svaka karta (U_α, ψ_α) uvodi sistem koordinata na U_α, tako što tački m iz U_α pridružuje koordinate njenog lika $\psi_\alpha(m) = \mathbf{x} = (x^1, \ldots, x^{|M|})$ iz $\mathbb{R}^{|M|}$.

Lokalno predstavljanje mnogostrukosti u $\mathbb{R}^{|M|}$ je osnova generalizacije pojmova matematičke analize. Početni korak ka tome je definisanje glatkosti za preslikavanja mnogostrukosti, što se obično čini u dve etape. Prvo se razmatraju preslikavanja mnogostrukosti u $\mathbb{R}$.

Definicija 1.2 *Preslikavanje $f : M \to \mathbb{R}$ je* glatko *u tački $m \in U_\alpha \subset M$, ako je realna funkcija realnih promenljivih $f_\alpha = f \circ \psi_\alpha^{-1} : \psi_\alpha(U_\alpha) \to \mathbb{R}$ beskonačno diferencijabilna u $\psi_\alpha(m)$. Preslikavanje $f : M \to \mathbb{R}$ je glatko na M, ako je glatko u svakoj tački M.*

Skup preslikavanja iz M u $\mathbb{R}$, glatkih u tački $m \in M$, označava se sa $C^\infty_m(M)$, a algebra glatkih funkcija (operacije su proizvod i linearne kombinacije) na M sa $C^\infty(M)$. Važan primer glatkih



Slika 1.1: **Mnogostrukost.** *Karte U_α i U_β mnogostrukosti M dimenzije $n = |M|$ se homeomorfizmima ψ_α i ψ_β preslikavaju u $\mathbb{R}^n$. Pri tome su likovi preseka karata glatko povezani homeomorfizmom $\psi_{\alpha\beta}$ (odnosno $\psi_{\beta\alpha} = \psi_{\alpha\beta}^{-1}$).*

funkcija daju *koordinatne funkcije* na nekoj karti (U_α, ψ_α): $x^i : M \to \mathbb{R}$ je funkcija definisana na U_α, i svakoj tački $m \in U_\alpha$ dodeljuje vrednost i-te koordinate tačke $\psi_\alpha(m) \in \mathbb{R}^{|M|}$.

U drugoj etapi se ista ideja uopštava:

Definicija 1.3 *Neprekidno preslikavanje f mnogostrukosti M u mnogostrukost N je* glatko *ako je za svako $g \in C^\infty(f(M))$ preslikavanje $g \circ f : M \to \mathbb{R}$ iz $C^\infty(M)$. Obostrano glatka bijekcija F se naziva* difeomorfizam *mnogostrukosti M i N.*

Ako su (U_α, ψ_α) i (V_β, φ_β) karte na M i N, takve da $f(U_\alpha)$ ima neprazan presek sa V_β, glatkost preslikavanja f znači, na osnovu definicije 1.2, da je glatko preslikavanje $\varphi_\beta \circ f \circ \psi_\alpha^{-1}$ iz $\mathbb{R}^{|M|}$ u $\mathbb{R}^{|N|}$ (koje povezuje likove preseka $f(U_\alpha)$ i V_β na kartama prve i druge mnogostrukosti, i samim tim je realna funkcija realnih promenljivih).

Difeomorfizam je relacija ekvivalencije među mnogostrukostima. U tom smislu se dve difeomorfne mnogostrukosti smatraju jednakima. Na istom topološkom prostoru se mogu definisati različiti atlasi, i time dobiti različite mnogostrukosti. Ukoliko je identično preslikavanje skupa M na sebe difeomorfizam u odnosu na različite atlase $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$, smatra se da je u pitanju ista mnogostrukost, te se pod atlasom mnogostrukosti zapravo podrazumeva skup svih mogućih atlasa difeomorfno povezanih identičnim preslikavanjem. Time je pojam karte drastično proširen, jer karta iz bilo kog od tih atlasa postaje karta ovako shvaćene mnogostrukosti. Skup takvih karata daje *maksimalni atlas*, tzv. *glatku strukturu* na M.

Podstruktura se uvodi preko maksimalnog atlasa:

Definicija 1.4 *Podskup N mnogostrukosti M je $|N|$-dimenzionalna podmnogostrukost u M ako za svaku tačku $m \in N$ postoji karta (U_m, ψ) mnogostrukosti M takva da za neke konstante a^i $(i = |N|+1, \ldots, |M|)$ važi $\psi(n) = (x^1, \ldots, x^{|N|}, a^{|N|+1}, \ldots, a^{|M|})$ za svako $n \in N \cap U_m$.*

Jasno je da relacija ekvivalencije među mnogostrukostima, koju uspostavlja difeomorfizam, dozvoljava da se prethodna definicija uopšti, te da se svaka mnogostrukost koja se difeomorfno preslikava u neku podmnogostrukost u M, takođe smatra za podmnogostrukost u M. Pokazuje se da je svaku mnogostrukost moguće difeomorfno preslikati u neku hiperpovrš realnog prostora dovoljno velike dimenzije, i shvatiti je kao podmnogostrukost vektorskog prostora. To omogućava da se pojmovi definisani unutrašnje, u terminima same mnogostrukosti, uporede sa odomaćenim geometrijskim predstavama iz euklidskih prostora.

Prilikom razmatranja fizičkih problema često se relevantna mnogostrukost može na određeni način faktorisati, tj. shvatiti kao proizvod više mnogostrukosti (npr. prostor kvantnih stanja ili konfiguracioni ili fazni prostor složenog sistema). Dve konstrukcije daju adekvatan opis različitih situacija te vrste:

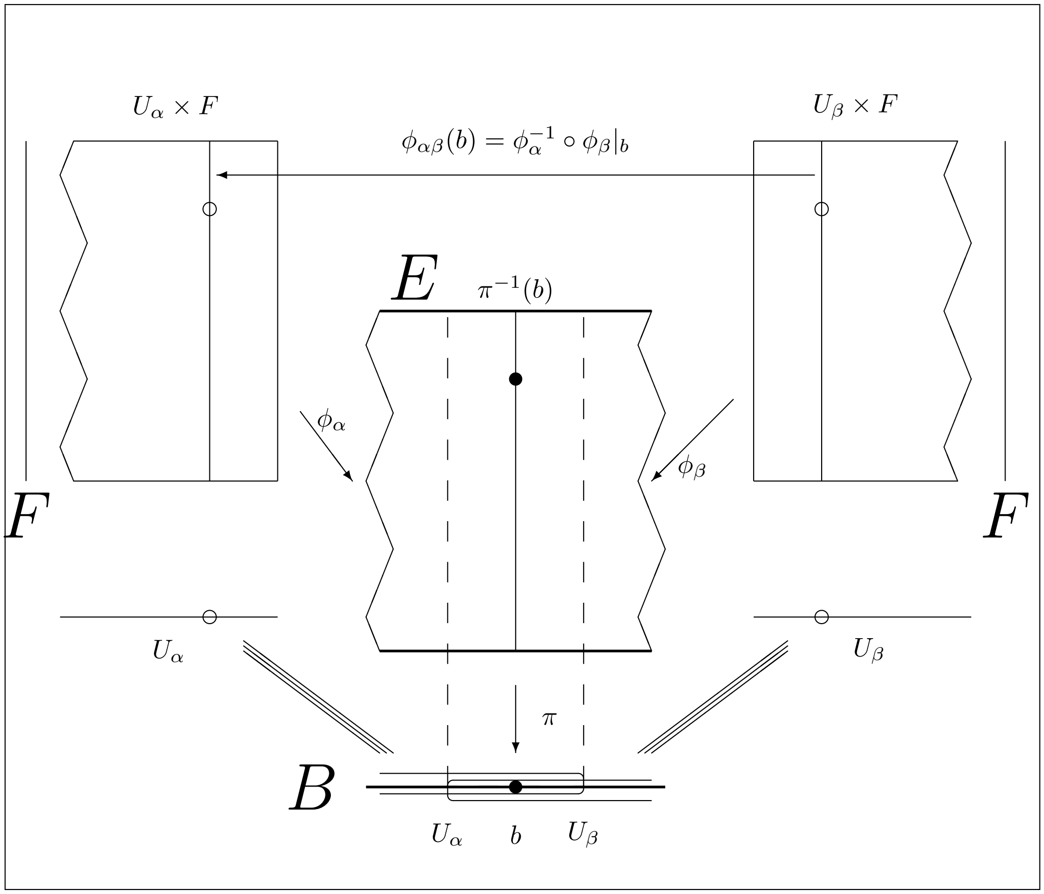
Definicija 1.5 **(i)** Direktni proizvod *mnogostrukosti B i F sa atlasima $\mathcal{B}$ i $\mathcal{F}$ je mnogostrukost $B\times F$ sa atlasom $\mathcal{B}\times\mathcal{F}=\{(U_\alpha\times V_\beta,\psi_\alpha\times\varphi_\beta)|\forall\alpha,\beta\}$ (direktni proizvod karata iz $\mathcal{B}$ i $\mathcal{F}$, sa preslikavanjima $(\psi_\alpha\times\varphi_\beta)(b,f)\stackrel{\mathrm{def}}{=}(\psi_\alpha(b),\varphi_\beta(f))$ skupova $U_\alpha\times V_\beta$ u $\psi_\alpha(U_\alpha)\times\varphi_\beta(V_\beta)\subset\mathbb{R}^{|B|+|F|}$).*

(ii) Raslojeni prostor *(*raslojenje, kosi proizvod mnogostrukosti*) $E(B,F,\pi)$ je mnogostrukost E, na kojoj je definisano glatko preslikavanje π (*projekcija*) na mnogostrukost B (*baza*), takvo da je za svaku tačku baze, b,* sloj nad njom, *$\pi^{-1}(b)\stackrel{\mathrm{def}}{=}\{e\in E\mid\pi(e)=b\}$, difeomorfan sa mnogostrukošću F (*tipični sloj*), i postoji okolina U_b za koju je $\pi^{-1}(U_b)$ difeomorfan sa $U_b\times F$.*

Kod direktnog proizvoda $B\times F$ preslikavanje π dato sa $\pi(b,f)=b$ zadovoljava sve osobine projekcije, tako da je svaki direktni proizvod istovremeno i raslojeni prostor. Kod raslojenog prostora, struktura direktnog proizvoda se može uvesti samo lokalno, na skupovima $\pi^{-1}(U_b)$; to znači da se može odabrati atlas na B (među kartama maksimalnog atlasa), takav da je za bilo koji atlas sloja F, skup $\pi^{-1}(U_b)$ difeomorfan direktnom proizvodu karte na U_b i mnogostrukosti F. Karte takvog atlasa, tzv. *lokalne trivijalizacije*, dozvoljavaju da se deo po deo, raslojeni prostor vidi kao direktni proizvod sloja sa delom baze. Stoga je direktni proizvod mnogostrukosti specijalan slučaj raslojenog prostora, tzv. *trivijalno raslojenje*. Ako su (U_α,ψ_α) i (U_β,ψ_β) dve takve karte na B kojima pripada b, tada se sloj $\pi^{-1}(b)$ (difeomorfan sa F) nalazi u proizvodima $U_\alpha\times F$ i $U_\beta\times F$ (tj. preslikava se u oba ova proizvoda). Uvodeći difeomorfizme $\phi_\alpha:U_\alpha\times F\to\pi^{-1}(U_\alpha)$, svaki presek karata određuje difeomorfizam $\phi_{\alpha\beta}:\phi_\beta^{-1}(\pi^{-1}(U_\alpha\cap U_\beta))\to\phi_\alpha^{-1}(\pi^{-1}(U_\alpha\cap U_\beta))$, koji je u tački $b\in U_\alpha\cap U_\beta$ dat sa:

$$\phi_{\alpha\beta}(b)\stackrel{\mathrm{def}}{=}\phi_\alpha^{-1}\circ\phi_\beta|_b:\phi_\beta^{-1}(\pi^{-1}(b))\to\phi_\alpha^{-1}(\pi^{-1}(b)). \tag{1.1}$$

Oba skupa povezana ovim preslikavanjem, difeomorfna su sa F, te se *funkcija prelaza* $\phi_{\alpha\beta}(b)$ može shvatiti kao difeomorfizam $\hat{\phi}_{\alpha\beta}(b)$ sloja F: ako je ispunjeno $\phi_\alpha(b,f_\alpha)=\phi_\beta(b,f_\beta)\in E$, tada su elementi f_α i f_β iz F povezani relacijom $f_\alpha=\hat{\phi}_{\alpha\beta}(b)f_\beta$. Korisnim žargonom se kaže da se raslojeni prostor dobija tako što se delovi baze direktno pomnože slojem i tako dobiju isečci raslojenog prostora "nad tim delovima baze". Zatim se isečci "slepe", identifikovanjem originala i likova funkcija prelaza. Treba uočiti da je $\phi_{\alpha\alpha}(b)$ identično preslikavanje, dok je $\phi_{\beta\alpha}(b)=\phi_{\alpha\beta}^{-1}(b)$. Konačno, ako se uoči više lokalnih trivijalizacija sa b, tj. više karti iz definicije koje sadrže b, za svake tri važi $\phi_{\alpha\beta}(b)=\phi_{\alpha\gamma}(b)\circ\phi_{\gamma\beta}(b)$. Očigledno, funkcije prelaza (podrazumeva se maksimalni



Slika 1.2: **Raslojeni prostor.** *Predstavljen je deo raslojenog prostora $E = E(B, \pi, F)$, koji se projekcijom π preslikava na dve okoline, U_α i U_β, baze, B. Direktni proizvodi ovih okolina sa slojem, F, difeomorfni su delovima raslojenja $\pi^{-1}(U_\alpha)$ i $\pi^{-1}(U_\beta)$. Sloj $\pi^{-1}(b)$ se vidi u oba direktna proizvoda, i uspostavlja funkciju prelaza, $\phi_{\alpha\beta}(b)$.*

atlas, i sve odgovarajuće funkcije prelaza!) generišu neku podgrupu grupe difeomorfizama sloja F, i ta grupa se naziva *strukturna grupa* raslojenja[1].

Ukoliko je kod raslojenog prostora sloj $F = G$ neka Lie-jeva grupa, a funkcije prelaza $\hat{\phi}_{\alpha\beta}$ su elementi iste grupe, raslojenje se naziva *glavno raslojenje* grupe G. *Vektorsko raslojenje* asocirano glavnom raslojenju P grupe G je raslojenje čiji je sloj vektorski prostor u kome deluje linearna reprezentacija grupe G, a postoji trivijalizacija sa strukturnom grupom istom kao u glavnom raslojenju P.

Preslikavanje $f : B \to E(B, F, \pi)$ za koje je $\pi \circ f$ identično preslikavanje na B se naziva *globalni presek raslojenja*. Takvo preslikavanje svakoj tački m mnogostrukosti B pridružuje tačku iz sloja nad m. Jasno je da se mogu definisati i *lokalni* preseci, tj. funkcije koje su definisane samo na

[1]Pod raslojenjem se u ovom tekstu podrazumeva samo lokalno trivijalno glatko raslojenje, što nije najopštija konstrukcija. Slično, ne ulazeći u nekoliko načina uvođenja dejstva grupe, strukturna grupa je uvedena preko funkcija prelaza, a redukcija ove grupe, odnosno mogućnost da se za "lepljenje" iskoristi samo neka podgrupa, nije razmatrana. Iako je za dalji tekst ovaj minimum dovoljan, za neke druge fizičke aplikacije je ipak potrebna detaljnija analiza, [7].

nekoj okolini (obično karti) u B, no na toj okolini imaju navedeno svojstvo preseka. Pitanje egzistencije globalnih preseka nije trivijalno, i kod nekih raslojenja oni ne postoje. Skup svih preseka raslojenja E se označava sa ΓE. Preseci vektorskih raslojenja daju matematički okvir pojma fizičkih polja (kod vektorskih raslojenja uvek postoje globalni preseci), dok se preseci glavnih raslojenja mogu shvatiti kao polja transformacija, tj. transformacija čije dejstvo zavisi od tačaka baze (ispostavlja se da je glavno raslojenje trivijalno ako i samo ako postoji njegov globalni presek).

1.2 Tangentni prostor

Definicija 1.6 Glatka kriva *je preslikavanje $\gamma : [0,1] \to M$ koje može biti prošireno do glatkog preslikavanja nekog otvorenog intervala $(-\varepsilon, 1+\varepsilon)$ u M.*

To znači da je za neko $\varepsilon > 0$ definisano preslikavanje $\gamma : (-\varepsilon, 1+\varepsilon) \to M$ koje je glatko: naime, za svaku tačku $t \in (-\varepsilon, 1+\varepsilon)$ se može naći neko $\delta > 0$, tako da deo krive $\gamma((t-\delta, t+\delta))$ bude u jednoj karti U_α mnogostrukosti; glatkost znači da je preslikavanje $\psi_\alpha \circ \gamma : (t-\delta, t+\delta) \to \psi_\alpha(U_\alpha)$ (iz $\mathbb{R}$ u $\mathbb{R}^{|M|}$) beskonačno diferencijabilno za svaku tačku intervala.

Definicija 1.7 Tangentni vektor *na krivu γ u tački $m = \gamma(t_m)$ ($t_m \in [0,1]$) je preslikavanje $\gamma_*(t_m) : C^\infty_m(M) \to \mathbb{R}$ definisano sa: za svako $f \in C^\infty_m(M)$ $\gamma_*(t_m)f = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}(f \circ \gamma)|_{t_m}$.*

$\gamma_*(t_m)$ je očigledno linearno preslikavanje (uz prirodno definisanje linearnih kombinacija funkcija iz $C^\infty_m(M)$), a zadovoljava i Leibnitz-ovo pravilo, te je u pitanju *diferenciranje* u $C^\infty_m(M)$.

Uobičajena predstava tangentnog vektora krive zadate u $\mathbb{R}^n$ koordinatno ("parametarski"), $\gamma(t) = \mathbf{x}(t) = (x^1(t), \ldots, x^n(t))$, u tački $m = \mathbf{x}(t_m)$ je vektor

$$\dot{\mathbf{x}}(t_m) = (\frac{\mathrm{d}\,x^1(t_m)}{\mathrm{d}\,t}, \ldots, \frac{\mathrm{d}\,x^n(t_m)}{\mathrm{d}\,t}) = (\dot{x}^1(t_m), \ldots, \dot{x}^n(t_m)).$$

Diferencijalno geometrijska definicija 1.7 isti pojam uvodi kao preslikavanje $\gamma_*(t_m)$ iz $C^\infty_m(\mathbb{R}^n)$ u $\mathbb{R}$:

$$\gamma_*(t_m)f = \sum_{i=1}^{n}(\frac{\mathrm{d}\,x^i}{\mathrm{d}\,t}\frac{\partial}{\partial x^i}f)|_{t=t_m}, \tag{1.2}$$

tj. kao izvod u pravcu tangente na krivu γ.

Mada je izveden za funkcije definisane u $\mathbb{R}^n$, izraz (1.2) obuhvata i opšti slučaj mnogostrukosti ($|M| = n$): na karti (U_α, ψ_α), kojoj pripada $\gamma(t_m)$, kriva γ definiše krivu $\gamma_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \psi_\alpha \circ \gamma$ u $\psi_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{R}^n$, a funkcija f realnu funkciju realnih promenljivih f_α (iz definicije 1.2). Izraz (1.2) se može primeniti za γ_α i f_α, i tada je $\gamma_{\alpha*}(t_m)f_\alpha = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}(f \circ \psi_\alpha^{-1} \circ \psi_\alpha \circ \gamma)|_{t_m} = \gamma_*(t_m)f$, što znači da se (1.2) odnosi i na proizvoljnu mnogostrukost, pri čemu su x^i koordinate na razmatranoj karti. Konceptualni značaj ovog zaključka leži u mogućnosti da se u (1.2) $\gamma_*(t_m)$ shvati kao linearna kombinacija vektora *koordinatnog bazisa* $\partial_i \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial x^i}$: $\gamma_*(t_m) = \sum_{i=1}^n \frac{\mathrm{d}\,x^i}{\mathrm{d}\,t}\partial_i|_{t_m}$. Pri tome je vektor ∂_i tangentni vektor u $t=0$ na *koordinatnu liniju* kroz m. To je kriva γ_i koja na karti U_α ima koordinate $\psi_\alpha \circ \gamma_i = (a^1, \dots, a^{i-1}, a^i + t, a^{i+1}, \dots, a^{|M|})$, gde su a^i konstante koje odgovaraju koordinatama tačke m, tj. $\psi_\alpha(m) = (a^1, \dots, a^{|M|})$. Očigledno je da za koordinatne funkcije važi

$$\partial_i x^j = \delta_i^j, \tag{1.3}$$

što može poslužiti i kao ekvivalentna definicija koordinatnog bazisa.

Postaje očigledno da za različite krive kroz tačku m, tangentni vektori čine realni vektorski $|M|$-dimenzionalni *tangentni prostor*, $T_m(M)$. U terminima obične geometrije, to je hiperravan tangenti na mnogostrukost u tački m. Tako je svakoj tački m mnogostrukosti M pridružen vektorski prostor $T_m(M)$, i dobijeno je *tangentno raslojenje*, $T(M)$; to je vektorsko raslojenje, sa bazom M, slojem $\mathbb{R}^{|M|}$ i projekcijom $\pi : T_m(M) \mapsto m$.

Različite krive kroz m mogu imati iste tangentne vektore, tj. korespondencija krivih i tangentnih vektora je jednoznačna samo u jednom smeru. Očigledno je međutim da za svaki vektor $X_m \in T_m(M)$ postoji bar jedna kriva γ kroz m, za koju je X_m tangentni vektor: $X_m = \sum_i q^i \partial_i$ je tangentni vektor krive $\gamma(t) = \psi_\alpha^{-1}(tq^1 + m^1, \dots, tq^n + m^n)$ (za $t = 0$), pri čemu su m^i koordinate tačke $\psi_\alpha(m)$. U istom kontekstu se i različite parametrizacije iste (u običnom geometrijskom smislu) krive moraju smatrati različitim, sa različitim, mada kolinearnim, tangentnim vektorima: ako je s bijekcija na $[0, 1]$, onda je $\gamma_*(t_m) = (\gamma \circ s)_*(t_m) = \frac{\mathrm{d}\, s}{\mathrm{d}\, t}\gamma_*(s(t_m))$.

Pri preslikavanju f mnogostrukosti M u N (definicija 1.3) kriva $\gamma : \mathbb{R} \to M$ se preslika u krivu $f \circ \gamma : \mathbb{R} \to N$. Tako se preslikavanjem f povezuju tangentni vektori $\gamma_*(t_m)$ u tački $m = \gamma(t_m)$ i $(f \circ \gamma)_*(t_m)$ u tački $f(m)$, tj. uspostavljeno je preslikavanje tangentnog prostora $T_m(M)$ u tangentni prostor $T_{f(m)}(N)$. Lako se pokazuje da je to preslikavanje linearno, i naziva se *diferencijal preslikavanja* f, a označava se sa $\mathrm{d}\, f$. Ako su (U_m, ψ) i $(V_{f(m)}, \varphi)$ dve karte koje sadrže m, odnosno $f(m)$, sa koordinatama $(x^1, \dots, x^{|M|})$, odnosno $(y^1, \dots, y^{|N|})$, može se odrediti matrica koja reprezentuje ovaj linearni operator u koordinatnim bazisima. Formula reprezentovanja je $[\mathrm{d}\, f(\frac{\partial}{\partial x^i})]g = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\, t}(g \circ f \circ \gamma_i) = \sum_{j=1}^{|N|} \frac{\mathrm{d}\, y^j}{\mathrm{d}\, t} \frac{\partial}{\partial y^j} g$. Pošto je $(y^1(t), \dots, y^{|N|}(t))$ kriva koja se dobija preslikavanjem koordinatne linije γ_i, pa je $\frac{\mathrm{d}\, x^k}{\mathrm{d}\, t} = \delta_i^k$, posrednim diferenciranjem se nalazi $\mathrm{d}\, f(\frac{\partial}{\partial x^i})g = \sum_{j=1}^{|N|} \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y^j} g$, što pokazuje da je diferencijal funkcije reprezentovan Jacobijevom matricom, $(\mathrm{d}\, f)_i^j = \frac{\partial y^j}{\partial x^i}$. Rang ove matrice ne može biti veći ni od $|M|$ ni od $|N|$. U posebnom slučaju kada je mnogostrukost N upravo $\mathbb{R}$, preslikavanje f je glatka funkcija na M, a njen diferencijal u tački m postaje linearni funkcional na $T_m(M)$. Za koordinatne funkcije x^k se nalazi

$$\mathrm{d}\, x^k(\partial_i) = \delta_i^k. \tag{1.4}$$

1.3 Vektorska polja

Izborom jednog tangentnog vektora X_m iz tangentnog prostora $T_m(M)$ u tački m, funkciji f se, na osnovu (1.2) u tački m dodeljuje realni broj $X_m f$. Na taj način svaki presek tangentnog raslojenja predstavlja linearno preslikavanje u skupu funkcija na M.

Definicija 1.8 Vektorsko polje *X na mnogostrukosti M je pridruživanje tangentnog vektora $X_m \in T_m(M)$ svakoj tački $m \in M$. Vektorsko polje X je* glatko *ako je preslikavanje $X f : M \to \mathbb{R}$, definisano sa $X f(m) = X_m f$ glatko za svako glatko f.*

Glatka vektorska polja, isključivo razmatrana u nastavku, očigledno su linearna preslikavanja u $C^\infty(M)$, a kako (po definiciji tangentnog vektora) zadovoljavaju Leibnitz-ovo pravilo, to su diferenciranja u $C^\infty(M)$.

Vektorska polja je moguće zadati lokalno, na otvorenim skupovima u M, posebno na kartama, ili razmatrati restrikcije na pojedine karte polja definisanih globalno (tj. na M). Na karti (U_α, ψ_α), vektorsko polje X, u skladu sa (1.2), ima koordinatnu reprezentaciju

$$X = \sum_i q^i \partial_i, \tag{1.5}$$

gde su koeficijenti q^i funkcije koordinata $\mathbf{x} = (x^1, \dots, x^{|M|})$ tačaka karte. Glatkost polja se manifestuje kao glatkost ovih koeficijenata.

