Wie sieht die Mondbahn aus?

Tomaz Kranjc

Zusammenfassung

In dem Artikel wird die Bahn betrachtet, auf der sich der Mond um die Sonne bewegt. Es wird angenommen, dass sich die Erde um die Sonne sowie auch der Mond um die Erde auf Kreisbahnen bewegen, dass die Erdbahn und die Mondbahn auf derselben Ebene liegen und dass die Erde die Sonne im gleichen Umlaufsinn umkreist wie der Mond die Erde. Die Mondbahn macht keine Schleifen, wie man sich oft irrtümlich vorstellt, sondern unterscheidet sich nur wenig von einer Kreisbahn. Von der Sonne aus gesehen ist die Mondbahn überall nach innen gewölbt (konkav).

Es gibt verschiedene mögliche Bahnen eines Mondes, der um einen Planeten kreist, wobei sich dieser wiederum um eine Sonne bewegt. Die Bahn kann Schleifen aufweisen oder sie kann ohne Schleifen ablaufen, aber teilweise nach innen (konkav), teilweise nach außen (konvex) gewölbt sein, oder sie kann überall nach innen gewölbt sein. Welche von diesen Möglichkeiten auftritt, hängt von zwei Parametern ab, und zwar vom Verhältnis der Abstände des Planeten von der Sonne und des Mondes vom Planeten und dem Verhältnis der Umlaufzeiten des Planeten um die Sonne und des Mondes um den Planeten.

Einleitung

In einem Schulbuch ist die folgende Aufgabe gestellt [1]:

Der Mond wird nicht nur von der Erde, sondern auch von der Sonne angezogen. Wie groß ist der Quotient der beiden Kräfte? Aus dem Resultat kann man schließen, dass die Mondbahn immer gegen die Sonne gekrümmt ist.

Die Angaben, über die wir verfügen, sind die Masse der Erde ($m_E = 6{,}0 \cdot 10^{24}$ kg), die Masse der Sonne ($m_S = 2{,}0 \cdot 10^{30}$ kg), die Masse des Mondes ($m_M = 7{,}34 \cdot 10^{22}$ kg), die Entfernung des Mondes von der Erde ($r_{EM} = 384000$ km) und die Entfernung der Erde von der Sonne ($r_{ES} = 149{,}5 \cdot 10^6$ km). Wir wissen auch, dass die Erde die Sonne in einem Jahr umkreist ($t_E = 1$ Jahr) und der Mond die Erde in ungefähr 27 Tagen ($t_M = 27$ Tage).

Der Verlauf der Mondbahn ist den Astronomen gut bekannt. Sie kennen nicht nur die richtige qualitative Antwort, sondern können die Bahn auch äußerst präzis zu berechnen.

A. Unsöld stellt in seinem Buch *Der neue Kosmos* fest:

"Würde man die Bahnen des Mondes und der Erde um die Sonne von einem Weltraumfahrzeug aus betrachten, so würde man – in Übereinstimmung mit einer einfachen Rechnung – feststellen, dass auch die Mondbahn zur Sonne hin durchweg konkav ist." ([2], S. 18).

Nichtastronomen, auch Physiker und Mathematiker, haben jedoch häufig eine irrtümliche Vorstellung, zu der man zwar mit einer logischen, aber doch voreiligen Schlussfolgerung kommt (siehe Abb. 1). Ja sogar in manchen Astronomiebüchern ist die Mondbahn oberflächlich oder falsch dargestellt [3, 4]. Deshalb scheint es zweckmäßig, in diesem Artikel die richtige und allgemeine Antwort in einfacher Weise darzustellen. Dafür benötigt man nur einige Grundlagen der Physik.

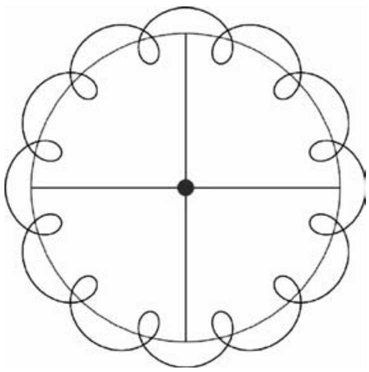

Abb. 1: Häufige (jedoch irrige) Vorstellung von der Mondbahn.

