

# Filtro de Kalman-Bucy

1.	<i>Introducción</i>	1
2.	<i>Observación de una Señal</i>	2
3.	<i>Idea de Estimación</i>	4
3.1.	Problema Elemental de Estimación	4
3.2.	Medidas con Distinta Dispersión	6
3.3.	Idea de Estimación Recurrente	6
4.	<i>Estimación de una Función</i>	8
4.1.	Caso de una Función Estática	8
4.2.	Estimación Recurrente de Funciones Estáticas	9
4.3.	Estimación Recursiva de Funciones Lineales Dinámicas	11
5.	<i>Estimación de Sistemas</i>	14
5.1.	Sistemas Estáticos	14
5.2.	Estimación Recurrente de Sistemas Lineales Estáticos	15
6.	<i>Estimación Recursiva de Sistemas Lineales Dinámicos</i>	16
7.	<i>Bibliografía y datos de interés</i>	19

## 1. Introducción

Es de interés en el mundo del control automático poder modelizar un proceso y que en dicho modelo queden reflejadas, explícitamente todas las variables que intervienen en su dinámica. La forma más popular que cumple con esta condición es la llamada representación en variables de estado. Otra inquietud que surge una vez obtenido este modelo es el poder obtener información de la dinámica del proceso sin necesidad de medir todas las variables, sino que, haciendo uso del conocimiento de su dinámica poder *inferir* u *observar* algunas de ellas. El tercer problema surge cuando intentamos utilizar este modelo con mediciones contaminado por algún tipo de incertidumbre. Estos tres conceptos se abordan con la llamada estimación estadística de señales y su versión más conocida es el Filtro de Kalman-Bucy que pretendemos abordar en este espacio.

El tratamiento de este tópico está ligado a dos aspectos del control: por un lado a la *observación* o *estimación* de estados internos de un sistema y por otro a esta misma observación cuando las mediciones están contaminadas por algún tipo de perturbación. Dividiremos el trabajo en tres partes: la primera será una revisión de la representación de un proceso mediante variables de estado y su observación. La segunda parte estará dedicada a

mostrar la estimación de señales obtenidas con un error y por último presentaremos la versión clásica del filtrado estadístico.

## 2. Observación de una Señal

La forma más común de expresar un sistema o modelo de una planta es por su relación entrada-salida forma que en muchos casos es suficiente y ofrece buenos resultados. Por ejemplo un motor podría quedar expresado como una función de transferencia que vincula la tensión de armadura, su entrada, con el ángulo girado por su eje, siendo ésta su salida. De esta forma expresado el modelo del sistema resulta cómodo pero adolece de algunas limitaciones: por ejemplo no podemos inferir de él nada acerca de la corriente del motor o su velocidad. Para subsanar este inconveniente se ha pensado en expresar los sistemas de otra manera llegando así a la llamada representación en variables de estado en donde quedan explicitadas las variables internas del sistema. Veamos esto en un ejemplo simple: un generador de corriente continua es controlado por campo; este generador alimenta un motor del cual se pretende controlar el ángulo girado por su eje.

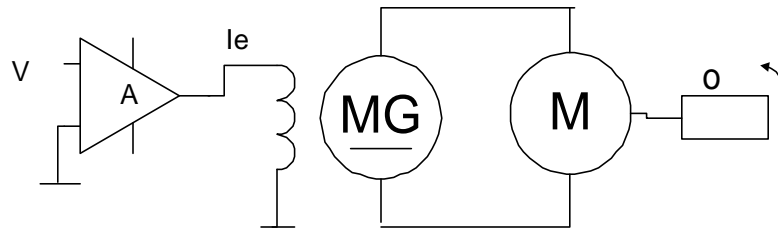


Figura 1. Motor de corriente continua comandado por un Generador

Una muy simplificada versión de la función de transferencia de este sistema es la presentada en la figura siguiente, en donde se explicita la tensión de excitación, la corriente de excitación, la velocidad y el ángulo girado.

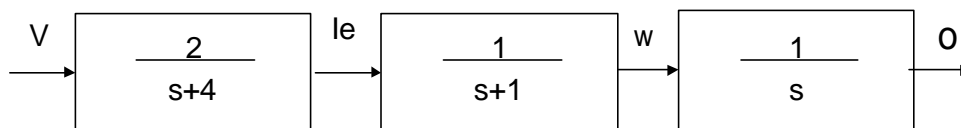


Figura 2. Función de Transferencia del Motor de corriente continua comandado por un Generador

Si expresamos esta función de transferencia en forma de leyes físicas resultará:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{q}} &= w \\ \dot{w} + w &= I_e \\ I_e + 4I_e &= 2v\end{aligned}\tag{-1}$$

o escrito en forma matricial será:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \dot{w} \\ I_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ w \\ I_e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} v\tag{-2}$$

que en una escritura más compacta resulta,

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu\tag{-3}$$

en donde  $x$  es el llamado vector de estados del sistema,  $A$  la matriz de transición,  $B$  la matriz de entrada y  $u$  la variable de entrada o actuación. También existe la versión discreta de esta representación en donde el modelo no se expresa en función de la derivada de los estado sino en función del valor del mismo un instante posterior, lo cual se escribe como:

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= \begin{bmatrix} \mathbf{q}_{k+1} \\ w_{k+1} \\ I_{e\,k+1} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \mathbf{q}_k \\ w_k \\ I_{e\,k} \end{bmatrix} + Bv_k = Ax_k + Bu_k \\ y_k &= \mathbf{q}_k = [I, 0 \dots] x_k = Cx_k\end{aligned}\tag{-4}$$

el subíndice  $k$  simboliza el instante en que se considera la muestra. En esta ecuación se ha agregado un segundo elemento  $y$  que representa la variable de salida que no necesariamente coincide con un estado interno. La relación entre salida y estados está dada por la matriz  $C$ .

