

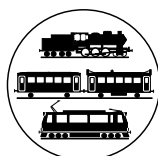
**BUDAPESTI MŰSZAKI ÉS
GAZDASÁGTUDOMÁNYI EGYETEM
KÖZLEKEDÉSMÉRNÖKI KAR
VASÚTI JÁRMŰVEK TANSZÉK**

HAJTÁSTECHNIKA

TANSEGÉDLET

a gépészmérnöki szak hallgatói számára

Dr. Szabó András
egyetemi docens



BUDAPEST

2005

HAJTÁSTECHNIKA

A tantárgy célja: Megismertetni a hallgatókat **a járművek és gépek hajtásánál alkalmazható alaps megoldásokkal**, a különböző hajtásrendszerek kinematikai, dinamikai és energetikai sajátosságaival, továbbá a hajtásrendszerekkel kapcsolatos gépcsoport együttműködési (vezérlési- és szabályozási) problémákkal.

1. A járművek hajtásrendszereinek áttekintő elemzése. A hajtásrendszerek csoportosítása, energia átalakítás az energiaforrástól a hajtott gépig. Az erőgépek jelleggörbéi, a hajtásrendszer feladatai, a teljesítmény átvitel jellemzői.
2. Mechanizmusok a hajtásrendszerekben. Szabadságfok, mozgásegyenletek, erőtorvények, kényszeregyenletek. Kinematikai lánc és szerkezeti képlet.
3. Mechanizmusok helyzetének és mozgásának elemzése. Koordináta transzformációk. Nyitott és zárt kinematikai láncok sebesség viszonyai. A sebességi állapot.
4. A mechanikus erőátvitel jellegzetes mechanizmusainak (egyenesbe vezetők, karánkapcsolatok, rudazatos hajtások) kinematikai és erőhatás folyamatai.
5. Fogaskerekes mechanizmusok, hajtóművek - bolygóművek (elemi bolygómű, összetett bolygóművek, differenciálművek, tengelyhajtások).
6. A mechanikus hajtásrendszer, fokozatkiosztás, jelleggörbe transzformáció. Jellegzetes szerkezeti kialakítások, sebességváltók, irányváltók, tengelykapcsolók.
7. A hidraulikus hajtásrendszerek működési elvei, hidrodinamikus és hidrosztatikus hajtásrendszerek. A hidrodinamikus hajtásrendszerek szerkezeti felépítése, nyomátékváltó és tengelykapcsoló áramlástani folyamatai, az üzemi jelleggörbéi.
8. Hidrodinamikus hajtóművek, mechanikus- és hidraulikus elhangolású többfokozatú sebességváltók. Együttműködése a hajtó erőgéppel, jelleggörbe transzformáció.
9. Hidrosztatikus szivattyúk és hidromotorok szerkezeti felépítése és üzemi jellemzői, jelleggörbéi, körfolyamatok, nyomátékváltó és tengelykapcsoló, szabályozás
10. Propulziós hajtásrendszerek működési elve. Energiaátviteli viszonyok, hatásfokok. Légcsavarok és hajócsavarok szerkezeti kialakításai, vezérelhető lapátmozgások. Tolósugaras hajtásrendszerek működési elve, tolósugaras gázturbinás hajtóművek.
11. A villamos erőátviteli rendszerek működési elve, csoportosítása. Egyenáramú- és váltakozó áramú rendszerek gépegységei. A villamos gépek karakterisztikái. Az erőgép és a generátor, a generátor és a vontatómotor együttműködése.
12. A villamos gépek működésével kapcsolatos vezérlési és szabályozási problémák. A kimenő hajtónyomaték (hajtóerő) karakterisztikáinak a terhelőnyomaték (terhelőerő) karakterisztikákkal való illesztése, az együttműködés sajátosságai.
13. Kvázi stacionárius üzemállapotok hajtásrendszerekben, a terhelés-állapotok előfordulási valószínűsége. A rugalmas hajtásrendszer, mint dinamikai rendszer. Jellegzetes gerjesztő hatások: be- és kimenőoldali ill. parametrikus gerjesztések.
14. Digitális szimuláció és optimalizálás hajtásrendszerek dinamikus igénybevételeinek csökkentésére. Lineáris és nemlineáris hajtásdinamikai modellek állapotter módszeren alapuló vizsgálata a sztochasztikus terhelési viszonyok figyelembe vételével.

TARTALOMJEGYZÉK

I. BEVEZETÉS.....	1
II. HAJTÁSTECHNIKA - HAJTÁSRENDSZEREK ÁLTALÁNOS JELLEMZŐI....	2
A hajtástechnika célja, főbb területei:.....	2
II. 1. Hajtásrendszerek áttekintése	2
Hajtásrendszerek általános felépítése.....	2
II. 2. Hajtásrendszerek energetikai tulajdonságai - csoportosítás terhelhetőség sze- rint	3
Túlterhelhető erőgépek, hajtásrendszerek:.....	3
Nem túlterhelhető erőgépek, hajtásrendszerek:	4
II. 3. Erőgépek jelleggörbéi	5
II. 4. Jelleggörbék stacionárius és instacionárius esetben.....	5
Stacionárius eset, $d\omega/dt = 0$	6
Instacionárius eset, $d\omega/dt \neq 0$	6
Periodikusan változó szögsebesség esetén.....	7
Vezérlési pozíció váltás ill. terhelés változás, mint instacioner folyamat	8
II. 5. Az erőátvitel általános jellemzői.....	8
Az ideális vonóerő görbe	8
Az erőátvitel jellemző mennyiségei.....	9
Az erőátvitellel szemben támasztott követelmények.....	9
A vezérléssel szemben támasztott követelmények:	9
III. MECHANIZMUSOK A HAJTÁSRENDSZEREKBEN.....	10
III. 1. Mechanizmusok.....	10
A mechanizmus feladata	10
Mechanizmusok csoportosítása további szempontok szerint	10
III. 2. Kényszer - kényszerek	11
A kényszerek legfontosabb fajtái.....	11
Szabadságfok, kényszerek szabadságfoka	12
Mechanizmusok dinamikai jellemzése	12
III. 3. Kinematikai lánc, és szerkezeti képlet.....	14
Nytott kinematikai lánc.....	15
Zárt kinematikai lánc.....	15
Egy- és többláncú mechanizmusok.....	15
A szerkezeti képlet felírásának szabályai.....	16
A kinematikai lánc szabadságfoka - nyitott kinematikai lánc	17
Zárt kinematikai lánc szabadságfoka	17
Speciális kialakítások hatása a szabadságfokok számára	18
III. 4. Mechanizmusok helyzetének és mozgásának elemzése	20
Sebességek és gyorsulások.....	23

A sebesség	23
A gyorsulás.....	24
Általános, nyitott kinematikai lánc sebességállapota.....	25
Általános, zárt kinematikai lánc sebességállapota	27
Szerkesztő eljárások	28
III. 5. Hajtásrendszerek jellegzetes mechanizmusai	28
Forgattyús mechanizmus.....	28
Kardánkapcsolat.....	30
A szögelfordulások közötti kapcsolat	30
A szögsebességek közötti kapcsolat	32
III. 6. Fogaskerekes hajtások - bolygóművek.....	34
Elemi bolygómű.....	36
Egyszerű bolygómű - egyszabadságfokú bolygómű	37
Nyomatéki viszonyok az elemi bolygóműben.....	39
Nyomatéki viszonyok az egyszerű bolygóműben	40
III. 7. Járműhajtásrendszerek jellegzetes bolygóműves mechanizmusai.....	40
Homlokfogaskerekes tengelyhajtómű.....	40
Marokcsapágyas tengelyhajtás.....	41
Kúpkeres tengelyhajtás	41
Differenciálmű rugalmas nyomatéktámmal.....	43
III. 8. Rudazatos hajtás.....	45
Vakforgattyús rudazatos hajtás	46
A rudazatos hajtás tömegkiegyenlítése	47
IRODALOMJEGYZÉK	48

I. BEVEZETÉS

A Hajtástechnika tantárgy a BME Közlekedésmérnöki Karán a gépészmérnöki szakot választó hallgatók számára kötelező tantárgy. A tantárgy célja megismertetni a hallgatókkal a járművek és mobil gépek hajtásánál alkalmazható hajtástechnikai alaps megoldásokat, feltárni a különböző hajtásrendszerek kinematikai-, dinamikai- és energetikai sajátosságait, valamint a hajtásrendszerekkel kapcsolatos gépcsoport-együtműködési (vezérlési, szabályozási) problémákat, függetlenül attól hogy a későbbiekben autógépész, hajógépész, repülőgépész, vasútgépész, vagy gépesítési ill. gyártás-javítás szakirányon végez majd tanulmányokat.

A "Hajtástechnika" c. tantárgy tananyagának kialakításakor arra törekedtünk, hogy ne csupán a hajtáselemek egyedi tárgyalására kerüljön sor, hanem ezen elemek hajtásrendszerekben elfoglalt helyét és szerepét is domborítsuk ki - röviden: előnyben kell részesíteni a rendszerszemléletű tárgyalásmódot. Ez azt jelenti, hogy a hallgatóság a hajtásrendszerek tanulmányozásakor nem csupán egymással összekapcsolt rendszer elemek alkotta aggregátot ismer meg, hanem a rendszerszemlélet következtében az elemek szerves kapcsolatából létrejövő új objektumot, a hajtásrendszert, mint erő- és mozgás (nyomaték- és forgás) átviteli rendszert tanulmányozza.

Ez a tárgyalásmód hangsúlyosan kidomborítja a hajtásrendszerek időben lejátszódó dinamikus jelenségeinek fontosságát, mivel e jelenségek figyelembe vétele alapvető tulajdonsága a korszerű méretezési módszereknek (élettartamra ill. kifáradásra történő méretezés).

II. HAJTÁSTECHNIKA - HAJTÁSRENDSZEREK ÁLTALÁNOS JELLEMZŐI

A hajtástechnika célja, főbb területei:

- járművek és gépek **hajtásával** kapcsolatos **alapismeretek** elsajátítása;
- hajtásrendszerek **dinamikai és energetikai sajátosságainak** megismerése;
- hajtásrendszerekbe épített gépek **együttműködésének** tanulmányozása;
- **vezérlési és szabályozási** problémák analízise:

Jármű hajtásrendszerek feladata: mozgatóerő, toló- ill. fékezőerő generálása.

- **Közvetlen erőgenerálás:** tolósugaras hajtóművek;
- **Közvetett erőgenerálás:** kerékajtás, propelleres hajtás.

II. 1. Hajtásrendszerek áttekintése

Hajtásrendszerek általános felépítése



	Mechanikai teljesítmény előállítása	Mechanikai teljesítmény átalakítása	Mech. munka felhasználása Társadalmi igény kielégítése
- szén	- gőzgép	- mechanikus	- munkagépek
- pakura	- gőzturbina	- hidraulikus	- szállítóberendezések
- kőolaj	- vízturbina	- villamos	- anyagmegmunkáló gépek
- földgáz	- gázturbina		- Járművek: -lapátkerék
- nap, szél	- belsőégésű motor		- propeller
- stb.	- villanymotor		- járműkerék

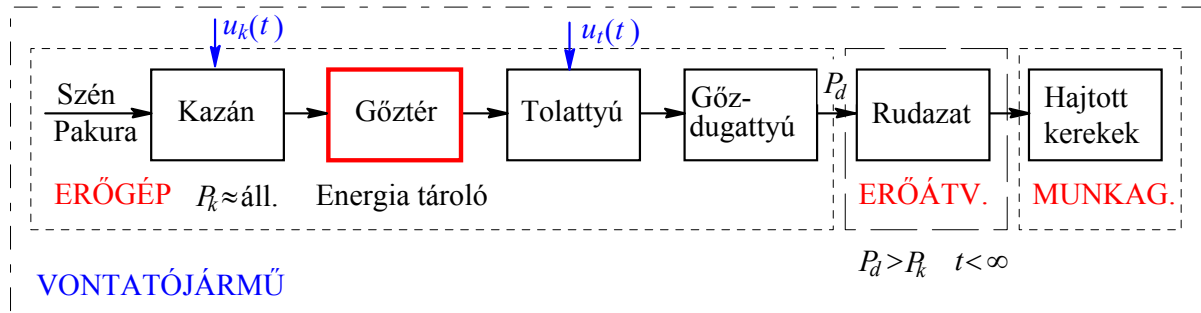
Kivétel: gázturbinás, tolósugaras hajtás

II. 2. Hajtásrendszerek energetikai tulajdonságai - csoportosítás terhelhetőség szerint

Túlterhelhető erőgépek, hajtásrendszerek:

alapfeltétel: **belső (külső) energia tároló jelenléte**

Gőzhajtás, gőzvontatás:



A gőztér, mint energia tároló: - **Folyamatos feltöltés** (kazán)

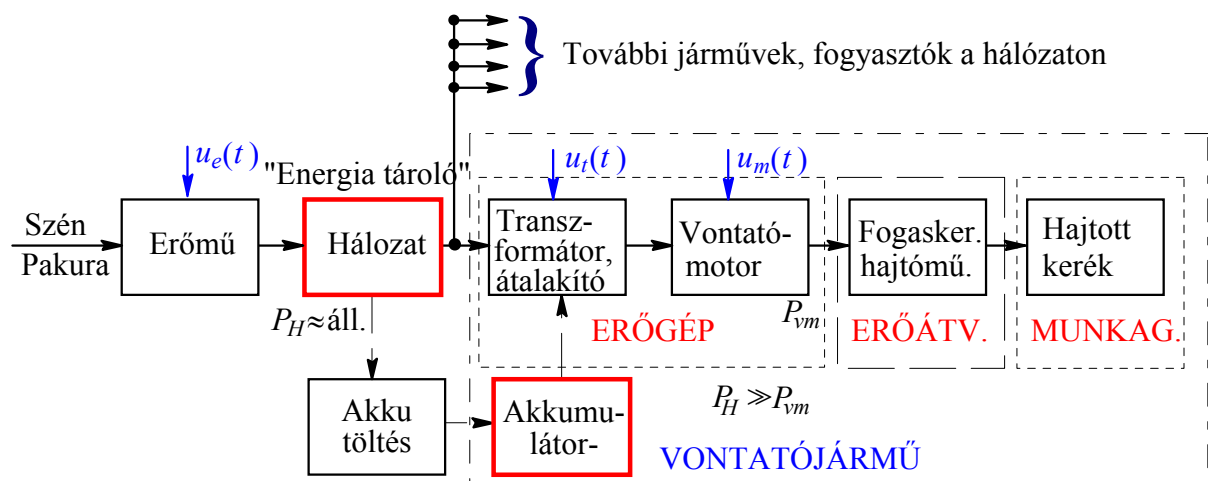
- Változó intenzitású, **szakaszos ürités** (gőzdugattyú)

A gőztérben tárolt, munkavégzésre alkalmas gőz mennyiségének csökkenése véges ideig fedezi a $P_d - P_k$ teljesítmény különbség áthidalásához szükséges energiát.

Vezérlési beavatkozási helyek:

- $u_k(t)$: a kazán "vezérlése" (fűtés intenzitása);
- $u_t(t)$: a tolattyú, mint vezérlő egység (a gőzbevezetés helyének és idejének megh.)

Villamos hajtás:



Akkumulátoros üzem: az akkumulátor, mint energia tároló:

- **Szakaszos feltöltés** (hálózatról)
- Változó intenzitású, **szakaszos/folyamatos ürités**

Hálózati üzem: a hálózat, mint "energia tároló":

$P_H \gg P_{vm}$: A hálózat P_H teljesítménye jóval nagyobb egy-egy jármű P_{vm} teljesítményénél, és a hálózat egyszerre több fogyasztót (köztük járműveket) lát el energiával. A **teljesítmény igény növekedés esetén** a hálózati feszültség lokálisan csökken, ezáltal a **"többi fogyasztó" teljesítmény felvétele is csökken**, és ebből van "fedezet" a megnövekedett teljesítmény-igényre

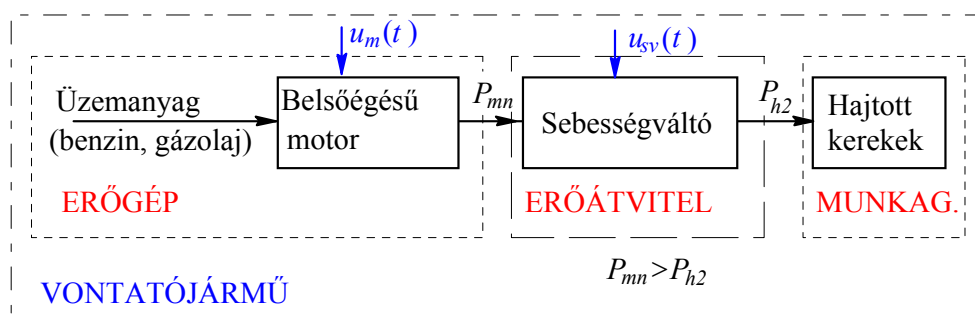
Vezérlési beavatkozási helyek:

- $u_e(t)$: az erőműi villamosenergia előállítás vezérlése;
- $u_t(t)$: a transzformátor ill. áramátalakító egység vezérlése (pl. feszültség beállítás);
- $u_m(t)$: a vontatómotorok vezérlése (pl. söntölés).

