7.2 Der 4-dimensionale Raum

Jeder Ereignispunkt wird durch 4 Koordinaten, 3 für die Position im Raum wo das Ereignis stattfindet und eine für die Zeit, wann das Ereignis stattfindet, festgelegt. Damit auch die Zeitkoordinate in den gleichen Einheiten definiert werden kann wie die Raumkoordinaten, nämlich z.B. in Metern, multipliziert man die Zeitkoordinate mit der Lichtgeschwindigkeit im Vakuum c und definiert so einen Ereignispunkt durch einen Vektor der Dimension 4, z.B. als Spaltenvektor

$$\vec{\vec{r}} = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \tag{7.12}$$

wobei x, y, z die Raumkoordinaten des Ereignispunktes in einem kartesischen Koordinatensystem bezeichen und t für die Zeit in diesem Koordinatensystem steht. In einem Koordinatensystem K' wird der gleiche Ereignispunkt durch einen anderen Vektor definiert

$$\vec{\vec{r}} \quad \Longrightarrow \quad \vec{\vec{r}}\,' = \begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}, \tag{7.13}$$

wobei wir berücksichtigt haben, dass bei einer Koordinatentransformation von K nach K' eventuell auch die gemessene Zeit transformiert werden muss (siehe Diskussion im vorhergehenden Abschnitt). Die Transformation der Koordinaten des gleichen Ereignispunktes soll dabei so gestaltet werden, dass gilt

$$c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = c^2t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 \,. \tag{7.14}$$

Durch diese Forderung ist gewährleistet, dass ein Ereignispunkt, der den Empfang eines Lichtsignals (ausgehend vom Koordinatenursprung zur Zeit $t = 0$) beschreibt, in beiden Koordinatensystemen durch die jeweils richtige Beziehung zwischen Ort und Zeit beschrieben wird. Die Forderung (7.14) spiegelt also die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit in allen Koordinatensystemen wider.

Um diese Forderung etwas präziser zu formulieren definieren wir den **Minkowski Raum** als den 4-dimensionalen Vektorraum von Raumzeitpunkten, in dem das Betragsquadrat eines Vektors in einem bestimmten Koordinatensystem definiert ist durch

$$|\vec{\vec{r}}\,|^2 := c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 \,. \tag{7.15}$$

Die Suche nach Koordinatentransformationen, die (7.14) erfüllen, entspricht also der Suche nach Transformationen in der Basis des Minkowski Raumes, die die in (7.15) definierte Länge des Vierervektors invariant lassen.

Für die weitere Diskussion ist es hilfreich weitere Bezeichnungen und Definitionen einzuführen. So definieren wir z.B. einen Ereignispunkt $\vec{\vec{r}}$ durch einen Spaltenvektor, den wir als **kontravarianten Vektor** bezeichnen, durch die Darstellung

$$x^\mu = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \tag{7.16}$$

Die nullte Komponente dieses kontravarianten Vektors x^μ, $x^0 = ct$, bezeichnet also die zeitartige Koordinate des Ereignispunktes, die erste bis dritte Komponente die 3 raumartigen nach der Vereinbarung $x^1 = x$, $x^2 = y$ und $x^3 = z$. Der gleiche Raumzeitpunkt wird auch durch einen **kovarianten Vektor** x_μ (beachte, der Index steht hier unten) charakterisiert in der Form

$$x_\mu = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix} . \tag{7.17}$$

Damit berechnet sich das Betragsquadrat des Raumzeitpunktes $\vec{\vec{r}}$ im Minkowski Raum als das Skalarprodukt des zugehörigen kontravarianten Spaltenvektors mit dem entsprechenden kovarianten Spaltenvektor. Es gilt ja

$$\begin{aligned} |\vec{\vec{r}}\,|^2 &= \sum_{\mu=0}^{3} x^\mu x_\mu = x^0 x_0 + x^1 x_1 + x^2 x_2 + x^3 x_3 \\ &= c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 \,. \end{aligned} \tag{7.18}$$