De esta manera queda expresado el sistema con las variables físicas que nos importan explícitamente descriptas. Esta es la llamada representación en variables de estado. O sea que midiendo ángulo, velocidad y corriente tenemos completamente determinada nuestra planta. Pero, incluso en forma intuitiva podemos pensar que no se necesitaría medir la velocidad ya que, midiendo el ángulo podríamos derivar o tomar la diferencia entre dos muestras sucesivas y calcular la velocidad. Si hiciéramos esto, estaríamos *observando* uno de los estados internos del sistema. Veamos como construir un *observador* de modo de no necesitar una medida real de todos los estados ya sea porque no queremos o no podemos medirlos.

El primer observador que se nos podría ocurrir es directamente reproducir el modelo de la planta, es decir

$$\begin{cases} \hat{x}_{k+1} = A\hat{x}_k + Bu_k \\ \hat{y}_k = C\hat{x}_k \end{cases}\tag{-5}$$

en donde  $\hat{x}$  simboliza la observación o estimación del estado  $x$  e  $\hat{y}$  es la observación de la salida del sistema. Esta última señal no sería necesario observarla ya que es una medición pero nos sería útil para comprobar la bondad del observador. Si conociéramos con exactitud las matrices  $A$  y  $B$  y el punto de partida del vector de estados, este observador funcionaría sin error en la estimación y no habría inconveniente en utilizarlo tal como está descrito. Pero en la práctica no se cumplen estas tres condiciones por lo que es preciso sofisticar este esquema agregándole una corrección para este desconocimiento o error. Una forma simple o intuitiva de hacer esto es comparando la salida real con la estimada por el observador e introducir un término corrector de acuerdo a esta diferencia.

$$\hat{x}_{k+1} = A\hat{x}_k + Bu_k + L(y_k - \hat{y}_k) = A\hat{x}_k + Bu_k + L(y_k - C\hat{x}_k) \quad -6$$

En donde la matriz  $L$  es el factor de corrección o realimentación. Si no hay error de observación, este último término no participa en el cálculo de la estimación y el modelo resulta como el planteado anteriormente. Se puede demostrar que este sistema observador tiende al real con lo que, en nuestro ejemplo, obtendríamos una observación o estimación de la corriente y velocidad basada en el conocimiento del ángulo y la tensión de excitación. El único parámetro indefinido es la matriz  $L$ , la cual se elige, para asegurar la estabilidad y la velocidad de convergencia.

El problema se complica cuando las mediciones están afectadas por algún tipo de incertidumbre, como ser ruido u otra causa. En ese caso existe una generalización del concepto de observación planteado por primera vez y en forma simultánea por Kalman en EEUU y por Bucy en Francia. Es decir, el filtro de Kalman-Bucy es un observador de estados de un sistema en presencia de perturbaciones estocásticas o estadísticas. En una forma muy resumida podríamos decir que el filtrado estadístico nos brinda una manera de calcular óptimamente la matriz  $L$  del observador anterior. Para comprender el concepto del filtrado estadístico es conveniente revisar la idea de estimación de variables medidas con alguna incertidumbre, que es lo que explicaremos a continuación.

### 3. Idea de Estimación

Es importante rever el concepto de estimación para el caso de tener diferentes mediciones y queramos hallar la mejor estimación. Convengamos que se entiende por estimación el mecanismo para obtener un valor a partir de una información incompleta y por supuesto que es importante obtener la mejor estimación posible. Un método sencillo y usual para su cálculo es minimizar la suma de los cuadrados de las diferencias entre la estimación y las mediciones

$$J = \sum (x - z_i)^2 \quad -7$$

#### 3.1. Problema Elemental de Estimación

El caso elemental de estimación es el de calcular una magnitud  $x$  a partir de mediciones  $z$ . Cada una de las mediciones  $z$  tiene un error en la medición  $v$  el cual no conocemos. Es decir

$$z_i = x + v_i \quad -8$$

Suponemos también que este error tiene una cierta varianza dada por la siguiente ecuación

$$E\{v^2\} = \mathbf{s}^2 \quad -9$$

El caso más elemental es tener dos mediciones. Aquí, la forma de obtener la mejor estimación de  $x$  es minimizando el siguiente funcional

$$J = \sum (x - z_i)^2 = (z_1 - x)^2 + (z_2 - x)^2 = v_1^2 + v_2^2 \quad -10$$

Debemos hallar el valor de  $x$  que haga mínimo  $J$ . La forma de hacerlo es derivar  $J$  con respecto a  $x$

$$\left. \frac{\partial J}{\partial x} \right|_{x=\hat{x}} = -2(z_1 - \hat{x}) - 2(z_2 - \hat{x}) = 0 \quad -11$$

de donde resulta, algo que ya sabemos,

$$\hat{x} = \frac{z_1 + z_2}{2} \quad -12$$

El error de estimación se calcula como la diferencia entre el valor real y el estimado

$$\begin{aligned} e = \hat{x} - x &= \frac{z_1 + z_2}{2} - x = \frac{x + v_1}{2} + \frac{x + v_2}{2} - x \\ &= \frac{v_1 + v_2}{2} \end{aligned} \quad -13$$

y la varianza o dispersión de la estimación será

$$E\{e^2\} = \frac{E\{v_1^2\} + E\{v_2^2\}}{4} = \frac{\mathbf{s}^2}{2} \quad -14$$

Como es obvio, vemos que se reduce a la mitad con respecto a la de las mediciones aisladas

Algo similar podemos plantear para  $n$  mediciones donde la estimación es el promedio de esas  $n$  lecturas

$$\hat{x} = \frac{z_1 + \dots + z_n}{n} \quad -15$$

el error es la  $n$ -sima parte del error de cada medición

$$e = \frac{v_1 + \dots + v_n}{n} \quad -16$$

y también se reduce la varianza

$$E\{e^2\} = \frac{\mathbf{s}^2}{n} \quad -17$$

### 3.2. Medidas con Distinta Dispersión

Supongamos ahora que nuestras mediciones tienen distinta dispersión, ya sea porque fueron obtenidas con distintos instrumentos o en diferentes instantes de tiempo. Las medidas son:

$$\begin{aligned} z_1 &= x + v_1 & E\{v_1\} &= 0 & E\{v_1^2\} &= \mathbf{s}_1^2 \\ z_2 &= x + v_2 & E\{v_2\} &= 0 & E\{v_2^2\} &= \mathbf{s}_2^2 \end{aligned} \quad -18$$