Kräfte zwischen Sonne, Erde und Mond

Um festzustellen, ob unsere Vorstellung richtig ist, berechnen wir den Quotienten der Kräfte, mit denen die Sonne und die Erde auf den Mond einwirken. Das Newtonsche Massenanziehungsgesetz besagt, dass die Kraft zwischen zwei Massenpunkten m_1 und m_2 in der Verbindungslinie beider Punkte wirkt und umgekehrt proportional dem Entfernungsquadrat ist:

$$F_g = \mathcal{G}\, m_1 m_2 / r^2 \qquad (1)$$

$\mathcal{G} = 6{,}7 \cdot 10^{-11}$ Nm²/kg² ist die Newtonsche Gravitationskonstante.

Die Erde wirkt mit der Anziehungskraft $F_E = \mathcal{G}\, m_M m_E / r_{EM}^2$, und die Sonne mit der Anziehungskraft $F_S = \mathcal{G}\, m_M m_S / r_{SM}^2$ auf den Mond ein, wobei r_{SM} die Entfernung des Mondes von der Sonne bedeutet. Der Quotient zwischen den Entfer-

Dr. Tomaz Kranjc, Faculty of Education, University of Ljubljana, Kardeljeva ploscad 16, SI-1000 Ljubljana, Slowenien. tomaz.kranjc@pef.uni-lj.si

nungen des Mondes von der Erde und der Erde von der Sonne beträgt $r_{ES} / r_{EM} \approx 400$. Die Entfernung des Mondes von der Erde beträgt also nur einen winzigen Teil (ein Vierhundertstel) der Entfernung der Erde von der Sonne. Bei der hier betrachteten Genauigkeit darf man deshalb den Unterschied zwischen r_{ES} und r_{MS} vernachlässigen und kann $r_{MS} = r_{ES}$ nehmen.

Damit findet man für den Quotienten der Kräfte der Sonne (F_S) und der Erde (F_E) auf den Mond

$$F_S / F_E = (G\, m_M m_S / r_{SM}^2)/(G\, m_M m_E / r_{EM}^2) =$$

$$= (m_S / m_E) \cdot (r_{EM} / r_{SM})^2 = 2{,}2\,. \qquad (2)$$

Wir sehen, dass die Sonne auf den Mond mehr als doppelt so stark einwirkt wie die Erde.

Es gibt nur zwei Körper, die eine Kraft auf den Mond ausüben, und zwar die Sonne und die Erde (alle andere Einflüsse vernachlässigen wir bei unserer Beschreibung), so dass die Resultierende der äußeren Kräfte auf den Mond $\mathbf{F} = \mathbf{F}_S + \mathbf{F}_E$ ist. In Abb. 2 sehen wir, dass diese Resultierende immer „mehr oder weniger" in Richtung Sonne zeigt. Mit „mehr oder weniger" wollen wir sagen, dass die Resultierende mit der Verbindungslinie zwischen Mond und Sonne immer einen spitzen Winkel bildet, der nie 25 Grad überschreitet.

Nach dem 2. Newtonschen Gesetz ist die Beschleunigung, mit der sich ein Körper bewegt, gleich dem Quotienten der Resultierenden der äußeren Kräfte und der Masse des Körpers. Dementsprechend bewegt sich der Mond mit der Beschleunigung $\mathbf{a} = (\mathbf{F}_S + \mathbf{F}_E)/m_M$. Diese zeigt, genauso wie die Vektorsumme der äußeren Kräfte, „mehr oder weniger" gegen die Sonne. Das bedeutet, wie wir bald sehen werden, dass die Mondbahn immer gegen die Sonne gekrümmt (also konkav) ist.