Nem túlterhelhető erőgépek, hajtásrendszerek:

jellegzetesség: **nincs energia tároló**

Belsőégésű motoros hajtásrendszerek:



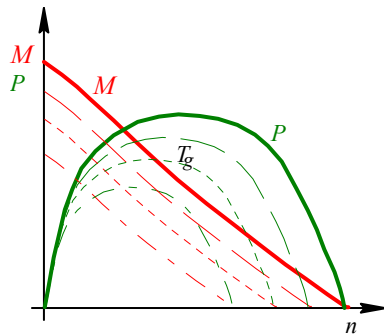
A belsőégésű motor P_{mn} névleges teljesítményénél nagyobb teljesítményt nem tud leadni, és nincs energia tároló, mely a többlet teljesítmény igény átmenetileg fedezze.

Vezérlési beavatkozási helyek:

- $u_m(t)$: motor vezérlése (töltés mértéke, fordulatszám nagysága);
- $u_{sv}(t)$: a sebességváltó vezérlése (pl. sebességi fokozat).

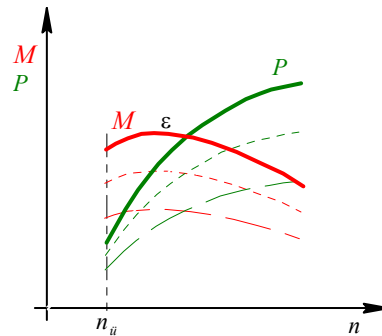
II. 3. Erőgépek jelleggörbéi

Gázturbina



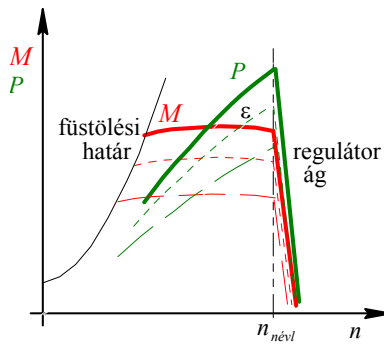
Vezérlés: $u \sim T_g$ gázhőmérséklet

Otto motor

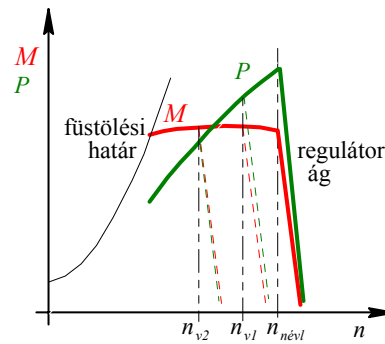


Vezérlés: $u \sim \epsilon$ töltés, gázpedál állás

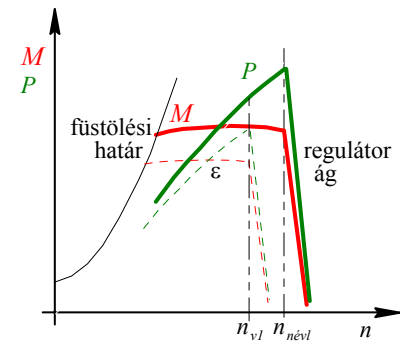
Dízel motor



Vezérlés: $u \sim \epsilon$
töltés, gázpedál állás



Vezérlés: $u \sim n_v$
regulálási fordulatszám



Vezérlés: $u \sim P(\epsilon, n_v)$ teljesítmény szint

Megjegyzés: Az Otto és dízel motoroknál járműindítási probléma: a motor jelleggörbéje nem tartalmazza az $n = 0$ indítási pontot!

II. 4. Jelleggörbék stacionárius és instacionárius esetben

Forgó gépek esetén a jelleggörbe az

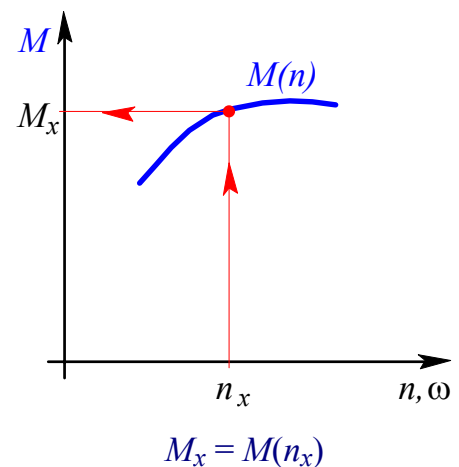
$$M = M(n) \text{ vagy } M = M(\omega)$$

nyomaték-fordulatszám/szögsebesség ill. a

$$P = P(n) \text{ vagy } P = P(\omega)$$

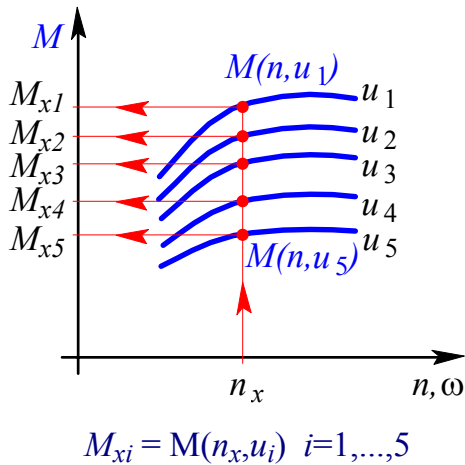
teljesítmény-fordulatszám/szögsebesség

függvényeket jelenti



Stacionárius eset, $d\omega/dt = 0$

Jármű esetében a különböző vontatási teljesítmények beállíthatóságához szükséges az erőgép vezérelhetősége, szabályozhatósága.



Jelölje u a vezérlési jellemzőt, ezzel a stacionárius jelleggörbék az

$$M = M(n, u) \text{ vagy } M = M(\omega, u)$$

kétváltozós függvényekké válnak és **jelleggörbe sereget** alkotnak

A jármű vezérlése az $u = u(t)$ vezérlő-függvénnyel történik, mely lehet

- *Folytonos változó* (pl. gázpedál állás)
- *Diszkrét változó* (pl. véges számú telj. pozíció)

Instacionárius eset, $d\omega/dt = \dot{\omega} \neq 0$

Időben változó folyamatok:

- a.) változó sebességű üzem (gyorsítások, fékezések);
- b.) terhelés változása (pályaellenállás változás: emelkedőre, lejtőre jutás);
- c.) a járművezérlés változtatása (hirtelen teljesítmény pozíció váltás, gázadás);
- d.) periodikusan változó hajtó- ill. terhelő nyomaték.

A stacionárius és az instacionárius nyomatékok eltérésének okai:

- a gépekben indukálódó hajtónyomaték ill. nyomaték igény eltér a stacionárius esetben tapasztaltaktól, mert a gépek egyensúlyi állapota (pl. hőmérséklete) még nem alakult ki;
- a forgó részek szögsebességének megváltoztatásához szükséges nyomaték csökken-ti ill. növeli az összekötő tengelyen átvitt nyomatékokot.

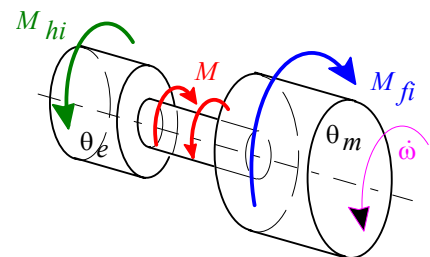
Instacionárius esetben az erőgép leadott nyomatékaként, ill. a munkagép által felvett nyomatékként a két gépet összekötő tengelyen átvitt nyomatékokat értjük (M).

M_{hs}, M_{hi} : az erőgépben indukálódó stacionárius ill. instacionárius nyomaték

M_{fs}, M_{fi} : a munkagépben felhasználódó stacionárius ill. instacionárius nyomaték;

θ_e : az erőgép forgó tömegeinek tehetetlenségi nyomatéka;

θ_m : a munkagép forgó tömegeinek tehetetlenségi nyomatéka;



$\theta = \theta_e + \theta_m$: a gépcsoport eredő tehetetlenségi nyomatéka.

A tengelyek rugalmas deformációját elhanyagolva így:

$$M_{hi} - M_{fi} = \theta \, d\omega/dt = \theta \, \dot{\omega}$$

$$M_{hi} - M_{fi} = (\theta_e + \theta_m) \dot{\omega} = \theta_e \dot{\omega} + \theta_m \dot{\omega}$$

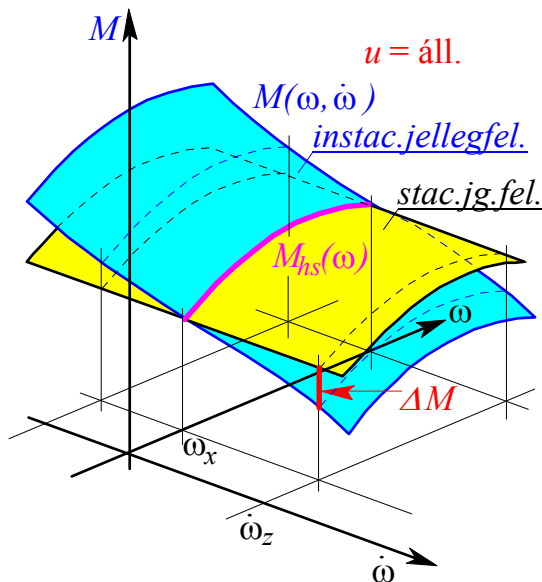
$$M_{hi} - \theta_e \dot{\omega} = M = M_{fi} + \theta_m \dot{\omega}$$

Ilymódon a gép által instacionárius esetben a tengelyen leadott ill. felvett nyomaték, a vezérelhetőséget is szem előtt tartva

$M_i(\omega, u, \dot{\omega})$ háromváltozós függvénnyel jellemezhető.

Egy kiválasztott u vezérlési pozíció esetén az $M_i(\omega, \dot{\omega})$ kétváltozós függvény írja le a gép **instacionárius jellegfelületét**.

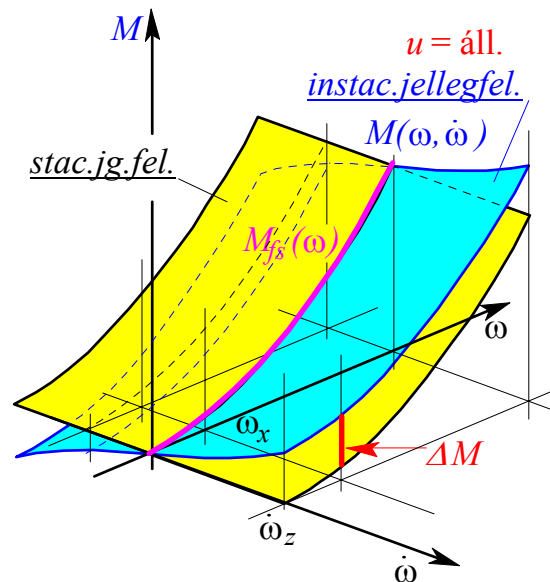
Erőgép instacionárius jellegfelülete



$$\Delta M = M_{hs}(\omega_x) - M =$$

$$M_{hs}(\omega_x) - M_{hi}(\omega_x, \dot{\omega}_z) - \theta_e \dot{\omega}_z$$

Munkagép instacionárius jellegfelülete



$$\Delta M = M - M_{fs}(\omega_x) =$$

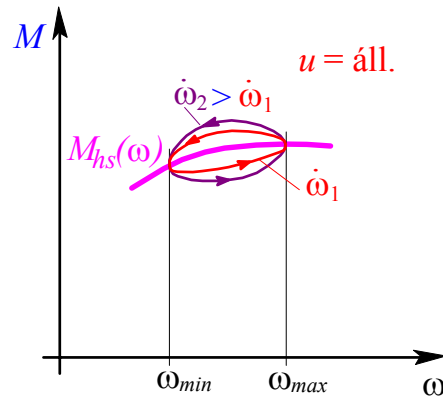
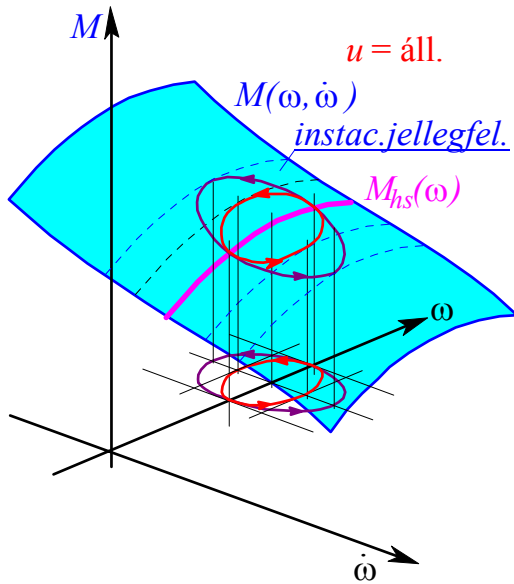
$$M_{fi}(\omega_x, \dot{\omega}_z) + \theta_f \dot{\omega}_z - M_{fs}(\omega_x)$$

A vezérlési pozíció változásával a jellegfelületek **jellegfelület sereget** képeznek

Periodikusan változó szögsebesség esetén

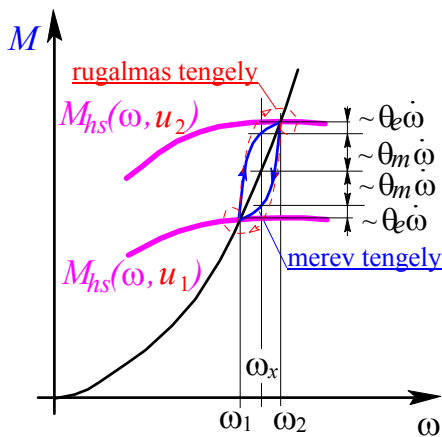
$\dot{\omega} = f(\omega)$: fázisgörbe jellemzi a periodikus (forgó)mozgást.

A két gép együttműködése az erőgép és a munkagép instacionárius jellegfelület seregeinek metszsvonalai mentén. Egy adott vezérlési pozícióesetén például az erőgép jellegfelületén szemléltetve:

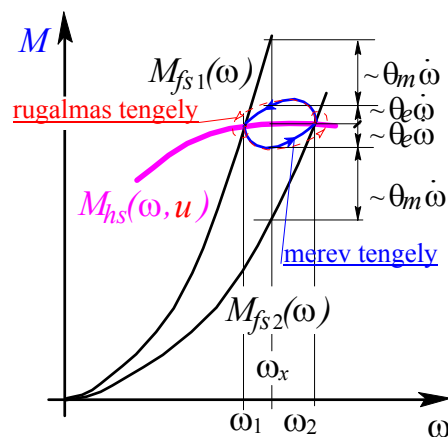


A periodikus nyomaték-változás a stacionárius jelleggörbe síkjában is szemléltethető.

Vezérlési pozíció váltás ill. terhelés változás, mint instacioner folyamat



Pozíció váltás



Terhelés változás

II. 5. Az erőátvitel általános jellemzői

Az ideális vonóerő görbe

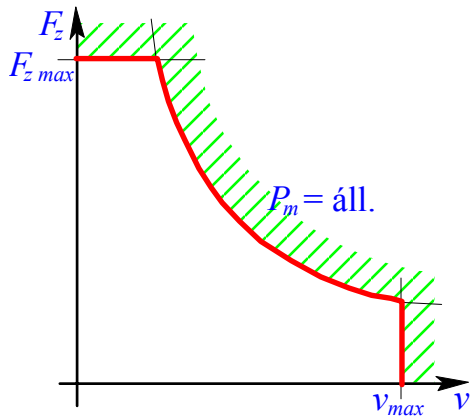
a.) Nem túlterhelhető hajtásrendszer esetén:

Kiindulás: P_m névli erőgép (motor) teljesítmény beépítése a járműbe;

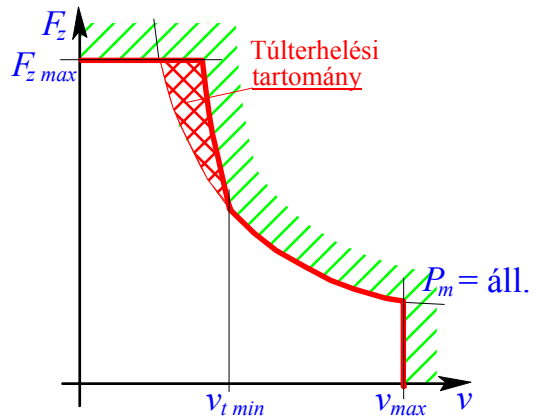
Cél: Ezen teljesítmény minél nagyobb arányú megjelenítése vonó-(toló)-erőként pl. a hajtott kerekeken.