En el caso particular de dos mediciones, el funcional a minimizar sería,

$$J = \sum \frac{(\hat{x} - x_i)^2}{\mathbf{s}_i^2} = \frac{v_1^2}{\mathbf{s}_1^2} + \frac{v_2^2}{\mathbf{s}_2^2} = \frac{(z_1 - x)^2}{\mathbf{s}_1^2} + \frac{(z_2 - x)^2}{\mathbf{s}_2^2} \quad -19$$

derivando como en el caso anterior,

$$\left. \frac{\partial J}{\partial x} \right|_{x=\hat{x}} = -2 \frac{(z_1 - \hat{x})}{\mathbf{s}_1^2} - 2 \frac{(z_2 - \hat{x})}{\mathbf{s}_2^2} = 0 \quad -20$$

la mejor estimación resulta un promedio ponderado de las muestras dando más peso a la de menor varianza

$$\hat{x} = \frac{\mathbf{s}_1^2 \mathbf{s}_2^2}{\mathbf{s}_1^2 + \mathbf{s}_2^2} \left[ \frac{z_1}{\mathbf{s}_1^2} + \frac{z_2}{\mathbf{s}_2^2} \right] \quad -21$$

En este caso el error de estimación se calcula del siguiente modo

$$e = \hat{x} - x = \frac{\mathbf{s}_1^2 \mathbf{s}_2^2}{\mathbf{s}_1^2 + \mathbf{s}_2^2} \left[ \frac{z_1}{\mathbf{s}_1^2} + \frac{z_2}{\mathbf{s}_2^2} \right] - x = \frac{\mathbf{s}_1^2 v_2 + \mathbf{s}_2^2 v_1}{\mathbf{s}_1^2 + \mathbf{s}_2^2} \quad -22$$

siendo su varianza

$$E\{e^2\} = \frac{\mathbf{s}_1^2 \mathbf{s}_2^2}{\mathbf{s}_1^2 + \mathbf{s}_2^2} \quad -23$$

$$\frac{1}{E\{e^2\}} = \frac{1}{\mathbf{s}_1^2} + \frac{1}{\mathbf{s}_2^2} \quad -24$$

similar a un paralelo de resistencias, siempre menor que cualquiera de las componentes

### 3.3. Idea de Estimación Recurrente

Para caso de n mediciones podríamos pensar en calcular la estimación en forma recursiva. Es decir, si la estimación es calculada de acuerdo a la siguiente ecuación,

$$\hat{x}_n = \frac{z_1 + \dots + z_n}{n} \quad -25$$

y luego, obtenemos una medición  $n+1$ , la nueva estimación será:

$$\hat{x}_{n+1} = \frac{z_1 + \dots + z_{n+1}}{n+1} = \frac{z_1 + \dots + z_n}{n} \cdot \frac{n}{n+1} + \frac{z_{n+1}}{n+1} \quad -26$$

con lo que se deduce que la nueva estimación se puede expresar en función de la anterior de la forma,

$$\hat{x}_{n+1} = \hat{x}_n \frac{n}{n+1} + \frac{z_{n+1}}{n+1} \quad -27$$

$$\hat{x}_{n+1} = \hat{x}_n - \hat{x}_n \frac{1}{n+1} + \frac{z_{n+1}}{n+1} \quad -28$$

Si operamos algebraicamente podemos expresar la estimación como sigue:

$$\hat{x}_{n+1} = \hat{x}_n + \frac{1}{n+1} (z_{n+1} - \hat{x}_n) \quad -29$$

La nueva estimación es la anterior más un factor de corrección proporcional al *error* o diferencia entre la nueva medida y su predicción o estimación.

A su vez podemos interpretar esta forma de calcular la nueva estimación como una predicción a partir de dos mediciones con distinta varianza, o sea:

$$\hat{x}_n \text{ con varianza } \frac{\mathbf{S}^2}{n} \text{ y}$$

$$z_{n+1} \text{ con varianza } \mathbf{S}^2$$

ya que, considerando esto y según lo explicado con anterioridad, podríamos calcular la nueva estimación como:

$$\hat{x}_{n+1} = \frac{\mathbf{S}^2}{\mathbf{S}^2 + \frac{\mathbf{S}^2}{n}} \hat{x}_n + \frac{\frac{\mathbf{S}^2}{n}}{\mathbf{S}^2 + \frac{\mathbf{S}^2}{n}} z_{n+1} \quad -30$$

lo que es lo mismo que decir,

$$\hat{x}_{n+1} = \frac{n}{n+1} \hat{x}_n + \frac{1}{n+1} z_{n+1} = \hat{x}_n + \frac{1}{n+1} (z_{n+1} - \hat{x}_n) \quad -31$$

y en este caso la varianza del error es

$$\frac{1}{E_{n+1}\{e^2\}} = \frac{1}{E_n\{e^2\}} + \frac{1}{\mathbf{S}^2} = \frac{n}{\mathbf{S}^2} + \frac{1}{\mathbf{S}^2} \quad -32$$

o lo que es similar a:

$$E_{n+1}\{e^2\} = \frac{\mathbf{S}^2}{n+1} \quad -33$$

## 4. Estimación de una Función

### 4.1. Caso de una Función Estática

Hasta el momento hemos estimado el mejor valor de una variable a partir de  $n$  mediciones pero ¿qué pasaría si la medición no fuese directa sino una función de la medición? Este sería el caso de querer estimar la corriente por una resistencia a partir de la medición de la tensión. Aquí habría una relación lineal entre la medición (tensión) y la variable a estimar (corriente).