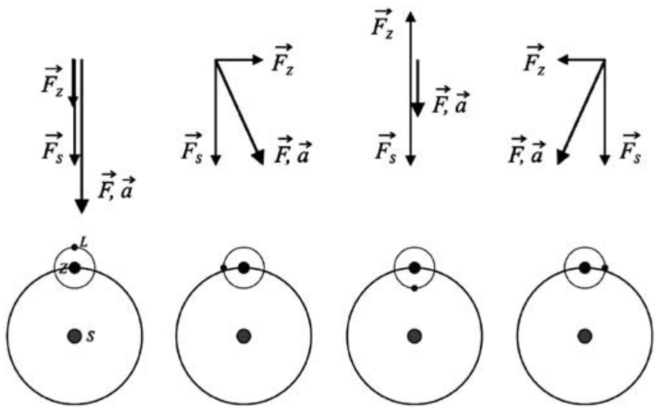

Abb. 2: Resultierende der äußeren Kräfte auf den Mond ($\mathbf{F}_S + \mathbf{F}_E$) und die entsprechende Beschleunigung ($\mathbf{a} = \mathbf{F}/m_M$). Die Abbildung zeigt vier typische Stellungen der Erde und des Mondes in Bezug auf die Sonne.

Ist es denn möglich, dass die Mondbahn immer nach innen gekrümmt ist, wo sich doch der Mond einmal vor und einmal hinter der Erde (von der Sonne aus betrachtet) befindet?

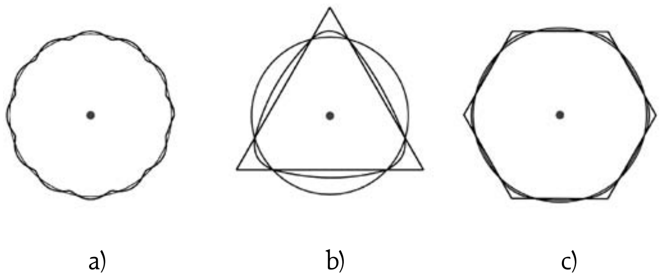

Abb. 3: Denkmögliche Mondbahnen:
a) konvex-konkaveMondbahn,
b), c) konkave Bahnen.

In Abb. 3a) ist eine Bahn gezeichnet, die konkave und konvexe Bahnelemente beinhaltet. Dass es auch rein konkave Bahnen gibt, kann man sich am einfachsten illustrieren, wenn man den Erdbahnkreis mit einem Vieleck überdeckt, so dass die Ecken des Vielecks außerhalb, die mittleren Teile der Seiten aber innerhalb des Kreises liegen (Abb. 3b für ein Dreieck und 3c für ein Sechseck). Rundet man die Ecken des Vielecks ein wenig nach innen und wölbt man die Mittelteile der Seiten nach außen, so bekommt man eine überall konkave Kurve, die sich jedoch teils innerhalb, teils außerhalb der Erdbahn befindet.

Geschwindigkeit, Beschleunigung und die Form der Bahn

Wir möchten uns eine klarere Vorstellung schaffen, unter welchen Bedingungen ein Mond (nicht notwendigerweise unser Mond), der in demselben Sinne um einen Planeten kreist wie der Planet um die Sonne, Schleifen macht bzw. wann die Bahn konkav ist. Wir werden zeigen, welche Bedingungen für mögliche Mondbahnen ausschlaggebend sind.

Schleifenbahn

Die Geschwindigkeit des Mondes in Bezug auf die Sonne ($\mathbf{v}$) ergibt sich aus der Summe der Geschwindigkeiten des Mondes in Bezug auf den Planeten ($\mathbf{v}_2$) und des Planeten in Bezug auf die Sonne ($\mathbf{v}_1$):

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2. \qquad (3)$$

Sehen wir uns zwei extreme Lagen des Mondes in Bezug auf die Sonne an: Wenn der Mond am weitesten von der Sonne entfernt ist und wenn der Mond der Sonne am nächsten ist (Abb. 4). Die Geschwindigkeit des Mondes in Bezug auf die Sonne ist am kleinsten, wenn der Mond der Sonne am nächsten ist, sie ist dann $v = v_1 - v_2$. Ist $v_1 > v_2$, so bewegt sich der Mond in dieselbe Richtung wie der Planet, doch mit kleiner Geschwindigkeit. Ist aber $v_1 < v_2$, so bewegen sich Mond und Planet in entgegengesetzte Richtungen.