Teorem o jedinstvenosti rešenja sistema običnih diferencijalnih jednačina pokazuje da se za svako vektorsko polje X mogu naći *integralne krive* polja, čiji tangentni vektori u svakoj tački m daju X_m. Naime, takva kriva γ mora da zadovolji uslov $X_{\gamma(t)} f = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}(f \circ \gamma)$, što lokalno (na odgovarajućoj karti) daje sistem jednačina $\frac{\mathrm{d}\,x^i(t)}{\mathrm{d}\,t} = q^i(t), \quad i = 1, \dots, n$, sa jedinstvenim rešenjem $\psi_\alpha \circ \gamma = (x^1(t), \dots, x^{|M|}(t))$.

Pošto je linearna kombinacija vektorskih polja (čak i sa koeficijentima iz $C^\infty(M)$) i sama vektorsko polje, skup svih vektorskih polja, $\Gamma T(M)$, čini vektorski prostor. Iako je ovaj prostor beskonačne dimenzije, mogu se uvesti *bazisna vektorska polja* na nekom podskupu (na primer na kartama) U u M: to su polja $\{E_1, \dots, E_{|M|}\}$, definisana na U, takva da vektori $\{E_{1m}, \dots, E_{|M|m}\}$ u svakoj tački $m \in U$ čine bazis u $T_m(M)$; svako vektorsko polje na U se može izraziti kao linearna kombinacija bazisnih polja, pri čemu su koeficijenti u kombinacijama glatke funkcije na U. Pri tome treba napomenuti da neke mnogostrukosti nemaju globalno definisana bazisna polja. Na primer, na sferi S^2 takva bazisna polja ne postoje, što sledi iz poznatog teorema da je svako globalno definisano vektorsko polje na sferi bar u jednoj tački jednako 0 (te se u toj tački ne može uzeti za bazisno polje). Mnogostrukost kod koje takva bazisna polja postoje naziva se *paralelizabilna*, i vektorski prostori $\mathbb{R}^{|M|}$ su takvi. Najčešće korišćeni lokalni bazisi na kartama su koordinatni: $E_i = \partial_i$.

Kao i u opštem slučaju diferenciranja, kompozicija vektorskih polja (shvaćenih kao preslikavanja u $C^\infty(M)$), $XYf \stackrel{\text{def}}{=} X(Y(f))$ nije polje (u koordinatnoj formi sadrži druge izvode f: $(XY)f = \sum_{i,j}(q^i p^j \partial_i \partial_j f + q^i(\partial_i p^j)(\partial_j f))$), no komutator

$$[X, Y]f \stackrel{\text{def}}{=} (XY - YX)f = \sum_j (\sum_i (q^i \partial_i p^j - p^i \partial_i q^j))\partial_j f$$

jeste. Lako se pokazuje da je komutator antisimetričan i zadovoljava Jacobi-jev identitet, čime $\Gamma T(M)$ postaje realna Lie-jeva algebra, $\mathcal{X}(M)$. Očigledno je da koordinatna polja komutiraju: $[\partial_i, \partial_j] = 0$.

1.4 Tenzorska polja

Kada se proučava jedan vektorski prostor, tenzorskim proizvodima se formira tenzorska algebra. Ova konstrukcija se prenosi i na mnogostrukosti, uz prilagođavanje činjenici da je reč o skupu prostora, po jedan za svaku tačku mnogostrukosti. U svakoj tački m mnogostrukosti, tangentni prostor $T_m(M)$ određuje njemu dualni *kotangentni prostor* $T^*_m(M)$, pa i njihove tenzorske proizvode.

Analogno tangentnom, dobija se *kotangentno raslojenje*, $T^*(M)$, a njegovi preseci su *kovektorska polja*. Očigledno, kovektorsko polje ω svakoj tački $m \in M$ pridružuje funkcional ω_m na $T_m(M)$. Na taj način, za svako vektorsko polje X je u tački m dobijen realni broj $\omega_m(X_m)$, odnosno ω preslikava X u $C^\infty(M)$. Kao i za vektorska, tako se i za kovektorska polja uvek može uvesti lokalni bazis, $\{\epsilon^1, \dots, \epsilon^{|M|}\}$; svako kovektorsko polje lokalno je linearna kombinacija $\omega = \sum_i q_i \epsilon^i$, gde su koeficijenti q_i glatke funkcije.

Svako vektorsko polje X preslikava svaku funkciju $f \in C^\infty(M)$ u $Xf \in C^\infty(M)$, tj. svakom paru (f, X) je pridružena funkcija Xf. Drugačije gledajući, može se reći da svaka funkcija $f \in C^\infty(M)$ generiše jedno preslikavanje f^* svakog vektorskog polja X u $Xf \in C^\infty(M)$, tj. kovektorsko polje $f^*(X) \stackrel{\text{def}}{=} Xf$. Pri tome, iz (1.3) sledi $x^{i*}(\partial_j) = \delta^i_j$ (ovde je δ^i_j konstantna funkcija na karti), tj. $\{x^{1*}, \dots, x^{|M|*}\}$ je dualni koordinatni bazis na uočenoj karti. Pišući f^* i X u koordinatnim bazisima, $f^* = \sum_i q_i x^{i*}$, $X = \sum_i p^i \partial_i$, nalazi se $Xf = \sum_i p^i \frac{\partial f}{\partial x^i} \stackrel{\text{def}}{=} f^* X = \sum_i p^i q_i$. Kako ovo važi za svako polje X, sledi da je $q_i = \frac{\partial f}{\partial x^i}$, odnosno $f^* = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i} x^{i*}$. Upoređujući dobijeni izraz sa izrazom $\mathrm{d}\, f = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i} \mathrm{d}\, x^i$ za diferencijal funkcije više promenljivih, postaje jasno da je kovektorsko polje generisano preslikavanjem f upravo *diferencijal preslikavanja*[2]. Tako je $f^* = \mathrm{d}\, f$, $x^{i*} = \mathrm{d}\, x^i$ (jer se (1.3) prepisuje kao $\mathrm{d}\, x^i(\partial_j) = \delta^i_j$, u skladu sa (1.4)), i dualna (bazisna) *koordinatna polja* su $\{\partial_1, \dots, \partial_{|M|}\}$ i $\{\mathrm{d}\, x^1, \dots, \mathrm{d}\, x^{|M|}\}$. Koristeći teoreme o egzistenciji i jedinstvenosti rešenja sistema diferencijalnih jednačina $q^i = \frac{\partial f}{\partial x^i}$, zaključuje se da se svako kovektorsko polje lokalno može predstaviti kao diferencijal neke funkcije: $\omega = \mathrm{d}\, f = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i} \mathrm{d}\, x^i$.

Sada se mogu uvesti i ostala *tenzorska raslojenja*, $T^{(v,k)}(M)$, sa istom bazom M i slojem $T^{(v,k)}_m(M) \stackrel{\text{def}}{=} \underbrace{T_m(M) \otimes \cdots \otimes T_m(M)}_{v} \otimes \underbrace{T^*_m(M) \otimes \cdots \otimes T^*_m(M)}_{k}$. Preseci ovih raslojenja su *tenzorska polja* različitih tipova: tenzorsko polje S je tipa (v, k) (v puta kontravarijantno i k puta kovarijantno) ako u svakoj tački m određuje tenzor S_m tipa (v, k), tj. $S_m \in T^{(v,k)}_m$. Kako je $T^{(0,0)}_m = \mathbb{R}^1$, sledi da su tenzorska polja tipa $(0, 0)$ u stvari glatke funkcije na M. U istom smislu kao i do sada govori se o tenzorskim poljima koja su definisana na nekom podskupu u M ili na celoj mnogostrukosti.

Formirajući od bazisnih polja u svakoj tački nekorelisane bazise u tenzorskim proizvodima $T^{(v,k)}_m$, dobijaju se bazisna polja za sve tipove tenzora. Na taj način se svako tenzorsko polje tipa (v, k) može predstaviti u obliku

$$S = \sum_{i_1,\dots,i_v,j_1,\dots,j_k} s^{i_1,\dots,i_v}_{j_1,\dots,j_k} E_{i_1} \otimes \cdots \otimes E_{i_v} \otimes \epsilon^{j_1} \otimes \cdots \otimes \epsilon^{j_k}, \tag{1.6}$$

gde su $s^{i_1,\dots,i_v}_{j_1,\dots,j_k}$ glatke funkcije (a ne konstante kao kod tenzora). Kao i do sada, može se govoriti o lokalnim i globalnim bazisnim poljima, i odgovarajući smisao pridati poslednjem izrazu.

Zbog konačne dimenzije mnogostrukosti, tj. tangentnog prostora u svakoj tački, dualni prostor dualnog prostora se prirodno identifikuje sa početnim, što znači da su vektori iz $T_m(M)$

[2]Zapravo, u definiciji diferencijabilnosti funkcije $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ se zahteva (npr. [15]) da priraštaj funkcije zavisi od priraštaja argumenta kao $\Delta f = \operatorname{grad} f \cdot \Delta x + o(\Delta x^2)$. Uobičajeni pojam diferencijala se zatim određuje kao linearni deo ovog priraštaja, $\mathrm{d}\, f \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{grad} f \cdot \Delta x$, što odmah znači da je diferencijal linerni funkcional na $\mathbb{R}^n$.

funkcionali na $T_m^*(M)$. Zato su i tenzori tipa (v,k) funkcionali na prostoru tenzora tipa (k,v), a tenzorska polja tipa (v,k) preslikavaju polja tipa (k,v) u polja tipa $(0,0)$, tj. $C^\infty(M)$. Uobičajen naziv za ovo preslikavanje je *kontrakcija* polja, a jedan primer daje kontrakcija dualnih bazisnih polja: $\epsilon^i(E_j) = E_j(\epsilon^i) = \delta^i_j$. Kada je tenzorsko polje zadato izrazom (1.6), sa dualnim bazisnim poljima, važi

$$s^{i_1,\dots,i_v}_{j_1,\dots,j_k} = S(\epsilon^{i_1}\otimes\cdots\otimes\epsilon^{i_v}\otimes E_{j_1}\otimes\cdots\otimes E_{j_k}).$$

U ovom kontekstu se tenzorsko polje često zadaje funkcijama $s^{i_1,\dots,i_v}_{j_1,\dots,j_k}$, koje ga jednoznačno definišu. Poslednji izraz se može interpretirati kao delovanje tenzora S na $(k+v)$-torku bazisnih polja, pa se umesto "$\otimes$" tada piše ",". Još jedna, Einstein-ova, konvencija olakšava rad sa tenzorima: podrazumeva se sumiranje po indeksu koji se javlja kao donji i gornji u nekom zapisu. Konačno, delovanje koordinatnog polja (tj. izvod po koordinati) na funkciju (uključujući i komponente tenzora) se označava zarezom: $\partial_i f = f_{,i}$.

Postojanje međusobno dualnih prostora tenzorskih polja je omogućilo da se polja tipa (v,k) preslikaju kontrakcijom poljima tipa (k,v) u polja tipa $(0,0)$. Postupak se može uopštiti, pa se delimičnim kontrakcijama poljem tipa (p,q) polje tipa (v,k), $q\le v$, $p\le k$ preslikava u polje tipa $(v-q,k-p)$. Precizna forma ovog preslikavanja najjednostavnije se daje u formi delovanja polja S na bazisna polja, pri čemu ostaje $(v-q)+(k-p)$ upražnjenih mesta:

$$S(\dots,\quad,\epsilon^{r_1},\quad,\dots,\quad,\epsilon^{r_q},\quad,\dots,\quad,E_{l_1},\quad,\dots,\quad,E_{l_p},\quad,\dots) =$$
$$s^{i_1,\dots,r_1,\dots,r_q,\dots,i_{v-q}}_{j_1,\dots,l_1,\dots,l_p,\dots,j_{k-p}} E_{i_1}\otimes\cdots\otimes E_{i_{v-q}}\otimes\epsilon^{j_1}\otimes\cdots\otimes\epsilon^{j_{k-p}}.$$

Postaje jasno da se tenzorska polja mogu shvatiti i kao $C^\infty(M)$-linearni operatori (linearni i kada se kao koeficijenti u kombinacijama uzmu glatke funkcije), koji jedne u druge preslikavaju prostore tenzorskih polja određenih tipova. Naime, ako je $F = f^{l_1,\dots,l_p}_{r_1,\dots,r_q} E_{l_1}\otimes\cdots\otimes E_{l_p}\otimes\epsilon^{r_1}\otimes\cdots\otimes\epsilon^{r_q}$ proizvoljno tenzorsko polje tipa (p,q), tada prethodna relacija naznačava na koji način se vrši preslikavanje bazisa, odnosno koji parovi dualnih polja se kontrahuju, odakle se delovanjem S na F nalazi

$$S(F) = s^{i_1,\dots,r_1,\dots,r_q,\dots,i_{v-q}}_{j_1,\dots,l_1,\dots,l_p,\dots,j_{k-p}} f^{l_1,\dots,l_p}_{r_1,\dots,r_q} E_{i_1}\otimes\cdots\otimes E_{i_{v-q}}\otimes\epsilon^{j_1}\otimes\cdots\otimes\epsilon^{j_{k-p}}.$$

Pojava sumiranja po kontrahovanim bazisnim poljima u komponentama $s^{i_1,\dots,r_1,\dots,r_q,\dots,i_{v-q}}_{j_1,\dots,l_1,\dots,l_p,\dots,j_{k-p}} f^{l_1,\dots,l_p}_{r_1,\dots,r_q}$ rezultujućeg tenzorskog polja $S(F)$, omogućava da se kontrakcija zada preko indeksa: odgovarajući parovi gornjih i donjih indeksa polja $S\otimes F$ se izjednače, i po njima se vrši sumiranje.

Promena komponenti tenzorskog polja S pri promeni bazisnih polja u kome su te komponente određene lako se nalazi na osnovu promene tenzora S_m koje polje S pridružuje tački m. Promena bazisa u tački m je opisana operatorom prelaska $\Lambda_m \in \mathrm{GL}(T_m(M))$. Ovi operatori formiraju tenzorsko polje tipa (1,1) nesingularnih operatora, tzv. polje *gradijentnih (gauge) transformacija*: svakoj tački m pridružuje operator $\Lambda_m\in\mathrm{GL}(T_m(M))$ u prostoru $T_m(M)$. Nova bazisna polja su stoga $E'_k = E_i\Lambda^i_k$, pa je $\epsilon'^l = (\Lambda^{-1})^l_k\epsilon^k$. Tako iz (1.6) sledi da je

$$s^{i_1,\dots,i_v}_{j_1,\dots,j_k} = \Lambda^{i_1}_{k_1}\cdots\Lambda^{i_v}_{k_v} s'^{k_1,\dots,k_v}_{l_1,\dots,l_k}(\Lambda^{-1})^{l_1}_{j_1}\cdots(\Lambda^{-1})^{l_k}_{j_k}. \tag{1.7}$$

Način promene komponenti pri promeni bazisa se često koristi za određivanje tipa tenzorskog polja. Posebno, kada se tenzor zadaje u koordinatnom bazisu, promena koordinata (karte) $(x^1,\dots,x^{|M|})\mapsto(y^1,\dots,y^{|M|})$ dovodi do promene tenzorskih komponenti po gornjem izrazu, pri čemu je $\Lambda^i_j = \frac{\partial x^i}{\partial y^j}$.

Sva prethodna razmatranja mogu se višestruko uopštiti. Pre svega, ako je $V(M) = E(M, V, \pi)$ proizvoljno vektorsko raslojenje sa bazom M i vektorskim prostorom V kao slojem, mogu se na isti način kao kod tangentnog raslojenja, konstruisati tenzorski proizvodi $V^{(v,k)}$, i odgovarajuća tenzorska raslojenja $V^{(v,k)}(M)$. Njihovi preseci, elementi prostora $\Gamma V^{(v,k)}(M)$, daju generalizaciju pojma tenzorskih polja. Sa druge strane, polje Λ iz (1.7) se može shvatiti kao presek glavnog raslojenja $G(M)$ nad M, u kome je sloj grupa $G = \mathrm{GL}(\mathbb{R}^{|M|})$. Sada je jasno da dodatna generalizacija dozvoljava da se, ako je u prostoru V zadata reprezentacija $D(G)$ grupe G, posmatraju transformacione osobine različitih polja iz $V^{(v,k)}(M)$ pri dejstvu polja transformacija iz G: u (1.7) treba Λ zameniti sa $D(g)$, tj. Λ_m (transformacija u tački m) postaje $D(g_m)$. Ponovo, presek glavnog raslojenja određuje reprezentacijom grupe, D, polje transformacija tenzorskih polja vektorskog raslojenja $V(M)$. Tako se $V(M)$ pojavljuje kao *asocirano raslojenje* glavnom raslojenju $G(M)$, i kaže se da je G *gradijentna (gauge) grupa* polja iz $V^{(v,k)}(M)$. Ovakva konstrukcija daje dovoljno širok matematički okvir za formulaciju praktično svih fizičkih teorija, koje u takvoj postavci nose zajedničko ime *gradijentne (gauge) teorije*.

1.5 Diferencijalne forme

Među pojmovima vezanim za tenzorska polja na mnogostrukostima, značajno mesto zauzimaju kososimetrična kovarijantna polja. Reč je o jednostavnoj i opštoj konstrukciji preuzetoj iz linearne algebre [16] i primenjene na $T^*(M)$.

Ako je $\{\epsilon^1, \dots, \epsilon^n\}$ bazis n-dimenzionalnog vektorskog prostora V^* (dualni prostoru V), jedan bazis u r-tom tenzorskom stepenu V^{*^r} je $\{\epsilon^{i_1} \otimes \cdots \otimes \epsilon^{i_r} | i_1, \dots, i_r = 1, \dots, n\}$. Koristeći ovaj bazis, delovanje elementa σ permutacione grupe S_r na vektor $\omega = q_{i_1 \dots i_r} \epsilon^{i_1} \otimes \cdots \otimes \epsilon^{i_r}$ iz V^{*^r}, može se definisati sa: $\sigma\omega = q_{i_1 \dots i_r} \epsilon^{i_{\sigma 1}} \otimes \cdots \otimes \epsilon^{i_{\sigma r}}$. Antisimetrični tenzori ranga r, tj. vektori koji zadovoljavaju uslov $\sigma\omega = (-)^\sigma \omega$, čine *antisimetrični potprostor*, $\bigwedge^r(V^*)$, određen grupnim projektorom $A^{\{r\}}$ (antisimetrizator) na antisimetričnu ireducibilnu reprezentaciju grupe S_r, tj. $\bigwedge^r(V^*) = A^{\{r\}} V^{*^r}$. Antisimetričnost povlači da za svaku permutaciju σ grupe S_r važi $\omega(X_1, \dots, X_r) = (-)^\sigma \omega(X_{\sigma 1}, \dots, X_{\sigma r})$.

Kosi (spoljni) proizvod dva antisimetrična tenzora π i ρ, ranga p i r, je antisimetrični tenzor $\pi \wedge \rho$ stepena $p + r$ definisan sa $(\pi \wedge \rho) \stackrel{\text{def}}{=} \binom{p+r}{p} A^{\{p+r\}}(\pi \otimes \rho)$. Proizvod je asocijativan, ali ne i komutativan: $\pi \wedge \rho = (-1)^{pr} \rho \wedge \pi$. U svakom od prostora $\bigwedge^r(V^*)$ bazis se može generisati iz bazisa prostora $V^* = \bigwedge^1(V^*)$, antisimetrizujući nekorelisani bazis r-tog reda. Time se dobijaju kosi proizvodi bazisnih vektora, a svaki antisimetrični tenzor ranga r se može izraziti preko bazisnih u obliku $\rho = \sum_{i_1 < \cdots < i_r} q_{i_1, \cdots, i_r} \epsilon^{i_1} \wedge \cdots \wedge \epsilon^{i_r}$. Jasno je da je $\binom{n}{r}$ dimenzija prostora $\bigwedge^r(V^*)$, najveći stepen forme je n, a $\bigwedge^n(V^*)$ i $\bigwedge^0(V^*)$ su jednodimenzionalni. Kosi proizvod svih bazisnih vektora ϵ^i daje tenzor ranga n, pa zbog jednodimenzionalnosti prostora $\bigwedge^n(V^*)$, svaki antisimetrični tenzor tog ranga je oblika $\nu = q\epsilon^1 \wedge \cdots \wedge \epsilon^n$. Direktni zbir $\bigwedge(V^*) = \oplus_{r=0}^n \bigwedge^r(V^*)$, sa operacijom kosog proizvoda, postaje asocijativna algebra, tzv. *Grassmann-ova (spoljna) algebra*.

Primenjujući konstrukciju spoljne algebre na kotangentno raslojenje, lako se dolazi do pojma kososimetričnih tenzorskih polja ranga $(0, r)$.

Definicija 1.9 Diferencijalna forma *stepena (ranga) r (r-forma) na mnogostrukosti M je kovarijantno kososimetrično tenzorsko polje ranga r. Diferencijalna forma nultog ranga je svaka glatka funkcija na M.*

Prema tome, diferencijalna forma ranga r se dobija tako što se za svako $m \in M$ u antisimetrizovanom potprostoru $\bigwedge_m^r(M) = A^{\{r\}}T_m^{*r}(M)$ odabere po jedan vektor. Naravno, kao i do sada, razmatraju se samo glatke forme, tj. ovi vektori se moraju beskonačno diferencijabilno menjati pri promeni m. Uživalački sofisticirana formulacija prethodne definicije može da glasi: r-forma je glatki presek Grassmann-ovog raslojenja r-tog stepena nad M. Treba obratiti pažnju da su forme stepena 0 u stvari glatke funkcije na M (jer je $T_m^{*0}(M) = T_m^{(0,0)}(M) = \mathbb{R}$), dok su forme prvog stepena kovektorska polja. Jasno, kao i svako polje ranga $(0, r)$, r-forma preslikava r-torku vektorskih polja $(X_1, \dots, X_r)$ u $C^\infty(M)$, no zbog antisimetričnosti je za svaku permutaciju σ grupe S_r ispunjeno $\omega(X_1, \dots, X_r) = (-1)^\sigma \omega(X_{\sigma 1}, \dots, X_{\sigma r})$.

Koristeći koordinatnu reprezentaciju diferencijalnih formi, moguće je definisati *spoljni izvod* formi. To je preslikavanje iz $\Gamma \bigwedge^p(M)$ u $\Gamma \bigwedge^{p+1}(M)$, dato sa:

$$\mathrm{d}\,\pi \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i_0, i_1 < \cdots < i_p} (\frac{\partial}{\partial x^{i_0}} q_{i_1, \cdots, i_p}) \mathrm{d}\,x^{i_0} \wedge \mathrm{d}\,x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}\,x^{i_p}. \tag{1.8}$$

Najvažnije osobine spoljneg izvoda su:

(i) primenjen na 0-formu, funkciju iz $C^\infty(M)$, spoljni izvod daje 1-formu, i to upravo diferencijal funkcije;

(ii) $\mathrm{d}\,(\alpha\pi + \alpha'\pi') = \alpha \mathrm{d}\,\pi + \alpha' \mathrm{d}\,\pi'$ $(\alpha, \alpha' \in \mathbb{R})$;

(iii) $\mathrm{d}\,\mathrm{d}\,\pi = 0$ za svaku formu π, kao posledica simetričnosti tenzora drugih izvoda koeficijenata $q_{i_1 < \cdots < i_p}$, i antisimetričnosti koordinatnih bazisnih $(p{+}2)$-formi sa kojima se vrši kontrakcija;

(iv) $\mathrm{d}\,(\pi \wedge \rho) = (\mathrm{d}\,\pi) \wedge \rho + (-1)^p \pi \wedge \mathrm{d}\,\rho$ (π je p-forma), što se lako proverava na osnovu (1.8).

Dokazuje se da je spoljni izvod jedinstveno preslikavanje na skupu svih formi, koje zadovoljava *(i)-(iv)*, te se pobrojane osobine mogu uzeti kao definicija te operacije. Kako i sledeće preslikavanje zadovoljava iste osobine, ono predstavlja beskoordinatnu definiciju spoljneg izvoda:

$$(\mathrm{d}\,\pi)(X_1, \dots, X_{p+1}) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{p+1} (-1)^{i+1} X_i \pi(X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_{p+1}) +$$

$$\sum_{i<j} (-1)^{i+j} \pi([X_i, X_j], X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_{p+1}),$$

gde "$\hat{\ }$" označava izostavljeno polje. Specijalno, za 0-forme, tj. funkcije, nalazi se $\mathrm{d}\,f(X) = Xf$, čime se proverava osobina *(i)*, dok se za 1-formu ω dobija $\mathrm{d}\,\omega(X, Y) = X\omega(Y) - Y\omega(X) - \omega([X, Y])$.

1.6 Metrika mnogostrukosti

U vektorskim prostorima su uvedeni pojmovi skalarnog proizvoda i rastojanja, da bi se dobile i iskoristile jasne geometrijske predstave iz $\mathbb{R}^3$. Generalizaciju ovih pojmova za mnogostrukosti daje metrika.