Ahora

$x$  es la variable a estimar por ejemplo la corriente

$z$  es la medición por ejemplo la tensión

$v$  es el error cometido en la medición de la tensión

$h$  es la relación entre medición y estimación, en nuestro caso la resistencia

De lo anterior resulta

$$z = hx + v \quad -34$$

supongamos además que el error de medición tiene las siguientes características estadísticas

$$\begin{aligned} E\{v\} &= 0 \\ E\{v^2\} &= \mathbf{s}_v^2 \end{aligned} \quad -35$$

El problema es entonces, minimizar el error de estimación de la corriente. Para ello podemos tener una estimación de la tensión medida que será

$$\hat{z} = h\hat{x} \quad -36$$

con lo que el funcional a minimizar lo podremos definir como

$$J = [z - hx]^2 \quad -37$$

Derivando e igualando a cero para minimizar,

$$\left. \frac{\partial J}{\partial x} \right|_{x=\hat{x}} = -2h[z - h\hat{x}] = 0 \quad -38$$

$$h^2 \hat{x} = hz \quad -39$$

de donde resulta, lo obvio que la mejor estimación de la corriente es la tensión medida dividida la resistencia

$$\hat{x} = \frac{1}{h} z \quad -40$$

el error será

$$e = x - \hat{x} = x - \frac{1}{h} z = x - \frac{1}{h} (hx + v) \quad -41$$



$$e = -\frac{1}{h}v = -kv \quad -42$$

si  $v$  es el error en la medición,  $kv$  es el error en la estimación. Si  $h$  es grande el error baja. Lo que es lógico si queremos medir corriente es necesario tener una resistencia grande para tener un valor de tensión más alto.

La dispersión en la estimación es

$$E\{e^2\} = k^2 E\{v^2\} = k^2 \mathbf{s}_v^2 = \frac{1}{h^2} \mathbf{s}_v^2 \quad -43$$

Lo mismo para la dispersión: al aumentar  $h$  disminuye la varianza

#### 4.2. Estimación Recurrente de Funciones Estáticas

Supongamos el mismo caso anterior pero tenemos  $n$  mediciones de la tensión, estimamos la corriente para esas  $n$  mediciones y en un instante posterior obtenemos una nueva medición. Veamos cómo podemos calcular la nueva corriente a partir de su estimación anterior y la nueva medición de tensión.

Hasta la medición  $n$ , la dispersión en la corriente  $x$  es

$$E\{(x - \hat{x}_n)^2\} = n_n = E\{e_n^2\} \quad -44$$

Es decir tenemos dos formas de estimar  $x$ : una a partir de  $\hat{x}_n$  y otra a partir de la nueva medición  $z_{n+1}$ . Estamos en el caso de dos mediciones con distinta dispersión. Por lo tanto el funcional a minimizar se puede definir como la suma de un error de estimación con dispersión  $n$  y uno de medición con dispersión  $\mathbf{s}_v^2$

Definimos como siempre el funcional suma de las dos formas de estimar  $x$

$$J = \frac{1}{2} \left[ (x - \hat{x}_n)^2 \frac{1}{n_n} + (z_{n+1} - hx)^2 \frac{1}{\mathbf{s}_v^2} \right] \quad -45$$

$$\left. \frac{\partial J}{\partial x} \right|_{\hat{x}_{n+1}} = \frac{1}{n_n} (\hat{x}_{n+1} - \hat{x}_n) - \frac{h}{\mathbf{s}_v^2} (z_{n+1} - h\hat{x}_{n+1}) = 0 \quad -46$$

$$\left[ \frac{1}{n_n} + \frac{h^2}{\mathbf{s}_v^2} \right] \hat{x}_{n+1} = \frac{1}{n_n} \hat{x}_n + \frac{h}{\mathbf{s}_v^2} z_{n+1} = \left[ \frac{1}{n_n} + \frac{h^2}{\mathbf{s}_v^2} \right] \hat{x}_n + \frac{h}{\mathbf{s}_v^2} (z_{n+1} - h\hat{x}_n) \quad -47$$

la nueva estimación es

$$\hat{x}_{n+1} = \hat{x}_n + \frac{n_n h}{\mathbf{s}_v^2 + h^2 n_n} (z_{n+1} - h\hat{x}_n) \quad -48$$

para facilitar la notación hagamos

$$\begin{cases} \frac{1}{p_n} = \frac{1}{n_n} + \frac{h^2}{\mathbf{S}_v^2} \\ w_n = p_n \frac{h}{\mathbf{S}_v^2} \end{cases} \quad -49$$

lo que lleva a una forma cómoda de expresar recursivamente la nueva estimación

$$\hat{x}_{n+1} = \hat{x}_n + w_n (z_{n+1} - h\hat{x}_n) \quad -50$$

en este caso el error será

$$e_{n+1} = \hat{x}_{n+1} - x = \hat{x}_n - x + \hat{x}_{n+1} - \hat{x}_n = \hat{x}_n - x + w_n (v_n + hx - h\hat{x}_n) \quad -51$$

$$e_{n+1} = [1 - w_n h](\hat{x}_n - x) + w_n v_n \quad -52$$

Si suponemos incorrelación entre la estimación y la nueva medición, la dispersión  $n_{n+1}$  de la estimación será

$$E\{e_{n+1}^2\} = [1 - w_n h]^2 n_n + w_n^2 \mathbf{S}_v^2 = n_{n+1} \quad -53$$

pero de la relación entre  $n$  y  $p$  se deduce

$$\begin{aligned} E\{e_{n+1}^2\} &= p_n [1 - w_n h] + w_n^2 \mathbf{S}_v^2 \\ &= p_n - p_n h w_n + w_n^2 \mathbf{S}_v^2 = p_n - w_n^2 \mathbf{S}_v^2 + w_n^2 \mathbf{S}_v^2 = p_n \end{aligned} \quad -54$$

o sea

$$E\{e_{n+1}^2\} = p_n \quad -55$$

$$n_{n+1} = p_n \quad -56$$

En este caso  $p$  y  $n$  solo están separadas una medición

única incógnita,  $p$  inicial.