Ideális vonóerő görbe: határoló görbéi:

- Maximális sebesség értéke;
- Maximális vonóerő mértéke (méretezési korlát, tapadási határ);
- A P_m névli = áll. teljesítmény hiperbolája.



a.) Nem túlterhelhető hajtásrendszer



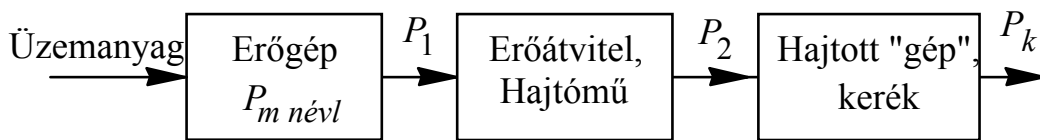
b.) Túlterhelhető hajtásrendszer

b.) Túlterhelhető hajtásrendszer esetén:

Megjelenik a *túlterhelési tartomány*, ahol $F_z v > P_m = \text{áll.}$

$v_{t \min}$: legkisebb tartós sebesség, ahol már $F_z v \leq P_m = \text{áll.}$

Az erőátvitel jellemző mennyiségei



Teljesítmény-kihasználási tényező: $\alpha = \frac{\text{def. } P_1}{P_m \text{ névl}}$

Erőátviteli hatások: $\eta = \frac{\text{def. } P_2}{P_1}$

Teljesítmény-átviteli tényező: $\varphi = \frac{\text{def. } P_2}{P_m \text{ névl}} = \frac{P_1}{P_m \text{ névl}} \frac{P_2}{P_1} = \alpha \eta$

Az erőátvitellel szemben támasztott követelmények

Járműhajtás esetén:

- a motor és a hajtott egység (kerék) szétválaszthatósága (motor indításához, a jármű kifuttatásához, vontatásához);
- a motor beépített teljesítményének jó kihasználása ($\varphi := \text{max.}$);
- részteljesítmények beállíthatósága (a járműsebesség szabályozásához);
- a jármű megindíthatósága (nagy indító vonóerő);
- a járműben való elhelyezhetőség (méret és súlykorlátok).

A vezérléssel szemben támasztott követelmények:

- a teljes és részteljesítmények megvalósítása jó hatásfokú üzemben;
- az indító vonóerő szabályozható legyen;
- kedvezőtlen üzemállapotok elkerülése (pl. füstölési határ);
- a biztonsági rendszerek és a vezérlő-szabályozó rendszer összhangja.

III. MECHANIZMUSOK A HAJTÁSRENDSZEREKBE

III. 1. Mechanizmusok

Mechanizmus: *általánosságban*: A gép mechanikus elven működő részei

Definíció szerűen:

A mechanizmus: kényszerekkel (kinematikai párokkal) egymáshoz kapcsolt, egymáshoz képest mozgó, vagy mozgatható merev testek rendszere.

A merev testek a mechanizmus *tagjai*. Egy kiválasztott *tag* az **ÁLLVÁNY** (ehhez képest vizsgáljuk a mechanizmust).

Az állványhoz rögzített koordináta-rendszer *inercia-rendszer* legyen.

A mechanizmus feladata

Mechanikus elemek segítségével *mozgást és/vagy erőhatást* eljuttatni egyik helyről a másikra.

- a.) *lényeg a mozgás átvitele*: mozgató-mechanizmusok (bütykös vezérlő rendszerek, robotkarok mozgatása);
- b.) *lényeg az erőhatás átvitele*: erőátviteli mechanizmusok (forgattyús hajtómű, fogaskerekes hajtóművek, sebességváltók).

A mechanizmusokkal kapcsolatos témakörök:

- szerkezeti tulajdonságok elemzése - általános törvényszerűségek megállapítása;
- mechanikai és dinamikai tulajdonságok elemzése - mozgások és erőhatások feltárása (kinematikai és dinamikai kérdések);
- mechanizmusok tervezése - előírt mozgásfolyamat megvalósítása (szelepvezérlő bütykös mechanizmus, tömegkiegyenlítés).

Mechanizmusok csoportosítása további szempontok szerint

1.) Tulajdonságok ill. típus szerint:

- térbeli mechanizmusok;
- síkbeli mechanizmusok;
- gömbi mechanizmusok;
- centrois mechanizmusok;
- stb.

2.) A mechanizmusban szereplő jellegzetes kényszerek típusa szerint:

- gömbcsuklós mechanizmusok;
- csuklós mechanizmusok;
- bütykös mechanizmusok;
- fogaskerekes mechanizmusok;
- stb.

III. 2. Kényszer - kényszerek

Egy test kényszer alatt áll, ill. mozgása kényszermozgás, ha lehetséges 6 koordinátája nem vehet fel tetszőleges értéket, hanem közöttük valamilyen kapcsolat van.

A koordináták közötti kapcsolat **kényszeregyenletekkel**

a.) $f(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6) = 0$, vagy

b.) $f(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, t) = 0$

alakban írható fel.

Amennyiben a koordináták közötti kapcsolat az a.) kényszeregyenletnek megfelelően **nem függ az időtől**, akkor a kényszer u.n. **PASSZÍV kényszer**.

Amennyiben a koordináták közötti kapcsolat az b.) kényszeregyenletnek megfelelően **függ az időtől is**, akkor a kényszer u.n. **AKTÍV kényszer**.

A kényszeregyenletekben az időtől való függés sok esetben valamely i -edik koordinátára vonatkozóan egy $q = q(t)$ időfüggvénnyel jellemezhető. Ez esetben **HAJTÁS**-ról beszélünk. Egy passzív kényszer és egy hajtás ennek megfelelően egy aktív kényszert eredményez:

$$\text{Passzív kényszer} + \text{Hajtás} = \text{Aktív kényszer}$$

A kényszer, mint fogalom megvalósulása a kényszer, mint szerkezeti elem.

A kényszerben (mint szerkezeti elem) közvetlen fizikai kapcsolat jön létre a mechanizmus két tagja (két merev test) között. Ez a közvetlen kapcsolat - érintkezés - lehet:

- felület menti érintkezés;
- vonalmenti érintkezés;
- pontszerű érintkezés.

A kényszer által összekapcsolt két testet **kinematikai párnak** is nevezzük.

A kényszerek legfontosabb fajtái

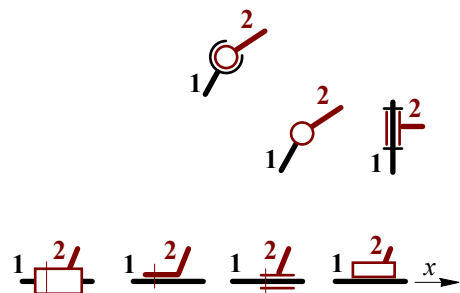
A kényszerek relatív mozgást ill. szögelfordulást tesznek lehetővé ill. gátolnak meg.

Jelölje a 6 lehetséges koordináta közül a 3 relatív elmozdulást x_{12} , y_{12} , és z_{12} , a 3 relatív szögelfordulást φ_{x12} , φ_{y12} és φ_{z12} . Néhány gyakori kényszer jellemzői így:

a.) **gömbcsukló**: $x_{12} = y_{12} = z_{12} = 0$;
 φ_{x12} , φ_{y12} és φ_{z12} szabadon megadható.

b.) **csukló**: $x_{12} = y_{12} = z_{12} = 0$; $\varphi_{x12} = \varphi_{y12} = 0$;
 φ_{z12} szabadon megadható.

c.) **csúszka**: $y_{12} = z_{12} = 0$; $\varphi_{x12} = \varphi_{y12} = \varphi_{z12} = 0$;
 x_{12} szabadon megadható.



d.) **csavarorsó**: $y_{12} = z_{12} = 0$; $\varphi_{y12} = \varphi_{z12} = 0$; és

$$x_{12} = c \varphi_{x12}$$

x_{12} vagy φ_{x12} szabadon megadható.



Szabadságfok, kényszerek szabadságfoka

Egy test, vagy mechanizmus esetében: A test (mechanizmus) helyzetét *egyértelműen meghatározó, egymástól független* (szabad) koordináták száma.

Egy kényszer esetében: A kapcsolódó testek (tagok) egymáshoz viszonyított helyzetét *egyértelműen meghatározó, egymástól független* (szabad) koordináták száma.

Geometriai szabadságfok - a kényszerek, mint passzív kényszerek szabadságfoka -
jele: γ (jelenti egyben a rendszer ill. kényszer **rendszámát** is)

Kinematikai szabadságfok - a kényszerek, mint aktív kényszerek szabadságfoka -
jele: σ

Kötöttségi fok - A kötött, ill. valamely koordinátával függvénykapcsolatban álló koordináták száma. jele: κ

A kötöttségi fok és a szabadságfok egymást kiegészítő jellemzők, összegük mindig a lehetséges maximális szabadságfokot ill. kötöttségi fokot adja.

Egy kényszer esetében ez 6, így:

a **geometriai kötöttségi fok**: $\kappa_g = 6 - \gamma$ a **kinematikai kötöttségi fok**: $\kappa_s = 6 - \sigma$

A kötöttségi fok megegyezik a felírható kényszeregyenletek számával.

Mechanizmusok dinamikai jellemzése

A dinamikai jellemzés során a *mozgás és az azt létrehozó erőhatások közötti kapcsolatot* keressük.

Felírható egyenletek:

Egyenletek száma: Ismeretlenek száma:

1. **Mozgásegyenletek** $f_m(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}, \mathbf{F}, t) = 0$ $m = n \times 6$ $n \times 6 + \varepsilon' = m + \varepsilon'$

\mathbf{q} : a mozgás-koordináták $m=n \times 6$ dimenziós vektora, \mathbf{F} : a mozgásegyenletekben szereplő külső és belső erőhatások (erők és nyomatékok) ε' dimenziós vektora, n : a mechanizmust alkotó tagok száma, t : az idő

2. **Erőtörvények** $f_e(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{F}, t) = 0$ ε -

ε : az állapotfüggő belső erőhatások és a megadott külső erőhatások összes száma.

3. **Kényszeregyenletek** $f_k(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}, t) = 0$ κ -

A megoldhatóság feltétele, hogy az egyenletek száma és az ismeretlenek száma megegyezzen, azaz:

$$m + \varepsilon + \kappa = m + \varepsilon', \text{ amiből } \varepsilon + \kappa = \varepsilon', \text{ vagyis } \varepsilon' - \varepsilon = \kappa.$$

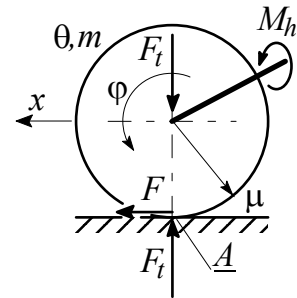
Az ismeretlen erőhatások $\varepsilon' - \varepsilon$ száma tehát meg kell egyezzen a kényszeregyenletek számával. Ezen ismeretlen erőhatásokat ugyanis éppen a kényszerek pontjaiban fellépő erőhatások, melyeknek nagyságát az határozza meg, hogy éppen akkorának kell lenniük, hogy a kényszeregyenletekben leírt feltételek teljesülését biztosítsák.

Például: Egy hajtott kerék.

1. Mozgásegyenletek

(csak az x irányú elmozdulással és a φ szögelfordulással számolva)

$$\left. \begin{array}{l} F = m\ddot{x} \\ M_h - FR = \theta\ddot{\varphi} \end{array} \right\} \begin{array}{l} m = 2 \text{ mozgásegyenlet;} \\ x, \varphi: 2 \text{ mozgás - koordináta} \\ F, M_h: \varepsilon' = 2 \text{ erőhatás} \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} F = m\ddot{x} \\ M_h - FR = \theta\ddot{\varphi} \end{array}} \right\} \begin{array}{l} 2 + 2 = 4 \\ \text{ismeretlen} \end{array}$$



2. Erőtörvények

$M = M(t)$: megadott hajtónyomaték-idő függvény;

A további megoldás attól függ, hogy az érintkezés az A pontban milyen tulajdonságú:

a.) Tiszta gördülés (Feltétel: $F \leq \mu F_t$)

Nincs több erőtvény, így: $\varepsilon = 1$

3. Kényszeregyenlet

A tiszta gördülésnek megfelelően: $R \dot{\varphi} = \dot{x} \rightarrow \kappa = 1$

Ily módon a 4 ismeretlenhez az $m = 2$ mozgásegyenlettel, az $\varepsilon = 1$ erőtvénnyel és a $\kappa = 1$ kényszeregyenlettel

$$m + \varepsilon + \kappa = 2 + 1 + 1 = 4$$

egyenlet áll rendelkezésre, és a feladat megoldható.

Egy lehetséges megoldási mód:

A kényszeregyenlet alapján: $R \dot{\varphi} = \dot{x} \rightarrow R \ddot{\varphi} = \ddot{x} \rightarrow \ddot{\varphi} = \ddot{x} / R$,

amivel a 2. mozgásegyenletből: $\frac{M_h}{R} - F = \frac{\theta}{R} \ddot{\varphi} = \frac{\theta}{R^2} \ddot{x}$.

Ezt az 1. mozgásegyenlettel összeadva: $\frac{M_h}{R} = (m + \frac{\theta}{R^2}) \ddot{x}$, és $\frac{M_h / R}{m + \theta / R^2} = \ddot{x}$.

$\ddot{\varphi}$ értékét a kényszeregyenletbe, F értékét pedig valamelyik (pl. az első) mozgásegyenletbe való behelyettesítéssel kapjuk.

b.) Csúszva gördülés (Feltétel: $R \dot{\varphi} \geq \ddot{x}$)

Ebben az esetben még egy *erőtörvény* felírható, hiszen az A pontban fellépő vízszintes erő a kerék és a talaj kapcsolatában a csúszósurlódással átvihető

$$F = \mu F_t$$

erő, mely az alátámasztási F_t erő ismeretében meghatározható. Ebben az esetben tehát az *erőtörvények* száma $\varepsilon = 2$. Mivel erre az esetre kényszeregyenlet nem írható fel, így $\kappa = 0$, és a 4 ismeretlenhez az $m = 2$ mozgásegyenlettel, az $\varepsilon = 2$ *erőtörvény*nel

$$m + \varepsilon + \kappa = 2 + 2 + 0 = 4$$

egyenlet áll rendelkezésre, és a feladat megoldható.

Megjegyzés: A feladat megoldása során a *feltételek* teljesülését minden lépésben ellenőrizni kell. Ha a kiindulási feltétellel (pl. a *tiszta gördülés* feltétele) nem teljesül, akkor az azt jelenti, hogy a további megoldásnál új *feltételt* (pl. a *csúszva gördülés* feltételét) kell figyelembe vennünk (a kerék megcsúszásának pillanata). Valamely (fizikai) kényszer tulajdonságának ilyen ugrásszerű megváltozását *kényszerváltásnak* nevezzük.

III. 3. Kinematikai lánc, és szerkezeti képlet

A kinematikai láncot (mechanizmust) tagok és kényszerek összessége alkotja. Két tag mindig egy vagy több kényszeren keresztül kapcsolódik össze.

A *tagokat* jelöljük arab számokkal: 0, 1, 2, 3.

Megjegyzés: a 0 jelű tag mindig az *állvány*.

A *kényszereket* nagybetűkkel jelöljük: A, B, C, D .

(A rajz szerinti kinematikai láncban: A, B, C : csuklók; D : csúszka)

A kinematikai lánc leírható a láncot alkotó tagok és kényszerek egymásutániságának jelölésével, pl. a példa esetében az állványról elindulva a

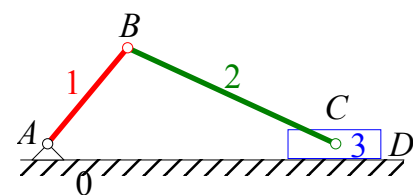
$$0A1B2C3D0$$

betű-szám kombinációs karaktersorozattal.

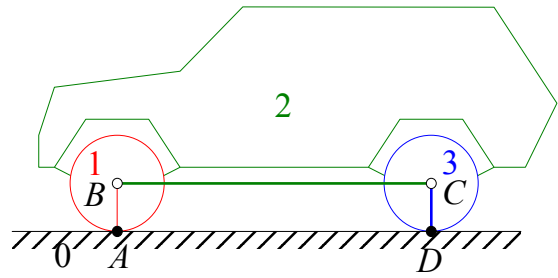
Mivel egy kényszer mindig *két tag* között teremt kapcsolatot, ezért a tagok jelölése el is maradhat. Így jutunk a *szerkezeti képlethez*, mely a példánkban

$$ABCD$$

alakú.