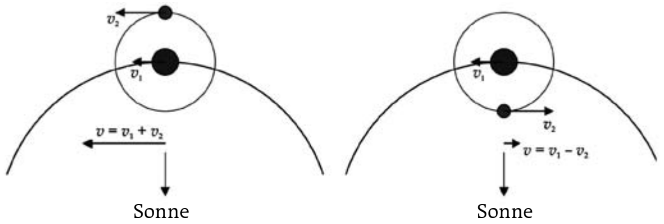

Abb.4: Die Geschwindigkeit des Mondes in Bezug auf die Sonne v. v_1 ist die Geschwindigkeit des Planeten relativ zur Sonne und v_2 ist die Mondgeschwindigkeit bezüglich des Planeten. In beiden Fällen ist v_1 kleiner als v_2.

Damit haben wir die Antwort auf die Frage bekommen, wann ein Mond Schleifen macht: Wenn die Geschwindigkeit, mit der er um den Planeten kreist, größer ist als die Geschwindigkeit des Planeten um die Sonne. Die Bedingung für das Auftreten von Schleifen ist somit

$$v_1 < v_2. \tag{4}$$

Wie groß sind die Geschwindigkeiten v_1 und v_2 im Falle unserer Erde und unseres Mondes? Der Mond kreist mit einer Geschwindigkeit von

$$v_M = 2\pi r_{EM}/t_M = 1 \text{ km/s}$$

um die Erde. Die Geschwindigkeit der Erde um die Sonne ist:

$$v_E = 2\pi r_{ES}/t_E = 30 \text{ km/s}.$$

Die Erde bewegt sich 30-mal schneller um die Sonne als der Mond um die Erde; deshalb ist $v_E > v_M$ und unser Mond, von der Sonne aus gesehen, macht keine Schleifen.

Wenn ein Mond Schleifen macht, lesen wir ohne Schwierigkeit aus der Abbildung 1, dass seine Bahn auf einigen Teilen nach innen gekrümmt (konkav) und auf anderen Teilen nach außen gewölbt (konvex) ist. Die Bahn ist immer konvex in der Umgebung derjenigen Positionen, wo der Mond der Sonne am nächsten ist, und konkav in der Umgebung der Lagen, wo der Mond am weitesten von der Sonne ist.

Krümmung einer Bahn ohne Schleifen

In diesem Abschnitt betrachten wir die Krümmungen von Bahnen, die *keine* Schleifen machen. Bedingung (4) ist damit *nicht* erfüllt, sodass $v_1 > v_2$ gilt.

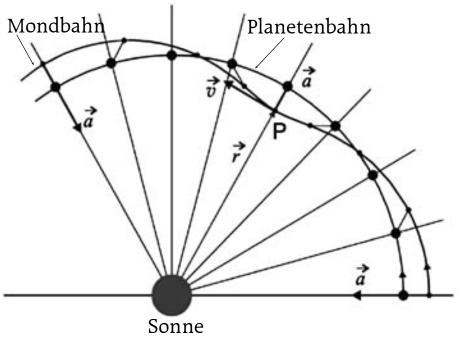

Abb. 5: Im sonnennächsten Punkt des Mondes P, steht die Mondgeschwindigkeit (**v**) normal auf den Ortsvektor des Mondes (**r**), die Beschleunigung (**a**) ist parallel (oder antiparallel) zum Ortsvektor. Die Tangentialbeschleunigung des Mondes ist gleich Null.

Aus Abb. 5 ersehen wir, dass die "kritischsten Punkte" bezüglich der Konkavität der Bahn diejenigen sind, an denen der Mond der Sonne am nächsten liegt (Punkt P in Abb. 5). Dort ist die Bahn am meisten nach außen gewölbt, wenn sie konvexe Teile hat, bzw. am wenigsten nach innen, wenn sie überall konkav ist. Sucht man also die Bedingung dafür, dass die Bahn überall konkav ist, so genügt es, die Bedingung für die Konkavität des sonnennächsten Teiles der Bahn zu finden.

In den Punkten, wo der Mond der Sonne am nächsten liegt, sind die Kräfte der Sonne und des Planeten auf den Mond entgegengesetzt gerichtet. Deshalb liegt die Resultierende und damit die gesamte Beschleunigung des Mondes auf der Geraden, welche die Sonne, den Mond und den Planeten verbindet. Ist die Kraft, die die Sonne auf den Mond ausübt, größer als die Kraft des Planeten, so ist die Resultierende gegen die Sonne gerichtet. Ist aber die Kraft der Sonne kleiner als die des Planeten, so zeigt die Resultierende in entgegengesetzte Richtung, d.h. von der Sonne weg.