Se considera una dispersión inicial infinita

$$n_0 = \infty \quad -57$$

$$\frac{1}{n_0} = 0 \quad -58$$

y según lo anterior

$$\frac{1}{n_1} = \frac{1}{p_0} = \frac{h^2}{\mathbf{S}_v^2} \quad -59$$

en resumen

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{x}_{n+1} = \hat{x}_n + w_n (z_{n+1} - h\hat{x}_n) \\ w_n = p_n \frac{h}{\mathbf{s}_v^2} \\ p_n = n_n \frac{1}{1 + \frac{h^2}{\mathbf{s}_v^2} n_n} \end{array} \right. \quad -60$$

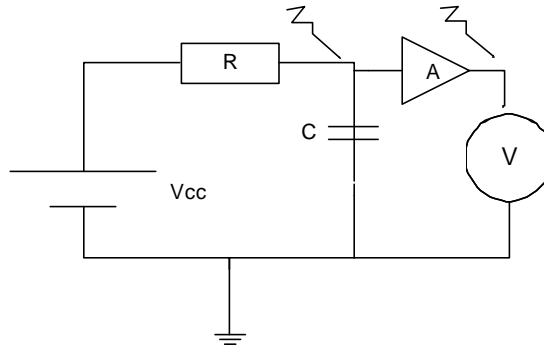
En la tabla siguiente se ve como varía  $n$  o  $p$  es decir la dispersión de la estimación y el factor de corrección  $w$  a medida que se incrementa el número de mediciones.

	w	p	n
0	$\frac{1}{h}$	$\frac{\mathbf{s}^2}{h^2}$	$\infty$
1	$\frac{1}{2h}$	$\frac{\mathbf{s}^2}{2h^2}$	$\frac{\mathbf{s}^2}{h^2}$
2	$\frac{1}{3h}$	$\frac{\mathbf{s}^2}{3h^2}$	$\frac{\mathbf{s}^2}{2h^2}$
3	$\frac{1}{4h}$	$\frac{\mathbf{s}^2}{3h^2}$	$\frac{\mathbf{s}^2}{3h^2}$

Se observa en la tabla, como era de esperar, que la dispersión disminuye al aumentar las muestras así como el factor de corrección, es decir, estamos más cerca del valor verdadero.

### 4.3. Estimación Recursiva de Funciones Lineales Dinámicas

Demos un paso más en el problema de la estimación e intentemos predecir el valor que toma una variable que varía en el tiempo a partir de una medición, función de esta variable. Un ejemplo simple puede ser el de la figura, intentamos medir la tensión de un capacitor que se carga a través de una fuente un cierto ruido que puede deberse a falta de regulación. La tensión tampoco es medida directamente sino a través de un instrumento con una escala y una imprecisión.



Medición de la tensión en un condensador a través de un amplificador

La variable y su relación con la medición será

$$\begin{cases} x_{k+1} = a_k x_k + b u_k + q_k \\ y_k = c_k x_k + v_k \end{cases} \quad -61$$

donde  $x$  es la tensión en el condensador que irá tendiendo a un valor final en el tiempo con una velocidad dependiente del parámetro  $a$ . A fin de hacer más general el ejemplo, se agregó  $q$  que es el ruido de la fuente. La tensión o entrada del sistema es  $u$  y la medición de la tensión es  $y$  que se relaciona con  $x$  por una escala  $c$ . También esta medición tiene una imprecisión  $v$ . Para asociarlo con la representación en variables de estado, llamemos a  $x$  estado interno del sistema, *observado* a partir de una salida  $y$ . Las características estadísticas son:

$$\begin{aligned} E\{q\} &= 0 & E\{q^2\} &= Q \\ E\{v\} &= 0 & E\{v^2\} &= R \end{aligned} \quad -62$$

El problema ahora es determinar la mejor estimación del estado  $x$  en función de las mediciones de la salida  $y$ . Tenemos dos formas de calcular  $x$ : una a partir de las mediciones de la salida, en este caso no necesitaríamos considerar la dinámica del sistema y estaríamos en el caso estático anterior. La segunda forma y más atractiva es considerar las mediciones más la predicción del estado a partir del conocimiento de su dinámica. Para ello se debe conocer o fijar  $x$  estimado inicial y su varianza

$$\begin{aligned} x_1 &= a x_0 + b u_0 + q_0 \\ n_0 &= E\{[\hat{x}_0 - x_0]^2\} \end{aligned} \quad -63$$

entonces se define la estimación en el instante 1 conocido  $x_0$  como

$$\hat{x}_{1/0} = a \hat{x}_0 + b u_0 \quad -64$$

cómo calcular la varianza de esta estimación?

$$\begin{aligned} n_1 &= E\{[\hat{x}_{1/0} - x_1]^2\} = E\{[a x_0 + b u_0 + q_0 - a x_0 - b u_0]^2\} = E\{[a(x_0 - \hat{x}_0) + q_0]^2\} \\ &= E\{a^2(x_0 - \hat{x}_0)^2 + q_0^2 + (q_0(x_0 - \hat{x}_0)a)^2\} \end{aligned} \quad -65$$

para simplificar supongamos que la imprecisión  $q$  y  $x$  no están correlados por lo tanto

$$n_1 = a^2 n_0 + Q \quad -66$$

Recordemos que esta dispersión es introducida por la predicción del estado a partir de su modelo y no de la medición de la salida por lo que no aparece  $R$ .

Si queremos estimar el estado a partir de la salida solo debemos reproducir el caso estático es decir: debemos calcular  $\hat{x}_{1/1}$  a partir de la estimación  $\hat{x}_{1/0}$  y la nueva medición de la salida:

$$\begin{aligned} \hat{x}_{1/1} &= \hat{x}_{1/0} + w_1 [y_1 - c\hat{x}_{1/0}] \\ w_1 &= p_1 \frac{c}{R} \\ p_1^{-1} &= n_1^{-1} + \frac{c}{R} \end{aligned} \quad -67$$

Recordemos el significado de  $p$  y  $n$ :  $n$  es la dispersión de la estimación debida al modelo dinámico del sistema. En cambio  $p$  es la dispersión debida a ambos efectos, la del modelo más la de la medición de la salida. La diferencia es que ahora  $p$  y  $n$  no son iguales como en el caso estático en que no existe modelo dinámico del estado. En resumen, el cálculo del estado será:

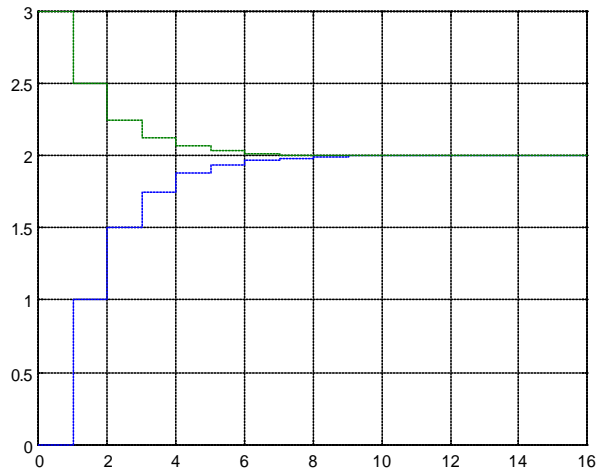
$$\begin{cases} \hat{x}_{k+1} = a\hat{x}_k + bu_k + w_k [y_k - c\hat{x}_k] \\ n_{k+1} = a^2 n_k + q_k \\ w_k = p_k \frac{c}{R} \\ p_k^{-1} = n_k^{-1} + \frac{c^2}{R} \end{cases} \quad -68$$

Estas son las ecuaciones del filtro de Kalman-Bucy en su versión más reducida que es para la estimación de un escalar. Solo se necesita conocer el valor inicial del estado y su dispersión. Se puede considerar un valor inicial cualquiera con una dispersión alta.

Un ejemplo simple sería considerar que no existe dispersión ni en la medición ni en el estado. Las ecuaciones anteriores se resumirían en lo siguiente, que a su vez coincide con la idea del observador planteado al principio:

$$\begin{cases} \hat{x}_{k+1} = a\hat{x}_k + bu_0 + 1[y_k - c\hat{x}_k] \\ w_k = 1 \end{cases} \quad -69$$

El único error que tendríamos sería el desconocimiento del valor inicial. La figura siguiente muestra que a pesar del diferente valor inicial, la estimación tiende al verdadero valor. En este ejemplo se eligió  $a=.5$ ,  $b=c=1$  y el estado inicial real igual a 0 y el estimado igual a 3.



Evolución del estado estimado y real mostrando su convergencia

## 5. Estimación de Sistemas

### 5.1. Sistemas Estáticos

Podemos generalizar el planteo anterior y considerar ya no una medición sino un grupo de ellas constituyendo un vector. Del mismo modo la estimación no será una, sino un vector. Es decir ahora

$x$  es un vector de dimensión  $m$

$z$  es un vector de dimensión  $p$

$v$  es un vector de dimensión  $p$

$H$  es una matriz de dimensión  $p \times m$  que relaciona mediciones con estimaciones

Resultando

$$z = Hx + v \quad -70$$

las características del ruido son

$$E\{v\} = 0$$

$$E\{vv^T\} = \mathbf{s}^2 I \quad -71$$

—

El problema ahora es minimizar el siguiente funcional

$$J = \sum_{i=1}^m (z_i - Hx)^2 = (z - Hx)^T (z - Hx) \quad -72$$

$$\left. \frac{\partial J}{\partial X} \right|_{x=\hat{x}} = -2H^T [z - H\hat{x}] = 0 \quad -73$$

$$H^T H\hat{x} = H^T z \quad -74$$

el valor de  $x$  que minimiza este funcional es

$$\hat{x} = (H^T H)^{-1} H^T z \quad -75$$

el error es

$$e = x - \hat{x} = x - (H^T H)^{-1} H^T z = x - (H^T H)^{-1} H^T (Hx + v) \quad -76$$

$$e = -(H^T H)^{-1} H^T v = -Kv \quad -77$$

si  $v$  es el error en la medición,  $Kv$  es el error en la estimación. Si  $H$  es grande el error baja siendo su varianza

$$E\{e e^T\} = KE\{v v^T\}K^T = S^2 K K^T = S^2 (H^T H)^{-1} \quad -78$$

Igualmente, si  $H$  es grande la varianza se reduce

## 5.2. Estimación Recurrente de Sistemas Lineales Estáticos

También podremos expresar la forma recursiva de la estimación en forma matricial. Definamos las características de la dispersión

$$\begin{aligned} E\{v\} &= 0 \\ E\{v v^T\} &= R \end{aligned} \quad -79$$

se conoce  $\hat{x}_n$  por una medición anterior con una dispersión

$$E\{(x - \hat{x}_n)(x - \hat{x}_n)^T\} = N_n = E\{e_n e_n^T\} \quad -80$$

Es decir tenemos dos formas de estimar  $x$ : una a partir de  $\hat{x}_n$  y otra a partir de la nueva medición  $z_{n+1}$ . Estamos en el caso de dos mediciones con distinta dispersión. Por lo tanto el funcional a minimizar se puede definir como la suma de un error de estimación con dispersión  $N$  y uno de medición con dispersión  $R$

$$J = \frac{1}{2} [(x - \hat{x}_n)^T N_n^{-1} (x - \hat{x}_n) + (z_{n+1} - Hx)^T R_n^{-1} (z_{n+1} - Hx)] \quad -81$$

$$\left. \frac{\partial J}{\partial X} \right|_{\hat{x}_{n+1}} = N_n^{-1} (\hat{x}_{n+1} - \hat{x}_n) - H^T R_n^{-1} (z_{n+1} - H\hat{x}_{n+1}) = 0 \quad -82$$

$$\begin{aligned} [N_n^{-1} + H^T R_n^{-1} H] \hat{x}_{n+1} &= N_n^{-1} \hat{x}_n + H^T R_n^{-1} z_{n+1} \\ &= [N_n^{-1} + H^T R_n^{-1} H] \hat{x}_n + H^T R_n^{-1} (z_{n+1} - H\hat{x}_n) \end{aligned} \quad -83$$

$$\hat{x}_{n+1} = \hat{x}_n + [N_n^{-1} + H^T R_n^{-1} H]^{-1} H^T R_n^{-1} (z_{n+1} - H\hat{x}_n) \quad -84$$

haciendo

$$\begin{cases} P_n^{-1} = N_n^{-1} + H^T R_n^{-1} H \\ W_n = P_n H^T R_n^{-1} \end{cases} \quad -85$$