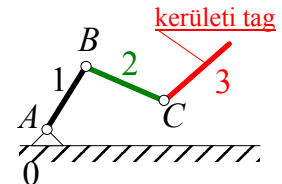


Csúszásmentes gördülés feltételezésével az ábra szerinti gépkocsi ugyancsak egy egyszerű (négycsuklós) mechanizmus. Szerkezeti képlete ugyancsak: $ABCD$. Ez egyben azt is jelenti, hogy ugyanaz a szerkezeti képlet egymástól különböző mechanizmusokat is leírhat.



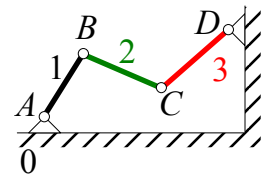
Nyitott kinematikai lánc

Az ábra szerinti (ABC szerkezeti képletű) mechanizmus u.n. *nyílt láncú* mechanizmus. A nyílt láncú mechanizmus utolsó tagját (*zárótagját*) *kerületi tag*nak nevezzük.



Zárt kinematikai lánc

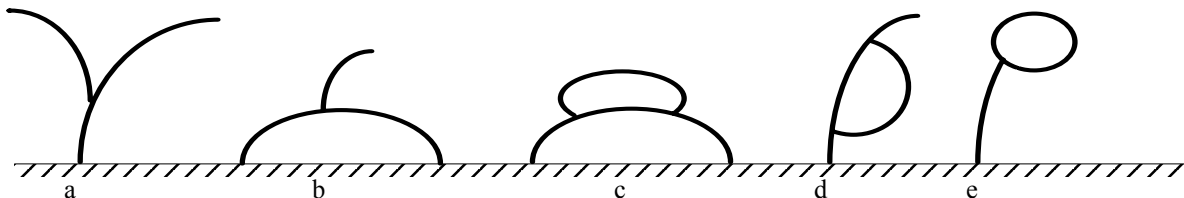
Ha az ábra szerint a nyitott kinematikai lánc kerületi tagját egy újabb (D) kényszerrel a mechanizmus egy korábbi tagjához kötjük (az ábra szerint az állványhoz), akkor a kinematikai lánc *záródik*, és mechanizmust *zárt láncú mechanizmus*nak nevezzük. (Szerkezeti képlete: $ABCD$.)



Egy- és többláncú mechanizmusok

Az eddig tárgyalt mechanizmusokat alkotó *tagok* és *kényszerek* egyetlen láncot alkotnak, ezeket egyszerű, *egyláncú mechanizmusok*nak nevezzük. Ha egy egyszerű kinematikai lánc, mint *kezdőlánc* valamely tagjához újabb kényszerek segítségével további tagokat kötünk, akkor a mechanizmust két, egymáshoz kötődő kinematikai lánc fogja alkotni, és *kétláncú mechanizmus*nak nevezzük. A folyamat folytatható, és az egymáshoz kapcsolódó láncok együttesen egy *többláncú mechanizmust* fognak alkotni.

Mind a kezdőlánc, mind a hozzákötött láncok lehetnek nyílt- ill. zárt kinematikai láncok, így az elrendezések számos variációja kialakítható. Például csak a kétláncú mechanizmusokat tekintve az alábbi ábra szerinti kombinációk lehetségesek: (Az ábrán az egyes kinematikai láncokat ívelt vonalak jelzik).



- Nyitott kezdőlánchoz nyitott lánc kapcsolódik;
- Zárt kezdőlánchoz nyitott lánc kapcsolódik;
- Zárt kezdőlánchoz zárt lánc kapcsolódik;
- Nyitott kezdőlánchoz zárt lánc kapcsolódik;
- Nyitott kezdőlánchoz kerületi tagként zárt lánc kapcsolódik;

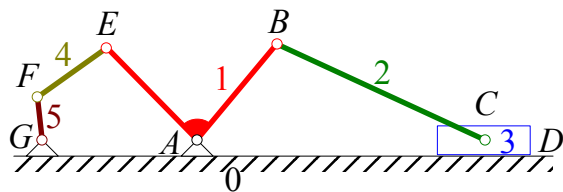
A szerkezeti képlet felírásának szabályai

- Minden kényszer jele csak egyszer fordulhat elő.
- A kényszerek jelei olyan sorrendben, ahogy belőlük a láncok felépíthetők.
- Az egymáshoz kapcsolódó láncok összekapcsolódását balra mutató nyíl (\leftarrow) jelzi.
- A hajtás jelöléseként a kényszer fölé lefelé mutató nyilat (\downarrow) helyezünk (pl. *A*).

Példa:

Tekintsük az ábra szerinti, kétláncú (fenti c típusú: zárt kezdőlánchoz kapcsolódó zárt második lánc) mechanizmust.

A korábban már tárgyalt *ABCD* zárt láncú mechanizmus 1 jelű tagjához újabb (*EF*) kényszerekkel hozzákapcsoltuk a 4 és 5 jelű tagokat, majd az 5 jelű tagot a *G* kényszerrel az állványhoz kötöttük, azaz a második láncot is zártuk.



Egy lehetséges szerkezeti képlet: $ABCD \leftarrow EFG$.

A mechanizmus felépíthető a *G* kényszerből kiindulva a szerkezeti képlet szerint is, sőt lehetséges a szerkezeti képlet szerinti összeállítás is.

$$GFEA \leftarrow BCD$$

$$GFEB \leftarrow A$$

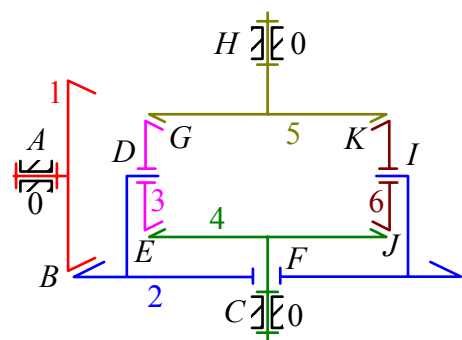
Ha a mechanizmus mozgatása a *G* kényszer aktív tételével, azaz hajtás megadásával történik, akkor a szerkezeti képlet lehet pl.

$$\downarrow GFEA \leftarrow BCD$$

Mint a példából látható, ugyanaz a mechanizmus *különböző alakú szerkezeti képletekkel is leírható*. A mechanizmusok mozgásjellemzőinek meghatározásához szükséges összefüggések felírásánál a későbbiekben segítségül hívjuk majd a szerkezeti képletet is, és látni fogjuk, hogy a különböző szerkezeti képletek alapján felírt összefüggések különböző bonyolultságú úton vezetnek el ugyanahhoz a végeredményhez.

Példa:

Tekintsük az ábra szerinti differenciálművet, és írjuk fel szerkezeti képletét. A mechanizmus az állványon kívül 6 tagból áll, melyek között a *B, E, G, J, K* fogaskerék kapcsolatok és a *A, C, D, F, H, I* csuklók, mint kényszerek teremtenek kapcsolatot. Egy lehetséges szerkezeti képlet:

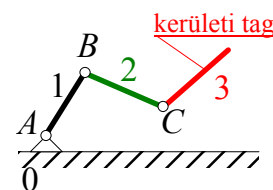


$$ABC \leftarrow DEF \leftarrow GH \leftarrow IJ \leftarrow K.$$

A szerkezeti képlet alapján tehát a differenciálmű egy 5 láncú mechanizmus.

A kinematikai lánc szabadságfoka - nyitott kinematikai lánc

Példaként tekintsük az ábra szerinti, síkbeli, már korábban is felrajzolt mechanizmust, és lépésről-lépésre vizsgáljuk a szabadságfok alakulását.



Az A kényszer egy *csukló*, mely 1 szabadságfokkal rendelkezik, így a 0 jelű állványhoz az A egyszabadságfokú kényszerrel kapcsolt 1 jelű tag szabadságfoka is 1 lett, hiszen egyedül a rajz síkjára merőleges tengely körüli szöghelyzete lehet szabadon megválasztható.

Az 1 jelű taghoz újabb 1 szabadságfokú B kényszerrel kapcsoljuk a 2 jelű tagot. Ezáltal a 2 jelű tag szabadságfoka 2-re adódik, hiszen könnyen belátható, hogy a 2-es tag végpontja a sík bármely pontjába beállítható (bizonyos határok mellett természetesen természetesen).

Folytatva az eljárást, és a 2 jelű taghoz újabb 1 szabadságfokú C kényszerrel kapcsoljuk a 3 jelű tagot, akkor ennek a tagnak a szabadságfoka már 3-ra adódik, ami abban nyilvánul meg, hogy azon túl, hogy ennek a tagnak a súlypontja, vagy a végpontja a sík tetszőleges pontjába beállítható (természetesen bizonyos határok között), még a szöghelyzete sem kötött.

Az eljárás folytatható lenne, és összefoglalóan a példa alapján megállapítható, hogy a $\gamma_A, \gamma_B, \dots, \gamma_N$ szabadságfokú kényszerekből felépített nyílt kinematikai lánc (mechanizmus) kerületi tagjának, és ezzel az egész mechanizmusnak a szabadságfoka

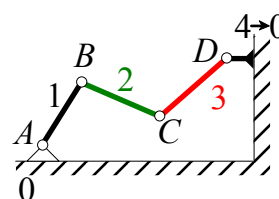
$$\gamma = \gamma_A + \gamma_B + \dots + \gamma_N,$$

azaz a láncot alkotó kényszerek szabadságfokainak összege.

Magjegyzés: A szabadságfok tetszőleges szám lehet, annak ellenére, hogy például síkban egy test helyzetének megadásakor max. 3 koordinátát tudunk elképzelni. Ebben az esetben a mechanizmus 3-nál nagyobb szabadságfoka azt jelzi, hogy azt a bizonyos, 3 koordinátával megadott helyzetet a mechanizmus többféleképpen is fel tudja venni. Ugyanakkor a későbbiekben látni fogjuk, hogy a szabadságfok lehet negatív szám is, ami a test helyzetének "túlhatározottságára" utal, vagyis arra, hogy a test helyzetének meghatározását a szükségesnél több kötöttség is befolyásolja.

Zárt kinematikai lánc szabadságfoka

Az előzőekben tárgyalt nyílt kinematikai láncú mechanizmushoz az ábra szerint egy újabb 1 szabadságfokú D kényszerrel (csuklóval) kapcsoljuk a 4 jelű tagot, így a nyílt láncú mechanizmusunk szabadságfoka az előzőek szerint



$$\gamma = \gamma_A + \gamma_B + \gamma_C + \gamma_D = 1 + 1 + 1 + 1 = 4$$

lenne. Ezt követően rögzítsük mereven a 4 jelű tagot az állványhoz, és ezzel tegyük zárttá a kinematikai láncot. Ezzel a merev összekötéssel a síkbeli mechanizmusunk 4 jelű tagjának az összekötés előtti szabad mozgását megakadályoztuk, két irányú helyzetét és a síkra merőleges tengely körüli szöghelyzetét rögzítettük, megkötöttük. A 3 koordináta *megkötésével* szabadságfokait 3-al csökkentettük. A zárt kinematikai láncú mechanizmus szabadságfoka tehát $4 - 3 = 1$ -re csökkent, ami meg is felel a tapasztalatunknak, hiszen egy szöghelyzet megadásával a vázolt mechanizmus egyértelmű helyzetet vesz fel.

Összefoglalva és általánosítva tehát megállapíthatjuk, hogy egy kinematikai lánc *zárása* együtt jár a zárás tényének megfelelő κ_z számú kötöttséggel, kötöttségi fokkal. Ez a κ_z kötöttség csökkenti a mechanizmus szabadságfokát, így az A, B, \dots, N kényszerekből felépülő *zárt kinematikai lánc szabadságfoka* a

$$\gamma = \gamma_A + \gamma_B + \dots + \gamma_N - \kappa_z$$

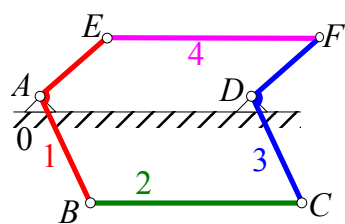
összefüggés szerint számítható, ahol κ_z a zárás tényével együttjáró kötöttségi fok.

A zárással együttjáró kötöttségi fok értéke a mechanizmus típusától függően eltérő lehet:

- térbeli mechanizmusnál: $\kappa_z = 6$;
- síkbeli mechanizmusnál: $\kappa_z = 3$;
- gömbi mechanizmusnál: $\kappa_z = 3$;

Speciális kialakítások hatása a szabadságfokok számára

Tekintsük az ábra szerinti mechanizmust. Szerkezeti képlete és geometriai szabadságfoka:



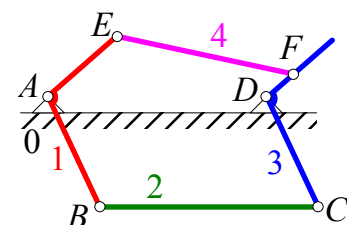
$$A B C D \leftarrow E F$$

$$\gamma = 1 \ 1 \ 1 \ 1 - 3 \ 1 \ 1 - 3 = 0$$

ami meg is felel tapasztalatunknak, mivel a mechanizmus mozgásképtelen, befeszült. Helyezzük át azonban az F kényszert úgy, hogy az $AE=DF$ távolságok azonosak legyenek. Ekkor, ha $AB=CD$ távolság azonososságok, valamint az $AB \parallel CD$ és $AE \parallel DF$ párhuzamosságok is fennállnak, akkor a mechanizmus mozgathatóvá válik. Egy kényszer *speciális elhelyezése* tehát módosíthatja a kényszer szabadságfokát vagy a zárás tényének megfelelő κ_z kötöttségi fokot. A speciális geometriai elhelyezést ugyanis úgy vesszük figyelembe, hogy az F kényszer szabadságfokát a geometriai előírások számának megfelelően 1-el növeljük változatlan κ_z mellett, ekkor

$$A B C D \leftarrow E F$$

$$\gamma = 1 \ 1 \ 1 \ 1 - 3 \ 1 \ 2 - 3 = 1$$



vagy az F kényszer változatlan szabadságfoka mellett a zárás tényével együttjáró κ_z kötöttségi fok csökkentésében érvényesítjük a speciális geometriai elhelyezésben megnyilvánuló kötöttséget, amivel

$$ABCD \leftarrow EF$$

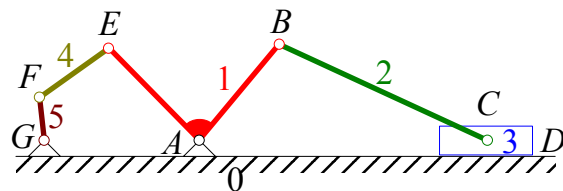
$$\gamma = 1 \ 1 \ 1 \ 1 - 3 \ 1 \ 1 - 2 = 1 .$$

A gyakorlatban ez utóbbi módszer alkalmazása szokásos.

A szabadságfokok számításánál, amennyiben a kényszerek *geometriai szabadságfokait* összegezzük, akkor a mechanizmus *geometriai szabadságfokát*, ha a kényszerek *kinetikai szabadságfokát* összegezzük, akkor a mechanizmus *kinematikai szabadságfokát* kapjuk meg. A zárással együttjáró kötöttségi fok a mindkét esetben azonos.

Példák:

Nézzük néhány korábban már szerepelt mechanizmus szabadságfokát:

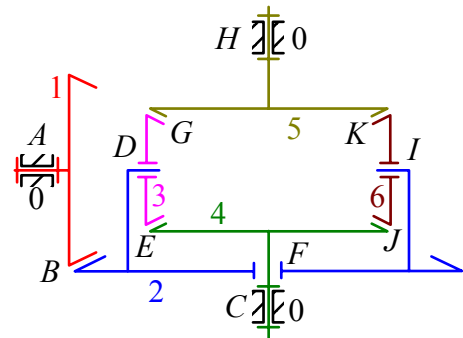


$$ABCD \leftarrow EFG$$

$$\gamma = 1 \ 1 \ 1 \ 1 - 3 \ 1 \ 1 \ 1 - 3 = 1$$

$$ABC \leftarrow DEF \leftarrow GH \leftarrow IJ \leftarrow K$$

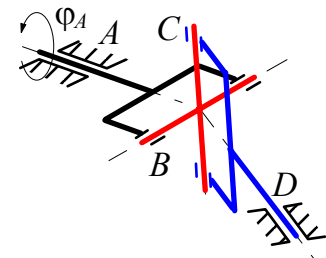
$$\gamma = 1 \ 2 \ 1 \ -3 \ 1 \ 2 \ 1 \ -3 \ 2 \ 1 \ -3 \ 1 \ 2 \ -3 \ 2 \ -2 = 1$$



Itt figyelembe kellett venni, hogy a fogaskerek kapcsolatok szabadságfoka 2, és az utolsó, K kényszer beépítésével megvalósított lánc esetében a 3 és 6 tagokkal a 4 és 5 tagok (fogaskerek) között azonos áttételeket kell megvalósítani a befeszülés elkerülésére. Ez, mint speciális geometria kötöttség az utolsó zárásnál κ_z értékét 3-ról 2-re csökkentette. (A K kényszerrel előírt kapcsolat redundáns - egy meglévő kapcsolatot ismételtelen előíró - kapcsolat.)