Definicija 1.10 *Simetrično nedegenerisano tenzorsko polje g tipa $(0,2)$ na mnogostrukosti M se naziva* metrika (metrički tenzor) *na M. Ukoliko u svakoj tački m mnogostrukosti simetrična matrica komponenti $g_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} g(E_i, E_j)$ za neka bazisna polja $\{E_1, \dots, E_{|M|}\}$ ima s pozitivnih i $|M| - s$ negativnih svojstvenih vrednosti, kaže se da je g metrika* signature $(s, |M| - s)$*. Metrika je* Riemann-ova*, odnosno* Minkowskog*, ako je signature $(|M|, 0)$, odnosno $(1, |M| - 1)$.*

Simetričnost znači da je $g(X, Y) = g(Y, X)$ za proizvoljna polja X i Y, a nedegenerisanost g je uslov da za neka (time i za sva) bazisna polja $\{E_1, \dots, E_{|M|}\}$ matrica g_{ij} bude nedegenerisana (bez nultih svojstvenih vrednosti). Često se pod metrikom podrazumeva samo Riemann-ova metrika (u skladu sa opštom topološkom definicijom); tada se generalizacija iz poslednje definicije naziva pseudometrikom. Za fiziku su posebno interesantne Riemann-ove i metrike signature $(1, |M|-1)$, jer se time dobijaju mnogostrukosti koje lokalno izgledaju kao euklidski ($g(X, X)(m) > 0$ za svako $m \in M$ i $X \in T_m(M)$), odnosno prostor Minkowskog. Na karti je uobičajeno zadavati metriku koeficijentima u koordinatnom bazisu, $g_{ij} = g(\partial_i, \partial_j)$, a njen tenzorski oblik se tada često naziva *interval* $\mathrm{d}\, s^2 = g_{ij} \mathrm{d}\, x^i \mathrm{d}\, x^j$. Budući tenzor, ova veličina je nezavisna od izbora koordinata.

Postojanje metrike omogućava uvođenje ortonormiranih bazisnih polja $\{E_1, \dots, E_{|M|}\}$ koja u svakoj tački m definišu ortonormirani bazis, tj. u slučaju metrike signature $(s, |M| - s)$ važi: $(E_{im}, E_{jm}) = \begin{cases} 0, & \text{za } i \neq j, \\ 1, & \text{za } i = j \leq s, \\ -1, & \text{za } i = j > s, \end{cases}$. Metrika zadaje i dualizam $T_m(M)$ i $T_m^*(M)$, kao izomorfizam $D(\omega_m) = W_m$ definisan sa: $\omega_m(X_m) = g_m(W_m, X_m)$ za svako X_m iz $T_m(M)$. Koristeći dualizam, i u $T^*(M)$ se uvodi metrika, kao polje g' tipa $(2, 0)$: ako je $W_m = D(\omega_m)$ i $X_m = D(\chi_m)$ u svakoj tački $m \in M$, g' se zadaje sa $g'(\omega, \chi) \stackrel{\text{def}}{=} g(W, X)$ $(= \omega(X) = \chi(W))$. U dualnim bazisima, uz $\omega = w_i \epsilon^i$, $\chi = q_i \epsilon^i$, $W = w^i E_i$, $X = q^i E_i$ i $g^{ij} = g'(\epsilon^i, \epsilon^j)$, poslednja relacija daje $g^{ij} w_i q_j = g_{ij} w^i q^j = w_i q^i = w^i q_i$, odakle se vidi da je $q^i = g^{ij} q_j$ i $q_i = g_{ij} q^j$. Kombinujući te jednakosti, nalazi se $g^{ij} g_{kj} = \delta^i_k$, što, pozivajući se na simetričnost metrike znači da su u svakoj tački mnogostrukosti matrice g i g' međusobno inverzne.

Nakon opisane indukcije metrike u $T^*(M)$, proširenje na tenzorska polja proizvoljnog tipa je pravolinijsko. Tako se za tenzore S i S' tipa (v, k) zadate izrazom (1.6) prirodno definiše:

$$g(S, S') \stackrel{\text{def}}{=} g_{i_1 i'_1} \cdots g_{i_v i'_v} g^{j_1 j'_1} \cdots g^{j_k j'_k} s^{i_1, \dots, i_v}_{j_1, \dots, j_k} s'^{i'_1, \dots, i'_v}_{j'_1, \dots, j'_k},$$

a tenzor tipa (k, v) dualan tenzoru S je $s^{j_1, \dots, j_k}_{i_1, \dots, i_v} E_{j_1} \otimes \cdots \otimes E_{j_k} \otimes \epsilon^{i_1} \otimes \cdots \otimes \epsilon^{i_v}$, uz

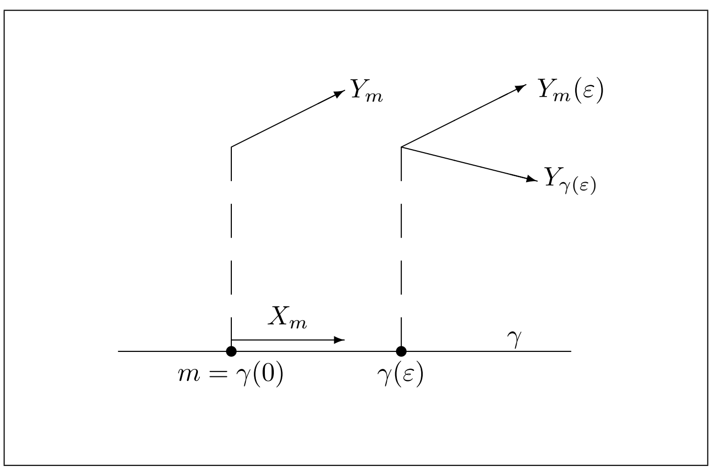
$$s^{j_1, \dots, j_k}_{i_1, \dots, i_v} = g_{i_1 i'_1} \cdots g_{i_v i'_v} g^{j_1 j'_1} \cdots g^{j_k j'_k} s^{i'_1, \dots, i'_v}_{j'_1, \dots, j'_k}.$$

Očigledno, u dualnim bazisima dualni tenzori se dobijaju odgovarajućim množenjem metričkim tenzorom, što se, gledajući komponente tenzora, svodi na dizanje i spuštanje indeksa.

1.7 Koneksija tangentnog raslojenja

Tangentno raslojenje je kao skup unija svih tangentnih prostora za svaku tačku mnogostrukosti. Pri tome se svakoj tački mnogostrukosti nezavisno pridružuje po jedan tangentni prostor. Bez obzira što su svi tangentni prostori međusobno izomorfni (zato $T(M)$ i jeste raslojeni prostor sa slojem $\mathbb{R}^{|M|}$), a priori nema pravila kojim se uspostavlja korespondencija među vektorima tangentnih prostora različitih, makar i bliskih, tačaka. Ako je potrebno, takvo pravilo se mora uspostaviti dodatno, i naziva se *koneksija* ili *povezanost*, jer daje svojevrsnu vezu među slojevima raslojenja.

Analizom intuitivno razvijenih pojmova dolazi se do pojma "paralelnih vektora", kao vektora koji se smatraju korespondentnim po nekom pravilu (npr. paralelne ulice ili brzine čestica). Pri tome se ti pojmovi shvataju u očiglednom smislu koji imaju u $\mathbb{R}^3$, unutar koga se razmatra površ Zemlje. No, iako u opštem slučaju svaka mnogostrukost može biti shvaćena kao podmnogostrukost u nekom vektorskom prostoru, dimenzija tog prostora nije određena samom mnogostrukošću. Ako je M difeomorfno sa nekom hiperpovrši u $\mathbb{R}^n$, tada je difeomorfno i sa nekom površi u $\mathbb{R}^{n'}$ za svako $n' > n$. U tom smislu postoje samo stavovi o minimalnoj dimenziji vektorskog prostora u kome M može biti podmnogostrukost. Osim toga, način na koji neka mnogostrukost postaje površ u $\mathbb{R}^n$, tj. pomenuti difeomorfizam, ne mora biti jednoznačan. Stoga ovakvo izvođenje koneksije iz $\mathbb{R}^n$ nije sasvim zadovoljavajuće, i mora se preći na njeno definisanje preko unutrašnjih karakteristika same mnogostrukosti. U skladu sa opštom idejom lokalnosti u diferencijalnoj geometriji (pojmovi se zadaju na nekim okolinama, kartama i sl.), pitanje koneksije se tako svodi na problem proglašavanja parova vektora iz susednih tangentnih prostora za međusobno paralelne. Drugim rečima, lokalno je koneksija preslikavanje vektora iz $T_m(M)$ u vektore susednih tangentnih prostora, tzv. *paralelni prenos*. Zadavanje koneksije se tako vrši diferencijalnim operatorom odstupanja tangentnih vektora vektorskih polja od paralelno prenetog vektora u susedne tačke. Pri tome su različite susedne tačke definisane infinitezimalnim pomeranjima u pravcu različitih tangentnih vektora.



Slika 1.3: **Paralelni prenos.** *Vektor Y_m (jednak vrednosti polja Y u m), se paralelno prenosi duž krive γ, u tačku $\gamma(\varepsilon)$, čime se dobija vektor $Y_m(\varepsilon)$; ako je γ integralna kriva polja X, a vektor $Y_{\gamma(\varepsilon)}$ vrednost polja Y u $\gamma(\varepsilon)$, kovarijantni izvod polja Y po polju X je $\nabla_X Y = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{Y_{\gamma(\varepsilon)} - Y_m(\varepsilon)}{\varepsilon}$.*

Neka su X i Y dva vektorska polja, i γ integralna kriva kroz $m = \gamma(0)$ polja X; Y_m je tangentni vektor u m određen poljem Y, a $Y_m(\varepsilon)$ vektor iz $T_{\gamma(\varepsilon)}(M)$, po zadatoj koneksiji paralelan vektoru Y_m (sl. 1.3). *Kovarijantni izvod* polja Y u pravcu polja X, $\nabla_X Y \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{Y_{\gamma(\varepsilon)} - Y_m(\varepsilon)}{\varepsilon}$, je vektorsko polje brzine odstupanja polja Y od polja koje bi se dobilo paralelnim prenosom Y_m u pravcu X_m. Očigledno je zadavanje kovarijantnog izvoda ekvivalentno zadavanju koneksije, tj. paralelnog prenosa vektora u različite tačke mnogostrukosti. Iz definicije se mogu izvesti sledeće osobine kovarijantnog izvoda:

$$\nabla_X fY = (Xf)Y + f\nabla_X Y \quad , \quad \nabla_X(Y+Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z, \tag{1.9}$$
$$\nabla_{fX} Y = f\nabla_X Y \quad , \quad \nabla_{X+Y} Z = \nabla_X Z + \nabla_Y Z. \tag{1.10}$$

Kovarijantni izvod par vektorskih polja preslikava u vektorsko polje, ali zbog prve navedene osobine preslikavanje nije $C^\infty(M)$-linearno po Y, te ∇ nije tenzor. Međutim, za fiksirano polje Y, na osnovu ostalih osobina se vidi da je ∇Y tenzorsko polje tipa $(1,1)$, i može se, za bazisna polja E_i napisati u obliku $\nabla Y = E_i \otimes \omega^i_Y$, gde su ω^i_Y 1-forme pridružene vektoru Y: $\omega^i_Y(X) = \epsilon^i(\nabla_X Y)$. n^2 *1-formi koneksije* ω^l_i i n^3 funkcija ω^l_{ij} (*koeficijenti koneksije*) se definišu u dualnim bazisnim poljima sa $\omega^l_i \stackrel{\text{def}}{=} \omega^l_{E_i} = \omega^l_{ij}\epsilon^j$, tj. $\omega^l_{ij} = \omega^l_i(E_j)$. Oni određuju koneksiju preko n tenzora tipa $(1,1)$ kovarijantnih izvoda bazisnih polja: $\nabla E_i = E_l \otimes \omega^l_i$, odnosno $\nabla_{E_j} E_i = \omega^k_{ij} E_k$. Za $Y = p^k E_k$ kovarijantni izvod se rekonstruiše u obliku $\nabla Y = E_l \otimes \mathrm{d}\, p^l + p^i E_l \otimes \omega^l_i$ (prvi sabirak ukazuje na netenzorijalnost po Y), odnosno $\nabla_X Y = \{(Xp^l) + p^i\omega^l_i(X)\}E_l$ duž X.

Da bi se preciznije shvatila tenzorska struktura, pa time i geometrijski smisao prethodnih relacija, uvode se matrica 1-formi koneksije $\Omega \stackrel{\text{def}}{=} (\omega^i_j)$, te vrsta i kolona dualnih bazisnih polja $E \stackrel{\text{def}}{=} (E_1, \dots, E_{|M|})$ i $\epsilon \stackrel{\text{def}}{=} (\epsilon^1, \dots, \epsilon^{|M|})^T$. Sada je $\epsilon(X) \stackrel{\text{def}}{=} (\epsilon^1(X), \dots, \epsilon^{|M|}(X))^T$, tj. delovanjem kolone ϵ na vektorsko polje X dobija se kolona komponenti polja X u bazisu E. Zato $X\epsilon = (X\epsilon^1, \dots, X\epsilon^{|M|})^T$ ima smisao kompozicije preslikavanja: polje X deluje na svaku komponentu kolone koja se dobija delovanjem ϵ na neko vektorsko polje. Vrsta E, običnim matričnim množenjem, preslikava kolonu funkcija $(q^1, \dots, q^{|M|})^T$ u polje $X = q^i E_i$, usled čega je $E\epsilon$ identično preslikavanje u $T^{(1,0)}(M)$). Uz ovakve oznake, ranije dobijene relacije postaju:

$$\nabla E = E \otimes \Omega \quad , \quad (\nabla_X Y)^l = q^i(E_i p^l) + p^i q^j \omega^l_{ij}, \tag{1.11}$$
$$\nabla Y = E\{\mathrm{d} + \Omega\}\epsilon(Y) \quad , \quad \nabla_X Y = E\{X + \Omega(X)\}\epsilon(Y). \tag{1.12}$$

Pri zadatom polju X, matrica 1-formi Ω određuje obično matrično polje $\Omega(X)$, te se poslednji izraz može interpretirati tako da $\Omega(X)$ kompenzuje odstupanje dejstva polja X od kovarijantnog izvoda. U tom smislu se $\Omega(X)$ često naziva *kompenzujuće polje*. Uz $\Omega_k = \Omega(\partial_k)$ (tj. $(\Omega_k)^i_j = \omega^i_{jk}$), koordinatna forma relacije (1.12) postaje $(\nabla_k Y)^l = \partial_k p^l + (\Omega_k)^l_i p^i$, odnosno[3] $\epsilon(\nabla_k Y) = (\partial_k + \Omega_k)\epsilon(Y)$.

1-forme i koeficijenti koneksije, time i Ω, su definisani u određenom bazisu dualnih polja. Pri gradijentnoj transformaciji matričnim poljem Λ, promene bazisa su $E' = E\Lambda$, tj. $E = E'\Lambda^{-1}$, time i $\epsilon = \Lambda\epsilon'$, i iz (1.5) se nalazi ($Xf = \mathrm{d}\, f(X)$):

$$\Omega' = \Lambda^{-1}\mathrm{d}\,\Lambda + \Lambda^{-1}\Omega\Lambda, \tag{1.13}$$

gde je $\mathrm{d}\,\Lambda$ matrica diferencijala elemenata Λ. I ovog puta prvi sabirak, možda na najjasniji način, ukazuje da koneksija nije tenzorska veličina. Treba uočiti da je forma koneksije definisana za određena bazisna polja, što u opštem slučaju znači lokalno (ako mnogostrukost nije paralelizabilna), te je izvedeni zakon transformacije koneksije važan za prelazak sa jedne karte na drugu (na presecima karata gradijentne transformacije Λ su elementi strukturne grupe (1.1)).

[3] U stvari, ako se podrazumeva da se sva vektorska polja pišu kao kolone u koordinatnim bazisima, postaje nepotrebna kolona ϵ (koja upravo i služi da apstraktno zadato polje pretvori u kolonu njegovih komponenti), i dobija se relacija $\nabla_k Y = (\partial_k + \Omega_k)Y$, tj. $\nabla_k = \partial_k + \Omega_k$. U istom smislu se mogu interpretirati i naredni izrazi.

U slučaju kada se za bazisna polja na nekoj karti koriste dualni koordinatni bazisi, koeficijenti koneksije se nazivaju *Christoffel-ovi simboli* Γ^i_{jk}. Tada (1.11) i (1.13) postaju:

$$\nabla_{\partial_i}\partial_j = \Gamma^k_{ji}\partial_k, \quad (\nabla_X Y)^l = q^j p^l_{,j} + q^j p^i \Gamma^l_{ij}, \quad \Gamma'^s_{tk} = \frac{\partial x'^s}{\partial x^j}\frac{\partial^2 x^j}{\partial x'^k \partial x'^t} + \frac{\partial x'^s}{\partial x^j}\frac{\partial x^r}{\partial x'^k}\frac{\partial x^i}{\partial x'^t}\Gamma^j_{ir}.$$

Za paralelno prenet vektor Y_m duž krive γ kroz m očigledno treba smatrati vrednosti onog kovarijantno konstantnog polja Y duž γ koje u m ima vrednost Y_m. Jezikom kovarijantnog izvoda, ako je γ integralna kriva polja X, Y je polje koje zadovoljava jednačinu *paralelnog prenosa*:

$$\nabla_X Y = 0, \quad \frac{\mathrm{d}\, p^l}{\mathrm{d}\, t} + \Gamma^l_{ik} p^i \frac{\mathrm{d}\, x^k}{\mathrm{d}\, t} = 0 \quad l = 1, \dots, n.$$

Drugi izraz je ekvivalentni sistem diferencijalnih jednačina u koordinatnom bazisu neke karte: njih treba da zadovolje funkcije p^i, da bi polje $Y = p^i \partial_i$ bilo kovarijantno konstantno duž $\gamma(t) = \psi_\alpha^{-1}\mathbf{x}(t)$, uz početni uslov $(p^1(t_m), \dots, p^{|M|}(t_m))^T = \epsilon(Y)_m$. Za svaki tangentni vektor Y_m rešenje je vektorsko polje Y (definisano na γ), čije su vrednosti u svakoj tački krive vektori paralelni sa Y_m. Time se ekvivalentnost zadavanja koneksije i kovarijantnog izvoda manifestuje kroz algoritam definisanja paralelnosti vektora u različitim tačkama mnogostrukosti. Važno je zapaziti da je postupak vezan za paralelni prenos: zadavanjem koeficijenata koneksije dat je način da se prepoznaju paralelni vektori pri kretanju duž neke krive. Kako i sama kriva ulazi u algoritam, zaključuje se da paralelni prenosi istog vektora iz početnog položaja u drugu tačku različitim putevima, mogu dati različite rezultate.

Ako se tangentni vektori krive γ dobijaju paralelnim prenosom jedan iz drugog, kriva se naziva *geodezijska linija* mnogostrukosti sa koneksijom ∇. Navedeni uslov je (beskoordinatno i na karti):

$$\nabla_X X = 0, \quad \frac{\mathrm{d}^2 x^i}{\mathrm{d}\, t^2} + \Gamma^i_{jk}\frac{\mathrm{d}\, x^j}{\mathrm{d}\, t}\frac{\mathrm{d}\, x^k}{\mathrm{d}\, t} = 0. \tag{1.14}$$

Drugim rečima, dobija se sistem diferencijalnih jednačina za geodezijske krive $\gamma_\alpha(t) = \mathbf{x}(t)$ (tangentni vektori su im po definiciji $\frac{\mathrm{d}\, x^i(t)}{\mathrm{d}\, t}\partial_i = X$). Za svaki unapred zadati tangentni vektor X_m u tački m na karti, dobija se jedno rešenje sistema, tj. geodezijska linija kroz m sa tangentnim vektorom X_m. Značajno je uočiti da poznavanje geodezijskih linija na mnogostrukosti omogućuje prepoznavanje koneksije, putem određivanja Christoffel-ovih simbola iz poslednje jednačine.

Pojam paralelnosti se lako prenosi i na sva tenzorska polja. Naime, ako se u $T_m(M)$ odredi neki bazis $\{E_{m1}, ..., E_{mn}\}$, pa se paralelnim prenosom duž neke krive u drugu tačku m' dobije bazis $\{E_{m'1}, ..., E_{m'n}\}$ u $T_{m'}(M)$, funkcional ω_m je paralelno prenet duž iste krive u $\omega_{m'}$, ako je $\omega_m(E_{mi}) = \omega_{m'}(E_{m'i})$ za svako i. Sada je definiciju kovarijantnog izvoda moguće preneti i na kovektorska polja. Analogno, definišući paralelno prenete tenzore kao one koji daju iste rezultate delujući na paralelno prenete vektore, odnosno kovektore, može se definisati i kovarijantni izvod proizvoljnog tenzorskog polja. Očigledno je iz takve definicije, da su dodatne osobine kovarijantnog izvoda:

$$\nabla_X(S \otimes S') = (\nabla_X S) \otimes S' + S \otimes \nabla_X S', \quad \nabla_X(\omega(Y)) = (\nabla_X \omega)(Y) + \omega(\nabla_X Y) \tag{1.15}$$

Tako se nalazi, direktno ili upoređujući prve relacije iz (1.15) i (1.9), da je $\nabla_X f = Xf$. Dalje, za bazis $\{\epsilon^1, ..., \epsilon^{|M|}\}$ dualan bazisu $\{E_1, ..., E_n\}$ u kome je koneksija definisana svojim koeficijentima, druga jednakost iz (1.15) daje (pošto je kovarijantni izvod konstantne funkcije jednak 0): $\nabla_{E_j}\epsilon^k = -\omega^k_{ij}\epsilon^i$. Konačno, na osnovu izvedenih pravila za funkcije i (1.15), komponente kovarijantnog izvoda $\nabla_{E_l}S$ tenzora S tipa (v,k) su:

$$s^{i_1,\dots,i_v}_{j_1,\dots,j_k;l} \stackrel{\text{def}}{=} s^{i_1,\dots,i_v}_{j_1,\dots,j_k,l} + \omega^{i_1}_{rl} s^{r,\dots,i_v}_{j_1,\dots,j_k} + \dots + \omega^{i_v}_{rl} s^{i_1,\dots,r}_{j_1,\dots,j_k} - \omega^r_{j_1 l} s^{i_1,\dots,i_v}_{r,\dots,j_k} - \dots - \omega^r_{j_k l} s^{i_1,\dots,i_v}_{j_1,\dots,r}.$$

1.8 Torzija i krivina koneksije

Iako sama nije polje, koneksija određuje dva tenzorska polja, koja karakterišu njenu strukturu.

Torzija je tenzorsko polje tipa (1,2):

$$T(X,Y) \stackrel{\text{def}}{=} \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y].$$

Ona preslikava $\Gamma T^{(2,0)}(M)$ u $\Gamma T(M)$, tako da važi $T(X,fY) = fT(X,Y)$. Očigledno je antisimetrična po argumentima X i Y, pa je $T = T^i_{jk} E_i \otimes (\epsilon^j \wedge \epsilon^k)$, ili $E_i \otimes \mathcal{T}^i$, gde su $\mathcal{T}^i = T^i_{jk}\epsilon^j \wedge \epsilon^k$ *2-forme torzije*. Koristeći (1.12) i izraz za diferencijal kolone bazisnih formi $\mathrm{d}\,\epsilon \stackrel{\text{def}}{=} (\mathrm{d}\,\epsilon^1, \dots, \mathrm{d}\,\epsilon^{|M|})$ u obliku $\mathrm{d}\,\epsilon(X,Y) = X\epsilon(Y) - Y\epsilon(X) - \epsilon([X,Y])$ (uz podsećanje da je $E\epsilon([X,Y]) = [X,Y]$), nalazi se *prva strukturna jednačina*:

$$T = E_j \otimes \mathcal{T}^j = E\{\mathrm{d}\, + \Omega\wedge\}\epsilon, \quad \text{ili} \quad T = E \otimes \mathcal{T} \text{ uz } \mathcal{T} = \mathrm{d}\,\epsilon + \Omega \wedge \epsilon,$$

gde je $\mathcal{T}$ kolona 2-formi torzije $\mathcal{T}^j = \mathrm{d}\,\epsilon^j + \omega^j_l \wedge \epsilon^l$, a spoljni proizvod znači da se vrši formalno matrično množenje, pri čemu se matrični elementi – forme – koso pomnože. Računom u koordinatnim dualnim bazisima ($\mathrm{d}\,\mathrm{d}\,x^i = 0$), lako se dobija $2T^s_{pq} = T(\mathrm{d}\,x^s, \partial_p, \partial_q) = \Gamma^s_{qp} - \Gamma^s_{pq}$.

Koneksija je *simetrična*, ili bestorziona ako je $T = 0$. Strukturna jednačina postaje $\mathrm{d}\,\epsilon = -\Omega \wedge \epsilon$, tj. $\mathrm{d}\,\epsilon^j = -\omega^j_l \wedge \epsilon^l$; Christoffel-ovi simboli su simetrični po donjim indeksima $\Gamma^j_{lk} = \Gamma^j_{kl}$.

Krivina je polje tipa (1,3):

$$R(X,Y) \stackrel{\text{def}}{=} \nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X,Y]}.$$

Preslikava $\Gamma T^{(3,0)}(M)$ u $\Gamma T(M)$, i, zbog očigledne antisimetrije po argumentima u zagradi, može se predstaviti u obliku $R = R^j_{lkm} E_j \otimes \epsilon^l \otimes (\epsilon^k \wedge \epsilon^m)$, ili $R = E_j \otimes \epsilon^l \otimes \mathcal{R}^j_l$, preko 2-formi krivine $\mathcal{R}^j_l = R^j_{lkm}\epsilon^k \wedge \epsilon^m$. Za $\nabla_X \nabla_Y Z$ jednakost (1.5) daje

$$E\{X + \Omega(X)\}\epsilon(E\{Y + \Omega(Y)\}\epsilon(Z)) = E\{XY + (X\Omega(Y)) + \Omega(Y)X + \Omega(X)Y + \Omega(X)\Omega(Y)\}\epsilon(Z)$$

(jer je ϵE identično preslikavanje kolona funkcija), i nalazi se *druga strukturna jednačina*:

$$R = E_j \otimes \epsilon^l \otimes \mathcal{R}^j_l = E \otimes \epsilon\{\mathrm{d}\, + \Omega\wedge\}\Omega, \quad \text{ili} \quad \mathcal{R} = \mathrm{d}\,\Omega + \Omega \wedge \Omega,$$

gde je $\mathcal{R}$ matrica 2-formi krivine $\mathcal{R}^j_l = \mathrm{d}\,\omega^j_l + \omega^j_k \wedge \omega^k_l$. U koordinatnom bazisu je

$$2R^j_{lkm} = R(\mathrm{d}\,x^j, \partial_l, \partial_k, \partial_m) = \Gamma^j_{lm,k} - \Gamma^j_{lk,m} + \Gamma^j_{sk}\Gamma^s_{lm} - \Gamma^j_{sm}\Gamma^s_{lk}.$$

Spoljnim diferenciranjem druge strukturne jednačine se nalazi *Biancchi-jev identitet*:

$$\mathrm{d}\,\mathcal{R}^j_l - \mathcal{R}^j_k \wedge \omega^k_l + \omega^j_k \wedge \mathcal{R}^k_l = 0, \quad \text{ili} \quad \mathrm{d}\,\mathcal{R} - [\mathcal{R}, \Omega] = 0.$$

U koordinatnom bazisu je $R^j_{lkm,s} = \Gamma^p_{ls} R^j_{pkm} - \Gamma^j_{ps} R^p_{lkm}$, i u slučaju simetrične koneksije, poslednja jednakost postaje $R^j_{lkm;s} + R^j_{lms;k} + R^j_{lsk;m} = 0$.