$$\hat{x}_{n+1} = \hat{x}_n + W_n (z_{n+1} - H\hat{x}_n) \quad -86$$

el error es

$$e_{n+1} = \hat{x}_{n+1} - x = \hat{x}_n - x + \hat{x}_{n+1} - \hat{x}_n = \hat{x}_n - x + W_n (v_n - H\hat{x}_n) \quad -87$$

$$e_{n+1} = [I - W_n H](\hat{x}_n - x) + W_n v \quad -88$$

la nueva dispersión  $N_{n+1}$  será

$$E\{e_{n+1}e_{n+1}^T\} = [I - W_n H]N_n[I - W_n H]^T + W_n R W_n^T = N_{n+1} \quad -89$$

y expresada en función de  $P$

$$\begin{aligned} E\{e_{n+1}e_{n+1}^T\} &= P_n [I - W_n H]^T + W_n R W_n^T = P_n - P_n H^T W_n^T + W_n R W_n^T \\ &= P_n - W_n R W_n^T + W_n R W_n^T \\ &= P_n \end{aligned} \quad -90$$

o sea

$$E\{e_{n+1}e_{n+1}^T\} = P_n \quad -91$$

$$N_{n+1} = P_n \quad -92$$

En este caso  $P$  y  $N$  solo están separadas por una medición. La única incógnita e el valor inicial de  $P$  par el que se considera una dispersión inicial infinita, es decir

$$N_0 = I_\infty \quad -93$$

$$N_0^{-1} = I0 \quad -94$$

y según lo anterior

$$N_1^{-1} = P_0^{-1} = H^T R_0^{-1} H \quad -95$$

## 6. Estimación Recursiva de Sistemas Lineales Dinámicos

Ahora consideremos un sistema de variables a estimar

$$\begin{cases} x_{k+1} = A_k x_k + B u_k + q_k \\ y_k = C_k x_k + v_k \end{cases} \quad -96$$

Por simplicidad asumamos en adelante que la entrada  $u$  es cero cosa que no afecta para nada el análisis. Las características estadísticas de la sperturbaciones son

$$\begin{aligned} E\{q\} &= 0 \quad E\{qq^T\} = Q \\ E\{v\} &= 0 \quad E\{vv^T\} = R \end{aligned} \quad -97$$

Problema: determinar la mejor estimación del estado  $x$  en función de las mediciones de la salida  $y$ . Se debe conocer o fijar  $x$  estimado inicial y su varianza

$$x_1 = A_0 x_0 + q_0 \quad -98$$

$$N_0 = E\{[\hat{x}_0 - x_0][\hat{x}_0 - x_0]^T\}$$

entonces se define la estimación en el instante 1 conocido  $x0$  como

$$\hat{x}_{1/0} = A_0 \hat{x}_0 \quad -99$$



cómo calcular la autocorrelación de esta estimación?

$$\begin{aligned}
 N_1 &= E\left\{\left[\hat{x}_{1/0} - x_1\right]\left[\hat{x}_{1/0} - x_1\right]^T\right\} \\
 &= E\left\{\left[A_0 x_0 + W_0 - A_0 \hat{x}_0\right]\left[A_0 x_0 + W_0 - A_0 \hat{x}_0\right]^T\right\} \\
 &= E\left\{\left[A_0(x_0 - \hat{x}_0) + W_0\right]\left[A_0(x_0 - \hat{x}_0) + W_0\right]^T\right\} \\
 &= E\left\{A_0(x_0 - \hat{x}_0)(x_0 - \hat{x}_0)^T A_0^T + W_0 W_0^T + W_0(x_0 - \hat{x}_0)^T A_0^T + A_0(x_0 - \hat{x}_0)W_0^T\right\}
 \end{aligned}$$

-100

se supone que w y x no están correlados por lo tanto

$$N_1 = A_0 N_0 A_0^T + Q \quad -101$$

Ahora el problema es calcular  $\hat{x}_{1/1}$  a partir de la estimación  $\hat{x}_{1/0}$  y la nueva medición de la salida. Pero tal como lo hemos presentado esto es un caso estático, por lo tanto

$$\begin{aligned}
 \hat{x}_{1/1} &= \hat{x}_{1/0} + W_1 [y_1 - C_1 \hat{x}_{1/0}] \\
 W_1 &= P_1 C_1^T R^{-1}
 \end{aligned}$$

-102

$$\begin{aligned}
 P_1^{-1} &= N_1^{-1} + C_1^T R^{-1} \\
 P_1 &= \left[N_1^{-1} + C_1^T R^{-1}\right]^{-1} = N_1 - N_1 C_1^T [C_1 N_1 C_1^T + R]^{-1} C_1 N_1^T
 \end{aligned}$$

-103

solo se necesita saber el valor inicial de x. Si no se lo conoce, se toma un valor cualquiera y se considera dispersión infinita

$$P_0 = N_1 = I\infty \quad -104$$

$$P_1^{-1} = C_1^T R^{-1} C_1 \quad -105$$

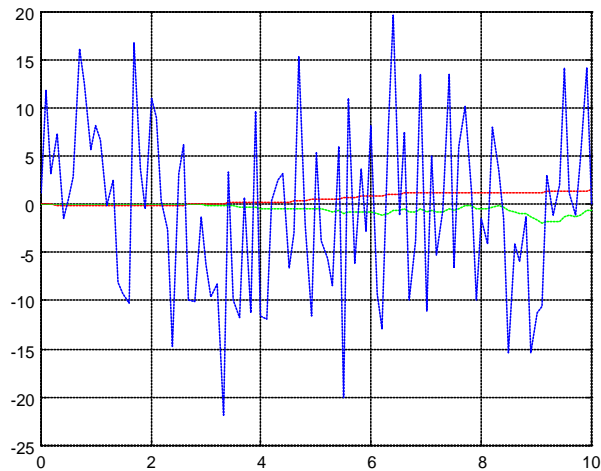
Con lo que obtenemos la forma general del Filtro de Kalman-Bucy para sistemas dinámicos

$$\left\{ \begin{aligned}
 \hat{x}_{k+1/k+1} &= A_k \hat{x}_{k/k} + W_{k+1} [y_{k+1} - C_{k+1} A_k \hat{x}_{k/k}] \\
 N_{k+1} &= A_k N_k A_k^T + Q \\
 P_k &= N_k - N_k C_k^T [C_k N_k C_k^T + R]^{-1} C_k N_k \\
 W_k &= P_k C_k^T R^{-1}
 \end{aligned} \right.$$