Bahnkrümmung und Beschleunigung

Zuerst ist es notwendig, den Zusammenhang zwischen der Beschleunigung des sich bewegenden Körpers und der Bahngestalt, die der Körper beschreibt, festzustellen.

Die Beschleunigung gibt an, wie sich die Geschwindigkeit des Körpers ändert. Es kann sich der Betrag der Geschwindigkeit ändern, oder die Richtung, oder beide. Um denjenigen Anteil der Beschleunigung, die die Änderung des Geschwindigkeitsbetrags misst, von demjenigen, der sich auf Richtungsänderungen der Geschwindigkeit bezieht, zu unterscheiden, zerlegen wir die Beschleunigung in einen tangentialen und einen radialen Anteil:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_t + \mathbf{a}_r. \tag{5}$$

Die Tangentialbeschleunigung ($\mathbf{a}_t$), die die Änderung des Geschwindigkeitsbetrags bestimmt, ist immer parallel oder antiparallel zu der Geschwindigkeit, $\mathbf{a}_t \parallel \pm\mathbf{v}$. Die Normalbeschleunigung ($\mathbf{a}_r$), die die Richtungsänderungen der Geschwindigkeit misst, ist in jedem Augenblick senkrecht auf die Geschwindigkeit ($\mathbf{a}_r \perp \mathbf{v}$).

Bewegt sich ein Körper gleichförmig auf einer Kreisbahn, so ändert sich sein Geschwindigkeitsbetrag nicht (deshalb ist $\mathbf{a}_t = 0$), die ständige Änderung der Richtung ergibt sich aus dem normalen Anteil der Beschleunigung; wir wissen, dass in diesem Fall

$$a_r = v^2/R, \tag{6}$$

wobei v der Geschwindigkeitsbetrag und R der Radius der Kreisbahn sind. Die Normalbeschleunigung $\mathbf{a}_r$ ist gegen das Zentrum des Kreises gerichtet (deshalb auch der Name *zentripetale* Beschleunigung).

Der Ausdruck (6) für die Normalbeschleunigung gilt für alle

Bahnkurven zu einem beliebigen Zeitpunkt. Nur verändert sich im Allgemeinen nicht nur die Richtung, sondern auch die Größe von $\mathbf{a}_r$ längst die Bahnkurve. Man nennt dann $1/R$ die Krümmung der Kurve. Auf jedem Bogenelement der Kurve kann man sich einen Kreis so vorstellen, dass er sich der Kurve „am besten anpasst" (Krümmungskreis mit Radius R, siehe Abb. 6)

Aus dem Ausdruck (6) schließen wir, dass die Normalbeschleunigung also nicht von der Änderung der Geschwindigkeit, sondern lediglich von der Geschwindigkeit selbst und von der *Gestalt* der Bahn abhängt.

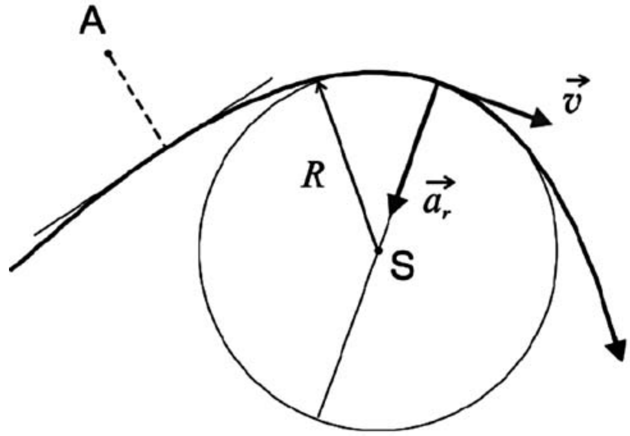

Abb. 6: Die Krümmung der Bahnkurve, auf der sich ein Körper bewegt, ist durch den Krümmungsradius R bestimmt. Das Zentrum des Krümmungskreises (S) ist immer auf jener Seite der Bahnkurve, wohin die Normalbeschleunigung zeigt. Das meinen wir, wenn wir sagen, dass die Bahnkurve in Richtung der Normalbeschleunigung gekrümmt ist. Vom Punkt S aus gesehen ist die Kurve überall nach innen gewölbt (konkav). Von Punkt A in Richtung der gestrichelten Linie gesehen, ist aber die Kurve nach außen gewölbt (konvex).