Ricci-jev tenzor se dobija kontrakcijom tenzora krivine po vektorskom polju i prvoj od formi koje se antisimetrizuju. Tako se dobija

$$\mathrm{Rc} = R(\epsilon^s, \quad, E_s, \quad) = \mathrm{Rc}_{lm}\epsilon^l \otimes \epsilon^m, \quad \mathrm{Rc}_{lm} = 2R^t_{ltm} = \Gamma^t_{lm,t} - \Gamma^t_{lt,m} + \Gamma^t_{st}\Gamma^s_{lm} - \Gamma^t_{sm}\Gamma^s_{lt}.$$

Ukoliko je na mnogostrukosti zadata i metrika, definiše se *skalarna krivina*, kontrakcijom Ricci-jevog tenzora nakon podizanja jednog indeksa:

$$\mathrm{Rs} = \mathrm{Rc}^i_i \stackrel{\mathrm{def}}{=} g^{ij}\mathrm{Rc}_{ij}.$$

Za tenzorsko polje je jasno da ukoliko su mu komponente u nekom bazisu jednake nuli, onda je to nulti tenzor, sa nultim komponentama u bilo kom drugom bazisu. Isto važi i kada se razmatra jednakost sa nulom tenzorskih komponenti u nekoj tački, ili na nekoj karti. Međutim, koneksija nije tenzor, tako da odgovor na pitanje postoji li gradijentna transformacija Λ kojom se koneksija anulira, lokalno ili globalno, ne sledi iz prethodne argumentacije, i mora se posebno razmotriti. Zakon promene koneksije (1.13), uz $\Omega' = 0$, postaje jednačina $\mathrm{d}\,\Lambda = -\Omega\Lambda$ za gradijentno polje Λ. Stavovi o egzistenciji rešenja diferencijalnih jednačina pokazuju da se uslov rešivosti prethodne jednačine dobija spoljnim diferenciranjem: $0 = \mathrm{d}\,\mathrm{d}\,\Lambda = -\mathrm{d}\,\Omega\Lambda + \Omega \wedge \mathrm{d}\,\Lambda$. Zamenom $\mathrm{d}\,\Lambda$ nalazi se $0 = \mathcal{R}\Lambda$, pa zbog nesingularnosti polja Λ, uslov rešivosti postaje $\mathcal{R} = 0$. Prema tome koneksija se može globalno anulirati ako i samo ako joj je tenzor krivine jednak 0. Mnogostrukost sa takvom koneksijom se naziva ravni prostor. Sa druge strane, lako je pokazati da za svaku unapred zadatu tačku m mnogostrukosti postoji gradijentna transformacija Λ koja Ω transformiše u koneksiju Ω', takvu da je $\Omega'_m = 0$: dovoljno je uočiti da polja Λ za koja je Λ_m jedinična matrica, daju $(\mathrm{d}\,\Lambda)_m$ iz Lie-jeve algebre grupe $\mathrm{GL}(T_m(M))$, a to je skup svih matrica te dimenzije. Stoga algebarska jednačina $(\mathrm{d}\,\Lambda)_m = -\Omega_m\Lambda_m = -\Omega_m$ uvek ima rešenje.

1.9 Koneksija Levi–Civita-e

Kaže se da je na mnogostrukosti sa metrikom g koneksija ∇ *metrička*, ili usaglašena sa metrikom, ako je g kovarijantna konstanta, što, koristeći (1.15), daje uslov usaglašenosti:

$$\nabla g = 0, \quad \mathrm{d}\,g_{ij} = g_{lj}\omega^l_i + g_{il}\omega^l_j, \quad g_{ij,s} - g_{lj}\Gamma^l_{is} - g_{il}\Gamma^l_{js} = g_{ij;s} = 0$$

(poslednji izraz je za koordinatna polja karte). U ortonormiranim bazisnim poljima, kada je $\mathrm{d}\,g_{ij} = 0$, uslov postaje $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$ (spušteni indeks matrice Ω).

Posebno, metrička koneksija koja je simetrična naziva se *koneksija Levi–Civita-e*[4]. Zahtev simetričnosti omogućava rešavanje gornje jednačine po koeficijentima,

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2}g^{il}(g_{lj,k} + g_{lk,j} - g_{jk,l}), \tag{1.16}$$

što znači da svaka metrika jednoznačno određuje koneksiju Levi–Civita-e.

[4]Ponekad se i ova koneksija naziva metrička.

Glava 2

ELEMENTI OPŠTE TEORIJE RELATIVNOSTI

2.1 Princip ekvivalencije

Iskustvo upućuje na pretpostavku da je prostor-vreme četvorodimenzionalna mnogostrukost: pojmovi vezani za rastojanja se mogu definisani preko metrike, a fizička polja se tretiraju kao tenzorska polja. Pri tome fizički zakoni postaju veze među poljima, što automatski obezbeđuje *kovarijantnost zakona* — njihovu nezavisnost od izbora bazisnih polja (tj. lokalnog referentnog sistema).

Sledeća iskustvena činjenica je da gravitacione sile deluju na sve objekte, i to na isti način, bar u dovoljno malim delovima prostora u okviru kojih se gravitaciono polje može smatrati homogenim (što sigurno važi za sve probne tačkaste objekte), uz jednačine kretanja koje ne zavise od karakteristika objekta (ni od mase!). Ona omogućava da se gravitacija shvati kao svojstvo same mnogostrukosti prostor-vremena. Istovremeno dozvoljava da se delovanje gravitacije lokalno izjednači sa neinercijalnošću posmatrača, tj. datog koordinatnog sistema: prelaskom u drugi koordinatni sistem, gubi se gravitaciono polje, i dobija se dinamika u prostoru Minkowskog. Ovako formulisani *princip ekvivalencije*, je polazni fakt opšte teorije relativnosti. U okviru nje, teorija gravitacije postaje teorija mnogostrukosti sa metrikom signature (1,3), i njome određenom koneksijom Levi–Civita-e. Gravitaciono polje je zadato metrikom, tj. koeficijenti metrike dobijaju ulogu potencijala, a koneksija (Christoffel-ovi simboli, izvodi potencijala) manifestuje gravitaciju kroz zakrivljenost mnogostrukosti, i time uzrokovanu promenu slobodne dinamike. Tako gravitacija postaje potpuno geometrijska teorija. Izborom pogodnog referentnog sistema, tzv. *lokalno inercijalni sistem*, Christoffel-ovi simboli se anuliraju u svakoj zadatoj tački, čime se dobija geometrijski izraz principa ekvivalencije. Istinsko odsustvo gravitacionog polja je ekvivalentno postojanju jednog koordinatnog sistema u kome su svi Christoffel-ovi simboli globalno jednaki nuli, odnosno (zbog (1.16)) metrika globalno konstantna: time se rekonstruiše ravni prostor Minkowskog.

Kretanje slobodne čestice u prostoru Minkowskog se odvija po pravolinijskim trajektorijama, koje su geodezijske linije koneksije Levi–Civita-e. Naime, Descartes-ove koordinate je tada moguće globalno definisati, jer se ceo prostor može shvatiti kao jedna karta, pri čemu su koordinatna polja globalni ortonormirani bazis vektorskih polja. Koeficijenti metrike su konstantni i svi

Christoffel-ovi simboli nestaju, čime (1.14) postaje $\frac{\mathrm{d}^2 x^i}{\mathrm{d}\,t^2} = 0$, sa pravolinijskim rešenjima. Kako je prostor-vreme lokalno prostor Minkowskog, prirodno je pretpostaviti da se kretanje čestice u gravitacionom polju, tj. i u slučaju netrivijalne metrike, odvija po geodezijskim linijama, čime jednačine (1.14) postaju jednačine kretanja čestice u gravitacionom polju. Ovo je u skladu sa Lagrange-ovim jednačinama ekstremalnosti dejstva čestice mase m

$$S_m[\gamma] = -mc \int_\gamma \mathrm{d}\,s = \int_{\gamma(t)} L \mathrm{d}\,t, \quad \mathrm{d}\,s = \sqrt{g(X_{\gamma(t)}, X_{\gamma(t)})}\mathrm{d}\,t,$$

uz uslov da je $\mathrm{d}\,s$ odabrano da bude proporcionalno parametru krive $\mathrm{d}\,t$. Na karti je $\gamma_\alpha(t) = \mathbf{x}(t)$, a moguća trajektorija γ je integralna kriva polja $X = \frac{\mathrm{d}\,x^i(t)}{\mathrm{d}\,t}\partial_i$, te je $\mathrm{d}\,s = \sqrt{g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j}\mathrm{d}\,t$. Lagrange-ove jednačine za $L = -mc\sqrt{g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j}$ su upravo (1.14), osim u slučaju geodezijskih linija za koje je $\mathrm{d}\,s = 0$ (što samo znači da kod njih metrička dužina duž krive nije linearno zavisna od parametra krive). Krive duž kojih je $\mathrm{d}\,s^2 > 0$, $\mathrm{d}\,s^2 < 0$ i $\mathrm{d}\,s^2 = 0$ nazivaju se vremenskim, prostornim i izotropnim, respektivno. U okviru ovakve teorije čestice se kreću duž vremenskih ili izotropnih geodezijskih linija, a njihovo *sopstveno vreme* se definiše kao $\frac{\mathrm{d}\,s}{c}$. U sistemu vezanom za česticu, trajektorija čestice je vremenska koordinata, i $\mathrm{d}\,s$ je dužina, određena metrikom duž vremenske koordinate x^0 (podeljena sa c), tj. $\mathrm{d}\,\tau = \frac{1}{c}\sqrt{g_{00}}\mathrm{d}\,x^0$.

2.2 Einstein-ove jednačine

Izvedeni rezultat pokazuje da je dinamika uslovljena poznavanjem metrike, te je osnovni zadatak njeno određivanje u datoj fizičkoj situaciji. Jednačine gravitacionog polja se, kao i uvek, nalaze iz varijacionog principa. U skladu sa opštim zahtevima fizike, moraju biti diferencijalne jednačine najviše drugog reda po gravitacionim poljima, tj. komponentama metrike, te Lagrange-ova funkcija gravitacionog polja mora biti skalarno polje, potpuno određeno metrikom. Zato je potrebno da zavisi od polja i njihovih izvoda, odnosno Christoffel-ovih simbola. Izborom lokalno inercijalnih koordinata u svakoj pojedinoj tački se svi Christoffel-ovi simboli anuliraju, i homogene funkcije izvoda polja postaju jednake 0. No, za razliku od netenzorskih veličina (kao što su Christoffel-ovi simboli), ako su komponente tenzorskog polja u jednom koordinatnom sistemu u nekoj tački jednake nuli, takve su i u svim drugim sistemima. Postaje jasno da se samo od g_{ij} i njihovih izvoda ne može konstruisati skalarno polje koje bi dovelo do jednačina drugog reda, te se moraju koristiti i viši izvodi, pri čemu je značajno sledeće opažanje: zapreminski integral veličina koje druge izvode sadrže linearno, zahvaljujući relaciji $\alpha^i\partial_i S = \partial_i(\alpha^i S) - S(\partial_i\alpha^i)$ i Stokes-ovom teoremu, svodi se na zapreminski integral po veličini koja sadrži prve izvode i integral po granici; poslednji integral ne utiče na varijacione jednačine, jer se variranje vrši pri fiksiranim poljima na granici, i varijacija integrala je jednaka nuli. Stoga će i veličina koja linearno sadrži druge izvode polja dati jednačine kretanja najviše drugog stepena, te se može uzeti za Lagrange-ovu funkciju.

Tražena svojstva ima skalarna krivina koneksije Levi–Civita-e. Einstein je, formulišući opštu teoriju relativnosti, nju uzeo za Lagrange-ovu funkciju gravitacionog polja. Tako je dejstvo $S_g = \Gamma \int \mathrm{Rs}\sqrt{-\mathbf{g}}\,\mathrm{d}^4 x$, gde je Γ gravitaciona konstanta i $\sqrt{-\mathbf{g}}$ element zapremine ($\mathbf{g}$ je determinanta metrike u sistemu $x^0, \dots, x^3$). Jednačine polja se dobijaju iz uslova ekstremalnosti, $\delta S_g = 0$, koji zbog $\mathrm{d}\,(\sqrt{-\mathbf{g}}\,) = -\frac{1}{2}\sqrt{-\mathbf{g}}\,g_{ij}\mathrm{d}\,g^{ij}$, postaje $0 = \int(\mathrm{Rc}_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}\mathrm{Rs})(\delta g^{ij})\sqrt{-\mathbf{g}}\,\mathrm{d}^4 x + \int g^{ij}(\delta\mathrm{Rc}_{ij})\sqrt{-\mathbf{g}}\,\mathrm{d}^4 x$. Pokazuje se da drugi integral može da se svede na integral po hiperpovrši granice (time se koristi anticipirano svojstvo), i kao jednačine čistog gravitacionog polja (bez prisustva drugih polja) se dobijaju *Einstein-ove jednačine* za vakuum: $\mathrm{Rc} - \frac{1}{2}g\mathrm{Rs} = 0$. U slučaju da pored gravitacionog, postoje još neka polja, dejstvo sadrži njihove Lagrange-ove funkcije, i nakon variranja Einstein-ove jednačine su $\mathrm{Rc} - \frac{1}{2}g\mathrm{Rs} = T$, gde je T tenzor energije-impulsa dodatnih polja. Koordinatno je $\mathrm{Rc}_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}\mathrm{Rs} = T_{ij}$, odakle se množenjem sa g^{ij} (i sumiranjima) nalazi ekvivalentan oblik $\mathrm{Rc}_{ij} = T_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}g^{pq}T_{pq}$, koji za vakuum postaje $\mathrm{Rc} = 0$.

Koristeći Einstein-ove jednačine moguće je za poznatu fizičku situaciju (npr. poznati raspored masa) odrediti metrički tenzor, i time formulisati dinamiku. Nelinearne su, te se ne može koristiti ideja superpozicije (osim aproksimativno u slučaju slabih polja). Jedna od posledica ovoga je da se gravitaciono polje sistema više objekata, ne može dobiti kao zbir polja podsistema, što znatno otežava njihovo rešavanje. Iz jednačina je jasno da polja materije, kroz tenzor energije impulsa, određuju gravitaciono polje, koje sa svoje strane uslovljava dinamiku materije, te se raspored i kretanje materije ne mogu zadati proizvoljno, već se definišu Einstein-ovim jednačinama istovremeno sa gravitacionim poljem.

2.3 Konstantno polje

Iako je, kako je napomenuto, Einstein-ove jednačine komplikovano rešiti, neki važni slučajevi dozvoljavaju dovoljno duboku analizu, zahvaljujući korišćenju dodatnih fizičkih argumentima (u prvom redu simetrije).

Konstantno polje je gravitaciono polje sa metrikom čiji koeficijenti u nekim koordinatama ne zavise od x^0, odnosno metrika je invarijantna pri translacijama duž ove koordinate (takvo x^0 se naziva *svetsko vreme*). Ako se za dve tačke A i B nekim fizičkim metodom (koji očigledno bazira na razmatranju razmene signala između A i B, i time uključuje, preko jednačina kretanja, metriku duž puta), definiše da su istovremene, sa vremenskim koordinatama x^0_A i x^0_B, pa im se zatim dozvoli kretanje duž x^0 za isti interval Δ, dobijene tačke ostaju istovremene u smislu istog metoda (jer je metrika nepromenjena na putu u celini transliranom za Δ). Kako g_{00} ne zavisi od x^0, a u definiciji sopstvenog vremena se posmatra vremenska koordinata pri fiksiranim prostornim, sa infinitezimalnih se može preći na konačne intervale: $\tau = \frac{1}{c}\sqrt{g_{00}}x^0$.

Telo koje je nepokretno (tj. njegova trajektorija je koordinatna linija svetskog vremena) stvara *statičko polje*. Kod takvih polja interval $\mathrm{d}\,s$ ne sme zavisiti od znaka x^0, te metrički koeficijenti $g_{0\alpha}$ (grčko slovo označava prostornu koordinatu), u članovima linearnim po $\mathrm{d}\,x^0$ moraju biti jednaki nuli. U drugim slučajevima konstantnog polja ovo ne mora važiti; to su tzv. *stacionarna polja* (npr. očigledno je da će rotirajuća, dakle pokretna, kugla stvoriti konstantno polje, no smerovi vremena nisu ekvivalentni, tj. metrika nije invarijantna na vremensku inverziju).

Važan test za celu teoriju je ponašanje sporih čestica daleko od izvora konstantnog polja, kada je klasični Newton-ov zakon odlična aproksimacija. Lagrange-ova funkcija čestice mase m u gravitacionom potencijalu φ, je $L = \frac{mv^2}{2} - m\varphi - mc^2$. (Član $-mc^2$, koji ne utiče na jednačine kretanja, potiče iz relativističke Lagrange-ove funkcije slobodne čestice mase m, $L = -mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$, u nerelativističkoj aproksimaciji $L = \frac{mv^2}{2} - mc^2$; mora se koristiti za formiranje drugih Lagrange-ovih funkcija u istoj aproksimaciji.) Dejstvo je $S_m[\gamma] = \int_\gamma L\mathrm{d}\,t = -mc\int_\gamma(1 - \frac{v^2}{2c^2} + \frac{\varphi}{c^2})\,c\mathrm{d}\,t$, pa je $\mathrm{d}\,s = (c - \frac{v^2}{2c} + \frac{\varphi}{c})\mathrm{d}\,t$. Kvadriranje daje $\mathrm{d}\,s^2 = c^2(1 + \frac{\varphi^2}{c^4} + \frac{v^4}{4c^4} + 2\frac{\varphi}{c^2} - \frac{v^2}{c^2} - \frac{v^2}{c^2}\frac{\varphi}{c^2})\mathrm{d}\,t^2$.

Zadržavajući članove najnižeg stepena po $\frac{v}{c}$ i $\frac{\varphi}{c^2}$ (jer se razmatra nerelativistički limes), nalazi se

$$\mathrm{d}\,s^2 = g_{00}\mathrm{d}\,(ct)^2 - \mathrm{d}\,\mathbf{x}^2, \quad g_{00} = 1 + 2\frac{\varphi}{c^2}. \tag{2.1}$$

Odavde je lako naći Christoffel-ove simbole, pa i aproksimativne jednačine geodezijskih linija sporih ($\frac{\mathrm{d}\,x^\alpha}{\mathrm{d}\,\tau} \ll c$) čestica. Te jednačine su istovremeno i jednačine kretanja (za $\mathrm{d}\,s$ prema (2.1) važi $\mathrm{d}\,s \sim c(1 + \frac{\varphi}{c^2})\mathrm{d}\,t \sim c\mathrm{d}\,t$), i nakon odgovarajućih aproksimacija daju Newton-ove jednačine $\frac{\mathrm{d}^2 x^\alpha}{\mathrm{d}\,t^2} + \Gamma^\alpha_{00} = \frac{\mathrm{d}^2 x^\alpha}{\mathrm{d}\,t^2} + \frac{\partial\varphi}{\partial x^\alpha} = 0$ ($\frac{\mathrm{d}^2 x^0}{\mathrm{d}\,t^2} = 0$ obezbeđuje da je dužina duž trajektorije lokalno proporcionalna vremenu).

2.4 Schwarzschild-ova metrika

Intuitivno je jasno da sferno simetrična tela moraju indukovati sferno simetričnu metriku, invarijantnu na prostorne rotacije oko centra izvora gravitacije. Kako se rotacijama jedne tačke dobija sfera, ukupna mnogostrukost je difeomorfna direktnom proizvodu sfere S^2, sa metrikom $\mathrm{d}\,\theta^2 + \sin^2(\theta)\mathrm{d}\,\varphi^2$, i neke dvodimenzionalne mnogostrukosti sa metrikom signature $(1, 1)$. Pokazuje se da se najopštija metrika takve mnogostrukosti, pogodnim izborom koordinata, može napisati u obliku $\mathrm{d}\,s^2 = e^\nu \mathrm{d}\,(ct)^2 - e^\lambda \mathrm{d}\,r^2 - r^2(\mathrm{d}\,\theta^2 + \sin^2(\theta)\mathrm{d}\,\varphi^2)$, gde su ν i λ proizvoljne funkcije promenljivih t i r. Metrikom određena, koneksija Levi–Civita-e ima nenulte Christoffel-ovi simbole (zarezom je obeležen izvod po r, a tačkom po t, nisu navedeni simboli koji se dobijaju permutacijom donjih indeksa):

$$\begin{array}{llll}
\Gamma^0_{00} = \frac{1}{2}\dot{\nu}\ , & \Gamma^0_{10} = \frac{1}{2}\nu'\ , & \Gamma^0_{11} = \frac{1}{2}\dot{\lambda}e^{\lambda-\nu}\ , & \Gamma^1_{00} = \frac{1}{2}\nu' e^{\nu-\lambda}\ , \\
\Gamma^1_{10} = \frac{1}{2}\dot{\lambda}\ , & \Gamma^1_{11} = \frac{1}{2}\lambda'\ , & \Gamma^1_{22} = -re^{-\lambda}\ , & \Gamma^1_{33} = -r\sin^2(\theta)e^{-\lambda}\ , \\
\Gamma^2_{12} = \frac{1}{r}\ , & \Gamma^2_{33} = -\sin(\theta)\cos(\theta)\ , & \Gamma^3_{13} = \frac{1}{r}\ , & \Gamma^3_{23} = \mathrm{ctg}(\theta)\ .
\end{array}$$

Sada je mogu postaviti Einstein-ove jednačine. U slučaju da je tenzor energije-impulsa jednak nuli, tj. kada se opisuje centralno simetrično polje u vakuumu, njihovim rešavanjem se potpuno određuje tzv. Schwarzschild-ova metrika. Tri nezavisne vakuumske Einstein-ove jednačine su:

$$-R^1_1 = e^{-\lambda}(\frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2}) - \frac{1}{r^2} = 0,$$

$$-R^0_0 = e^{-\lambda}(\frac{\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2}) + \frac{1}{r^2} = 0,$$

$$-R^1_0 = e^{-\lambda}\frac{\dot{\lambda}}{r} = 0.$$

Iz poslednje jednačine sledi da λ ne zavisi od t, a iz prve dve jednačine je $\nu' + \lambda' = 0$, tj $\nu + \lambda = C(t)$. Dodatnom promenom vremenske koordinate ova jednačina postaje $\nu + \lambda = 0$ (ako je $t = f(\tilde{t})$ onda je $g_{00}c^2\mathrm{d}\,t^2 = e^{\tilde{\nu}}c^2\mathrm{d}\,\tilde{t}^2$, gde je $\tilde{\nu} = \nu + \ln(\dot{f}^2)$, što znači da se f može izabrati tako da kompenzuje bilo koju funkciju $C(t)$). Na kraju, u obliku $(re^{-\lambda})' = 1$, druga jednačina daje $e^{-\lambda} = e^\nu = 1 - \frac{R_g}{r}$. Integraciona konstanta R_g se određuje uslovom da je na velikim rastojanjima od centra polje slabo, te se mora dobiti Newton-ov oblik metrike (2.1) za $\varphi = -\frac{\Gamma M}{r}$; njena vrednost $R_g = \frac{2\Gamma M}{c^2}$ se naziva *gravitacioni radijus* tela koje stvara polje[1]. Konačno, Schwarzschild-ova metrika je:

$$\mathrm{d}\,s^2 = (1 - \frac{R_g}{r})\mathrm{d}\,(ct)^2 - (1 - \frac{R_g}{r})^{-1}\mathrm{d}\,r^2 - r^2(\mathrm{d}\,\theta^2 + \sin^2(\theta)\mathrm{d}\,\varphi^2). \tag{2.2}$$

Neki značajni fizički zaključci se mogu izvesti i bez detaljnog rešavanja geodezijskih jednačina. Prvo što treba uočiti je da za veliku udaljenost od centra metrika malo odstupa od metrike Minkowskog, te za udaljene posmatrače Schwarzschild-ove koordinate imaju uobičajeni smisao vremena i sfernih koordinata. Inače, sopstveno vreme je $\tau = \sqrt{1 - \frac{R_g}{r}}t$, i vidi se da se interval proteklog sopstvenog vremena smanjuje (za fiksirani interval svetskog vremena) pri približavanju centru. Kao što je objašnjeno, zbog statičnosti metrike, istovremenost događaja A i B povlači istovremenost nizova događaja koji su iz A i B dobijeni isključivo protokom istih intervala svetskog vremena. Međutim, izvedena relacija pokazuje da će za isti niz događaja biti potrebno utoliko manje sopstvenog vremena, ukoliko je posmatrač bliži centru: sopstveno vreme protiče sporije. Ako je ω_0 frekvenca svetlosti po svetskom vremenu, frekvenca po sopstvenom vremenu posmatrača, $\omega = \frac{\omega_0}{\sqrt{g_{00}}}$, povećava se bliže centru. Ovo znači da će svetlost emitovana sa nekog masivnog objekta za udaljene posmatrače imati manju frekvencu, tj. opserviraće se *crveni pomak*. U graničnom slučaju velikih rastojanja, time i slabog Newton-ovog gravitacionog polja, kada je $\sqrt{g_{00}} \approx 1 - \frac{1}{2}\frac{R_g}{r}$, i $\omega \approx \omega_0(1 + \frac{1}{2}\frac{R_g}{r})$, a opserver i izvor miruju na radijusima r_o i r_e, razlika emitovane frekvence (sopstveno vreme izvora) ω i opservirane frekvence (sopstveno vreme posmatrača) je[2] $\Delta\omega = \frac{1}{2}\omega R_g(\frac{1}{r_e} - \frac{1}{r_o})$.