Kardánkapcsolat

Gömbi mechanizmus: olyan mechanizmus, melyben csak csuklók szerepelnek, és valamennyi csukló tengelye áthalad a tér egy adott pontján. (csak forgások vannak a rendszerben, így $\kappa_z = 3$). Hajtást az A kényszerben az I jelű tag forgatásával valósítjuk meg.



$$\downarrow$$

$$ABCD$$

$$\gamma = 1 \ 1 \ 1 \ 1 - 3 = 1$$

$$\sigma = 0 \ 1 \ 1 \ 1 - 3 = 0$$

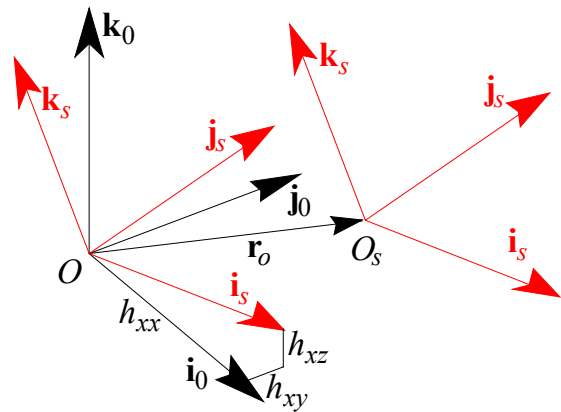
III. 4. Mechanizmusok helyzetének és mozgásának elemzése

A mechanizmusok mozgásának és helyzetének elemzéséhez először is leíró koordináta-rendszereket kell választani. Általában derékszögű, jobbsodrású koordináta-rendszert használunk.

Globális koordináta-rendszer: Az állványhoz rögzített koordináta-rendszer (általában *inercia rendszer*). Egységvektorai: $\mathbf{i}_0, \mathbf{j}_0, \mathbf{k}_0$.

Lokális (helyi) koordináta-rendszerek: a mechanizmus egyes tagjaihoz kötődnek. Jelölje az s -edik taghoz kötődő lokális koordináta-rendszer egységvektorait: $\mathbf{i}_s, \mathbf{j}_s, \mathbf{k}_s$.

Kérdés: a koordináta-rendszerek közötti kapcsolat. Tekintsük az ábra szerinti relatív helyzetben a globális ($\mathbf{i}_0, \mathbf{j}_0, \mathbf{k}_0$) és az s -edik taghoz kötődő lokális ($\mathbf{i}_s, \mathbf{j}_s, \mathbf{k}_s$) koordináta-rendszereket. A lokális koordináta-rendszer egységvektorait az O pontba eltolva írjuk fel őket a globális koordináta-rendszer egységvektorainak lineáris kombinációjaként. Így rendre az



$$\mathbf{i}_s = h_{xx} \mathbf{i}_0 + h_{xy} \mathbf{j}_0 + h_{xz} \mathbf{k}_0, \quad \mathbf{j}_s = h_{yx} \mathbf{i}_0 + h_{yy} \mathbf{j}_0 + h_{yz} \mathbf{k}_0, \quad \mathbf{k}_s = h_{zx} \mathbf{i}_0 + h_{zy} \mathbf{j}_0 + h_{zz} \mathbf{k}_0$$

felbontásokra jutunk. A globális és a lokális koordináta-rendszerek egységvektorait foglaljuk össze egy-egy

$$\mathbf{I}_0 = [\mathbf{i}_0 \ \mathbf{j}_0 \ \mathbf{k}_0]^T \quad \text{és} \quad \mathbf{I}_s = [\mathbf{i}_s \ \mathbf{j}_s \ \mathbf{k}_s]^T$$

matematikai oszlopvektorba, ezzel a fenti három komponensre bontás egyszerűbben az

$$\mathbf{I}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{i}_s \\ \mathbf{j}_s \\ \mathbf{k}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{xx} & h_{xy} & h_{xz} \\ h_{yx} & h_{yy} & h_{yz} \\ h_{zx} & h_{zy} & h_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{i}_0 \\ \mathbf{j}_0 \\ \mathbf{k}_0 \end{bmatrix} = \mathbf{h} \begin{bmatrix} \mathbf{i}_0 \\ \mathbf{j}_0 \\ \mathbf{k}_0 \end{bmatrix} = \mathbf{h} \mathbf{I}_0$$

alakban írható. A két koordináta-rendszer egységvektorai között tehát a \mathbf{h} mátrix teremt kapcsolatot. Az inverz kapcsolat feltárásához az előző, $\mathbf{i}_s, \mathbf{j}_s, \mathbf{k}_s$ vektorokra vonatkozó felbontásokat rendre szorozzuk meg skalárisan az \mathbf{i}_0 egységvektorral, előállítva ezzel az $\mathbf{i}_s, \mathbf{j}_s, \mathbf{k}_s$ vektorok \mathbf{i}_0 vektorra vonatkozó összetevőit. Így az

$$\mathbf{i}_s \mathbf{i}_0 = h_{xx} \quad \mathbf{j}_s \mathbf{i}_0 = h_{yx} \quad \mathbf{k}_s \mathbf{i}_0 = h_{zx}$$

eredményekre jutunk, melyekkel az \mathbf{i}_0 vektor az

$$\mathbf{i}_0 = h_{xx} \mathbf{i}_s + h_{yx} \mathbf{j}_s + h_{zx} \mathbf{k}_s$$

felbontás szerint adódik. Hasonlóképpen a \mathbf{j}_0 , majd a \mathbf{k}_0 egységvektorokkal elvégzett skaláris szorzásokkal kaphatjuk a \mathbf{j}_0 és \mathbf{k}_0 vektorokra vonatkozó

$$\mathbf{j}_0 = h_{xy} \mathbf{i}_s + h_{yy} \mathbf{j}_s + h_{zy} \mathbf{k}_s \quad \mathbf{k}_0 = h_{xz} \mathbf{i}_s + h_{yz} \mathbf{j}_s + h_{zz} \mathbf{k}_s$$

felbontásokat, melyeket összefoglalóan a

$$\mathbf{I}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{i}_0 \\ \mathbf{j}_0 \\ \mathbf{k}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{xx} & h_{yx} & h_{zx} \\ h_{xy} & h_{yy} & h_{zy} \\ h_{xz} & h_{yz} & h_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{i}_s \\ \mathbf{j}_s \\ \mathbf{k}_s \end{bmatrix} = \mathbf{h}^T \begin{bmatrix} \mathbf{i}_s \\ \mathbf{j}_s \\ \mathbf{k}_s \end{bmatrix} = \mathbf{h}^T \mathbf{I}_s$$

mátrixos alakban is felírhatunk, észrevéve, hogy a kiadódó transzformációs mátrix az előző \mathbf{h} transzformáltja. A korábban kapott $\mathbf{I}_s = \mathbf{h} \mathbf{I}_0$ összefüggést balról \mathbf{h}^{-1} inverz mátrixszal szorozva $\mathbf{h}^{-1} \mathbf{I}_s = \mathbf{I}_0$ összefüggés adódik, melyet egybevetve a kapott $\mathbf{I}_0 = \mathbf{h}^T \mathbf{I}_s$ összefüggéssel a \mathbf{h} transzformációs mátrixra a

$$\mathbf{h}^{-1} = \mathbf{h}^T$$

eredményt kapjuk, ami azt jelenti, hogy a \mathbf{h} transzformációs mátrix **ortogonális mátrix**.

Összefoglalóan tehát megállapíthatjuk, hogy az egyes tagokhoz kötődő lokális koordináta-rendszerek és a globális koordináta-rendszer között a \mathbf{h} transzformációs mátrix(ok) teremt(enek) kapcsolatot.

Ugyanazon térbeli vektor az egyes koordináta-rendszerekben - az adott koordináta-rendszer egységvektoraihoz tartozó - eltérő skalár komponensekkel adható meg. Keressük meg a következőkben egy adott vektor különböző koordináta-rendszerekben érvényes skalár komponensei közötti kapcsolatot.

Legyen \mathbf{c} egy tetszőleges térbeli vektor, mely a 0 jelű koordináta-rendszerben a

$$\mathbf{c} = c_{x0} \mathbf{i}_0 + c_{y0} \mathbf{j}_0 + c_{z0} \mathbf{k}_0$$

összefüggés szerint írhatunk fel a koordináta-rendszer koordinátatengely irányú egységvektorainak segítségével. Ez a felbontás a c_{x0} , c_{y0} , c_{z0} skalár komponenseknek egy \underline{c}_0 matematikai oszlopvektorba foglalásával, és a mátrixszorzás szabályainak figyelembe vételével a

$$\mathbf{c} = c_{x0} \mathbf{i}_0 + c_{y0} \mathbf{j}_0 + c_{z0} \mathbf{k}_0 = \begin{bmatrix} c_{x0} & c_{y0} & c_{z0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{i}_0 \\ \mathbf{j}_0 \\ \mathbf{k}_0 \end{bmatrix} = \underline{c}_0^T \mathbf{I}_0$$

mátrixszos alakban is felírható. A korábban kapott $\mathbf{I}_0 = \mathbf{h}^T \mathbf{I}_s$ és $\mathbf{h}^T = \mathbf{h}^{-1}$ összefüggésekkel ez tovább alakítható a

$$\mathbf{c} = \underline{c}_0^T \mathbf{I}_0 = \underline{c}_0^T \mathbf{h}^{-1} \mathbf{I}_s$$

formára. A kapott összefüggést összevetve a \mathbf{c} térbeli vektornak az s jelű koordináta-rendszerben lehetséges, előzőekkel analóg

$$\mathbf{c} = c_{xs} \mathbf{i}_s + c_{ys} \mathbf{j}_s + c_{zs} \mathbf{k}_s = \begin{bmatrix} c_{xs} & c_{ys} & c_{zs} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{i}_s \\ \mathbf{j}_s \\ \mathbf{k}_s \end{bmatrix} = \underline{c}_s^T \mathbf{I}_s$$

felírásával (ahol \underline{c}_s a \mathbf{c} vektor s jelű koordináta-rendszerbeli c_{xs} , c_{ys} , c_{zs} skalár koordinátáit magába foglaló matematikai oszlopvektor), eredményként a

$$\mathbf{c} = \underline{c}_0^T \mathbf{h}^{-1} \mathbf{I}_s = \underline{c}_s^T \mathbf{I}_s, \text{ vagyis } \underline{c}_0^T \mathbf{h}^{-1} = \underline{c}_s^T$$

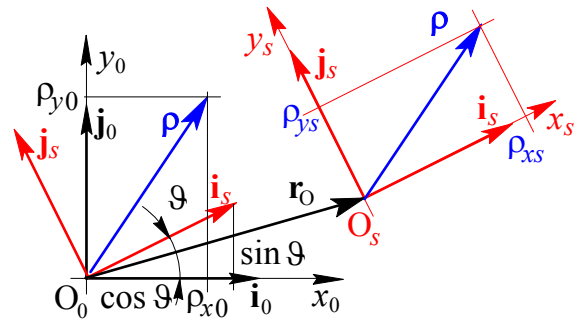
egyenlőség adódik, melyet transzponálva ($\mathbf{h}^T = \mathbf{h}^{-1}$ egyenlőség ismét alkalmazásával)

$$\underline{c}_s = \mathbf{h} \underline{c}_0.$$

Összevetve a kapott eredményt az egységvektorokat tartalmazó \mathbf{I}_0 és \mathbf{I}_s matematikai vektorok között korábban kapott $\mathbf{I}_s = \mathbf{h} \mathbf{I}_0$ összefüggéssel megállapítható, hogy a különböző koordináta-rendszerek egységvektorai (bázisvektorai) között ugyanaz a \mathbf{h} transzformációs mátrix teremt kapcsolatot, amelyik az egyes koordináta-rendszerekben érvényes skalár koordinátákat is összekapcsolja.

Példa:

Tekintsük az ábra szerinti két, síkbeli, 0 és s jelű koordináta-rendszert. Írjuk fel a \mathbf{h} transzformációs mátrixot, és ennek alapján adjuk meg a \mathbf{p} vektor skalár komponenseit a 0 jelű koordináta-rendszerben is (ρ_{x0} , ρ_{y0})!



Első lépésben toljuk el az \mathbf{i}_s , \mathbf{j}_s vektorokat az O_0 origóba, így könnyen belátható, hogy

$$\mathbf{i}_s = \cos \vartheta \mathbf{i}_0 + \sin \vartheta \mathbf{j}_0 \quad \text{és} \quad \mathbf{j}_s = -\sin \vartheta \mathbf{i}_0 + \cos \vartheta \mathbf{j}_0$$

alakban felírhatók, ha ϑ jelöli a két koordináta-rendszer által bezárt szöget. Így a \mathbf{h} transzformációs mátrix

$$\mathbf{h} = \begin{bmatrix} \cos \vartheta & \sin \vartheta \\ -\sin \vartheta & \cos \vartheta \end{bmatrix}.$$

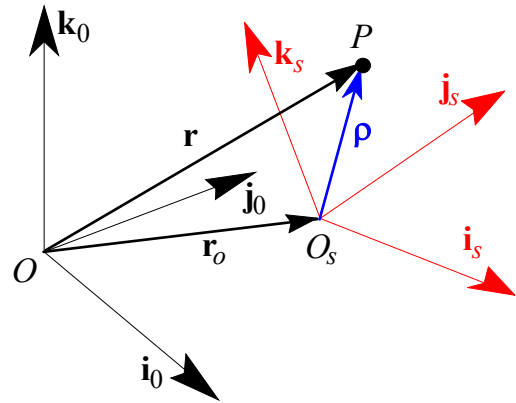
Ennek alapján a \mathbf{p} vektor (ρ_{x0} , ρ_{y0}) skalár koordinátái a 0 jelű koordináta-rendszerben:

$$\begin{bmatrix} \rho_{x0} \\ \rho_{y0} \end{bmatrix} = \underline{\rho}_0 = \mathbf{h}^{-1} \underline{\rho}_s = \begin{bmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho_{xs} \\ \rho_{ys} \end{bmatrix},$$

azaz $\rho_{x0} = \cos \vartheta \rho_{xs} - \sin \vartheta \rho_{ys}$ és $\rho_{y0} = \sin \vartheta \rho_{xs} + \cos \vartheta \rho_{ys}$.

Sebességek és gyorsulások

A mechanizmus egyes tagjainak helyzetét, mozgását az egyes tagokhoz kötődő *lokális, relatív* koordináta-rendszerekben értelmezzük, adjuk meg. Ugyanakkor ezek a lokális koordináta-rendszerek általában változó sebességű mozgásban vannak, így nem inercia rendszerek. Ilymódon szükségessé válik a sebességek és gyorsulások átszámítása, transzformálása a *globális* és lokális rendszerek között.



Az ábra szerint tekintsük a 0 jelű globális (abszolút), és az s jelű lokális (relatív) koordináta-rendszereket, és vizsgáljuk a tér P pontját. A két koordináta-rendszer origóját az \mathbf{r}_o vektor köti össze, és a P pontot a relatív koordináta-rendszerben a $\boldsymbol{\rho}$ vektor, az abszolút koordináta-rendszerben az \mathbf{r} vektor határozza meg.

A két vektor között a mechanikából jól ismert

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_o + \boldsymbol{\rho}$$

összefüggés van. Az \mathbf{r}_o és $\boldsymbol{\rho}$ vektorok persze csak úgy összegezhetőek, ha skalár koordinátájuk azonos (mondjuk az abszolút) koordináta-rendszerben adottak. A $\boldsymbol{\rho}$ vektor azonban általában a relatív koordináta-rendszerbeli skalár koordinátájával adott, így a skalár koordináták között, korábbiakban megismert transzformációt alkalmaznunk kell.

Jelölje \underline{r} , \underline{r}_o és $\underline{\rho}_s$ rendre az \mathbf{r} , \mathbf{r}_o és $\boldsymbol{\rho}$ vektoroknak az indexben jelölt (0 vagy s jelű) koordináta-rendszerekben érvényes skalár koordinátáit tartalmazó matematikai vektorokat (számhármasokat). Így a fenti vektoregyenlet a skalár koordináták kapcsolatát leíró

$$\underline{r} = \underline{r}_o + \mathbf{h}^T \underline{\rho}_s$$

egyenlettel helyettesíthető.