-106

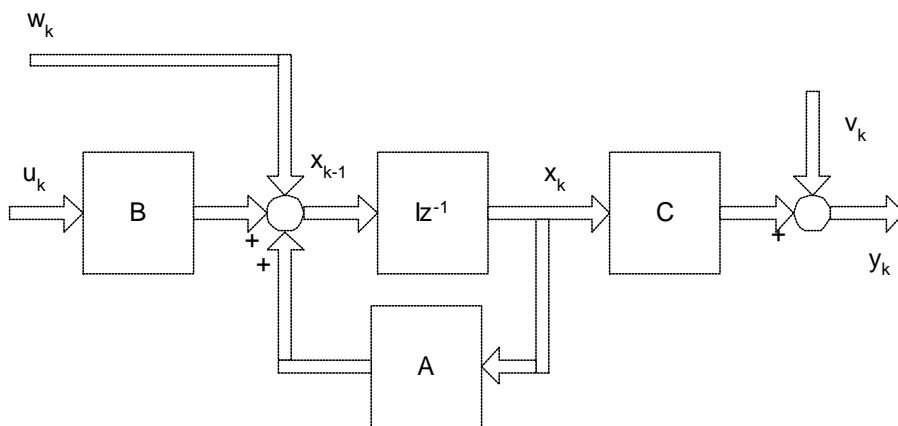
Observemos que la estructura es idéntica a la del observador planteado al principio donde  $W$  es variable según la perturbación en el sistema o mediciones de la salida. La figura siguiente muestra un sistema con perturbaciones en la entrada y en la medición al que además le hemos agregado una variable de comando  $u$ . Recordemos que las únicas variables accesibles son  $y$  y  $u$ .

En la figura siguiente se muestra un ejemplo en el cual tenemos tres curvas: la medición con ruido, el valor real sin ruido y su estimación.



Señal con ruido, señal real sin ruido y su estimación

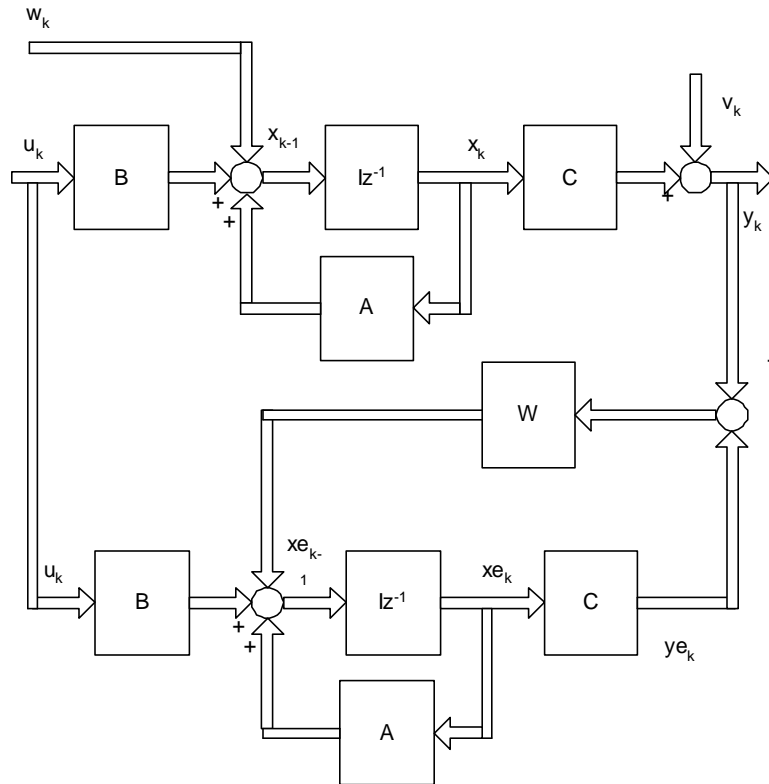
Por último veamos como es el Filtro de Kalman en diagrama de bloques. El sistema original, en variables de estado se expresa como sigue:



Sistema expresado en variables de estado con perturbaciones a la entrada y a la salida

Con el Filtro de Kalman-Bucy podemos estimar u observar el estado interno  $x$  considerando dentro del modelo del observador las perturbaciones existentes en la planta e

instrumentación. El esquema completo planta más observador se observa en la figura siguiente.



Planta con Filtro de Kalman

Hemos introducido brevemente el concepto de estado de un sistema y su posible estimación u observación a partir de la medición de la salida y entrada de la planta. También analizamos la idea de estimación estadística de una variable a partir de mediciones para pasar luego a combinar ambos casos y llegar a plantear un estimador estadístico que lleva el nombre de sus autores. La teoría y la aplicación de la estimación estadística es muy vasta y su estudio excedería los límites de este trabajo que solo pretende ser una introducción a las ideas fundamentales del filtrado u observación de los estados.

## 7. Bibliografía y datos de interés

- Kalman, R.E. and Bucy, R, S, *New results in linear filtering and prediction theory*, ASME – J. Basic Eng. Ser. D, 83, 95-108, 1961.
- Athans, Michael, *Kalman Filtering*, The Control Handbook, 1996

- Kailath, Thomas, *A view of three decades of linear filtering theory*, IEEE Transactions on Information Theory, March 1974
- Kailath, Thomas, *An innovations approach to least-squares estimation. Part I: Linear filtering in additive white noise*, IEEE Transactions on Automatic Control, December 1968
- Grewal, M. S. and Andrews, Angus P., *Kalman Filtering: Theory and Practice* – 1993 - Prentice Hall
- Ver la demo de Matlab sobre Filtro de Kalman
- <http://www.innovatia.com/software/papers/kalman.html>