Očigledno je da u $r = R_g$ komponente g_{00} i g_{rr} imaju nepravilno ponašanje. Iako je sama metrika u toj tački nesingularna, jer se kompenzuje nestajanje g_{00} i divergencija g_{rr}, r i t gube uobičajeni smisao unutar gravitacionog radijusa. Međutim, ovo se ne može interpretirati kao singularitet metrike, tj. odgovarajuće geometrije prostor-vremena, već isključivo kao nemogućnost da se odabranom kartom mnogostrukost opiše globalno. Kao i uvek u sličnim situacijama, potrebno je odrediti drugu kartu koja pokriva oblast unutar gravitacionog radijusa, odnosno novi koordinatni sistem. Pronađeno je više mogućnosti da se ovo učini. Na primer, smenom $(t, r, \theta, \varphi) \mapsto (T, R, \theta, \varphi)$ uz

$$cT \stackrel{\mathrm{def}}{=} ct + \int \frac{\sqrt{\frac{R_g}{r}}\mathrm{d}\,r}{1 - \frac{R_g}{r}}, \quad R \stackrel{\mathrm{def}}{=} ct + \int \frac{\mathrm{d}\,r}{\sqrt{\frac{R_g}{r}}(1 - \frac{R_g}{r})},$$

dobija se *Lemaitre-ova metrika* u kojoj gravitacioni radijus nije singularitet, ali metrički koeficijenti zavise od vremena T:

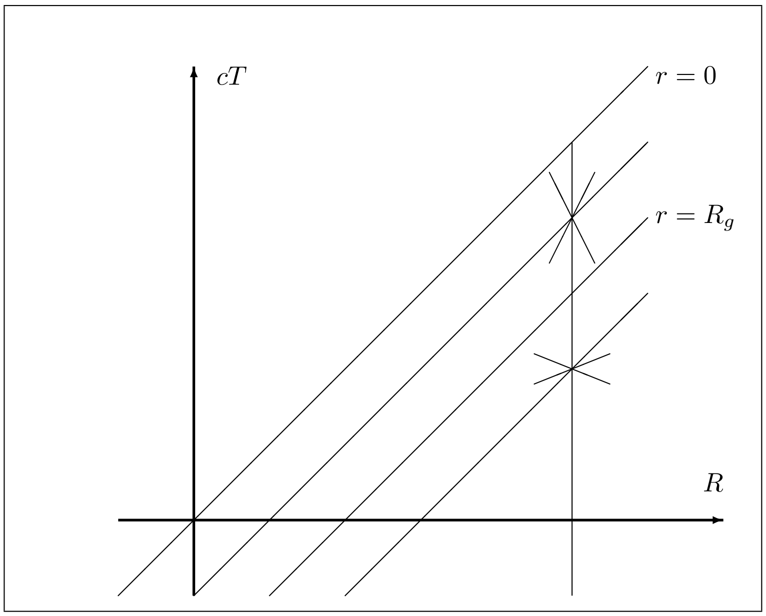
$$\mathrm{d}\,s^2 = c^2\mathrm{d}\,T^2 - (\frac{3}{2}\frac{R - cT}{R_g})^{-\frac{2}{3}}\mathrm{d}\,R^2 - (3\frac{R - cT}{2})^{\frac{4}{3}} R_g^{\frac{2}{3}}(\mathrm{d}\,\theta^2 + \sin^2(\theta)\mathrm{d}\,\varphi^2). \tag{2.3}$$

Kako je $r = (3\frac{R-cT}{2})^{\frac{2}{3}} R_g^{\frac{1}{3}}$, u novim koordinatama je gravitacioni centar (pri fiksiranom θ i φ) predstavljen simetralom koordinatnih linija T i R, a paralelno translirane naniže linije odgovaraju

[1] Za Zemlju je $R_g = 0.443$cm, a za sunce $R_g = 2.96$km.

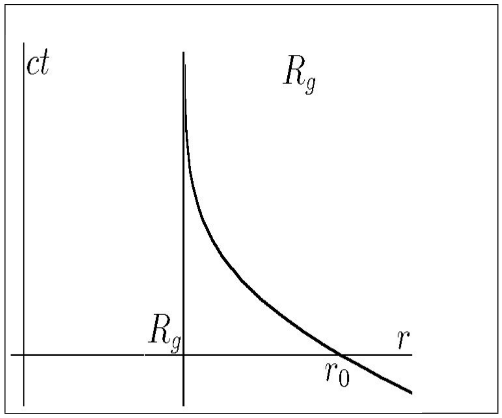
[2] Veličina $\frac{\Delta\omega}{\omega}$ je na Zemlji jednaka 10^{-6}, odnosno 10^{-5} za emisije sa Sunca i Sirijusa B.

sferama pozitivnog radijusa. Konstantnost g_{00} i odsustvo koeficijenata $g_{0\alpha}$ dovode do toga da su vremenske koordinatne linije geodezijske, što znači da telo koje u takvim koordinatama miruje (njegova trajektorija je prava paralelna T osi) zapravo slobodno pada ka centru. Izotropne linije povučene iz neke tačke ispod simetrale koordinata T i R (jer je $r > 0$) imaju tangentne pravce na osnovu (2.3) $\frac{c\,\mathrm{d}\,T}{\mathrm{d}\,R} = \pm\sqrt{\frac{R_g}{r}}$. Za $r < R_g$, pozitivni deo svetlosnog konusa je iznad pravca $r = \mathrm{const}$, i sve vremenske ili izotropne geodezijske linije se približavaju centru. Ovo znači da unutar gravitacionog radijusa sve čestice padaju u centar, tzv. *gravitacioni kolaps*. Kako nikakav signal poslat iz oblasti $r < R_g$ iz istog razloga ne može tu oblast da napusti, prostor unutar gravitacionog radijusa se naziva *crna rupa*.



Slika 2.1: **Lemaitre-ove koordinate.** *Kose prave označavaju tačke istog radijusa u odnosu na centar. Za tačku na rastojanju od centra manjem od R_g, pozitivni deo svetlosnog konusa je usmeren ka centru, a ako je tačka na većem rastojanju od R_g, deo konusa je usmeren ka povećanju radijusa.*

Za $r > R_g$ pozitivni deo svetlosnog konusa sadrži deo pravca $r = \mathrm{const}$, što znači da se mogu naći geodezijske linije sa većim ili manjim nagibom od simetrale (sl. 2.1). One opisuju čestice koje se približavaju odnosno udaljavaju od centra. Za čestice koje se približavaju centru, daleki posmatrač nalazi da je vreme njihovog puta do R_g beskonačno (sl. 2.2). Naime, čak i svetlosnom signalu koji se radijalno kreće ka centru ($\mathrm{d}\,s = 0$ u (2.2), pa je znak u $\mathrm{d}\,t = -\frac{\mathrm{d}\,r}{c(1-\frac{R_g}{r})}$ odabran zbog smanjivanja radijusa), za put iz r u $R_g + \varepsilon$ potrebno je Schwarzschild-ovo svetsko vreme $\Delta t = \int_r^{R_g+\varepsilon} \mathrm{d}\,t = \frac{r-R_g-\varepsilon}{c} + \frac{R_g}{c}\ln\frac{r-R_g}{\varepsilon}$; za dostizanje gravitacionog radijusa ono je beskonačno. Međutim, putnik za crnu rupu će dočekati kraj (puta), jer će mu za to biti potrebno konačno sopstveno vreme. Na primer, čestica koja se kreće drugom kosmičkom brzinom, tj. mirovala je u $r = \infty$, pod dejstvom centra će sa radijusa r doći do R_g za sopstveno vreme, tj. vreme u (2.3) (sve ostale koordinate u (2.3) su konstantne) $\Delta T = \int_r^{R_g} \mathrm{d}\,T = T(R_g) - T(r) = \frac{2}{3c}\frac{r^{\frac{3}{2}} - R_g^{\frac{3}{2}}}{R_g^{\frac{1}{2}}}$. Naravno, reč je o opisanom usporenju sopstvenog vremena: za udaljene posmatrače svi procesi



Slika 2.2: **Grafik funkcije** $ct = R_g \ln \frac{r_0 - R_g}{r - R_g} + r_0 - r$. *Kada t raste, za udaljenog posmatrača putnik se asimptotski približava Schwarzschild-ovoj sferi.*

u blizini R_g (ali na većem rastojanju od centra) teku sporije, zamrzavajući se pri dostizanju sfere radijusa R_g, tzv. *horizonta događaja*, i ostavljajući svoj lik zauvek na njemu.

Glava 3

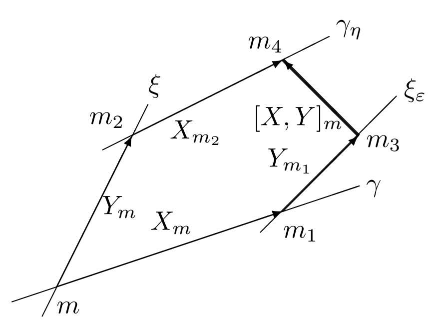
ZADACI

3.1 Vektorska polja

Zadatak 1 *Neka je A proizvoljna algebra. Diferenciranje algebre je svaki linearni operator D u A koji na proizvod elemenata algebre deluje po Leibnitz-ovom pravilu: $D(ab) = (Da)b + aDb$. Pokazati da kompozicija diferenciranja nije diferenciranje, a komutator jeste.*

Ako su C i D dva diferenciranja, tada je $(CD)(ab) = C((Da)b + aDb) = (CDa)b + (Da)Cb + (Ca)Db + aCDb$, što očigledno nije Leibnitz-ovo pravilo za CD. Međutim, odavde sledi da je $[C, D](ab) = ([C, D]a)b + a[C, D]b$, što je Leibnitz-ovo pravilo.

Zadatak 2 *Integralne krive polja X i Y kroz tačku $m = \gamma(0) = \xi(0)$ su γ i ξ, a γ_η i ξ_ε su integralne krive istih polja kroz tačke $m_2 = \xi(\eta) = \gamma_\eta(0)$ i $m_1 = \gamma(\varepsilon) = \xi_\varepsilon(0)$, respektivno. Pokazati da je na karti kojoj pripadaju sve pomenute tačke, vektor iz $m_3 = \xi_\varepsilon(\eta)$ do $m_4 = \gamma_\eta(\varepsilon)$ jednak sa $[X, Y]_m$ do na članove najnižeg reda.*



Slika 3.1: **Komutator vektorskih polja.** *Komutator polja X i Y u tački m je vektor između m_4 i m_3. Integralne krive ovih polja su označene sa γ i ξ.*

Ako likovi tačaka m_k na karti imaju koordinate $\mathbf{x}_k = (x_k^1, \ldots, x_k^n)$, traženi vektor je $\mathbf{x}_4 - \mathbf{x}_3$. Koristeći definiciju tangentnog vektora i integralne krive vektorskog polja, nalazi se do drugog reda razvoja:

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x} + \varepsilon X_{\mathbf{x}} + \frac{1}{2}\varepsilon^2 \frac{d^2\mathbf{x}(\gamma(t))}{d^2t}|_{t=0}, \quad \mathbf{x}_2 = \mathbf{x} + \eta Y_{\mathbf{x}} + \frac{1}{2}\eta^2 \frac{d^2\mathbf{x}(\xi(s))}{d^2s}|_{s=0},$$

$$\mathbf{x}_4 = \mathbf{x}_2 + \varepsilon X_{\mathbf{x}_2} + \frac{1}{2}\varepsilon^2 \frac{d^2\mathbf{x}(\gamma_\eta(t))}{d^2t}|_{t=0}, \quad \mathbf{x}_3 = \mathbf{x}_1 + \eta Y_{\mathbf{x}_1} + \frac{1}{2}\eta^2 \frac{d^2\mathbf{x}(\xi_\varepsilon(s))}{d^2s}|_{s=0}.$$

Razvojem koordinata tangentnih vektora $X_{\mathbf{x}_2}$ i $Y_{\mathbf{x}_1}$ do na prvi red, nalazi se (izvod u pravcu)

$$X^i_{\mathbf{x}_2} = X^i_{\mathbf{x}} + \eta X^i_{\mathbf{x},j} Y^j_{\mathbf{x}}, \quad Y^i_{\mathbf{x}_1} = Y^i_{\mathbf{x}} + \varepsilon Y^i_{\mathbf{x},j} X^j_{\mathbf{x}}.$$

Zamenjujući sve ovo u vektor koji zatvara "četvorougao" integralnih krivih nalazi se: $(\mathbf{x}_4 - \mathbf{x}_3)^i = \varepsilon\eta(Y^i_{\mathbf{x},j}X^j_{\mathbf{x}} - X^i_{\mathbf{x},j}Y^j_{\mathbf{x}})$, tj. $\mathbf{x}_4 - \mathbf{x}_3 = \varepsilon\eta[Y, X]_{\mathbf{x}}$.

Zadatak 3 *Na nekoj karti 2-dimenzionalne mnogostrukosti su zadata vektorska polja $X = x^i\partial_i$ i $Y = -x^2\partial_1 + x^1\partial_2$. Odrediti komutator ovih polja i njihove integralne krive.*

$[X, Y] = 0$.

Integralna krive polja X se nalaze iz jednačina: $\frac{dx^1(t)}{dt} = x^1(t)$, $\frac{dx^2(t)}{dt} = x^2(t)$. Rešenja su (ae^t, be^t). Vidi se da je koordinatni početak jedna integralna kriva, dok su ostale radijalne prave u svim pravcima iz $(0,0)$ (bez $(0,0)$).

Za polje Y se nalazi: $\frac{dx^1(t)}{dt} = -x^2(t)$, $\frac{dx^2(t)}{dt} = x^1(t)$. Rešenja su krive $(a\cos(t+b), a\sin(t+b))$, tj. koncentrične kružnice oko koordinatnog početka.

Zadatak 4 *Na karti 4-dimenzionalne mnogostrukosti data su polja $P_i = \partial_i$, $R_i = \sum_{jk}\varepsilon_{ijk}x^j\partial_k$ i $B_i = x^0\partial_i + x^i\partial_0$. Odrediti njihove komutatore i integralne krive.*

Polja zadovoljavaju komutacione relacije Poincare-ove algebre. Integralne krive za P_i se nalaze iz jednačina $\frac{dx^j}{dt} = \delta^j_i$, kao i-te koordinatne linije. Za polje R_3, korišćenjem prethodnog zadatka (uz dodatne jednačine $\frac{dx^0}{dt} = 0$ i $\frac{dx^3}{dt} = 0$ se odmah nalazi da su integralne krive koncentrične kružnice $(c, a\cos(t) + b\sin(t), a\sin(t) - b\cos(t), d)$ u ravnima paralelnim sa x^1x^2-ravni. Slično važi i za R_1 i R_2. Jednačine za B_1 su $\frac{dx^0}{dt} = x^1$, $\frac{dx^1}{dt} = x^0$, $\frac{dx^2}{dt} = 0$ i $\frac{dx^3}{dt} = 0$. Rešenja su $(ae^t + be^t, ae^t - be^t, c, d)$. To su krive $x^{0^2} - x^{1^2} = ab$ u ravnima paralelnim sa x^0x^1-ravni. Specijalno, $(0,0,c,d)$ za $a = b = 0$, $(x^0(t), x^0(t), c, d)$ za $b = 0$, $(x^0(t), -x^0(t), c, d)$ za $a = 0$.

Zadatak 5 *Odrediti koordinatna polja za sledeće koordinate u $\mathbf{R}^4$ (izražene preko Descartes-ovih):*

(i) *Inercijalne $x^0 = \gamma(x'^0 - \beta x'^1)$, $x^1 = \gamma(-\beta x'^0 + x'^1)$, $x^2 = x'^2$, $x^3 = x'^3$; ($\beta = \frac{v}{c}$, $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$).*

(ii) *Möller-ove: $x^0 = (x'^1 + \frac{1}{\alpha})\mathrm{sh}\,(\alpha x'^0)$, $x^1 = (x'^1 + \frac{1}{\alpha})\mathrm{ch}\,(\alpha x'^0) - \frac{1}{\alpha}$, $x^2 = x'^2$, $x^3 = x'^3$; ($\alpha = \frac{a}{c^2}$);*

(iii) *cilindrične rotirajuće: $x^0 = x'^0$, $x^1 = \rho\cos(\varphi')$, $x^2 = \rho\sin(\varphi')$, $x^3 = x'^3$, gde je $\varphi' = \varphi - \omega\frac{x^0}{c}$ (ω je konstantna ugaona brzina rotacije oko x^3-ose).*

Inercijalne: $\partial'_0 = \gamma(\partial_0 + \beta\partial_1)$, $\partial'_1 = \gamma(\beta\partial_0 + \partial_1)$.
Möller-ove: $\partial'_0 = \alpha(x'^1 + \frac{1}{\alpha})\mathrm{ch}\,(\alpha x'^0)\partial_0 + \alpha(x'^1 + \frac{1}{\alpha})\mathrm{sh}\,(\alpha x'^0)\partial_1$, $\partial'_1 = \mathrm{sh}\,(\alpha x'^0)\partial_0 + \mathrm{ch}\,(\alpha x'^0)\partial_1$.
Cilindrične rotirajuće ($S = \sin(\varphi')$, $C = \cos(\varphi')$): $\partial'_0 = \partial_0 + \rho\frac{\omega}{c}S\partial_1 - \rho\frac{\omega}{c}C\partial_2$, $\partial'_\rho = C\partial_1 + S\partial_2$, $\partial'_\varphi = -\rho S\partial_1 + \rho C\partial_2$, $\partial'_3 = \partial_3$. Ostala polja su jednaka Descartes-ovim.

Zadatak 6 *Pokazati da je $\mathrm{d}\,f$, gde je f preslikavanje mnogostrukosti M u N, linearni operator.*

3.2 Diferencijalne forme

Zadatak 7 *Neka je $A^{\{p\}}$ antisimetrizator u $\mathcal{H}^p$. Pokazati da je $A^{\{p+q\}}(A^{\{p\}} \otimes I_q) = A^{\{p+q\}}(I_p \otimes A^{\{q\}}) = A^{\{p+q\}}$.*

$A^{\{p+q\}}(A^{\{p\}} \otimes I_q) = \frac{1}{p!}\sum_{\sigma \in S_p}(-)^\sigma A^{\{p+q\}}(D_p(\sigma) \otimes I_q)$. Kako delovanje antisimetrizatora na vektor permutovan operatorom $D_p(\sigma)$ daje isti rezultat kao i bez permutacije, osim što se znak menja u $(-)^\sigma$, ovo postaje $\frac{1}{p!}\sum_{\sigma \in S_p}(-)^{2\sigma} A^{\{p+q\}} = A^{\{p+q\}}$. Analogno se pokazuje i druga jednakost.

Zadatak 8 *Ako je $\pi \in \bigwedge^p(\mathcal{H})$ i $\rho \in \bigwedge^r(\mathcal{H})$, spoljašni proizvod se definiše sa $\pi \wedge \rho = c(p+r,p)A^{\{p+r\}}(\pi \otimes \rho)$. Pokazati da je $\pi \wedge \rho = (-)^{pr}\rho \wedge \pi$ i asocijativnost proizvoda za $c(p+r,r) = 1$ i $c(p+r,r) = \begin{pmatrix} p+r \\ p \end{pmatrix}$.*

U bilo kom bazisu je za dobijanje $e_{i_{p+1}} \otimes \cdots \otimes e_{i_{p+r}} \otimes e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_p}$ iz početnog uređenja $e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_{p+r}}$ potrebno pr transpozicija T_i. Stoga je $\rho \wedge \pi = cA^{\{p+r\}}T_1 \cdots T_{pr}(\pi \otimes \rho)$, čime se kao i u prethodnom zadatku dobija traženi faktor $(-)^{pr}$. $(\pi \wedge \rho) \wedge \sigma = c(p+r+s, p+r)A^{\{p+r+s\}}((c(p+r,p)A^{\{p+r\}}(\pi \otimes \rho)) \otimes \sigma)$. Koristeći prethodni zadatak dokazuje se da je ovo jednako sa $c(p+r+s,p)A^{\{p+r+s\}}(\pi \otimes A^{\{p+r\}}(\rho \otimes \sigma))$, odakle direktnom proverom za oba izbora koeficijenata sledi tražena jednakost.

Zadatak 9 *Izraziti formu $\epsilon^{i_1} \wedge \cdots \wedge \epsilon^{i_p}$ preko direktnog proizvoda bazisnih formi za obe konvencije iz zadatka 8.*

$\epsilon^{i_1} \wedge \cdots \wedge \epsilon^{i_p} = c(p,1)A^{\{p\}}(\epsilon^{i_1} \otimes (\epsilon^{i_2} \wedge \cdots \wedge \epsilon^{i_p})) = c(p,1)c(p-1,1)A^{\{p\}}(\epsilon^{i_1} \otimes A^{\{p-1\}}(\epsilon^{i_2} \otimes (\epsilon^{i_3} \wedge \cdots \wedge \epsilon^{i_p}))) = c(p,1)\cdots c(2,1)A^{\{p\}}(\epsilon^{i_1} \otimes A^{\{p-1\}}(\epsilon^{i_2} \otimes \ldots \otimes A^{\{2\}}(\epsilon^{i_{p-1}} \otimes \epsilon^{i_p})))$. Prema zadatku 7 unutrašnji antisimetrizatori nestaju, te je rezultat $c\sum_\sigma(-)^\sigma \epsilon^{i_{\sigma 1}} \otimes \cdots \otimes \epsilon^{i_{\sigma p}}$, gde je $c = \frac{1}{p!}$ kada je za prvu konvenciju, $c(p+k,k) = 1$, i $c = 1$ u drugoj $c(p+k,k) = \begin{pmatrix} p+k \\ p \end{pmatrix}$.

Zadatak 10 *Forma π je za neka bazisna polja zadata sa $\pi = \sum_{i_1 < \cdots < i_p} p_{i_1,\ldots,i_p}\epsilon^{i_1} \wedge \cdots \wedge \epsilon^{i_p}$. Objasniti mogućnost alternativnog zadavanja: $\pi = p'_{i_1,\ldots,i_p}\epsilon^{i_1} \wedge \cdots \wedge \epsilon^{i_p}$. Čemu je jednako $\pi(E_{j_1},\ldots,E_{j_p})$ za bazisna dualna polja E_i.*

Prvi zapis je jednoznačan, jer kosi proizvodi $\{\epsilon^{i_1} \wedge \cdots \wedge \epsilon^{i_p} | i_1 < \cdots < i_p = 1,\ldots,n\}$ čine bazis formi u $\bigwedge^p(M)$. Neravnopravnost indeksa u različitim računima ponekad predstavlja smetnju, pa se pribegava drugom načinu pisanja. No, kako je očigledno reč o razvoju po skupu vektora koji ima $\binom{n}{p}$ puta po $p!$ linearno zavisnih vektora ($p!$ permutacija svake od bazisnih p-formi), drugi razvoj nije jednoznačan. Ovo se rešava tako što se koeficijenti drugog razvoja definišu kao antisimetrični po svim permutacijama indeksa, odakle se odmah nalazi da je $p'_{i_1,\ldots,i_p} = \frac{1}{p!}p_{i_1,\ldots,i_p}$. Ako je c konstanta konvencije (u zadatku 9 pokazano $c = \frac{1}{p!}$ ili $c = 1$), nalazi se

$$\pi = c\sum_\sigma (-1)^\sigma p'_{i_1,\ldots,i_p}\epsilon^{i_{\sigma 1}} \otimes \cdots \otimes \epsilon^{i_{\sigma p}} =$$

$$c\sum_{\sigma}(-1)^{\sigma}p'_{i_{\sigma^{-1}1},\dots,i_{\sigma^{-1}p}}\epsilon^{i_1}\otimes\cdots\otimes\epsilon^{i_p}=cp!p'_{i_1,\dots,i_p}\epsilon^{i_1}\otimes\cdots\otimes\epsilon^{i_p}.$$

U prvoj konvenciji su koordinate π u bazisu direktnog proizvoda (neantisimetrizovanom) stoga $p'_{i_1,\dots,i_p}$, dok su u drugoj konvenciji $p_{i_1,\dots,i_p}$. Zato je $\pi(X_1,\dots X_p)=p'_{i_1,\dots,i_p}q_1^{i_1}\dots q_p^{i_p}$ za $X_i=q_i^jE_j$ u prvoj konvenciji; specijalno, za dualna bazisna polja $\pi(E_{j_1},\dots,E_{j_p})=p'_{j_1,\dots,j_p}$. Za drugu konvenciju ponovo se dobijaju isti rezultati samo sa komponentama $p_{j_1,\dots,j_p}$.

Zadatak 11 *Izračunati $(d\pi)(X,Y)$ pomoću beskoordinatne definicije. Uporediti sa prethodnim zadatkom, i koordinatnom definicijom za $\pi=p_idx^i$. Koliko je $d\pi(\partial_i,\partial_j)$?*

$d\pi(X,Y)=c\{X\pi(Y)-Y\pi(X)-\pi([X,Y])\}$. Tako se nalazi za $X=q^i\partial_i$ i $Y=r^i\partial_i$: $d\pi(X,Y)=cq^sr^t(\partial_sp_t-\partial_tp_s)$. $d\pi(\partial_i,\partial_j)=c(\partial_ip_j-\partial_jp_i)$. U zavisnosti od konvencije $c=\frac{1}{2}$ ili $c=1$.

U koordinatnoj formi je $d\pi=\partial_ip_jdx^i\wedge dx^j$, odnosno $d\pi=\sum_{i<j}(\partial_ip_j-\partial_jp_i)dx^i\wedge dx^j$ i

$$d\pi=\frac{1}{2}(\partial_ip_j-\partial_jp_i)dx^i\wedge dx^j=\frac{1}{2}(\partial_ip_j-\partial_jp_i)dx^i\otimes dx^j,$$

u skladu sa rezultatom prethodnog zadatka, pa se delovanjem na (X,Y) ponovo dobija isti rezultat.