A sebesség

Ha a P pont \mathbf{v} sebességére vagyunk kíváncsiak, akkor az \mathbf{r} helyvektor idő szerinti deriválásával azt meg is kaphatjuk. A mechanikában tanultaknak megfelelően azonban a deriválásnál vegyük figyelembe, hogy az s jelű relatív koordináta-rendszer a 0 jelű abszolút koordináta-rendszerhez képest $\boldsymbol{\omega}$ szögsebességű forgó mozgást is végez. A korábban tanultaknak megfelelően tehát

$$\mathbf{v} = d\mathbf{r} / dt = \dot{\mathbf{r}}_o + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho} + \dot{\boldsymbol{\rho}} = \mathbf{v}_o + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho} + \mathbf{w} = \mathbf{v}_{sz} + \mathbf{w},$$

ahol \mathbf{v}_o az s jelű koordináta-rendszer origójának sebessége, \mathbf{v}_{sz} a szállítósebesség a P pontban, $\mathbf{w} = \dot{\mathbf{p}}$ pedig a P pont relatív sebessége a 0 jelű koordináta-rendszerben.

A \mathbf{v} sebességvektor koordinátáit azonban meg kell kapnunk a $\underline{r} = \underline{r}_o + \mathbf{h}^T \underline{\rho}_s$ koordináták közötti összefüggés idő szerinti deriválásával is. Vegyük persze figyelembe, hogy a \mathbf{h} mátrix is az idő függvénye, így a sebességvektor koordinátáit tartalmazó \underline{v} vektor

$$\underline{v} = \frac{d}{dt}(\underline{r}_o + \mathbf{h}^T \underline{\rho}_s) = \dot{\underline{r}}_o + \dot{\mathbf{h}}^T \underline{\rho}_s + \mathbf{h}^T \dot{\underline{\rho}}_s = \underline{v}_o + \dot{\mathbf{h}}^T \underline{\rho}_s + \mathbf{h}^T \underline{w}_s .$$

Természetesen a \mathbf{v} sebességvektorra kapott előző és a koordinátára kapott utóbbi összefüggés egyes tényezői egymásnak közvetlenül megfeleltethetők. Így pl. az utóbbi összefüggésben az utolsó tag nem más mint a \mathbf{w} relatív sebesség 0 jelű koordináta-rendszerben érvényes skalár koordinátáit tartalmazó \underline{w}_0 vektor előállítás az s jelű koordináta-rendszerben érvényes \underline{w}_s koordinátáiból a korábban megismert $\underline{w}_0 = \mathbf{h}^T \underline{w}_s$ transzformációs összefüggésnek megfelelően.

Példa:

Példaként ellenőrizzük, hogy - síkbeli rendszert tekintve, az előző példának megfelelő adatokkal - a $\dot{\mathbf{h}}^T \underline{\rho}_s$ tag valóban a $\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}$ vektori szorzat skalár komponenseit adja-e! A síkbeli esetnek megfelelően a szögsebesség vektor $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{k}$ alakú, és fennáll a $\vartheta = \omega t$ összefüggés. Tehát:

$$\mathbf{h} = \begin{bmatrix} \cos \vartheta & \sin \vartheta \\ -\sin \vartheta & \cos \vartheta \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{h}^T = \begin{bmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{bmatrix} \rightarrow \dot{\mathbf{h}}^T = \omega \begin{bmatrix} -\sin \vartheta & -\cos \vartheta \\ \cos \vartheta & -\sin \vartheta \end{bmatrix} ,$$

$$\text{és} \quad \dot{\mathbf{h}}^T \underline{\rho}_s = \omega \begin{bmatrix} -\sin \vartheta & -\cos \vartheta \\ \cos \vartheta & -\sin \vartheta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho_{xs} \\ \rho_{ys} \end{bmatrix} = \omega \begin{bmatrix} -\sin \vartheta \rho_{xs} - \cos \vartheta \rho_{ys} \\ \cos \vartheta \rho_{xs} - \sin \vartheta \rho_{ys} \end{bmatrix} .$$

Az $\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}$ vektori szorzatot kifejtve, és figyelembe véve az előző példában kapott

$$\rho_{x0} = \cos \vartheta \rho_{xs} - \sin \vartheta \rho_{ys} \quad \text{és} \quad \rho_{y0} = \sin \vartheta \rho_{xs} + \cos \vartheta \rho_{ys}$$

összefüggéseket

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ \rho_{x0} & \rho_{y0} & 0 \end{vmatrix} = \omega(-\rho_{y0} \mathbf{i} + \rho_{x0} \mathbf{j}) = \\ &= \omega((- \sin \vartheta \rho_{xs} - \cos \vartheta \rho_{ys}) \mathbf{i} + (\cos \vartheta \rho_{xs} - \sin \vartheta \rho_{ys}) \mathbf{j}) \end{aligned}$$

eredményt kapjuk, ahol láthatóan mind az \mathbf{i} , mind a \mathbf{j} irányú komponensekre az előző, mátrixos felírásban szereplőkkel megegyező összefüggéseket kaptunk.

A gyorsulás

A P pont \mathbf{a} gyorsulásvektora a \mathbf{v} sebességvektor idő szerinti deriváltja. Természetesen a deriválásnál itt is tekintettel kell lenni a relatív koordináta-rendszer $\boldsymbol{\omega}$ szögsebességére, így az

$$\begin{aligned}\mathbf{a} &= d\mathbf{v} / dt = \frac{d}{dt}(\mathbf{v}_o + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho} + \mathbf{w}) = \dot{\mathbf{v}}_o + \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}) + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{w} + \dot{\mathbf{w}} = \\ &= (\mathbf{a}_o + \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho})) + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{w} + \dot{\mathbf{w}} = \mathbf{a}_{sz} + \mathbf{a}_c + \boldsymbol{\alpha}\end{aligned}$$

összefüggésre jutunk, melyben $\boldsymbol{\varepsilon}$ a koordináta rendszer szöggyorsulása, \mathbf{a}_{sz} a szállító-, \mathbf{a}_c a coriolis-, $\boldsymbol{\alpha}$ pedig a relatív gyorsulás vektora a P pontban.

Ha az \mathbf{a} gyorsulásvektor skalár koordinátáit tartalmazó \underline{a} vektort a \underline{v} sebességvektorra kapott összefüggés deriválásával határozzuk meg, akkor az

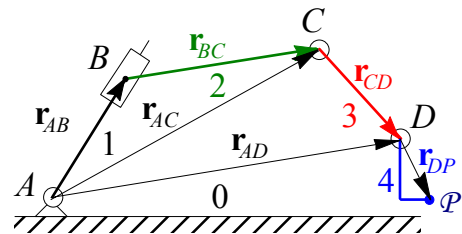
$$\begin{aligned}\underline{a} &= \frac{d}{dt}(\underline{v}_o + \mathbf{h}^T \underline{\rho}_s + \mathbf{h}^T \underline{w}_s) = \underline{\dot{v}}_o + \mathbf{h}^T \underline{\rho}_s + \mathbf{h}^T \dot{\underline{\rho}}_s + \mathbf{h}^T \underline{w}_s + \mathbf{h}^T \dot{\underline{w}}_s = \\ &= \underline{a}_o + \mathbf{h}^T \underline{\rho}_s + 2 \mathbf{h}^T \underline{w}_s + \mathbf{h}^T \underline{\alpha}_s\end{aligned}$$

képletre jutunk, ahol az első két tag az \mathbf{a}_{sz} a szállítógyorsulás, a harmadik tag az \mathbf{a}_c coriolis gyorsulás, a negyedik tag pedig az $\boldsymbol{\alpha}$ relatív gyorsulás 0 jelű koordináta-rendszerben érvényes skalár koordinátáit adja.

Általános, nyitott kinematikai lánc sebességállapota

Tekintsük példaként a következő ábra szerinti mechanizmust, de az általánosság érdekében ne használjuk ki a láncban szereplő kényszerek speciális tulajdonságait. Ez alatt azt kell érteni, hogy valamennyi kényszer esetében tételezzük fel, hogy ott relatív sebességek és szögsebességek is lehetségesek. (Az ábra szerint pl. a B kényszer egy csúszka, melyben relatív sebesség lehetséges, az A , C és D kényszerek pedig csuklók, melyekben relatív szögsebességek lehetségesek.)

A mechanizmus egy 5 tagból álló nyitott kinematikai lánc. Szerkezeti képlete: $ABCD$. A kapcsolódási pontokat rendre az \mathbf{r}_{AB} , \mathbf{r}_{BC} , \mathbf{r}_{CD} vektorok kötik össze, a \mathcal{P} pont pedig a 4-es taghoz kötött, a D ponttól $\mathbf{r}_{D\mathcal{P}}$ távolságra levő tetszőleges pont.



A szögsebességeket tekintve könnyen belátható, hogy bármely tagnak az állványhoz viszonyított szögsebessége előállítható a kinematikai láncban az adott tagig található egyes kényszerekben megvalósuló relatív szögsebességek összegeként, vagyis

$$\omega_{01} = \omega_A, \omega_{02} = \omega_{01} + \omega_{12}, \omega_{03} = \omega_{01} + \omega_{12} + \omega_{23}, \omega_{04} = \omega_{01} + \omega_{12} + \omega_{23} + \omega_{34}$$

írható, ahol $\omega_{i,j}$ jelöli a j -edik tagnak az i -edik taghoz viszonyított relatív szögsebességét. Mivel ezek a relatív szögsebességek az egyes kényszerekhez kötődnek, ezért a továbbiakban az egyszerűbb jelölés érdekében a szomszédos tagok esetében az indexekben az egyes tagokra való utalás helyett a kapcsolódás helyét (a kényszer azonosítóját) fogjuk szerepeltetni, tehát az előző összefüggéseket rendre az

$$\omega_{01} = \omega_A, \omega_{02} = \omega_A + \omega_B, \omega_{03} = \omega_A + \omega_B + \omega_C, \omega_{04} = \omega_A + \omega_B + \omega_C + \omega_D$$

összefüggések helyettesítik.

Az egyes kapcsolódási pontokban különítsük el az egymással fedésben lévő, de különböző tagokhoz kötődő pontokat. Így pl. a B pontban külön jelöljük az 1 jelű taghoz kötődő B_1 pontot, és a vele pillanatnyilag fedésben lévő, de a 2 jelű taghoz kötődő B_2 pontot. A két pont egymáshoz képesti relatív sebességét a $\mathbf{v}_{B_1B_2}$ jelöli, ami helyett elegendő röviden a \mathbf{v}_B jelölés, hiszen a B kényszerre való utalás magában hordozza azt az információt is, hogy az 1-es és 2-es tag közötti kapcsolatról van szó. A korábban jelzett *általánosság* érdekében ilyen értelmű megkülönböztetést, és relatív sebességet (ill. szögsebességet) valamennyi kényszernél (csatlakozási pontnál) feltételezünk.

A 0 jelű állvány, és ezzel a hozzá az A pontban kötődő A_0 pont is nyugalomban van, sebessége zérus. Ugyanakkor az A kényszer 1-es taghoz kötődő A_1 pontjának sebessége

$$\mathbf{v}_{A1} = \mathbf{0} + \mathbf{v}_{A0A1} = \mathbf{0} + \mathbf{v}_A = \mathbf{v}_A$$

Mivel az 1-es tagnak az állványhoz viszonyított szögsebességét $\boldsymbol{\omega}_1 = \boldsymbol{\omega}_A$ jelöli, a B kényszerrel a 2-es taghoz kötött B_2 pont sebessége

$$\mathbf{v}_{B2} = \mathbf{v}_{A1} + \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r}_{AB} + \mathbf{v}_{B_1B_2} = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega}_A \times \mathbf{r}_{AB} + \mathbf{v}_B.$$

Továbbmenve, ha a 2-es tag az állványhoz képest $\boldsymbol{\omega}_2$ szögsebességgel forog, akkor a C kényszer 3-as taghoz kötődő C_3 pontjának sebessége

$$\mathbf{v}_{C3} = \mathbf{v}_{B2} + \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{r}_{BC} + \mathbf{v}_{C_2C_3} = \mathbf{v}_{B2} + \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{r}_{BC} + \mathbf{v}_C$$

Helyettesítsük be a \mathbf{v}_{B2} -re az előbb kapott eredményt, és vegyük figyelembe, hogy $\mathbf{r}_{AB} + \mathbf{r}_{BC} = \mathbf{r}_{AC}$ és $\boldsymbol{\omega}_2 = \boldsymbol{\omega}_A + \boldsymbol{\omega}_B$, így

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{C3} &= \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega}_A \times \mathbf{r}_{AB} + \mathbf{v}_B + (\boldsymbol{\omega}_A + \boldsymbol{\omega}_B) \times \mathbf{r}_{BC} + \mathbf{v}_C = \\ &= \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega}_A \times \mathbf{r}_{AC} + \mathbf{v}_B + \boldsymbol{\omega}_B \times \mathbf{r}_{BC} + \mathbf{v}_C. \end{aligned}$$

Folytatva az eljárást, és a 3-as tag állványhoz képesti $\boldsymbol{\omega}_3 = \boldsymbol{\omega}_A + \boldsymbol{\omega}_B + \boldsymbol{\omega}_C$ szögsebességét, valamint az $\mathbf{r}_{AC} + \mathbf{r}_{CD} = \mathbf{r}_{AD}$ és $\mathbf{r}_{BC} + \mathbf{r}_{CD} = \mathbf{r}_{BD}$ összefüggéseket figyelembe véve a D kényszer pontjában a 4-es taghoz kötődő D_4 pont sebességére a

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{D4} &= \mathbf{v}_{C3} + \boldsymbol{\omega}_3 \times \mathbf{r}_{CD} + \mathbf{v}_{D_3D_4} = \mathbf{v}_{C3} + \boldsymbol{\omega}_3 \times \mathbf{r}_{CD} + \mathbf{v}_D \\ &= \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega}_A \times \mathbf{r}_{AC} + \mathbf{v}_B + \boldsymbol{\omega}_B \times \mathbf{r}_{BC} + \mathbf{v}_C + (\boldsymbol{\omega}_A + \boldsymbol{\omega}_B + \boldsymbol{\omega}_C) \times \mathbf{r}_{CD} + \mathbf{v}_D = \\ &= \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega}_A \times \mathbf{r}_{AD} + \mathbf{v}_B + \boldsymbol{\omega}_B \times \mathbf{r}_{BD} + \mathbf{v}_C + \boldsymbol{\omega}_C \times \mathbf{r}_{CD} + \mathbf{v}_D. \end{aligned}$$

összefüggést kapjuk. Végezetül az állványhoz képest $\boldsymbol{\omega}_4 = \boldsymbol{\omega}_A + \boldsymbol{\omega}_B + \boldsymbol{\omega}_C + \boldsymbol{\omega}_D$ szögsebességgel forgó 4-es taghoz az ábra szerint kötődő tetszőleges \mathcal{P} pont sebességére az $\mathbf{r}_{AD} + \mathbf{r}_{D\mathcal{P}} = \mathbf{r}_{A\mathcal{P}}$, $\mathbf{r}_{BD} + \mathbf{r}_{D\mathcal{P}} = \mathbf{r}_{B\mathcal{P}}$ és $\mathbf{r}_{CD} + \mathbf{r}_{D\mathcal{P}} = \mathbf{r}_{C\mathcal{P}}$ jelölések segítségével a

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{\mathcal{P}4} &= \mathbf{v}_{D4} + \boldsymbol{\omega}_4 \times \mathbf{r}_{D\mathcal{P}} = \\ &= \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega}_A \times \mathbf{r}_{AD} + \mathbf{v}_B + \boldsymbol{\omega}_B \times \mathbf{r}_{BD} + \mathbf{v}_C + \boldsymbol{\omega}_C \times \mathbf{r}_{CD} + \mathbf{v}_D + (\boldsymbol{\omega}_A + \boldsymbol{\omega}_B + \boldsymbol{\omega}_C + \boldsymbol{\omega}_D) \times \mathbf{r}_{D\mathcal{P}} = \\ &= \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega}_A \times \mathbf{r}_{A\mathcal{P}} + \mathbf{v}_B + \boldsymbol{\omega}_B \times \mathbf{r}_{B\mathcal{P}} + \mathbf{v}_C + \boldsymbol{\omega}_C \times \mathbf{r}_{C\mathcal{P}} + \mathbf{v}_D + \boldsymbol{\omega}_D \times \mathbf{r}_{D\mathcal{P}} \end{aligned}$$

kifejezést kapjuk. Kicsit átrendezve ugyanez a

$$\mathbf{v}_{P4} = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_C + \mathbf{v}_D + \boldsymbol{\omega}_A \times \mathbf{r}_{AP} + \boldsymbol{\omega}_B \times \mathbf{r}_{BP} + \boldsymbol{\omega}_C \times \mathbf{r}_{CP} + \boldsymbol{\omega}_D \times \mathbf{r}_{DP} = \sum_{j=A}^D \mathbf{v}_j + \sum_{j=A}^D \boldsymbol{\omega}_j \times \mathbf{r}_{jP}$$

alakban is felírható. Könnyen belátható az is, hogy ha az állványhoz viszonyított abszolút szögsebességeket nem bontjuk fel a relatív szögsebességek összegeire, akkor a

$$\mathbf{v}_{P4} = \sum_{j=A}^D \mathbf{v}_j + \sum_{i=1}^4 \boldsymbol{\omega}_{0i} \times \mathbf{r}_i$$

eredményre jutunk, ahol \mathbf{r}_i az i -edik tagon a "kezdő" (belépési) pontból a "végső" (ki-lépési) pontba mutató vektor, példánkban rendre $i = 1, \dots, 4$ -hez \mathbf{r}_{AB} , \mathbf{r}_{BC} , \mathbf{r}_{CD} , \mathbf{r}_{DP} .