Für uns ist es wichtig festzustellen, dass die Bahnkurve immer gegen das Zentrum des Krümmungskreises gewölbt ist. Mit anderen Worten, die Bahnkurve ist in Richtung der Normalbeschleunigung gekrümmt. Beobachtet man aus einem gewissen Punkt einen Teil der Bahnkurve, so sieht man diese nach innen gewölbt, wenn das Zentrum des Krümmungskreises auf derselben Seite der Kurve wie der Beobachter liegt, sie ist aber nach außen gewölbt, wenn das Zentrum des Krümmungskreises auf der anderen Seite der Kurve liegt.

Die Bedingung für die Konkavität der Bahn

Unter welchen Bedingungen ist die Bahnkurve in den „kritischsten Punkten", d.h. dort, wo der Mond am nächsten der Sonne ist, konkav? Sie ist, von der Sonne aus gesehen, konkav, wenn die Normalbeschleunigung gegen die Sonne gerichtet ist (siehe Punkt P in Abb. 5). Das ist aber der Fall, wenn die Resultierende der äußeren Kräfte, $\mathbf{F} = \mathbf{F}_S + \mathbf{F}_P$ ($\mathbf{F}_P$ ist die Kraft des Planeten auf den Mond), gegen die Sonne zeigt. Das geschieht, wenn $F_S > F_P$ ist, was unmittelbar aus der Abb. 5 ersichtlich ist. Da $a \approx F$ und auch $a_S \approx F_S$ und $a_P \approx F_P$, so kann man die Bedingung, dass die Bahnkurve überall konkav ist, auch als

$$a_S > a_P \tag{7}$$

schreiben. Ist jedoch $a_S < a_P$, so ist die Bahn in den der Sonne nächstliegenden Punkten konvex, und die Bahn ist teilweise nach innen und teilweise nach außen gewölbt.

Die Gestalt von Mondbahnen

Nun sind wir in der Lage, alle möglichen Bahngestalten zu beschreiben, die ein Mond eines Planeten relativ zu einer Sonne durchlaufen kann.

Um die Beschreibung einfacher und transparenter zu machen, führen wir zwei Quotienten ein: den Quotient des Abstandes des Planeten von der Sonne (r_1) und des Mondes von dem Planeten (r_2),

$$\eta = r_1/ r_2, \tag{8}$$

und den Quotient der Umlaufszeit des Planeten um die Sonne (t_1) und des Mondes um den Planeten (t_2):

$$q = t_1/ t_2. \tag{9}$$

Nun drücken wir die Verhältnisse v_1/v_2 und a_S/a_P durch die Quotienten η und q aus. Das Verhältnis der Geschwindigkeiten ist

$$v_1/v_2 = (2\pi r_1/t_1)/ (2\pi r_2/t_2) = (r_1/r_2) \cdot (t_2/t_1) = \eta /q. \tag{10}$$

Aus $a_P = v_2^2/r_2$ und $a_S = v_1^2/r_1$ erhalten wir

$$a_S/a_P = (v_1^2/r_1)(v_2^2/r_2) = (v_1/v_2)^2 \cdot (r_2/r_1) =$$

$$(\eta /q)^2 \cdot (1/\eta) = \eta /q^2. \tag{11}$$

Die Bedingungen für die unterschiedlichen Bahngestalten, die wir im 3. Abschnitt erhalten haben, drücken wir nun durch die Quotienten η und q aus.

i) Die Mondbahn macht Schleifen, wenn $v_1 < v_2$. Dies kann man durch (10) als $\eta/q < 1$ beziehungsweise $\eta < q$ schreiben.

ii) Wenn die Mondbahn keine Schleifen macht ($\eta > q$), ist die Bahn überall konkav, wenn $a_S > a_P$ beziehungsweise $a_S/a_P > 1$; das lässt sich durch (11) als $\eta/q^2 > 1$ beziehungsweise $\eta > q^2$ auszudrücken.

iii) Wenn die Mondbahn keine Schleifen macht ($\eta > q$), aber $a_S < a_P$ (d.h. $\eta < q^2$) gilt, dann ist die Bahn nicht überall konkav. Für eine teilweise konkave und teilweise konvexe Bahn gilt also $q < \eta < q^2$.