Zadatak 12 *Odrediti $\mathrm{d}\,\omega$ ako je ω na nekoj karti mnogostrukosti zadata koordinatno kao (f i g su glatke funkcije na razmatranoj mnogostrukosti, a h je funkcija na $\mathbb{R}$):*
a) $\omega={x^3}^2\mathrm{d}\,x^1\wedge\mathrm{d}\,x^2+({x^3}^2+2x^2)\mathrm{d}\,x^1\wedge\mathrm{d}\,x^3$;
b) $\omega=13x^1\mathrm{d}\,x^1+{x^2}^2\mathrm{d}\,x^2+x^1x^2x^3\mathrm{d}\,x^3$;
c) $\omega=(x^1+3{x^2}^2)(\mathrm{d}\,x^3\wedge\mathrm{d}\,x^1+\frac{1}{2}\mathrm{d}\,x^2\wedge\mathrm{d}\,x^1)$;
d) $\omega=\frac{x^1\mathrm{d}\,x^1+x^2\mathrm{d}\,x^2}{{x^1}^2+{x^2}^2}$;
e) $\omega=\frac{x^2\mathrm{d}\,x^1-x^1\mathrm{d}\,x^2}{{x^1}^2+{x^2}^2}$;
f) $\omega=h({x^1}^2+{x^2}^2)(x^1\mathrm{d}\,x^1+x^2\mathrm{d}\,x^2)$;
g) $\omega=f(x^1,\dots,x^{|M|})\mathrm{d}\,g(x^1,\dots,x^{|M|})$;
h) $\omega=h(g(x^1,\dots,x^{|M|}))\mathrm{d}\,g(x^1,\dots,x^{|M|})$.

a) $2(x^3-1)\mathrm{d}\,x^1\wedge\mathrm{d}\,x^2\wedge\mathrm{d}\,x^3$;
b) $x^2x^3\mathrm{d}\,x^1\wedge\mathrm{d}\,x^3+x^1x^3\mathrm{d}\,x^2\wedge\mathrm{d}\,x^3$;
c) $6x^2\mathrm{d}\,x^1\wedge\mathrm{d}\,x^2\wedge\mathrm{d}\,x^3$;
d) 0; e) 0; f) 0; g) $\mathrm{d}\,f\wedge\mathrm{d}\,g$; h) 0.

Zadatak 13 *2-forma na $\mathbf{R}^5$ (sa koordinatama x,y,z,u,v) je $\omega=f(x,y)\mathrm{d}\,x\wedge\mathrm{d}\,y+g(x,z,u)\mathrm{d}\,y\wedge\mathrm{d}\,z$. Odrediti $\mathrm{d}\,\omega$ i proveriti koliko je $\mathrm{d}\,\mathrm{d}\,\omega$; izračunati $\omega\wedge\omega$ i $\omega\wedge\mathrm{d}\,\omega$. (Novembar 1993.)*

Zadatak 14 Hodge-ov operator *je linearna involucija ($*=*^{-1}$) $*:\bigwedge^r(M)\to\bigwedge^{n-r}(M)$, koja je, kada je M 3-dimenzionalni euklidski prostor, zadata na bazisnim formama $*:1\mapsto dx^1\wedge dx^2\wedge dx^3$, $*:dx^1\mapsto dx^2\wedge dx^3$ i ciklično. Neka je $\omega=f_idx^i$. Pokazati da se definisanjem* $\mathrm{grad}\,(f)=df$, $\mathrm{div}\,(\omega)=*d*\omega$ *i* $\mathrm{rot}\,(\omega)=*d(\omega)$ *dobijaju uobičajeni izrazi za gradijent, divergenciju i rotor, i odatle izvesti relacije* $\mathrm{rot}\ \mathrm{grad}\ =0$ *i* $\mathrm{div}\ \mathrm{rot}\ =0$.

$d\omega = (\partial_1 f_2 - \partial_2 f_1)dx^1 \wedge dx^2 + (\partial_2 f_3 - \partial_3 f_2)dx^2 \wedge dx^3 + (\partial_3 f_1 - \partial_1 f_3)dx^3 \wedge dx^1$, pa je $*d\omega = \mathrm{rot}\,(\omega)$.

$*\omega = f_1 dx^2 \wedge dx^3 + f_2 dx^3 \wedge dx^1 + f_3 dx^1 \wedge dx^2$, $d * \omega = (\partial_1 f_1 + \partial_2 f_2 + \partial_3 f_3) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$ i $*d * \omega = \partial_1 f_1 + \partial_2 f_2 + \partial_3 f_3 = \mathrm{div}\,(\omega)$.

Koristeći ove relacije i činjenicu da je $*$ involucija, sledi rot grad $= *dd = 0$ i div rot $= *dd = 0$.

Zadatak 15 *Na $\mathbf{R}^n$ je zadata metrika g, čime je indukovan dualizam $D : \Gamma T(M) \to \Gamma T^*(M)$. Pokazati da definicije gradijenta skalarnog i divergencije vektorskog polja* $\mathrm{div}\, X = \mathrm{div}\, DX = *\mathrm{d} * DX$ *i* $\mathrm{grad}\, f = D\mathrm{grad}\, f = D^{-1}\mathrm{d}\, f$ *daju uobičajene izraze. Pretpostaviti da je koordinatni bazis ortonormiran.*

U koordinatnom bazisu je $g_{ij} = g(\partial_i, \partial_j) = c_i \delta_{ij}$. Vektorskom polju $X = q^i \partial_i$ dualna je 1-forma $\omega = DX = g_{ij} q^j \mathrm{d}\, x^i$ (jer je za bazisna polja ∂_k ispunjeno $\omega(\partial_k) = g_{kj} q^j = g(X, \partial_k)$), a formi $\omega = w_i \mathrm{d}\, x^i$ dualno je vektorsko polje $X = D^{-1}\omega = g^{ij} w_j \partial_i$. Stoga je $\mathrm{grad}\, X = D^{-1}\mathrm{d}\, f = D^{-1} f_{,i}\, \mathrm{d}\, x^i = \sum_i c_i f_{,i}\, \partial_i$. Slično se za divergenciju nalazi generalizacija poznatog izraza: $\mathrm{div}\, X = \sum_{i,j} g_{ij} q^i{}_{,j} = \sum_i c_i q^i{}_{,i}$.

Zadatak 16 *Na mnogostrukosti je zadata forma "potencijala" $A = a_i dx^i$. Odrediti 2-formu "polja" $F = dA = F_{ij} dx^i \wedge dx^j$, pa pokazati gradijentnu invarijantnost "polja" ("potencijal" $A + df$ daje isto "polje" za svaku funkciju f) i Maxwell-ove jednačine: $F_{ij,l} + F_{li,j} + F_{jl,i} = 0$*

$dA = \partial_i a_j dx^i \wedge dx^j = \sum_{i<j} (\partial_i a_j - \partial_j a_i) dx^i \wedge dx^j$. Iz $dF = ddA = 0$ slede Maxwell-ove jednačine, a gradijentna invarijantnost se dobija iz linearnosti spoljašnjeg izvoda: $F = d(A + df) = dA$.

Zadatak 17 *Neka je na $2n$-dimenzionalnoj mnogostrukosti M zadata nedegenerisana 2-forma Ω, koja na nekoj karti sa koordinatama $\{q^1, \ldots, q^n, p^1, \ldots, p^n\}$ ima oblik $\Omega = \sum_i \mathrm{d}\, q^i \wedge \mathrm{d}\, p^i$. Takva mnogostrukost se naziva simplektička mnogostrukost.*

a) *Pokazati da je $\Omega = -\mathrm{d}\,\omega$, gde je $\omega = \sum_i p^i \mathrm{d}\, q^i$, i $\mathrm{d}\,\Omega = 0$.*

b) *Dualizam D 1-formi i vektorskih polja zadat je formom Ω: vektorskom polju A se bijektivno pridružuje 1-forma $\alpha = DA$, tako da za svako vektorsko polje X važi: $\alpha(X) = \Omega(A, X)$. Simplektički gradijent realne funkcije h na M je vektorsko polje* $\mathrm{sgrad}\, h = D\mathrm{d}\, h$, *a Hamilton-ovo polje je vektorsko polje H za koje postoji funkcija h takva da je* $H = \mathrm{sgrad}\, h$. *Odrediti koordinatne komponente Hamilton-ovog polja.*

c) *Pokazati da jednačine integralnih krivih Hamilton-ovog polja H daju Hamilton-ove jednačine kretanja čestice sa Hamilton-ovom funkcijom h.*

d) *Proveriti da je* $\Omega(\mathrm{sgrad}\, f, \mathrm{sgrad}\, g) = \{f, g\}$ *(Poisson-ova zagrada).*

e) *Dokazati održanje energije kod Hamilton-ovog sistema, tj. da integralna kriva Hamilton-ovog polja Hamilton-ove funkcije h, pripada jednoj ekvienergetskoj hiperpovrši u M, tj. podmnogostrukosti $h^{-1}(E) = \{m \in M | h(m) = E \in \mathbf{R}\}$.*

a) Očigledno.
b) Neka je $H = a^i\frac{\partial}{\partial q^i} + b^i\frac{\partial}{\partial p^i}$. Kako je $\mathrm{d}\,h = \frac{\partial h}{\partial q^i}\mathrm{d}\,q^i + \frac{\partial h}{\partial p^i}\mathrm{d}\,p^i$, delovanjem na bazisna polja se nalazi: $\mathrm{d}\,h(\frac{\partial}{\partial q^i}) = \frac{\partial h}{\partial q^i}$, $\mathrm{d}\,h(\frac{\partial}{\partial p^i}) = \frac{\partial h}{\partial p^i}$. Istovremeno je $\Omega(H, \frac{\partial}{\partial q^i}) = -b^i$ i $\Omega(H, \frac{\partial}{\partial p^i}) = -a^i$, pa je $-b^i = \frac{\partial h}{\partial q^i}$ i $a^i = \frac{\partial h}{\partial p^i}$, tj. $H = \mathrm{sgrad}\,h = \frac{\partial h}{\partial p^i}\frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial h}{\partial q^i}\frac{\partial}{\partial p^i}$.
c) Po definiciji integralne krive $\{q^1(t), \dots, q^n(t), p^1(t), \dots p^n(t)\}$ je $\dot{q}^i = a^i = \frac{\partial h}{\partial p^i}$ i $\dot{p}^i = b^i = -\frac{\partial h}{\partial q^i}$.
d) Direktnom proverom: $\Omega(\mathrm{sgrad}\,f, \mathrm{sgrad}\,g) = \sum_i \mathrm{d}\,q^i \wedge \mathrm{d}\,p^i(\frac{\partial f}{\partial p^j}\frac{\partial}{\partial q^j} - \frac{\partial f}{\partial q^j}\frac{\partial}{\partial p^i}, \frac{\partial g}{\partial p^k}\frac{\partial}{\partial q^k} - \frac{\partial g}{\partial q^k}\frac{\partial}{\partial p^k}) = \sum_i(-\frac{\partial f}{\partial p^i}\frac{\partial g}{\partial q^i} + \frac{\partial g}{\partial p^i}\frac{\partial f}{\partial q^i})$.
e) Treba pokazati da je duž integralne krive $\gamma(t)$ polja H funkcija h konstantna, tj. da je $h\circ\gamma(t) = E$, što se vidi traženjem izvoda: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}h(\gamma(t)) = \mathrm{d}\,h(\gamma(t))\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\gamma(t) = \mathrm{d}\,h(H)(t) = \Omega(H, H)|_t = 0$.

Zadatak 18 *Neka je na karti 4-dimenzionalne mnogostrukosti zadat bazis vektorskih polja* $E = (E_t = e^{-\nu}\partial_t, E_r = e^{-\lambda}\partial_r, E_\theta = \frac{1}{r}\partial_\theta, E_\varphi = \frac{1}{r\sin(\theta)}\partial_\varphi)$, *gde su* λ *i* ν *funkcije* t *i* r. *Odrediti njemu dualnu bazisnu kolonu* ϵ *i kolonu* $d\epsilon$.

Uslov $\epsilon^i(E_j) = \delta^i_j$ za $\epsilon^t = \alpha dt + \beta dr + \gamma d\theta + \delta d\varphi$ daje $\alpha = e^\nu$, $\beta = \gamma = \delta = 0$. Tako se nalazi $\epsilon = (\epsilon^t = e^\nu dt, \epsilon^r = e^\lambda dr, \epsilon^\theta = r d\theta, \epsilon^\varphi = r\sin(\theta)d\varphi)^T$, i $\mathrm{d}\,\epsilon = (-e^\nu\nu'\mathrm{d}\,t \wedge \mathrm{d}\,r, e^\lambda\dot{\lambda}\mathrm{d}\,t \wedge \mathrm{d}\,r, \mathrm{d}\,r \wedge \mathrm{d}\,\theta, \sin(\theta)\mathrm{d}\,r \wedge \mathrm{d}\,\varphi + r\cos(\theta)\mathrm{d}\,\theta \wedge \mathrm{d}\,\varphi)^T$.

Zadatak 19 *p-forma π je zatvorena ako je $d\pi = 0$, a tačna ako postoji $(p-1)$-forma ω takva da je $\pi = d\omega$. Pokazati:*

a) *Svaka tačna forma je zatvorena;*

b) *Kosi proizvod dve zatvorene forme je zatvorena forma.*

c) *Kosi proizvod dve zatvorene forme, od kojih je bar jedna tačna je tačna forma.*

d) *Ako je na $\mathbf{R}^4$ zadata forma $A = A_\mu dx^\mu$, odrediti $F = dA$, i odrediti uslove koje daje identitet $dF = 0$. (Jun 1994.)*

Zadatak 20 *Neka je d_p restrikcija d na $\bigwedge^{p-1}(M)$ (linearni operator koji kao diferencijal preslikava $\bigwedge^{p-1}(M)$ u $\bigwedge^p(M)$: $d_p(\omega) = d(\omega)$ za svako $\omega \in \bigwedge^{p-1}(M)$). Pokazati da je oblast likova d_p ($\mathrm{Im}(d_p)$) potprostor nulpotprostora d_{p+1}. Odrediti grupu kohomologije $H^p \stackrel{\mathrm{def}}{=} \ker d_{p+1}/\mathrm{Im}d_p$ za mnogostrukost $\mathbf{R}^n$.*

Prvi deo zadatka je na drugi način shvaćena jednakost $dd = 0$. U $\mathbf{R}^n$ funkcije (0-forme) sa nultim diferencijalom su konstantne funkcije, a funkcije nisu (osim nulte) diferencijali pa je $H^0(\mathbf{R}^n) = \mathbf{R}$. Za 1-formu $\omega = p_i dx^i$ je $d\omega = 0$ ako i samo ako je $\partial_i p_j = \partial_j p_i$, što je uslov da je ω diferencijal. Prema tome $\ker d_2 = \mathrm{Im}d_1$ i $H^1(\mathbf{R}^n) = 0$. Slično se pokazuje i $H^p(\mathbf{R}^n) = 0$ za $p = 2, ..., n$.

3.3 Metrika

Zadatak 21 *Pokazati da je $\mathbf{R}^n$ orijentabilna mnogostrukost: postoje dve klase bazisa u odnosu na relaciju ekvivalencije $\{E_1, \dots, E_n\} \sim \{E'_1, \dots, E'_n\}$ ako postoji $\Lambda \in \mathrm{GL}_I(n, \mathbf{R})$ takvo da je $E' = E\Lambda$ (izbor jedne od ovih klasa se naziva orijentacija).*

Kako je $\Lambda \in \mathrm{GL}(n, \mathbf{R})$, a to je grupa sa dve komponente povezanosti, bazisi do kojih se iz unapred zadatog može stići transformacijama iz komponente jedinice čine jednu klasu. Očigledno, transpozicija bazisnih vektora pripada kosetu komponente jedinice, te se na ovaj način generiše druga klasa.

Zadatak 22 *Neka je $\{E_1, \dots, E_n\}$ ortonormirani bazis u odnosu na metriku g. Odrediti $dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n(E_1, \dots, E_n)$.*

Ako je $E_i = (\partial_i)\Lambda = \Lambda_i^j \partial_j$, važi

$$dx \stackrel{\text{def}}{=} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n = \varepsilon_{i_1 \dots i_n} dx^{i_1} \otimes \dots \otimes dx^{i_n}$$

pa je

$$dx(E_1, \dots, E_n) = \varepsilon_{i_1 \dots i_n} dx^{i_1}(E_1) \cdots dx^{i_n}(E_n) = \varepsilon_{i_1 \dots i_n} \Lambda_1^{i_1} \cdots \Lambda_n^{i_n} = \det \Lambda.$$

Sa druge strane je $g(E_i, E_j) = \delta_{ij} \times \begin{cases} 1, & i = j \leq s \\ -1, & i = j > s \end{cases}$, gde je $(s, n-s)$ signatura metrike g, te je

$$g_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} g(\partial_i, \partial_j) = (\Lambda^{-1})_i^s (\Lambda^{-1})_j^t g(E_s, E_t).$$

Odavde je matrica g u koordinatnom bazisu $g_\partial = \Lambda^{-1T} g_E \Lambda^{-1}$, a njena determinanta je $\det g = \frac{(-1)^{n-s}}{\det^2 \Lambda}$. Konačno je $dx(E_1, \dots, E_n) = \frac{1}{\sqrt{(-1)^{n-s} \det g_\partial}}$, što znači da je forma zapremine (koja delujući na n-torku vektora daje njima obrazovanu metričku zapreminu) $\sqrt{(-1)^{n-s} \det g}\, dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$.

Zadatak 23 *Neka je $\{\epsilon^1, \dots, \epsilon^n\}$ ortonormirani bazis orijentabilne mnogostrukosti sa metrikom g. Pokazati da je $\epsilon^1 \wedge \dots \wedge \epsilon^n = \sqrt{\det g}\, dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$.*

Pošto su n-forme $C^\infty(M)$ proporcionalne, rezultat sledi iz jednakosti $\epsilon^1 \wedge \dots \wedge \epsilon^n(E_1, \cdots, E_n) = 1$ i prethodnog zadatka.

Zadatak 24 *Neka je $\{\epsilon^1, \dots, \epsilon^n\}$ ortonormirani bazis orijentabilne mnogostrukosti sa metrikom g, signature $(s, n-s)$. Hodge-ov operator je linearno preslikavanje $* : \bigwedge^p(M) \to \bigwedge^{n-p}(M)$ definisano na bazisnim vektorima:*

$$*(\epsilon^{i_1} \wedge \dots \wedge \epsilon^{i_p}) \stackrel{\text{def}}{=} (-1)^\sigma g^{i_1 i_1} \cdots g^{i_p i_p} \epsilon^{j_1} \wedge \dots \wedge \epsilon^{j_{n-p}}, \quad \sigma = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & p & p+1 & \cdots & n \\ i_1 & \cdots & i_p & j_1 & \cdots & j_{n-p} \end{pmatrix}.$$

Pokazati da je $** = (-1)^{p(n-1)+n-s} I$, gde je I jedinični operator u $\bigwedge^p$. Odrediti $*\pi$, za $\pi = dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{i_p}$.

Iz definicije je

$$*(\epsilon^{j_1} \wedge \cdots \wedge \epsilon^{j_{n-p}}) \stackrel{\text{def}}{=} (-1)^{\sigma'} g^{j_1 j_1} \cdots g^{j_{n-p} i_{n-p}} \epsilon^{i_1} \wedge \cdots \wedge \epsilon^{i_p},$$

za $\sigma' = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & n-p & n-p+1 & \cdots & n \\ j_1 & \cdots & j_{n-p} & i_1 & \cdots & i_p \end{pmatrix}$. Ako je $\kappa \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_p & j_1 & \cdots & j_{n-p} \\ j_1 & \cdots & j_{n-p} & i_1 & \cdots & i_p \end{pmatrix}$, jasno je da je $\sigma' = \kappa \circ \sigma$, pa je $*(*(\epsilon^{i_1} \wedge \cdots \wedge \epsilon^{i_p})) = (-1)^{\sigma+\sigma'+n-s} \epsilon^{i_1} \wedge \cdots \wedge \epsilon^{i_p}$, tj. $** = (-1)^{2\sigma+\kappa+n-s} I$. Očigledno je parnost $(-1)^{\kappa} = (-1)^{p(n-p)} = (-1)^{p(n-1)}$, čime se dobija traženi rezultat.

Zadatak 25 *Ako je $F = \sum_{0 \le i < j \le 3} F_{ij} dx^i \wedge dx^j$ uz $F_{0i} = E_i$, $F_{12} = -H_3$, $F_{13} = H_2$ i $F_{23} = -H_1$, izračunati $d * F$ u prostoru Minkowskog.*

Pošto je dx^i ortonormirani bazis (uz signaturu $(1,3)$), važi

$$* : \{dx^0 \wedge dx^1 \mapsto -dx^2 \wedge dx^3, dx^0 \wedge dx^2 \mapsto dx^1 \wedge dx^3, dx^0 \wedge dx^3 \mapsto -dx^1 \wedge dx^2,$$

$$dx^1 \wedge dx^2 \mapsto dx^0 \wedge dx^3, dx^1 \wedge dx^3 \mapsto -dx^0 \wedge dx^2, dx^2 \wedge dx^3 \mapsto dx^0 \wedge dx^1\}.$$

Tako je

$$*F = -F_{01} dx^2 \wedge dx^3 + F_{02} dx^1 \wedge dx^3 - F_{03} dx^1 \wedge dx^2 + F_{12} dx^0 \wedge dx^3 - F_{13} dx^0 \wedge dx^2 + F_{23} dx^0 \wedge dx^1,$$

$$d * F = (-F_{03,0} + F_{13,1} + F_{23,2}) dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 + (F_{02,0} - F_{12,1} + F_{23,3}) dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^3 +$$
$$(-F_{01,0} - F_{12,2} - F_{13,3}) dx^0 \wedge dx^2 \wedge dx^3 + (-F_{01,1} - F_{02,2} - F_{03,3}) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3.$$

Tako $d * F = 0$ daje drugi par vakuumskih Maxwell-ovih jednačina. Ako se uvede proizvoljna 3-forma struje napisana kao $j = \frac{1}{3} \varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} j^{\mu} dx^{\nu} dx^{\lambda} dx^{\rho}$, drugi par Maxwell-ovih jednačina postaje $d * F = j$. Pri tome, zbog $dd = 0$, važi $dj = 0$, što daje jednačinu kontinuiteta.

3.4 Koneksija

Zadatak 26 *Pokazati da se pri promeni bazisa opisanoj sa $E'_i = \Lambda E_i$, matrica koneksije menja po pravilu: $\Omega' = \Lambda^{-1} d\Lambda + \Lambda^{-1} \Omega \Lambda$.*

Pri opisanoj promeni bazisa se vrsta i kolona bazisnih polja menjaju po pravilu $E = E' \Lambda^{-1}$ i $\epsilon = \Lambda \epsilon'$. Definicija kovarijantnog izvoda daje u početnom i novom bazisu:

$$\nabla_X Y = E\{X + \Omega(X)\}\epsilon(Y) = \nabla_X Y = E'\{X + \Omega'(X)\}\epsilon'(Y).$$

Srednji izraz je $\nabla_X Y = E' \Lambda^{-1} \{X + \Omega(X)\} \Lambda \epsilon(Y)$. Ako se ima u vidu da je $X(fg) = (Xf)g + fXg$ i $Xf = df(X)$, nalazi se

$$\nabla_X Y = E' \Lambda^{-1} \{\Lambda X + (X\Lambda) + \Omega(X)\Lambda\} \epsilon'(Y) = E'\{X + \Lambda^{-1} d\Lambda(X) + \Lambda^{-1} \Omega(X) \Lambda\} \epsilon'(Y),$$

što je upravo traženi izraz.

Zadatak 27 *Izvesti izraz za promenu Christoffel-ovih simbola pri promeni koordinata.*

Polazeći od izraza za promenu matrice koneksije $\Omega' = \Lambda^{-1}d\Lambda + \Lambda^{-1}\Omega\Lambda$ pri promeni bazisa, za koeficijente koneksije se nalazi:

$$\omega'^s_{tk} = \omega'^s_t(E'_k) = (\Lambda^{-1})^s_j(E'_k\Lambda^j_t) + (\Lambda^{-1})^s_j\Lambda^r_k\Lambda^i_t\omega^j_{ir}.$$

U slučaju kada se radi sa koordinatnim poljima, pri promeni koordinata $x^i \to x'^i$, iz $\frac{\partial}{\partial x'^k} = \frac{\partial x^r}{\partial x'^k}\frac{\partial}{\partial x^r}$ i $\frac{\partial}{\partial x^k} = \frac{\partial x'^r}{\partial x^k}\frac{\partial}{\partial x'^r}$, sledi da je $\Lambda^r_k = \frac{\partial x^r}{\partial x'^k}$ i $(\Lambda^{-1})^r_k = \frac{\partial x'^r}{\partial x^k}$. Tako je

$$\Gamma'^s_{tk} = \frac{\partial x'^s}{\partial x^j}\frac{\partial^2 x^j}{\partial x'^k \partial x'^t} + \frac{\partial x'^s}{\partial x^j}\frac{\partial x^r}{\partial x'^k}\frac{\partial x^i}{\partial x'^t}\Gamma^j_{ir}.$$

3.5 Torzija i krivina

Zadatak 28 *Polazeći od izraza za kovarijantni izvod u obliku* $\nabla Y = E\{d+\Omega\}\epsilon(Y)$*, izračunati* $T(X,Y) \overset{\text{def}}{=} \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]$ *i* $R(X,Y) \overset{\text{def}}{=} \nabla_X\nabla_Y - \nabla_Y\nabla_X - \nabla_{[X,Y]}$.