Általánosítva

Egy $ABC\dots N$ szerkezeti képletű, n tagú, **nyílt** láncú mechanizmus kerületi tagja valamely P pontjának az állványhoz viszonyított $\boldsymbol{\omega}_P$ szögsebessége ill. \mathbf{v}_P sebessége

$$\boxed{\boldsymbol{\omega}_P = \sum_{j=A}^N \boldsymbol{\omega}_j} \quad \text{ill.} \quad \boxed{\mathbf{v}_P = \sum_{j=A}^N \mathbf{v}_j + \sum_{j=A}^N \boldsymbol{\omega}_j \times \mathbf{r}_{jP}}, \quad \text{vagy} \quad \boxed{\mathbf{v}_P = \sum_{j=A}^N \mathbf{v}_j + \sum_{i=1}^n \boldsymbol{\omega}_{0i} \times \mathbf{r}_i}.$$

Már itt fel kell hívni a figyelmet a kapott eredményeknek a statikában, az eredő erő és nyomaték számításánál tanultakkal való analógiájára. Ha a relatív szögsebességek $\boldsymbol{\omega}_j$ vektorai helyére koncentrált \mathbf{F}_j erőket, a relatív sebességek \mathbf{v}_j vektorai helyére koncentrált \mathbf{M}_j nyomatékokat gondolunk, akkor a két fenti összefüggés nem más, mint a koncentrált erők és nyomatékok P pontra számított eredőjét megadó két vektoregyenlet.

Könnyű belátni, hogy amennyiben a vizsgált nyílt kinematikai lánc kezdőpontja nem a nyugalomban levő állvány, hanem egy mechanizmus valamely tagjának \mathbf{v}_0 sebességgel haladó és $\boldsymbol{\omega}_0$ szögsebességgel forgó pontja, akkor ezek a kezdőértékek egyszerűen hozzáadódnak a fenti képletek szerinti szummákhoz, és az

$$\boxed{\boldsymbol{\omega}_P = \boldsymbol{\omega}_0 + \sum_{j=A}^D \boldsymbol{\omega}_j} \quad \text{ill.} \quad \boxed{\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_0 + \sum_{j=A}^N \mathbf{v}_j + \sum_{j=A}^N \boldsymbol{\omega}_j \times \mathbf{r}_{jP}}, \quad \text{vagy} \quad \boxed{\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_0 + \sum_{j=A}^N \mathbf{v}_j + \sum_{i=1}^n \boldsymbol{\omega}_{0i} \times \mathbf{r}_i}$$

összefüggéseket eredményezik.

Általános, zárt kinematikai lánc sebességállapota

Az előzőekben vizsgált mechanizmus 4-es tagját kössük mereven az állványhoz. Ilymódon a 4-es taghoz kötődő P pont szögsebessége és sebessége is zérus kell legyen, tehát az

$$\boldsymbol{\omega}_P = \sum_{j=A}^D \boldsymbol{\omega}_j = \mathbf{0} \quad \text{ill.} \quad \mathbf{v}_P = \sum_{j=A}^D \mathbf{v}_j + \sum_{j=A}^D \boldsymbol{\omega}_j \times \mathbf{r}_{jP} = \mathbf{0}.$$

egyenletek adódnak. Ugyanígy, ha egy zárt kinematikai lánc bármely $\boldsymbol{\omega}_0$ szögsebességgel forgó tagjának \mathbf{v}_0 sebességgel haladó P pontjából kiindulunk, és a zárt kinematikai lánc A, B, C, \dots, N kényszerein végighaladva visszajutunk a kiindulási P pontba, akkor

$$\omega_P = \omega_0 = \omega_0 + \sum_{j=A}^N \omega_j \quad \text{ill.} \quad \mathbf{v}_P = \mathbf{v}_0 = \mathbf{v}_0 + \sum_{j=A}^N \mathbf{v}_j + \sum_{j=A}^N \omega_j \times \mathbf{r}_{jP}.$$

Az ω_0 -al ill. \mathbf{v}_0 -al egyszerűsítve általánosíthatjuk az egyenleteket.

Általánosítva

Egy $ABC\dots N$ szerkezeti képletű, n tagú, **zárt** láncú mechanizmusra vonatkozóan a

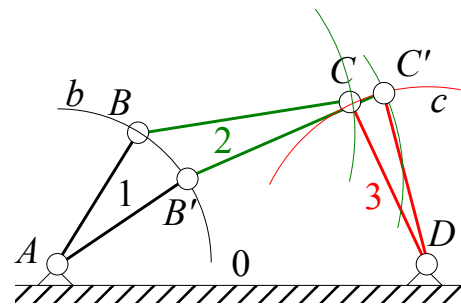
$$\boxed{\sum_{j=A}^N \omega_j = \mathbf{0}} \quad \text{ill.} \quad \boxed{\sum_{j=A}^N \mathbf{v}_j + \sum_{j=A}^N \omega_j \times \mathbf{r}_{jP} = \mathbf{0}}, \quad \text{vagy} \quad \boxed{\sum_{j=A}^N \mathbf{v}_j + \sum_{i=1}^n \omega_{0i} \times \mathbf{r}_i = \mathbf{0}}$$

vektoregyenleteknek teljesülniük kell a tér tetszőleges P pontjára.

A statikával való analógia itt is fennáll, hiszen egy erőrendszer egyensúlyát a statikában éppen ezek, az erők és a nyomatékok egyensúlyát kifejező egyenletek határozzák meg. Ily módon, ahogy a statikában az erővektorok és a nyomatékvektorok alkotta rendszer, úgy a mechanizmusok elméletében **a relatív szögsebesség vektorok és a relatív sebességvektorok alkotta vektor-rendszer is egyensúlyi vektorrendszer.**

Szerkesztő eljárások

A mechanizmusok vizsgálatánál - főleg a *helyzet* meghatározásánál - gyakran alkalmazunk "szerkesztő" eljárásokat, amikor geometriai törvényszerűségek alapján keressük a megoldást. Példaként tekintsük az ábra szerinti, 4 csuklóból és 4 tagból álló mechanizmust.



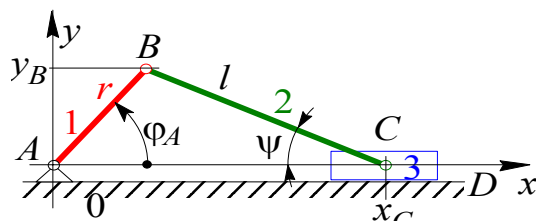
A B csukló csak a b köríven, a C csukló pedig csak a c köríven mozdulhat el, és egy, a b köríven felvett B' ponthoz a $BC = B'C'$ távolsággal a c köríven kimetszhető a C csukló aktuális C' helye.

III. 5. Hajtásrendszerek jellegzetes mechanizmusai

Forgattyús mechanizmus

Szerkezeti képlete és szabadságfoka:

$$\begin{aligned} &\downarrow ABCD \\ \gamma &= 1 \ 1 \ 1 \ 1 - 3 = 1 \\ \sigma &= 0 \ 1 \ 1 \ 1 - 3 = 0 \end{aligned}$$



Számítással ugyan, de "szerkesztő" eljárást alkalmazunk, azaz az ábra alapján a geometriai összefüggéseket írjuk fel.

$$y_C = r \sin \varphi_A = l \sin \psi \quad \text{és} \quad x_C = r \cos \varphi_A + l \cos \psi .$$

Vezessük be a $\lambda = r/l$ és $\xi = x_C/l$ jelöléseket, majd fejezzük ki a kapott összefüggésekből ψ szögfüggvényeit:

$$\sin \psi = \lambda \sin \varphi_A \quad \text{és} \quad \cos \psi = x_C/l - \lambda \cos \varphi_A = \xi - \lambda \cos \varphi_A .$$

Használjuk ki a $\sin^2 \psi + \cos^2 \psi = 1$ azonosságot, így a

$$\sin^2 \psi + \cos^2 \psi = 1 = \lambda^2 \sin^2 \varphi_A + (\xi^2 - 2 \xi \lambda \cos \varphi_A + \lambda^2 \cos^2 \varphi_A)$$

egyenletre jutunk, melyet átrendezve, egyszerűsítés után a

$$1 = \xi^2 - 2 \xi \lambda \cos \varphi_A + \lambda^2 (\sin^2 \varphi_A + \cos^2 \varphi_A) = \xi^2 - 2 \xi \lambda \cos \varphi_A + \lambda^2$$

$$\xi^2 - 2 \xi \lambda \cos \varphi_A - (1 - \lambda^2) = 0 \quad (*)$$

másodfokú egyenletet kapjuk, amiből a megoldó-képletel, az esetünknek megfelelő pozitív gyök választásával a

$$\xi = \lambda \cos \varphi_A + \sqrt{\lambda^2 \cos^2 \varphi_A + (1 - \lambda^2)}$$

végeredményre jutunk.

Ellenőrzésként behelyettesítve a $\varphi_A = 0$ értéket, $\cos \varphi_A = 1$, és ξ -re a

$$\xi = \lambda + \sqrt{\lambda^2 + (1 - \lambda^2)} = \lambda + \sqrt{1} = \lambda + 1$$

értéket kapjuk, amivel $x_C = r + l$.

A sebességet a (*) implicit egyenlet deriválásával kapott

$$2 \xi \dot{\xi} - 2 \dot{\xi} \lambda \cos \varphi_A + 2 \xi \lambda \sin \varphi_A \dot{\varphi}_A = 0 \quad (**)$$

összefüggés átrendezésével a

$$\dot{\xi} = - \frac{\xi \lambda \sin \varphi_A}{\xi - \lambda \cos \varphi_A} \dot{\varphi}_A$$

alakban kapjuk, és behelyettesítve a értéket, $\dot{\xi} = 0$, azaz $\dot{x}_C = 0$.

A gyorsulásra a (**) implicit egyenlet deriválásával kapott

$$\dot{\xi}^2 + \xi \ddot{\xi} - \dot{\xi} \dot{\xi} \cos \varphi_A + \dot{\xi} \lambda \sin \varphi_A \dot{\varphi}_A + \dot{\xi} \lambda \sin \varphi_A \dot{\varphi}_A + \xi \lambda \cos \varphi_A \dot{\varphi}_A^2 + \xi \lambda \sin \varphi_A \ddot{\varphi}_A = 0$$

összefüggést átrendezve:

$$\ddot{\xi} = - \frac{\dot{\xi}^2 + 2 \dot{\xi} \lambda \sin \varphi_A \dot{\varphi}_A + \xi \lambda (\cos \varphi_A \dot{\varphi}_A^2 + \sin \varphi_A \ddot{\varphi}_A)}{\xi - \lambda \cos \varphi_A} .$$

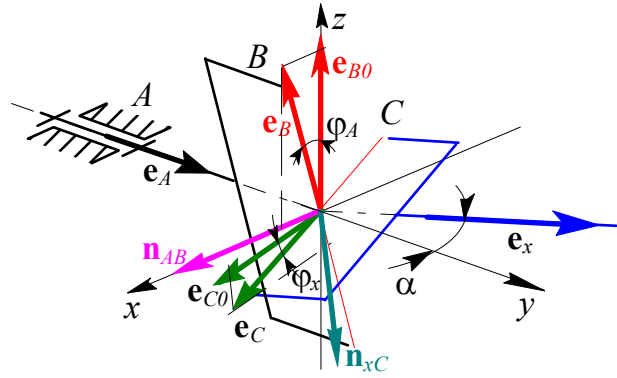
Behelyettesítve a $\varphi_A = 0$ -hoz tartozó $\xi = \lambda + 1$ és $\dot{\xi} = 0$ értékeket,

$$\ddot{\xi} = - \frac{(\lambda + 1) \lambda \omega_A^2}{\lambda + 1 - \lambda} = - (\lambda + 1) \lambda \omega_A^2, \text{ amiből } \ddot{x}_C = - (\lambda + 1) r \omega_A^2,$$

ahogy azt korábban is tanultuk.

Kardánkapcsolat

Tekintsük az ábra szerinti *térbeli* kardánkapcsolatot. (A "térbeli" megnevezés alatt azt értjük, hogy a vizsgálat során a leíró koordináta-rendszer szempontjából *nem* tesszük azt a megkötést, hogy valamely koordináta síkja essen egybe a kardán két, egymást metsző tengelyének síkjával.)



A szögelfordulások közötti kapcsolat

Az ábra szerint az A , B , C csuklók tengelyeinek, valamint az elvezető tengely (kardántengely) irányában vegyünk fel egy-egy \mathbf{e}_A , \mathbf{e}_B , \mathbf{e}_C és \mathbf{e}_x egységvektort. Kiindulási helyzetnek tekintjük az ábra szerint a kardánkereszt ágainak \mathbf{e}_{B0} , \mathbf{e}_{C0} egységvektorokkal kijelölt irányait, tehát $t = 0$ időpontban: $\mathbf{e}_B(0) = \mathbf{e}_{B0}$, $\mathbf{e}_C(0) = \mathbf{e}_{C0}$.

A kardánkapcsolat kinematikai feltételét, a kardánkereszt két ágának mindenkor merőlegességét a

$$\mathbf{e}_B \mathbf{e}_C = 0$$

skalár szorzat zérus volta fogalmazza meg.

Az \mathbf{e}_A és \mathbf{e}_{B0} vektorok vektori szorzataként generáljuk az $\mathbf{n}_{AB} = \mathbf{e}_A \times \mathbf{e}_{B0}$ vektort, így φ_A -val jelölve a behajtótengely szögelfordulását \mathbf{e}_B az

$$\mathbf{e}_B = \mathbf{e}_{B0} \cos \varphi_A + \mathbf{n}_{AB} \sin \varphi_A$$

összefüggés szerint felbontható. Hasonlóképpen generáljuk \mathbf{e}_x és \mathbf{e}_{C0} vektorok vektori szorzataként az $\mathbf{n}_{xC} = \mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_{C0}$ vektort, így φ_x -el jelölve a kardántengely szögelfordulását, az \mathbf{e}_C az

$$\mathbf{e}_C = \mathbf{e}_{C0} \cos \varphi_x + \mathbf{n}_{xC} \sin \varphi_x$$

összefüggés szerint írható fel. Ezeket a skalár szorzatba behelyettesítve

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbf{e}_B \mathbf{e}_C = (\mathbf{e}_{B0} \cos \varphi_A + \mathbf{n}_{AB} \sin \varphi_A) (\mathbf{e}_{C0} \cos \varphi_x + \mathbf{n}_{xC} \sin \varphi_x) = \\ &= \mathbf{e}_{B0} \mathbf{e}_{C0} \cos \varphi_A \cos \varphi_x + \mathbf{e}_{B0} \mathbf{n}_{xC} \cos \varphi_A \sin \varphi_x + \\ &+ \mathbf{n}_{AB} \mathbf{e}_{C0} \sin \varphi_A \cos \varphi_x + \mathbf{n}_{AB} \mathbf{n}_{xC} \sin \varphi_A \sin \varphi_x = \\ &= \mathbf{e}_{B0} \mathbf{n}_{xC} \cos \varphi_A \sin \varphi_x + \mathbf{n}_{AB} \mathbf{e}_{C0} \sin \varphi_A \cos \varphi_x + \mathbf{n}_{AB} \mathbf{n}_{xC} \sin \varphi_A \sin \varphi_x, \end{aligned}$$

figyelembe véve, hogy $\mathbf{e}_{B0} \mathbf{e}_{C0} = 0$. Egyszerűsítsük az egyenletet $\sin \varphi_A \sin \varphi_x$ -el való osztással, így az

$$\mathbf{e}_{B0} \mathbf{n}_{xC} \operatorname{ctg} \varphi_A + \mathbf{n}_{AB} \mathbf{e}_{C0} \operatorname{ctg} \varphi_x + \mathbf{n}_{AB} \mathbf{n}_{xC} = 0$$

egyenlet határozza meg az összetartozó φ_A és φ_x szögelfordulásokat. A képletből ki is fejezhetjük $\operatorname{ctg} \varphi_x$ -et:

$$\operatorname{ctg} \varphi_x = -\frac{\mathbf{n}_{AB} \mathbf{n}_{xC} + \mathbf{e}_{B0} \mathbf{n}_{xC} \operatorname{ctg} \varphi_A}{\mathbf{n}_{AB} \mathbf{e}_{C0}} .$$