In Abb. 7 sind einige verschiedene Möglichkeiten von Bahnen, die der Mond relativ zur Sonne durchlaufen kann, in Abhängigkeit von den Parametern η in q, gezeigt.

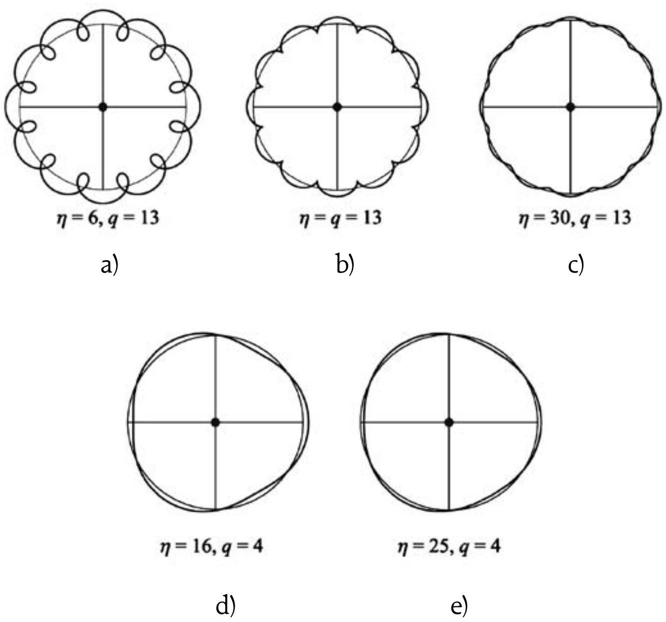

Abb. 7: Die Gestalten der Bahnen für verschiedene Werte der Parameter η und q.
a) $\eta = 6$, $q = 13$, $\eta < q$: die Bahn macht Schleifen.
b) $\eta = q = 13$ ist der Grenzfall, wenn die Schleifen zu Punkten schrumpfen.
c) $\eta = 30$, $q = 13$, $q < \eta < q^2$, die Bahn hat keine Schleifen, die Gebiete um die von der Sonne am weitesten entfernten Punkten sind konkav, die Gebiete um die nächstliegenden Punkte aber konvex.
d) $\eta = q^2 = 16$ (q = 4); das ist der Grenzfall, wenn sich die konvexen Teile der Bahn ebnen: sie sind geradlinig (nicht mehr konvex, aber noch nicht konkav).
e) $\eta = 25$, $q = 4$, $\eta > q^2$, die Bahn ist überall konkav, d.h. gegen die Sonne gekrümmt.

Die Parameter η und q

Die Parameter η und q sind nicht unabhängig voneinander – sie sind durch das dritte Keplersche Gesetz verbunden. Für kreisförmige Bahnen eines Planeten um eine Sonne gilt

$$m_P (v_1^2/r_1) = G\, m_P\, m_S / r_1^2 \,. \qquad (12)$$

Mit der Beziehung $v_1 = 2\pi\, r_1/t_1$, erhalten wir aus (12)

$$r_1^3/t_1^2 = G\, m_S /(4\pi^2), \qquad (13)$$

das 3. Keplersche Gesetz für eine kreisförmige Bahn.

In ähnlicher Weise kann man das 2. Newtonsche Gesetz auch für die Berechnung der Mondbeschleunigung in Bezug auf den Planeten verwenden:

$$m_M (v_2^2/r_2) = G\, m_M\, m_P / r_2^2 \,. \qquad (14)$$

m_M ist die Masse des Mondes, $a_P = v_2^2/r_2$ ist die zentripetale Beschleunigung des Mondes in Bezug auf den Planeten. Beachtet man, dass $v_2 = 2\pi\, r_2/t_2$, so erhält man aus (14)

$$r_2^3/t_2^2 = G\, m_P /(4\pi^2). \qquad (15)$$

Dividiert man den Ausdruck (13) durch (15), so erhält man

$$(r_1/ r_2)^3 = (m_S/m_P)\, (t_1/t_2)^2$$

und daraus

$$m_S/m_P = (r_1/ r_2)^3 \cdot (t_2/t_1)^2 = \eta^3/q^2. \qquad (16)$$

In einem Sonnensystem sind also die Parameter η und q durch (16) verbunden.