Pošto je $d\epsilon(X,Y) = X\epsilon(Y) - Y\epsilon(X) - \epsilon([X,Y])$ i $E\epsilon([X,Y]) = [X,Y]$, važi:

$$T(X,Y) \overset{\text{def}}{=} \nabla Y(X) - \nabla X(Y) - [X,Y] = E\{X+\Omega(X)\}\epsilon(Y) - E\{Y+\Omega(Y)\}\epsilon(X) - [X,Y] =$$
$$E\{X\epsilon(Y) - Y\epsilon(X) + \Omega(X)\epsilon(Y) - \Omega(Y)\epsilon(X) - \epsilon([X,Y])\} =$$
$$E\{d\epsilon(X,Y) + \Omega\wedge\epsilon(X,Y)\} = E\{d+\Omega\wedge\}\epsilon(X,Y)$$

Slično se za krivinu nalazi:

$$R(X,Y)Z = E\{X+\Omega(X)\}\epsilon(E\{Y+\Omega(Y)\}\epsilon(Z)) -$$
$$E\{Y+\Omega(Y)\}\epsilon(E\{X+\Omega(X)\}\epsilon(Z)) - E\{[X,Y]+\Omega([X,Y])\}\epsilon(Z) =$$
$$E\{XY + (X\Omega(Y)) + \Omega(Y)X + \Omega(X)Y + \Omega(X)\Omega(Y)\}\epsilon(Z) -$$
$$E\{YX + (Y\Omega(X)) + \Omega(X)Y + \Omega(Y)X + \Omega(Y)\Omega(X)\}\epsilon(Z) - E\{[X,Y]+\Omega([X,Y])\}\epsilon(Z) =$$
$$E\{(X\Omega(Y)) + \Omega(X)\Omega(Y) - (Y\Omega(X)) - \Omega(Y)\Omega(X) - \Omega([X,Y])\}\epsilon(Z) =$$
$$E\{(d+\Omega\wedge)\Omega(X,Y)\}\epsilon(Z).$$

Zadatak 29 *Proveriti da su torzija i krivina tenzorske veličine.*

Torzija: Kako je očigledno antisimetrična po poljima X i Y, dovoljno je proveriti za jedno od njih. Jedini mogući uzrok netenzorijalnosti je kovarijantni izvod, koji je sa svoje strane aditivan, no nije $C^\infty(M)$-multiplikativan po polju na koje deluje. Stoga treba ispitati jedino multiplikativnost po nekom od ulaznih polja. $T(X,fY) = \nabla_X fY - \nabla_{fY}X - [X,fY] = (Xf)Y + f\nabla_X Y - f\nabla_Y X - (Xf)Y - f[X,Y] = fT(X,Y)$.

Krivina: Antisimetričnost po X i Y, ponavljanjem prethodne argumentacije, dovodi do potrebe da se proveri multiplikativnost: $R(X,fY)gZ = fgR(X,Y)Z$. Kako je $[X,fY] = (Xf)Y + f[X,Y]$, za pojedine članove se nalazi

$$\nabla_X\nabla_{fY}gZ = \nabla_X(f((Yg)Z + g\nabla_Y Z)) = (Xf(Yg))Z + f(Yg)\nabla_X Z + (Xfg)\nabla_Y Z + fg\nabla_X\nabla_Y Z,$$
$$\nabla_{fY}\nabla_X gZ = f\nabla_Y((Xg)Z + g\nabla_X Z) = f(YXg)Z + f(Xg)\nabla_Y Z + f(Yg)\nabla_X Z + fg\nabla_Y\nabla_X Z,$$
$$\nabla_{[X,fY]}gZ = (Xf)(Yg)Z + (Xf)g\nabla_Y Z + f([X,Y]g)Z + fg\nabla_{[X,Y]}Z.$$

Odavde se lako dobija traženi identitet.

Zadatak 30 *Pokazati da Christoffel-ovi simboli nakon promene koordinata* $x'^i = x^i + \frac{1}{2}\Gamma^i_{kl}|_0 x^k x^l$, *u slučaju simetrične koneksije, postaju jednaki nuli u koordinatnom početku.*

Kako je $\frac{\partial x'^r}{\partial x^k}|_0 = \delta^r_k$, i $\frac{\partial^2 x'^j}{\partial x^k \partial x^t}|_0 = \Gamma^j_{kt}|_0$, zamenjujući u izraz za promenu Christoffel-ovih simbola (oblik $\Gamma' \to \Gamma$ se nalazi zamenom u izvedenoj formuli starih i novih koordinata), dobija se da su novi simboli jednaki nuli.

Zadatak 31 *Odrediti komponente torzije u dualnim koordinatnim bazisima na karti.*

Pošto su koordinatna polja diferencijali i izvodi, važi:

$$2T^p_{rs} = T(dx^p, \partial_r, \partial_s) = 2\delta^p_j \frac{1}{2}(\omega^j_l(\partial_r)\delta^l_s - \omega^j_l(\partial_s)\delta^l_r)) = \Gamma^p_{sr} - \Gamma^p_{rs}.$$

Zadatak 32 *Odrediti komponente krivine u dualnim koordinatnim bazisima na karti.*

$$2R^j_{lkm} = R(dx^j, \partial_l, \partial_k, \partial_m) = 2\partial_p \otimes dx^q \mathcal{R}^p_q(dx^j, \partial_l, \partial_k, \partial_m) =$$

$$2\delta^j_p \delta^q_l (d\omega^p_q(\partial_k, \partial_m) + \frac{1}{2}\omega^p_s(\partial_k)\omega^s_q(\partial_m) - \frac{1}{2}\omega^p_s(\partial_m)\omega^s_q(\partial_k)) =$$

$$\Gamma^j_{lm,k} - \Gamma^j_{lk,m} + \Gamma^j_{sk}\Gamma^s_{lm} - \Gamma^j_{sm}\Gamma^s_{lk}.$$

Zadatak 33 *Dokazati* cikličnu jednakost *(*prvi Biancchi-jev identitet*) za simetričnu koneksiju:* $R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0$. *Naći koordinatni oblik ove jednakosti na karti.*

Iz definicije torzije sledi da je kod simetrične koneksije $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X,Y]$, i $\nabla_X[Y,Z] - \nabla_{[Y,Z]}X = [X,[Y,Z]]$, pa je

$$\nabla_X[Y,Z] + \nabla_Y[Z,X] + \nabla_Z[X,Y] =$$

$$(\nabla_X\nabla_Y - \nabla_Y\nabla_X)Z + (\nabla_Y\nabla_Z - \nabla_Z\nabla_Y)X + (\nabla_Z\nabla_X - \nabla_X\nabla_Z)Y.$$

Iz definicije krivine poslednji izraz daje

$$R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y =$$

$$\nabla_X[Y,Z] + \nabla_Y[Z,X] + \nabla_Z[X,Y] - \nabla_{[X,Y]}Z - \nabla_{[Y,Z]}X - \nabla_{[Z,X]}Y =$$

$$[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0.$$

Zamenjujući bazisna polja u poslednju jednakost, nalazi se ciklična jednakost zapisana preko komponenti tenzora krivine: $R^j_{lkm} + R^j_{kml} + R^j_{mlk} = 0$.

Zadatak 34 *Napisati Biancchi-jev identitet na karti za simetričnu koneksiju.*

Kako je $\mathcal{R}^j_l = R^j_{lkm} dx^k \wedge dx^m$, važi

$$0 = (d\mathcal{R}^j_l - \mathcal{R}^j_t \wedge \omega^t_l + \omega^j_t \wedge \mathcal{R}^t_l)(\partial_s, \partial_p, \partial_q) =$$

$$\frac{1}{2}\{R^j_{lkm,i} - \Gamma^t_{li} R^j_{tkm} + \Gamma^j_{ti} R^t_{lkm}\} dx^i \wedge dx^k \wedge dx^m (\partial_s, \partial_p, \partial_q) =$$

$$R^j_{lpq,s} - \Gamma^t_{ls} R^j_{tpq} + \Gamma^j_{ts} R^t_{lpq} + R^j_{lqs,p} - \Gamma^t_{lp} R^j_{tqs} + \Gamma^j_{tp} R^t_{lqs} + R^j_{lsp,q} - \Gamma^t_{lq} R^j_{tsp} + \Gamma^j_{tq} R^t_{lsp} -$$

$$R^j_{lqp,s} + \Gamma^t_{ls} R^j_{tqp} - \Gamma^j_{ts} R^t_{lqp} - R^j_{lps,q} + \Gamma^t_{lq} R^j_{tps} - \Gamma^j_{tq} R^t_{lps} - R^j_{lsq,p} + \Gamma^t_{lp} R^j_{tsq} - \Gamma^j_{tp} R^t_{lsq}.$$

Oduzimajući, u slučaju simetrične koneksije jednak nuli, zbir

$$R^j_{ltq}\Gamma^t_{ps} + R^j_{lpt}\Gamma^t_{qs} + R^j_{ltp}\Gamma^t_{qs} + R^j_{lst}\Gamma^t_{qp} + R^j_{lts}\Gamma^t_{pq} + R^j_{lqt}\Gamma^t_{ps},$$

nalazi se

$$R^j_{lpq;s} + R^j_{lsp;q} + R^j_{lqs;p} = 0.$$

3.6 Koneksija Levi–Civita-e

Zadatak 35 *Pokazati da se uslovi koje zadovoljava koneksija Levi–Civita-e mogu napisati u obliku ($\hat{g}$ je matrica koeficijenata metrike[1]):*

$$\Omega^T \hat{g} + \hat{g}\Omega = d\hat{g}, \;\; d\epsilon + \Omega \wedge \epsilon = 0.$$

Naći oblik ovih uslova za ortonormirana bazisna polja i koordinatna polja.

Drugi uslov je uslov simetričnosti, i dobija se direktnom primenom prve Cartan-ove strukturne jednačine. Drugi uslov je posledica kovarijantne konstantnosti metrike. Lako se proverava da je metrički tenzor moguće predstaviti u formi $g = \epsilon^T \hat{g} \epsilon$ (matrično množenje gde se matrični elementi množe tenzorski), nalazi se $\nabla g = (\nabla \epsilon^T)\hat{g}\epsilon + \epsilon^T (d\hat{g})\epsilon + \epsilon^T \hat{g} \nabla \epsilon = \epsilon^T\{-\Omega^T \hat{g} + \mathrm{d}\,\hat{g} - \hat{g}\Omega\}\epsilon$ (jer je $dg_{ij}(X) = X g_{ij}$ i $\nabla_{E_j}\epsilon^k = -\omega^k_{ij}\epsilon^i$), tj. $\nabla g = d\hat{g}$ i $\nabla \epsilon = -\Omega\epsilon$. U svim izrazima je običan a ne kosi proizvod, jer se podrazumeva da pre množenja sa ϵ, Ω deluje na neko vektorsko polje. Zahtevom da je metrika kovarijantno konstantna, dobijeni izraz se anulira, što je ekvivalentno uslovu iz zadatka.

Kod ortonormiranih polja je $\hat{g}$ konstantna matrica, pa je $d\hat{g} = 0$. Tako se nalazi

$$\Omega^T \hat{g} + \hat{g}\Omega = 0, \;\; d\epsilon + \Omega \wedge \epsilon = 0. \tag{3.1}$$

Kod koordinatnih bazisnih polja je $d\epsilon = 0$, tj.

$$\Omega^T \hat{g} + \hat{g}\Omega = d\hat{g}, \;\; \Omega \wedge \epsilon = 0. \tag{3.2}$$

Zadatak 36 *Data je metrika sfere radijusa r (u sfernim koordinatama) $ds^2 = r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$. Za bazisna polja nastala ortonormalizacijom koordinatnih ∂_θ i ∂_φ, odrediti matricu i koeficijente koneksije, i krivinu koneksije Levi–Civita-e.*

[1] U ostatku teksta će biti pisano g umesto $\hat{g}$, jer je iz konteksta jasno da li je reč o tenzoru ili o njegovoj matričnoj reprezentaciji.

U koordinatnom bazisu je $g = r^2\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \sin^2(\theta)\end{pmatrix}$, pa su ortonormirana dualna bazisna polja $E = (E_\theta, E_\varphi) = (\frac{1}{r}\partial_\theta, \frac{1}{r\sin(\theta)}\partial_\varphi)$ i $\epsilon = (\epsilon^\theta, \epsilon^\varphi)^T = (rd\theta, r\sin(\theta)d\varphi)^T$. U njima je metrički tenzor $g = I_2$, tj. metrika je euklidska (zbog signature (2,0)). Važi $d\epsilon = (rdd\theta, r\cos(\theta)d\theta\wedge d\varphi)^T = (0, \frac{1}{r}\mathrm{ctg}(\theta)\epsilon^\theta\wedge d\epsilon^\varphi)^T$.

Uslov da je reč o koneksiji Levi–Civita-e je, zbog ortonormiranosti bazisnih polja, daje (3.1), pa kako je metrika euklidska, važi i $\Omega^T = -\Omega$. Tako je $\Omega = \begin{pmatrix}0 & \omega^\theta_\varphi\\ -\omega^\theta_\varphi & 0\end{pmatrix}$, uz $\omega^\theta_\varphi = \omega^\theta_{\varphi\theta}\epsilon^\theta + \omega^\theta_{\varphi\varphi}\epsilon^\varphi$.

Prva strukturna jednačina postaje:

$$0 = d\epsilon + \Omega\wedge\epsilon = \begin{pmatrix}\omega^\theta_\varphi\wedge\epsilon^\varphi\\ -\omega^\theta_\varphi\wedge\epsilon^\theta + \frac{1}{r}\mathrm{ctg}(\theta)\epsilon^\theta\wedge d\epsilon^\varphi\end{pmatrix}.$$

Znajući da je $\epsilon^i\wedge\epsilon^i = 0$ odmah se nalazi $\omega^\theta_\varphi = -\omega^\varphi_\theta = -\frac{1}{r}\mathrm{ctg}(\theta)\epsilon^\varphi$ i nenulti koeficijenti $\omega^\theta_{\varphi\theta} = \omega^\varphi_{\theta\theta} = 0$, $\omega^\theta_{\varphi\varphi} = -\omega^\varphi_{\theta\varphi} = -\frac{1}{r}\mathrm{ctg}(\theta)$. U matričnom obliku je $\Omega = -\frac{1}{r}\mathrm{ctg}(\theta)\epsilon^\varphi\varepsilon$ (ε je antisimetrična matrica drugog reda $\varepsilon = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$), i $d\Omega = \frac{1}{r^2}\epsilon^\theta\wedge\epsilon^\varphi\varepsilon$.

Kako je $\Omega\wedge\Omega = 0$, druga strukturna jednačina za matricu krivine daje $\mathcal{R} = d\Omega$, a za tenzor krivine $R = \frac{1}{r^2}(E_\theta\otimes\epsilon^\varphi - E_\varphi\otimes\epsilon^\theta)\otimes(\epsilon^\theta\wedge\epsilon^\varphi)$. Konačno, Ricci-jev tenzor je $Rc = R(\epsilon^\theta, \ , E_\theta, \ ) + R(\epsilon^\varphi, \ E_\varphi, \ , \ ) = \frac{1}{r^2}(\epsilon^\theta\otimes\epsilon^\theta + \epsilon^\varphi\otimes\epsilon^\varphi)$, a skalarna krivina $Rs = \frac{2}{r^2}$.

Zadatak 37 *Christoffel-ove simbole sfernih koordinata za koneksiju Levi–Civita-e iz prethodnog zadatka odrediti na tri načina: a) po formuli za Christoffel-ove simbole koneksije Levi–Civita-e; b) koristeći zakon transformacije koneksije i matricu koneksije određenu za ortonormirana bazisna polja c) na osnovu uslova metričnosti i prve strukturne jednačine (kao u prethodnom zadatku, ali u koordinatnom bazisu).*

a) Koristeći formulu $\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2}g^{il}(g_{lj,k} + g_{lk,j} - g_{jk,l})$, za metriku $g = r^2\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \sin^2(\theta)\end{pmatrix}$, i $g^{-1} = r^{-2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \sin^{-2}(\theta)\end{pmatrix}$, nalazi se $\Gamma^\theta_{\varphi\varphi} = -\sin(\theta)\cos(\theta)$ i $\Gamma^\varphi_{\theta\varphi} = \Gamma^\varphi_{\varphi\theta} = \mathrm{ctg}(\theta)$, dok su ostali jednaki nuli.

b) Prelazak sa ortonormiranog na koordinatni bazis ostvaruje matrica $\Lambda = r\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \sin(\theta)\end{pmatrix}$, sa diferencijalom $d\Lambda = r\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & \cos(\theta)d\theta\end{pmatrix}$. Matrica koneksije u ortonormiranom bazisu je $\Omega = -\frac{1}{r}\mathrm{ctg}(\theta)\epsilon^\varphi\varepsilon = -\cos(\theta)d\varphi\varepsilon$ pa je u koordinatnom bazisu:

$$\Omega' = \Lambda^{-1}d\Lambda + \Lambda^{-1}\Omega\Lambda = \begin{pmatrix}0 & -\sin(\theta)\cos(\theta)d\varphi\\ \mathrm{ctg}(\theta)d\varphi & \mathrm{ctg}(\theta)d\theta\end{pmatrix}.$$

Upoređivanjem se nalazi isti rezultat kao u prvom delu.

c) Potrebno je koristiti izraze (3.2), uz $dg = r^2 2\sin(\theta)\cos(\theta)\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. Prvi uslov daje $\Omega'^T\hat{g} + \hat{g}\Omega' - d\hat{g} = 0 = r^2\begin{pmatrix}2\omega'^\theta_\theta & \omega'^\theta_\varphi + \sin^2(\theta)\omega'^\varphi_\theta\\ \omega'^\theta_\varphi + \sin^2(\theta)\omega'^\varphi_\theta & 2\sin^2(\theta)\omega'^\varphi_\varphi - 2\sin(\theta)\cos(\theta)d\theta\end{pmatrix}$. Odmah je jasno da je $\omega'^{\theta}_{\theta} = 0$, i $\omega'^{\varphi}_{\varphi} = \mathrm{ctg}(\theta)d\theta$. Zamenom ovih rezultata u prvu strukturnu jednačinu nalazi se $0 = \Omega' \wedge \epsilon = \begin{pmatrix} 0 & -\sin^2(\theta)\omega'^{\varphi}_{\theta} \\ \omega'^{\varphi}_{\theta} & \mathrm{ctg}(\theta)d\theta \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} d\theta \\ d\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin^2(\theta)\omega'^{\varphi}_{\theta} \wedge d\varphi \\ \omega'^{\varphi}_{\theta} \wedge \theta + \mathrm{ctg}(\theta)d\theta \wedge d\varphi \end{pmatrix}$. Odavde se nalazi i preostala forma koneksije $\omega'^{\varphi}_{\theta} = -\sin(\theta)\cos(\theta)d\varphi$. Znajući da je u koordinatnom bazisu $\omega'^{i}_{j} = \Gamma^{i}_{jk}dx^k$, lako se dobijaju isti Christoffel-ovi simboli.

Zadatak 38 *Pilot leti duž paralele $\theta = \mathrm{const} \in [0,\pi)$ iz $\varphi = 0$. Odrediti vektor dobijen paralelnim prenosom vektora $Y_{(\theta,0)}$ iz početne tačke pri povratku u nju (konesija iz prethodnih zadataka).*

Jednačine paralelnog prenosa $\frac{dp^i}{dt} + \Gamma^i_{jk}p^j\frac{dx^k}{dt} = 0$ postaju

$$\frac{dp^\theta}{d\varphi} + \Gamma^\theta_{jk}p^j\frac{dx^k}{d\varphi} = 0, \quad \frac{dp^\varphi}{d\varphi} + \Gamma^\varphi_{jk}p^j\frac{dx^k}{d\varphi} = 0,$$

što na osnovu poznatih Christoffel-ovih simbola daje:

$$\frac{dp^\theta}{d\varphi} - p^\varphi \sin(\theta)\cos(\theta) = 0, \quad \frac{dp^\varphi}{d\varphi} + p^\theta \mathrm{ctg}(\theta) = 0.$$

Diferenciranjem prve po φ i zamenom druge, nalazi se $\frac{d^2p^\theta}{d\varphi^2} + p^\theta\cos^2(\theta) = 0$, te je

$$Y(\varphi) = (\partial_\theta, \partial_\varphi)(a\cos(\varphi\cos(\theta)) + b\sin(\varphi\cos(\theta)), \frac{-a\sin(\varphi\cos(\theta)) + b\cos(\varphi\cos(\theta))}{\sin(\theta)})^T.$$

Tako početni vektor postaje $(\partial_\theta, \partial_\varphi)(a, \frac{b}{\sin(\theta)})^T$, a konačni

$$(\partial_\theta, \partial_\varphi)(a\cos(2\pi\cos(\theta)) + b\sin(2\pi\cos(\theta)), \frac{-a\sin(2\pi\cos(\theta)) + b\cos(2\pi\cos(\theta))}{\sin(\theta)})^T.$$

Očigledno su različiti, osim u slučaju $\theta = \frac{\pi}{2}$ (ekvator). Kako su tada celim putem prenošeni tangentni vektori nepromenjeni, sledi da se ne menja ni tangentni vektor na ekvator, odnosno da je ekvator geodezijska linija. No, izbor koordinatnog sistema je proizvoljan, tako da se svaki veliki krug sfere može u nekom sistemu videti kao ekvator, što znači da su svi veliki krugovi geodezijske linije. Obrnuto, za svaki tangentni vektor iz proizvoljne tačke, postoji tačno jedan veliki krug, kao i tačno jedna geodezijska linija, koji su tangentni za taj vektor, pa je skup geodezijskih linija jednak skupu velikih krugova.

Zadatak 39 *Odrediti koneksiju Levi–Civita-e u ortonormiranom bazisu, krivinu i skalarnu krivinu za metriku $ds^2 = \frac{1}{t^2}(dt^2 - dx^2)$. (Februar 1993.)*

Zadatak 40 *U poluravni $v > 0$ je zadata metrika $ds^2 = \frac{1}{v^2}(du^2 + dv^2)$. Odrediti koneksiju Levi–Civita-e i jednačine geodezijskih linija. Pokazati da su geodezijske linije polukružnice sa centrom na u-osi ili poluprave ortogonalne na ovu osu. (Jun 1993.)*

Zadatak 41 *Na dvodimenzionalnoj mnogostrukosti metrika je zadata u koordinatama (u, v) izrazom $ds^2 = dv^2 - v^2du^2$. Odrediti koneksiju Levi–Civita-e i napisati jednačine geodezijskih linija (Jun 1994.).*

Zadatak 42 *Za Möler-ov koordinatni sistem odrediti koneksiju Levi–Civita-e. Analizom potencijala inercijalnih sila i pravila prelaska iz Descartes-ovog u ovaj sistem, interpretirati Möler-ov sistem u nerelativističkom limesu ($|\alpha x^0|, |\alpha x^1| \ll 1$). (Januar 1994.)*

Zadatak 43 **a)** *Pokazati da su u metrici cilindričnog rotirajućeg sistema krugovi $\varphi = \frac{\omega}{c}x^0$, $\rho = R$ i $z = Z$ geodezijske linije koneksije Levi–Civita-e.*

b) *A i B se u trenutku $x^0 = 0$ u prostor-vremenu Minkowskog nalaze na istom mestu, sa Descartes-ovim koordinatama $x = R$, $y = z = 0$. Dok A ostaje u ovom položaju, B se kreće konstantnom ugaonom brzinom $\omega << \frac{c}{R}$ oko $z-$ose. Izračunati sopstvena vremena $\Delta\tau_A$ za A i $\Delta\tau_B$ za B protekla do njihovog ponovnog susreta. Račun izvršiti kako u koordinatnom sistemu u kome miruje A, tako i u sistemu u kome miruje B. (Februar 1994.)*

a) Duž ovih kružnica je $d\varphi = \omega dt$, $d\rho = dz = 0$; zamenom u jednačine geodezijskih linija se dobijaju identiteti.
b) U cilindričnim koordinatama prostora Minkowskog (t, ρ, φ, z) metrika je $ds^2 = cdt^2 - d\rho^2 - \rho^2 d\varphi^2 - dz^2$. Svetsko vreme (u sistemu A) za koje B obiđe krug je $\Delta t = \frac{2\pi}{\omega}$.
Sistem A: A ostaje u mestu, duž njegove trajektorije je $ds^2 = c^2dt^2$, pa je $d\tau_A = \frac{ds}{c} = dt$ (ili $d\tau_A = \frac{1}{c}\sqrt{g_{00}}dt = dt$), tj. sopstveno vreme τ_A je isto što i svetsko, i $\Delta\tau_A = \frac{2\pi}{\omega}$. Duž trajektorije B je $ds^2 = c^2dt^2 - R^2\omega^2dt^2$, te je $d\tau_B = \sqrt{1 - \frac{R^2\omega^2}{c^2}}dt$, i $\Delta\tau_B = \frac{2\pi}{\omega}\sqrt{1 - \frac{R^2\omega^2}{c^2}}$.
Sistem B: B miruje, pa je duž njegove trajektorije $ds'^2 = g'_{00}dt^2$ i $d\tau'_B = \sqrt{1 - \frac{R^2\omega^2}{c^2}}dt$, i $\Delta\tau'_B = \frac{2\pi}{\omega}\sqrt{1 - \frac{R^2\omega^2}{c^2}} = \Delta\tau_B$. A se kreće duž kružnice, pa je $d\varphi' = \omega dt$ i $ds'^2 = (1 - \frac{R^2\omega^2}{c^2})dt^2 - R^2\omega^2dt^2 + 2R^2\omega^2dt^2$. Stoga je $d\tau'_A = dt$ i $\Delta\tau'_A = \frac{2\pi}{\omega} = \Delta\tau_A$.