Bei der Bezeichnung diese Skalarproduktes verzichtet man im Allgemeinen auf das Summenzeichen und definiert das Produkt von 2 Vierer Vektoren x und y

$$x^\mu y_\mu = x_\mu y^\mu := x^0 y_0 + x^1 y_1 + x^2 y_2 + x^3 y_3 \,. \tag{7.19}$$

Als ein weiteres Beispiel für die Anwendung dieser Nomenklatur betrachten wir die Transformation des kontravarianten Spaltenvektors x in den zugehörigen kovarianten Spaltenvektor

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu := \sum_{\nu=0}^{4} g_{\mu\nu} x^\nu \,. \tag{7.20}$$

Auch in dieser Gleichung implizieren die gleichlautenden Indizes ν auf der rechten Seite der Gleichung eine Summation über diesen Index, was an dieser Stelle auch noch einmal explizit angegeben wird. Die Verbindung zwischen kontravariantem und kovarianten Vektor wird durch die 16 Zahlen $g_{\mu\nu}$ definiert, die aber in diesem Fall einfach gegeben sind durch

$$g_{\mu\nu} = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \mu = \nu = 0 \\ -1 & \mu = \nu = i \in (1,2,3) \\ 0 & \text{sonst} \end{array} \right\} \tag{7.21}$$

Die Transformationsgleichung (7.20) kann man natürlich auch durch Mutliplikation einer Matrix g mit dem Spaltenvektor x^ν darstellen in der Form

$$x_\mu = \begin{pmatrix} ct \\ -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} .$$

Man bezeichnet diese Transformationsmatrix g bzw. $g_{\mu\nu}$ als metrischen Tensor, da mit diesem Tensor das Skalarprodukt zweier Vektoren definiert ist gemäß

$$\vec{\vec{x}}\,\vec{\vec{y}} = x^\mu g_{\mu\nu} y^\nu \,.$$

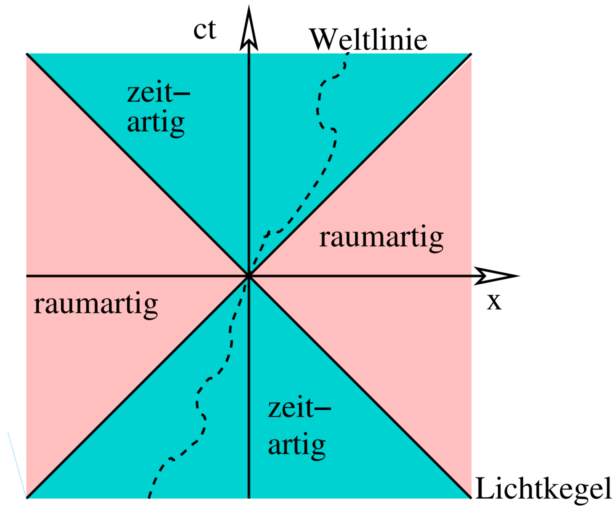

Abbildung 7.6: *Weltlinie im Minkowski Raum*

Einzelne Ereignispunkte $\vec{\vec{r}}$ sind also durch einen Vierervektor, ein Element des Minkowski Raumes definiert. Eine Abfolge von Ereignispunkten, also z.B. die Bewegung eines Teilchens, wird damit durch eine Trajektorie im Minkowski Raum dargestellt. Man spricht von der Weltlinie des betroffenen Teilchens. Zur Darstellung einer solchen Weltlinie wurde in Abb. 7.6 auf die Darstellung der y und z Koordinaten verzichtet und eine solche Weltlinie als Funktion einer Raumkoordinate x und der Zeitkoordinate ct dargestellt.

In dieser Figur sind außerdem die Linien eingezeichnet für die gilt (beachte, wir beschränken die Abbildung auf $y = z = 0$)

$$c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0\,. \tag{7.22}$$

Diese Punkte definieren den Lichtkegel. Zur Bedeutung dieses Namens, muss man sich z.B. für $z = 0$ die Punkte vorstellen, die diese Gleichung erfüllen. Diese Punkte liegen auf den Kegeln, die ihre Achse auf der Zeitachse haben und deren Spitzen sich im Koordinatenursprung berühren. Alle Vektoren, die (7.22) erfüllen haben die Länge Null in der Metrik des Minkowski Raumes. Die zugehörigen Ereignispunkte haben also vom Koordinatenursprung den Abstand Null, gemessen mit der Metrik des Minkowski Raumes.