Es sei $\mu = m_S/m_P$ (für unsere Erde und den Mond ist $\mu = 3{,}3.10^5$). Mit Hilfe von (16) kann man η durch q ausdrücken:

$$\eta = \mu^{1/3}\, q^{2/3}. \qquad (17)$$

Zum Schluss möchten wir noch folgende Frage stellen: Könnte unser Mond, bei gleichem Quotient der Massen m_S/m_E, einen anderen Bahntyp annehmen?

Der Übergang von einer konkaven zu einer konvex/konkaven Bahn liegt bei $\eta = q^2$. Mit $\eta = \mu^{1/3}\, q^{2/3}$ ergibt sich für unseren Mond $q = \mu^{1/4} = 24$. Diese Bedingung bedeutet, dass die Umlaufzeit des Mondes um die Erde $t_2 = t_1/q = = t_1/24 = 15$ Tage sein müsste. Als Radius der Mondbahn um die Erde erhalten wir in diesem Fall unter Benutzung von (15)

$$r_2 = (G\, m_P\, t_2^2/(4\pi^2))^{1/3} = 260{,}000 \text{ km} \,. \qquad (18)$$

Schleifenbahnen würden bei $\eta = q$ beginnen, d. h. bei $q = \mu = 3{,}3.10^5$. Eine ähnliche Rechnung wie vorhin ergibt eine Umlaufzeit von $t_2 = t_1/q = 96$ s und einen Radius von $r_2 = 450$ km, was etwa ein Fünfzehntel des Erdhalbmessers darstellt.

Bei unverändertem Verhältnis m_S/m_E könnte also der Mond eine Bahn durchlaufen, die teils konkav und teils konvex wäre, wenn der Abstand des Mondes von der Erde unter 260 000 km läge. Da sich der Abstand des Mondes von der Erde allmählich vergrößert, wird dies nicht eintreten.

Zusammenfassung

Wir haben ein vereinfachtes Bild betrachtet und angenommen, dass sich der Planet um die Sonne und der Mond um den Planeten auf Kreisbahnen und in demselben Drehsinn auf derselben Ebene bewegen. Wir haben gezeigt, dass drei verschiedene Gestalten der Mondbahn zu unterscheiden sind:

1. der Mond macht Schleifen,
2. der Mond macht keine Schleifen, seine Bahn ist teils konkav, teils konvex,
3. die Bahn ist überall konkav. Welche der drei Möglichkeiten auftritt, hängt von zwei Parametern ab, vom Quotienten der Abstände des Planeten von der Sonne und des Mondes von dem Planeten ($\eta = r_1/ r_2$), und vom Quotienten der Umlaufzeiten des Planeten um die Sonne und des Mondes um den Planeten ($q = t_1/ t_2$).

Die Bahn unseres Mondes ist immer gegen die Sonne gekrümmt. Wäre der Abstand des Mondes von der Erde weniger als 260.000 km, so würde seine Bahn um die Sonne (bei unverändertem Quotienten der Sonnen- und Erdmasse) abwechselnd konvex und konkav sein. Die Mondbahn um die Sonne könnte aber niemals Schleifen haben.

Literatur

[1] I. Kuščer, A. Moljk, T. Kranjc, J. Petenelj, Fizika za srednje šole (Physik für Mittelschulen), DZS, Laibach 1999

[2] A. Unsöld, Der neue Kosmos, Springer-Verlag Berlin-Heidelberg-New York, 7. Auflage 2002

[3] P. Moore, Atlas of the Universe, Octopus Publishing Group LTD, London 1997

[4] W. T. Griffith, The physics of everyday phenomena, McGraw-Hill Higher Education, 2004

[5] L. D. Landau, A. I. Kitaigorodsky, Physical Bodies, Mir Publishers, Moscow 1980