Zadatak 44 *Pokazati da je u metrici u kojoj je koeficijent g_{00} konstantan (sinhroni referentni sistem), koordinatna linija vremena jedna geodezijska linija koneksije Levi–Civita-e. Znajući ovo, razmotriti leteći tanjir koji je iz mirovanja u beskonačnosti pod uticajem neke zvezde počeo da pada na nju. Izračunati sopstveno vreme koje protekne dok se približi zvezdi sa k na $l(< k)$ Schwarzschild-ovih radijusa. (April 1993.)*

Zadatak 45 Konformna metrika *dvodimenzionalne mnogostrukosti se u lokalnim koordinatama može zadati u obliku $g = g(u, v)(\mathrm{d}\,u^2 + \mathrm{d}\,v^2)$. Odrediti skalarnu krivinu koneksije Levi–Civita-e.*

Zadatak 46 *U trodimenzionalnom prostoru Minkowskog ($\mathbf{R}^3$ sa metrikom $g = \mathrm{diag}(1, -1, -1)$) jednačina* pseudosfere *je $t^2 - x^2 - y^2 = R^2$. Odrediti skalarnu krivinu ove mnogostrukosti (koneksija Levi–Civita-e).*

Zadatak 47 *Odrediti skalarnu krivinu i jednačine geodezijskih linija koneksije Levi–Civita-e za torus sa metrikom indukovanom Euklidovom metrikom u* $\mathbf{R}^3$*.*

Zadatak 48 *Na dvodimenzionalnoj mnogostrukosti metrika je zadata u koordinatama* (u, v) *izrazom* $ds^2 = dv^2 - v^2 du^2$*. Odrediti koneksiju Levi–Civita-e i krivinu.*

Ortonormirana dualna polja su $E = (E_1 = \partial_v, E_2 = \frac{1}{v}\partial_u)$ i $\epsilon = (\epsilon^1 = dv, \epsilon^2 = vdu)^T$. U ovom bazisu je $\Omega = \begin{pmatrix} 0 & \omega^1_2 \\ -\omega^1_2 & 0 \end{pmatrix}$. Uz opšti oblik $\omega^1_2 = \alpha dv + \beta dv$,uslov bestorzionosti je $0 = d\epsilon + \Omega \wedge \epsilon = \begin{pmatrix} \alpha v \\ 1+\beta \end{pmatrix} dv \wedge du$. Tako je $\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -du \\ du & 0 \end{pmatrix}$. Iz definicije krivine se nalazi $\mathcal{R} = 0$.

Zadatak 49 *Odrediti opšti oblik matrice koneksije Levi–Civita-e za metriku signature* $(1, 3)$ *u ortonormiranom bazisu.*

U ortonormiranom bazisu, uslov kovarijantne konstantnosti metrike je $\Omega^T g = g\Omega$, odakle se nalazi $\Omega = \begin{pmatrix} 0 & \omega^0_1 & \omega^0_2 & \omega^0_3 \\ \omega^0_1 & 0 & \omega^1_2 & \omega^1_3 \\ \omega^0_2 & -\omega^1_2 & 0 & \omega^2_3 \\ \omega^0_3 & -\omega^1_3 & -\omega^2_3 & 0 \end{pmatrix}$.

Pri tome mora biti zadovoljen i uslov simetričnosti, tj. bestorzionosti: $d\epsilon = -\Omega \wedge \epsilon$.

Zadatak 50 *Napisati jednačine geodezijskih linija u cilindričnom rotirajućem sistemu prostora Minkowskog.*

Potrebno je odrediti Christoffel-ove simbole za ove koordinate. Najjednostavniji postupak je da se transformiše koneksija iz Descartes-ovih koordinata u cilindrične rotirajuće. Kako je u Descartes-ovim koordinatama prostora Minkovskog metrika nezavisna od koordinata, svi Christoffel-ovi simboli su jednaki nuli, tj. $\Omega = 0$. Tako se nalazi da je u cilindričnim rotirajućim koordinatama $\Omega' = \Lambda^{-1} d\Lambda$, gde je $\partial'_i = \Lambda^j_i \partial_j$. Koristeći zadatak 5 nalazi se:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \rho\frac{\omega}{c}S & C & -\rho S & 0 \\ -\rho\frac{\omega}{c}C & S & \rho C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Lambda^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C & S & 0 \\ \frac{\omega}{c} & -\frac{1}{\rho}S & \frac{1}{\rho}C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$d\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\omega}{c}Sd\rho + \rho\frac{\omega}{c}Cd\varphi - \rho\frac{\omega^2}{c^2}Cdx^0 & -Sd\varphi + \frac{\omega}{c}Sdx^0 & -Sd\rho - \rho Cd\varphi + \rho\frac{\omega}{c}Cdx^0 & 0 \\ -\frac{\omega}{c}Cd\rho + \rho\frac{\omega}{c}Sd\varphi - \rho\frac{\omega^2}{c^2}Sdx^0 & Cd\varphi - \frac{\omega}{c}Cdx^0 & Cd\rho - \rho Sd\varphi + \rho\frac{\omega}{c}Sdx^0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Omega' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \rho\frac{\omega}{c}d\varphi - \rho\frac{\omega^2}{c^2}dx^0 & 0 & -\rho d\varphi + \rho\frac{\omega}{c}dx^0 & 0 \\ -\frac{\omega}{c\rho}d\rho & \frac{d\rho}{\rho} - \frac{\omega}{c}\frac{dx^0}{c} & \frac{d\rho}{\rho} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sada je lako očitati nenulte Christoffel-ove simbole: $\Gamma^{\rho}_{0\varphi} = \Gamma^{\rho}_{\varphi 0} = \rho\frac{\omega}{c}$, $\Gamma^{\rho}_{00} = -\rho\frac{\omega^2}{c^2}$, $\Gamma^{\rho}_{\varphi\varphi} = -\rho$, $\Gamma^{\varphi}_{0\rho} = \Gamma^{\varphi}_{\rho 0} = -\frac{1}{\rho}\frac{\omega}{c}$, $\Gamma^{\varphi}_{\varphi\rho} = \Gamma^{\varphi}_{\rho\varphi} = \frac{1}{\rho}$. Jednačine geodezijskih linija su

$$\frac{d^2x^0}{dt^2} = 0,$$
$$\frac{d^2\rho}{dt^2} - \rho(\frac{d\varphi}{dt})^2 - \rho\omega^2 + 2\rho\omega\frac{d\varphi}{dt} = 0,$$
$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{2}{\rho}\frac{d\rho}{dt}\frac{d\varphi}{dt} - 2\frac{\omega}{\rho}\frac{d\rho}{dt} = 0.$$

Prva jednačina pokazuje da je x^0 proporcionalno dužini krive.

Zadatak 51 *Za determinantu* $\mathbf{g}$ *metričkog tenzora signature (1,3) dokazati:* $d\mathbf{g} = \mathbf{g}g^{ij}dg_{ij} = -\mathbf{g}g_{ij}dg^{ij}$, $d\sqrt{-\mathbf{g}} = \frac{1}{2}\sqrt{-\mathbf{g}}\,g^{ij}dg_{ij} = -\frac{1}{2}\sqrt{-\mathbf{g}}\,g_{ij}dg^{ij}$, $\mathbf{g}_{,s} = 2\mathbf{g}\Gamma^p_{sp}$, $\Gamma^p_{sp} = \frac{\partial \ln\sqrt{-\mathbf{g}}}{\partial x^s}$.

Ako je G^{ij} minor elementa g_{ij}, onda je $d(\mathbf{g}) = G^{ij}dg_{ij}$ (ovo se vidi kombinatorno, pišući $\mathbf{g} = \varepsilon^{i_1\dots i_n}g_{1i_1}\cdots g_{ni_n}$, i diferencirajući, ili diferencirajući relaciju $\mathbf{g} = e^{\mathrm{Tr}\ln g}$). Dalje, na osnovu definicije $g^{ij} = \frac{G^{ij}}{\mathbf{g}}$, sledi $d\mathbf{g} = \mathbf{g}g^{ij}dg_{ij}$. Druga relacija se nalazi korišćenjem činjenice da je $g_{ij}g^{ij} = 4$, pa i $(dg_{ij})g^{ij} + g_{ij}dg^{ij} = 0$. Odavde odmah slede i jednakosti za $\sqrt{-\mathbf{g}}$. Kako odavde sledi da je $\mathbf{g}_{,s} = \mathbf{g}g^{pq}g_{pq,s}$, uslovi simetričnosti i metričnosti ($g_{ij,s} = g_{lj}\Gamma^l_{is} + g_{il}\Gamma^l_{js}$) daju odmah relaciju $\mathbf{g}_{,s} = 2\mathbf{g}\Gamma^p_{sp}$, odakle sledi i poslednja jednakost.

3.7 Einstein-ove jednačine

Zadatak 52 *Pokazati da se jednačine geodezijskih linija dobijaju kao Lagrange-ove jednačine za dejstvo* $S[\gamma] = \int g(X_{\gamma(t)}, X_{\gamma(t)})dt$ *($X_{\gamma(t)}$ je tangentni vektor krive), dok se iz dejstva* $S[\gamma] = -mc\int ds = -mc\int\sqrt{g(X_{\gamma(t)}, X_{\gamma(t)})}dt$ *dobijaju geodezijske jednačine ako je* t prirodni parametar *krive, tj. dužina duž krive.*

Lagrange-ove jednačine $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{x}^k} - \frac{\partial L}{\partial x^k} = 0$ daju u prvom slučaju: $2g_{ik,s}\dot{x}^i\dot{x}^s + 2g_{ik}\ddot{x}^i - g_{ij,k}\dot{x}^i\dot{x}^j$. Množenjem sa g^{tk} (i sumiranjem po k), i podsećanjem da je

$$\Gamma^k_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j = \frac{1}{2}g^{kl}(g_{lj,i} + g_{il,j} - g_{ij,l})\dot{x}^i\dot{x}^j = \frac{1}{2}g^{kl}(2g_{lj,i} - g_{ij,l})\dot{x}^i\dot{x}^j,$$

nalaze se jednačine geodezijskih linija.

Za drugi lagranžijan jednačine su $\frac{d}{dt}(\frac{g_{kj}\dot{x}^j}{\sqrt{g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j}}) - \frac{\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\dot{x}^i\dot{x}^j}{2\sqrt{g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j}} = 0$. Ukoliko je parametar odabran tako da je ds proporcionalno sa dt, tj. da duž krivih koren ne zavisi od t, ceo izraz se svodi na prethodni slučaj.

Zadatak 53 *Pokazati da je* $Rs\sqrt{-\mathbf{g}} = \sqrt{-\mathbf{g}}\,g^{lm}(\Gamma^t_{ls}\Gamma^s_{tk} - \Gamma^s_{lk}\Gamma^t_{st}) + \partial_i w^i$.

Pošto je $\mathrm{Rs} = g^{lm}(\Gamma^t_{lm,t} - \Gamma^t_{lt,m} + \Gamma^t_{st}\Gamma^s_{lm} - \Gamma^t_{sm}\Gamma^s_{lk})$, parcijalnom integracijom se dobija:

$$\mathrm{Rs}\sqrt{-\mathbf{g}} = \partial_t(g^{lm}\sqrt{-\mathbf{g}}\,\Gamma^t_{lm}) - \partial_m(g^{lm}\sqrt{-\mathbf{g}}\,\Gamma^t_{lt,m}) -$$
$$\Gamma^t_{lm}\partial_t(g^{lm}\sqrt{-\mathbf{g}}) + \Gamma^t_{lt}\partial_t(g^{lm}\sqrt{-\mathbf{g}}) + g^{lm}\Gamma^t_{st}\Gamma^s_{lm} - g^{lm}\Gamma^t_{sm}\Gamma^s_{lk}).$$

Prva dva člana su izvodi, dok se primenom prethodnih relacija za izvode $\sqrt{-\mathbf{g}}$ i g_{ij}, te kovarijantne konstantnosti g^{ij} (jednakost $g^{ij}_{,s} = -g_{lj}\Gamma^i_{js} - g^{il}\Gamma^j_{is}$) dobija tražena veza.

3.8 Schwarzschild-ova metrika

Zadatak 54 *Odrediti g u Newton-ovoj teoriji (nerelativistička aproksimacija).*

U specijalnoj teoriji relativnosti Lagrange-ova funkcija slobodne čestice mase m je $L = -mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$. Stoga je u nerelativističkoj aproksimaciji $L = \frac{mv^2}{2} - mc^2$. Vidi se da se javlja član $-mc^2$ koji ne utiče na jednačine kretanja, ali se mora koristiti za formiranje drugih Lagrange-ovih funkcija u istoj aproksimaciji. Tako je za česticu u gravitacionom potencijalu $m\varphi$, $L = \frac{mv^2}{2} - m(c^2+\varphi)$, odakle je dejstvo $S_m[\gamma] = \int_\gamma L dt = -mc\int_\gamma (c - \frac{v^2}{2c} + \frac{\varphi}{c})\, dt$, tj. $ds = (c - \frac{v^2}{2c} + \frac{\varphi}{c})dt$. Kvadriranjem se nalazi $ds^2 = c^2(1 + \frac{\varphi^2}{c^4} + \frac{v^4}{4c^4} + 2\frac{\varphi}{c^2} - \frac{v^2}{c^2} - \frac{v^2}{c^2}\frac{\varphi}{c^2}dt^2)$. Zadržavajući članove najnižeg stepena po $\frac{v}{c}$ i $\frac{\varphi}{c^2}$, nalazi se $ds^2 = g_{00}d(ct)^2 - d\mathbf{x}^2$, uz $g_{00} = 1 + 2\frac{\varphi}{c^2}$.

Zadatak 55 *Naći jednačine geodezijskih linija u Newton-ovoj aproksimaciji.*

U ovoj aproksimaciji se pretpostavlja da su brzine čestica male i da je polje statičko i slabo. Takođe se radi u koordinatama u kojima je $g_{0\alpha} = 0$ (zbog inverznosti g^{ij} i g_{ij} je i $g^{0\alpha} = 0$), koeficijenti metrike ne zavise od vremena, i malo odstupaju od euklidskih. Stoga je $ds^2 = g_{00}d(ct)^2 - d\mathbf{x}^2$, uz $g_{00} = 1 + 2\frac{\varphi(x^1,x^2,x^3)}{c^2}$. Koristeći relaciju za Christoffel-ove simbole

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2}g^{is}(\frac{\partial g_{sj}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{sk}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^s}) = \frac{1}{2}g^{ii}(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}),$$

nalazi se

$$\Gamma^0_{00} = \Gamma^0_{\alpha\beta} = \Gamma^\alpha_{0\beta} = 0, \quad \Gamma^0_{0\alpha} = -\Gamma^\alpha_{00} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial x^\alpha}.$$

Zamenom u jednačinu geodezijskih linija, uz pretpostavke da je $\frac{dx^\alpha}{dt} \ll c$, i $dt = (1 - \frac{\varphi}{c^2})d\tau$, te se svetsko vreme može uzeti za parametar krive (približno proporcionalan dužini), nalaze se jednačine

$$\frac{d^2x^0(t)}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2x^\alpha}{dt^2} - \frac{\partial\phi}{\partial x^a} = 0.$$

Dok prva relacija izražava apsolutnost vremena (ukazujući da je duž geodezijske linije vreme proporcionalnu parametru krive), druga je Newton-ov zakon.

Zadatak 56 *Centralnosimetrična metrika je data u koordinatnom obliku:*

$$ds^2 = e^\nu d(ct)^2 - e^\lambda dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\varphi^2),$$

gde su ν i λ funkcije t i r. Odrediti koneksiju ove metrike u ortonormiranom bazisu.

Ortonormirani bazis formi i njegov diferencijal su:

$$\epsilon = (\epsilon^t = e^{\frac{1}{2}\nu}cdt, \epsilon^r = e^{\frac{1}{2}\lambda}dr, \epsilon^\theta = rd\theta, \epsilon^\varphi = r\sin(\theta)d\varphi)^T,$$

$$d\epsilon = (-\frac{1}{2}\nu' e^{-\frac{1}{2}\lambda}\epsilon^t \wedge \epsilon^r, \frac{1}{2}\dot\lambda e^{-\frac{1}{2}\nu}\epsilon^t \wedge \epsilon^r, \frac{1}{r}e^{-\frac{1}{2}\lambda}\epsilon^r \wedge \epsilon^\theta, \frac{1}{r}e^{-\frac{1}{2}\lambda}\epsilon^r \wedge \epsilon^\varphi + \frac{1}{r}\mathrm{ctg}(\theta)\epsilon^\theta \wedge \epsilon^\varphi)^T,$$

Koristeći oblik koneksije u ortonormiranom bazisu iz prethodnih zadataka, uslov simetričnosti je $\Omega \wedge \epsilon = -d\epsilon$ (ovde je $\alpha = \frac{1}{2}\nu' e^{-\frac{1}{2}\lambda}$, $\beta = -\frac{1}{2}\dot\lambda e^{-\frac{1}{2}\nu}$, $\gamma = -\frac{1}{r}e^{-\frac{1}{2}\lambda}$, $\sigma = -\frac{1}{r}e^{-\frac{1}{2}\lambda}$, $\rho = -\frac{1}{r}\mathrm{ctg}(\theta)$):

$$\begin{pmatrix} \epsilon^t_r \wedge \omega^r + \epsilon^t_\theta \wedge \omega^\theta + \epsilon^t_\varphi \wedge \omega^\varphi \\ \epsilon^t_r \wedge \omega^t + \epsilon^r_\theta \wedge \omega^\theta + \epsilon^r_\varphi \wedge \omega^\varphi \\ \epsilon^t_\theta \wedge \omega^t - \epsilon^r_\theta \wedge \omega^r + \epsilon^\theta_\varphi \wedge \omega^\varphi \\ \epsilon^t_\varphi \wedge \omega^t - \epsilon^r_\theta \wedge \omega^r - \epsilon^\theta_\varphi \wedge \omega^\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\epsilon^t \wedge \epsilon^r \\ \beta\epsilon^t \wedge \epsilon^r \\ \gamma\epsilon^r \wedge \epsilon^\theta \\ \sigma\epsilon^r \wedge \epsilon^\varphi + \rho\epsilon^\theta \wedge \epsilon^\varphi \end{pmatrix}.$$

Ovo je sistem jednačina po formama koneksije, ili, ako se forme izraze preko bazisnih, po koeficijentima u kombinacijama, tj. koeficijentima koneksije. Taj sistem je linearan i može se lako rešiti uobičajenim metodima. Tako iz prve jednačine sledi: $\omega^t_{rt} = \alpha$, $\omega^t_{\theta t} = \omega^t_{\varphi t} = 0$, iz druge $\omega^t_{rr} = -\beta$, $\omega^r_{\theta r} = \omega^r_{\varphi r} = 0$, iz treće $\omega^r_{\theta\theta} = \gamma$, $\omega^t_{\theta\theta} = \omega^\theta_{\varphi\theta} = 0$, iz četvrte $\omega^r_{\varphi\varphi} = \sigma$, $\omega^\theta_{\varphi\varphi} = \rho$, $\omega^t_{\varphi\varphi} = 0$. Takođe se dobijaju veze: iz prve jednačine $\omega^t_{r\theta} = \omega^t_{\theta r}$, $\omega^t_{r\varphi} = \omega^t_{\varphi r}$, $\omega^t_{\theta\varphi} = \omega^t_{\varphi\theta}$, iz druge $\omega^t_{r\theta} = \omega^r_{\theta t}$, $\omega^t_{r\varphi} = \omega^r_{\varphi t}$, $\omega^r_{\theta\varphi} = \omega^r_{\varphi\theta}$, iz treće $\omega^t_{\theta r} = -\omega^r_{\theta t}$, $\omega^t_{\theta\varphi} = \omega^\theta_{\varphi t}$, $\omega^\theta_{\varphi r} = -\omega^r_{\theta\varphi}$, iz četvrte $\omega^t_{\varphi r} = -\omega^r_{\varphi t}$, $\omega^t_{\varphi\theta} = -\omega^\theta_{\varphi t}$, $\omega^r_{\varphi\theta} = \omega^\theta_{\varphi r}$. Upoređujući relacije za isti skup indeksa iz različitih jednačina se nalazi: $\omega^t_{r\theta} = \omega^t_{\theta r} = \omega^r_{\theta t} = 0$, $\omega^t_{r\varphi} = \omega^t_{\varphi r} = \omega^r_{\varphi t} = 0$, $\omega^t_{\theta\varphi} = \omega^t_{\varphi\theta} = \omega^\theta_{\varphi t} = 0$, $\omega^r_{\theta\varphi} = \omega^r_{\varphi\theta} = \omega^\theta_{\varphi r} = 0$.

Tako se nalazi $\Omega = \begin{pmatrix} 0 & \alpha\epsilon^t - \beta\epsilon^r & 0 & 0 \\ \alpha\epsilon^t - \beta\epsilon^r & 0 & \gamma\epsilon^\theta & \sigma\epsilon^\varphi \\ 0 & -\gamma\epsilon^\theta & 0 & \rho\epsilon^\varphi \\ 0 & -\sigma\epsilon^\varphi & -\rho\epsilon^\varphi & 0 \end{pmatrix}$.

Zadatak 57 *Odrediti koneksiju centralno simetrične metrike u koordinatnom bazisu.*

Ako je ϵ' koordinatni vazis, važi $\epsilon' = \Lambda\epsilon$, gde je $\Lambda = \mathrm{diag}(e^{\frac{1}{2}\nu}, e^{\frac{1}{2}\lambda}, r, r\sin(\theta))$ i $d\Lambda = \mathrm{diag}(\frac{1}{2}(\dot\nu d(ct) + \nu' dr)e^{\frac{1}{2}\nu}, \frac{1}{2}(\dot\lambda d(ct) + \lambda' dr)e^{\frac{1}{2}\lambda}, dr, \sin(\theta)dr + r\cos(\theta)d\theta)$. Koristeći zakon transformacije koneksije, nalazi se

$$\Omega' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\dot\nu dt + \frac{1}{2}\nu' dr & \frac{1}{2}\nu' dt + \frac{1}{2}\dot\lambda e^{\lambda-\nu} dr & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}\nu' e^{\nu-\lambda} dt + \frac{1}{2}\dot\lambda dr & \frac{1}{2}\dot\lambda dt + \frac{1}{2}\lambda' dr & -re^{-\lambda} d\theta & -r\sin^2(\theta)e^{-\lambda} d\varphi \\ 0 & \frac{1}{r} d\theta & \frac{1}{r} dr & -\cos(\theta)\sin(\theta) d\varphi \\ 0 & \frac{1}{r} d\varphi & \mathrm{ctg}(\theta) d\phi & \frac{1}{r} dr + \mathrm{ctg}(\theta) d\theta \end{pmatrix}.$$

Odavde je lako očitati Christoffel-ove simbole.

Zadatak 58 *Pokazati da je koordinatna linija vremena istovremeno vremenska geodezijska linija ako u datom referentnom sistemu važi $ds^2 = dx^{0^2} + g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta$ (sinhroni referentni sistem).*

Kako su ostale jednačine u ovom slučaju identiteti, x^0 je geodezijska linija, ako i samo ako je zadovoljena jednačina $\frac{d^2x^0}{dx^{0^2}} + \Gamma^0_{00} = 0$ (x^0 je i parametar krive; u poslednjem sabirku ostali članovi nestaju jer su prostorne koordinate konstantne duž linije vremena). Prvi sabirak je jednak nuli, te uslov postaje $\Gamma^0_{00} = 0$, i zadovoljen je zbog osobina metrike: $\Gamma^0_{00} = \frac{1}{2}g^{00}g_{00,0} = 0$.

Zadatak 59 *Odrediti sopstveno vreme potrebno čestici, koja iz mirovanja u $r = \infty$, pod uticajem centra teže pada na njega, da pređe put iz r do R_g.*

Krećući se po vremenskoj liniji, koja je po prethodnom zadatku geodezik za $dR = d\theta = d\varphi = 0$ u Lemaitre-ovoj metrici, i predstavlja sopstveno vreme, nalazi se $\Delta T = \int_r^{R_g} dT = T(R_g) - T(r)$. Iz veze $R - cT = \frac{2}{3}\frac{r^{\frac{3}{2}}}{R_g^{\frac{1}{2}}}$, nalazi se $\Delta T = \frac{2}{3c}\frac{r^{\frac{3}{2}} - R_g^{\frac{3}{2}}}{R_g^{\frac{1}{2}}}$. Pošto je na ovoj geodezijskoj liniji $dR = 0 = cdt + \frac{dr}{\sqrt{\frac{R_g}{r}(1-\frac{R_g}{r})}}$, vidi se da je brzina čestice u $r = \infty$ bila jednaka 0.

Bibliografija

[1] Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика I: Механика*, Москва, Наука, 1988.

[2] Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика II: Теорија Поля*, Москва, Наука, 1988.

[3] C. W. Misner, K. S. Thorne, J. A. Wheeler, *Gravitation*, San Francisco, W. H. Freeman and Company, 1973.

[4] S. Chandrasekhar, *The Mathematical Theory of Black Holes*, Oxford, Clarendon, 1983.

[5] F. W. Warner, *Foundation of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, Berlin, Springer, 1983.

[6] M. Göckeler, T. Schüker, *Differential Geometry, Gauge Theories and Gravity*, Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1990.

[7] М. М. Постников, *Дифференциальная геометрия*, Москва, Наука, 1988. 1

[8] S. Kobayashi and K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry*, New York, Interscience, 1963.

[9] C. von Westenholtz, *Differential Forms in Mathematical Physics*, Amsterdam, Norh-Holland, 1981.

[10] И. Д. Новиков, В. П. Фролов, *Физика черных Дыр*, Москва, Наука, 1986.

[11] А. Л. Зельманов, В. Г. Агаков, *Елементы общей теории относительности*, Москва, Наука,1989.

[12] Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко, *Современная Геометрия*, Москва, Наука, 1979.

[13] L. H. Ryder, *Quantum Field Theory*, Cambridge, Cambridge University Press, 1987.

[14] T.-P. Cheng, L.-F. Li, *Gauge Theory of Elementary Particle Physics*, Oxford, Clarendon, 1984.

[15] V. A. Ilyin and E. G. Poznyak, *Fundamentals of Mathematical Analysis*, Moscow, Mir, 1982. 2

[16] А. И. Кострикин, Jу. И. Манин, *Линейная Алгебра и Геометрия*, Москва, Наука, 1986. 1.5

[17] A. P. Lightman, W. H. Press, R. H. Price, S. A. Teukolsky, *Problem Book in Relativity and Gravitation*, Princeton, Princeton University Press, 1975.

Indeks