Physikalisch sind diese Punkte auf dem Lichtkegel mit dem Koordinatenursprung über das Gesetz der Ausbreitung von elektromagnetischen Wellen verbunden. Punkte, die auf dem Zukunfts-Lichtkegel liegen, das sind solche, für die $t > 0$ gilt, werden einen Lichtblitz empfangen, der zur Zeit $t = 0$ im Koordinatenursprung gezündet wird. Punkte auf dem Vergangenheits-Lichtkegel $t < 0$ sind Punkte, von denen ein Empfänger im Koordinatenursprung zur Zeit $t = 0$ ein Lichtsignal empfangen kann. So liegt also für uns hier z.B. in Tübingen als Koordinatenursprung, zur jetzigen Zeit $t = 0$ das Ereignis, dass die Sonne zur Zeit $t = -8$ Minuten Licht ausgesandt hat, das wir genau jetzt hier empfangen, auf dem Vergangenheits - Lichtkegel.

Alle Punkte, die vom Koordinatenursprung einen negativen Minkowski Abstand haben, also

$$c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 < 0\,,$$

bezeichnet man als raumartige Punkte: der raumartige Abstand $x^2+y^2+z^2$ ist größer als der zeitartige c^2t^2. Wir werden im nächsten Abschnitt sehen, dass man stets eine Transformation von Koordinaten finden kann, so dass ein Ereignispunkt im raumartigen Bereich die Zeit $t'=0$ in diesem Koordinatensystem besitzt. Dieser Ereignispunkt ist gleichzeitig zum Koordinatenursprung. Man kann allgemein für raumartige Punkte nicht sagen ob sie eine Zeit $t>0$ oder $t<0$ haben, ob sie relativ zum Koordinatenursprung in der Zukunft oder in der Verangenheit liegen. Dies hängt vom jeweiligen Koordinatensystem ab. Deshalb kann natürlich ein Ereignis im Koordinatenursprung keinen Einfluss nehmen auf ein Ereignispunkt im raumartigen Bereich. Bei entsprechender Wahl des Koordinatensystems würde dieser Ereignispunkt ja in die Vergangenheit transformiert und ein Einfluss auf einen Ereignispunkt der Vergangenheit verletzt natürlich die Kausalität.

Andererseits kann aber auch ein Ereignis auf einem raumartigen Ereignispunkt keinen Einfluss auf den Koordinatenursprung nehmen. Bei geeigneter Wahl des Koordinatensystems würde der Ereignispunkt in der Zukunft liegen aund ein Einfluss der Zukunft auf die Gegenwart verletzt natürlich auch die Kausalität. Diese Feststellungen ist nur eine alternative Art um zum Ausdruck zu bringen, dass Information, bzw. Einfluss nehmen auf einen Ereignispunkt, maximal mit Lichtgeschwindigkeit übertragen werden kann. Dies schliesst eine Einflussnahme eines Ereignisses im Koordinatenursprung auf Raumzeitpunkte im raumartigen Bereich aus.

Alle Punkte, die vom Koordinatenursprung einen positiven Minkowski Abstand haben, also

$$c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 > 0\,,$$

gehören zum zeitartigen Bereich. Für diese Punkte ist eindeutig definiert ob sie bezogen auf den Koordinatenursprung in der Vergangenheit oder in der Zukunft liegen. Diese Punkte können den Koordinatenursprung erreichen ($t<0$) oder können vom Koordinatenursprung aus erreicht werden ($t>0$). Deshalb liegt die Weltlinie, die in Abb. 7.6 skizziert ist und durch den Koordinatenursprung verläuft, ausschließlich im zeitartigen Bereich.