Ellenőrizzük a kapottak érvényességét a korábban tanult *síkbeli* kardánkapcsolat esetére. Ekkor vegyük fel úgy a koordináta-rendszert, hogy x - y síkja az \mathbf{e}_A és \mathbf{e}_x által meghatározott sík legyen, és \mathbf{e}_{B0} legyen a z tengely iránya. Az \mathbf{e}_A és \mathbf{e}_x által bezárt szög α , így, az ábra alapján:

$$\mathbf{n}_{AB} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{n}_{xC} = -\mathbf{k}, \quad \mathbf{e}_{B0} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{e}_{C0} = \cos \alpha \mathbf{i} + \sin \alpha \mathbf{j} .$$

Behelyettesítve ezeket a kapott összefüggésünkbe:

$$\operatorname{ctg} \varphi_x = -\frac{0 - 1 \operatorname{ctg} \varphi_A}{\cos \alpha} = \frac{\operatorname{ctg} \varphi_A}{\cos \alpha}, \text{ amiből} \quad \operatorname{tg} \varphi_x = \cos \alpha \operatorname{tg} \varphi_A .$$

A kardántengely másik végén levő kardánkapcsolat az D, E, F csuklókból áll. Az eljárásunk hasonló az előbb alkalmazotthoz, most \mathbf{e}_x és \mathbf{e}_{D0} vektorokkal az $\mathbf{n}_{xD} = \mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_{D0}$ vektort, \mathbf{e}_F és \mathbf{e}_{E0} vektorokkal pedig az $\mathbf{n}_{FE} = \mathbf{e}_F \times \mathbf{e}_{E0}$ vektort generáljuk, így

$$\mathbf{e}_D = \mathbf{e}_{D0} \cos \varphi_{x'} + \mathbf{n}_{xD} \sin \varphi_{x'}$$

$$\text{és} \quad \mathbf{e}_E = \mathbf{e}_{E0} \cos \varphi_F + \mathbf{n}_{FE} \sin \varphi_F ,$$

ahol egyenlőre megkülönböztetett, $\varphi_{x'}$ jelölést alkalmaztunk a kardántengely szögelfordulására, és φ_F jelöli a kihajtótengely szögelfordulását. Behelyettesítve ezeket a kardánkereszt két ágának merőlegességét megjelenítő skalár szorzatba:

$$\begin{aligned} 0 = \mathbf{e}_D \mathbf{e}_E &= (\mathbf{e}_{D0} \cos \varphi_{x'} + \mathbf{n}_{xD} \sin \varphi_{x'}) (\mathbf{e}_{E0} \cos \varphi_F + \mathbf{n}_{FE} \sin \varphi_F) = \\ &= \mathbf{e}_{D0} \mathbf{n}_{EF} \cos \varphi_{x'} \sin \varphi_F + \mathbf{n}_{xD} \mathbf{e}_{E0} \sin \varphi_{x'} \cos \varphi_F + \mathbf{n}_{xD} \mathbf{n}_{EF} \sin \varphi_{x'} \sin \varphi_F . \end{aligned}$$

Egyszerűsítsük az egyenletet $\sin \varphi_F \sin \varphi_{x'}$ -vel való osztással, így

$$\mathbf{n}_{xD} \mathbf{e}_{E0} \operatorname{ctg} \varphi_F + \mathbf{e}_{D0} \mathbf{n}_{EF} \operatorname{ctg} \varphi_{x'} + \mathbf{n}_{xD} \mathbf{n}_{EF} = \mathbf{0} ,$$

amiből

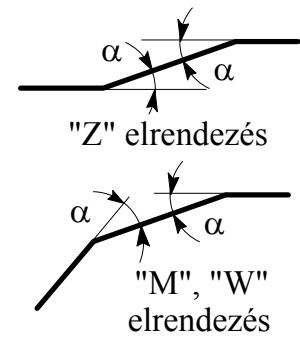
$$\operatorname{ctg} \varphi_{x'} = -\frac{\mathbf{n}_{EF} \mathbf{n}_{xD} + \mathbf{e}_{E0} \mathbf{n}_{xD} \operatorname{ctg} \varphi_F}{\mathbf{n}_{EF} \mathbf{e}_{D0}} .$$

Ha a kardántengely csavarónyomaték hatására való szögdeformációjától eltekintünk, akkor $\varphi_{x'} = \varphi_x$, és

$$\frac{\mathbf{n}_{AB} \mathbf{n}_{xC} + \mathbf{e}_{B0} \mathbf{n}_{xC} \operatorname{ctg} \varphi_A}{\mathbf{n}_{AB} \mathbf{e}_{C0}} = \frac{\mathbf{n}_{EF} \mathbf{n}_{xD} + \mathbf{e}_{E0} \mathbf{n}_{xD} \operatorname{ctg} \varphi_F}{\mathbf{n}_{EF} \mathbf{e}_{D0}} .$$

Ahhoz, hogy a két kardánkapcsolaton áthaladva végülis a φ_A és φ_F szögelfordulások megegyezzenek, a jobb- és baloldal számlálójában és nevezőjében szereplő skalár szorzatoknak meg kell egyezniük. Ez az $\mathbf{e}_{C0} \parallel \mathbf{e}_{D0}$ és $\mathbf{e}_A \parallel \mathbf{e}_F$ esetén biztosítható, ekkor

ugyanis a bal és jobboldalon szereplő skalár szorzatok páronként azonosak lesznek. A képlet átalakításával az is belátható, hogy a második párhuzamossági feltétel helyett elegendő megkötni, hogy \mathbf{e}_A és \mathbf{e}_F közös síkban legyen, és az $\mathbf{e}_A \mathbf{e}_x = \mathbf{e}_F \mathbf{e}_x$ skalár szorzat egyenlőség teljesüljön. A kardánépítés gyakorlatában az előző esetet "Z" elrendezésnek, az utóbbit pedig "M" vagy "W" elrendezésnek nevezik. Ha a be- és kihajtó szögelfordulások megegyeznek, akkor a kardánkapcsolatot **homokinetikusnak** nevezük.



A szögsebességek közötti kapcsolat

A szögsebességek közötti kapcsolat előállítható a szögelfordulások között kapott kapcsolat idő szerinti deriválásával. E helyett azonban egyszerűbben is célhoz juthatunk, ha felhasználjuk a nyílt láncú mechanizmus szögsebességére korábban kapott azon összefüggést, hogy valamely tag állványhoz viszonyított szögsebessége az egyes kényszerekben mérhető relatív szögsebességek összegeként előállítható.

Jelölje az A csuklóban megvalósuló hajtás szögsebesség vektorát $\boldsymbol{\omega}_A = \omega_A \mathbf{e}_A$, az B ill. C csuklóban megvalósuló *relatív* szögsebességet pedig $\boldsymbol{\omega}_B = \omega_B \mathbf{e}_B$ ill. $\boldsymbol{\omega}_C = \omega_C \mathbf{e}_C$. Így a kardántengely állványhoz viszonyított $\boldsymbol{\omega}_x = \omega_x \mathbf{e}_x$ szögsebessége

$$\boldsymbol{\omega}_x = \omega_x \mathbf{e}_x = \boldsymbol{\omega}_A + \boldsymbol{\omega}_B + \boldsymbol{\omega}_C = \omega_A \mathbf{e}_A + \omega_B \mathbf{e}_B + \omega_C \mathbf{e}_C \quad (*)$$

A skalár mennyiségek közötti kapcsolat feltárásához szorozzuk meg a vektor-egyenletünket skalárisan \mathbf{e}_B egységvektorral, így

$$\omega_x \mathbf{e}_x \mathbf{e}_B = \omega_A \mathbf{e}_A \mathbf{e}_B + \omega_B \mathbf{e}_B \mathbf{e}_B + \omega_C \mathbf{e}_C \mathbf{e}_B = \omega_B$$

mivel \mathbf{e}_B merőleges \mathbf{e}_A -ra és \mathbf{e}_C -re is. Hasonlóképpen szorozzuk meg a (*) egyenletet skalárisan most \mathbf{e}_x egységvektorral, így

$$\omega_x \mathbf{e}_x \mathbf{e}_B = \omega_x = \omega_A \mathbf{e}_A \mathbf{e}_x + \omega_B \mathbf{e}_B \mathbf{e}_x + \omega_C \mathbf{e}_C \mathbf{e}_x = \omega_A \mathbf{e}_A \mathbf{e}_x + \omega_B \mathbf{e}_B \mathbf{e}_x.$$

Az ω_B előbb kapott kifejezését behelyettesítve, átrendezés után

$$\omega_x = \omega_A \mathbf{e}_A \mathbf{e}_x + (\omega_x \mathbf{e}_x \mathbf{e}_B) \mathbf{e}_B \mathbf{e}_x = \omega_A \mathbf{e}_A \mathbf{e}_x + \omega_x (\mathbf{e}_x \mathbf{e}_B)^2 \rightarrow \boxed{\omega_x = \frac{\mathbf{e}_A \mathbf{e}_x}{1 - (\mathbf{e}_B \mathbf{e}_x)^2} \omega_A}.$$

Ellenőrzésként helyettesítsük be a kapott eredménybe a síkbeli kardánkapcsolatnak megfelelő speciális esetet. Ekkor $\mathbf{e}_A = \mathbf{j}$, $\mathbf{e}_B = \cos \varphi_A \mathbf{k} + \sin \varphi_A \mathbf{i}$, $\mathbf{e}_x = -\sin \alpha \mathbf{i} + \cos \alpha \mathbf{j}$

és

$$i_1 = \frac{\omega_x}{\omega_A} = \frac{\cos \alpha}{1 - (\sin \alpha \sin \varphi_A)^2},$$

ami megegyezik a korábban tanultakkal.

A második kardánkapcsolat viszonyainak feltárásához ugyanezt az eljárást folytassuk. A D ill. E csuklóban megvalósuló *relatív* szögsebességet $\boldsymbol{\omega}_D = \omega_D \mathbf{e}_D$ ill. $\boldsymbol{\omega}_E = \omega_E \mathbf{e}_E$

jelölje, és a kardánkapcsolat kimenő tengelyének állványhoz viszonyított szögsebessége pedig legyen $\omega_F = \omega_F \mathbf{e}_F$. Ez utóbbi a tanultak alapján felírható az

$$\omega_F = \omega_F \mathbf{e}_F = \omega_x + \omega_D + \omega_E = \omega_x \mathbf{e}_x + \omega_D \mathbf{e}_D + \omega_E \mathbf{e}_E \quad (**)$$

vektorösszegként. A skalár mennyiségek közötti kapcsolat feltárásához szorozzuk meg a vektor-egyenletünket skalárisan \mathbf{e}_E egységvektorral, így

$$\omega_F \mathbf{e}_F \mathbf{e}_E = \omega_x \mathbf{e}_x \mathbf{e}_E + \omega_D \mathbf{e}_D \mathbf{e}_E + \omega_E \mathbf{e}_E \mathbf{e}_E \rightarrow \omega_E = -\omega_x \mathbf{e}_x \mathbf{e}_E,$$

mivel \mathbf{e}_E merőleges \mathbf{e}_D -re és \mathbf{e}_F -re is. Hasonlóképpen szorozzuk meg a (**) egyenletet skalárisan most \mathbf{e}_x egységvektorral, így

$$\omega_F \mathbf{e}_F \mathbf{e}_x = \omega_x \mathbf{e}_x \mathbf{e}_x + \omega_D \mathbf{e}_D \mathbf{e}_x + \omega_E \mathbf{e}_E \mathbf{e}_x = \omega_x + \omega_E \mathbf{e}_E \mathbf{e}_x.$$

Az ω_E -re az előbb kapott kifejezés behelyettesítésével, átrendezés után

$$\omega_F \mathbf{e}_F \mathbf{e}_x = \omega_x + (-\omega_x \mathbf{e}_x \mathbf{e}_E) \mathbf{e}_E \mathbf{e}_x = \omega_x - \omega_x (\mathbf{e}_E \mathbf{e}_x)^2 \rightarrow \omega_F = \frac{1 - (\mathbf{e}_E \mathbf{e}_x)^2}{\mathbf{e}_F \mathbf{e}_x} \omega_x \dots$$

Összevetve a kardántengelyt két kardánkapcsolatára kapott eredményeket, a behajtott tengely ω_A szögsebessége és a kihajtott tengely ω_F szögsebessége között az

$$\omega_F = \frac{1 - (\mathbf{e}_E \mathbf{e}_x)^2}{\mathbf{e}_F \mathbf{e}_x} \frac{\mathbf{e}_A \mathbf{e}_x}{1 - (\mathbf{e}_B \mathbf{e}_x)^2} \omega_A$$

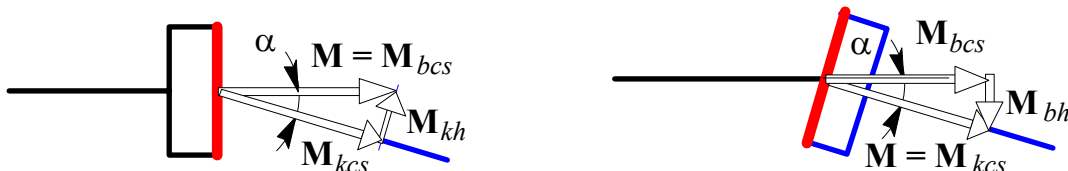
kapcsolatot kapjuk, amelyből könnyen belátható, hogy a korábban leírt *homokinetikus* beépítés esetén $i = \omega_F / \omega_A = 1$ eredő módosítást eredményez.

A homokinetikus beépítést megzavaró főbb hatások:

- jármülengések következtében a be- és kihajtott tengelyek párhuzamossága megszűnik;
- a tengelyhajtómű szögelfordulása miatt a be- és kihajtott tengelyek párhuzamossága megszűnik;
- kormányzott kerekek, vagy elforduló forgóvázak hajtásakor a be- és kihajtott tengelyek párhuzamossága megszűnik;
- a kardántengelyen történő nyomatékátvitellel együttjáró szögdeformáció miatt $\varphi_x \neq \varphi_{x'}$;

Megjegyzés:

A kardánkeresztben a csuklókon történő kapcsolódás következtében *csak a kardánkereszt síkjára merőleges \mathbf{M} nyomatékvektor* adódhat. Ez azt jelenti, hogy a kardánkapcsolat szöghelyzetétől függően a be- ill. kihajtott tengelyen és/vagy a kardántengelyen a csavarónyomaték (\mathbf{M}_{bcs} , \mathbf{M}_{kcs}) mellett hajlítónyomaték (\mathbf{M}_{bh} , \mathbf{M}_{kh}) is ébred.



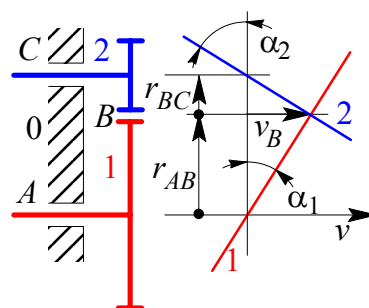
III. 6. Fogaskerekes hajtások - bolygóművek

Centroids mechanizmusok: olyan bütykös mechanizmusok, melyekben a kapcsolódó görgőpárok egymáson csúszásmentesen legördülnek, miközben mindkét bütykös tag csuklóval kapcsolódik a mechanizmus harmadik tagjához.

Ha a fogaskerekek érintkezését a gördülőkörökön csúszásmentesen kapcsolódó görgőpárok kapcsolatának tekintjük, és eltekintünk a fogprofilok tényleges, csúszás jelenlétében megvalósuló érintkezéséről, akkor a fogaskerekek kapcsolódása kielégíti a fenti előírásokat, és így centroids mechanizmusnak tekinthető. **A fogaskerekek kerületén elhelyezkedő fogak** ebben a felfogásban csupán **a csúszásmentesség biztosítása érdekében szükségesek.**

Példa

Tekintsük az ábra szerinti egyszerű fogaskerék kapcsolatot, és a mechanizmus sematikus ábrája mellé rajzoljuk fel a rajz síkjára merőleges sebességek alakulását is. A mechanizmus tagjai merev testek, így sebességállapotuk két pontjuk sebességének ismeretében meghatározott, és a távolság függvényében lineárisan változik.



Az 1-es tag A csuklóval, a 2-es tag pedig a C csuklóval az állványhoz kapcsolódik, így ezen pontjaiknak sebessége zérus. A B fogaskerék kapcsolatban az 1-es és 2-es tag egymáshoz kapcsolódik csúszásmentesen, így kapcsolódási pontjaiknak v_B sebessége azonos kell legyen. Így az 1-es tag sebesség-állapotát jellemző 1 jelű egyenes (lineáris függvény) megrajzolható, mivel egyik pontja az A csuklónak megfelelő pontban zérus sebességet jelöl, másik pontja pedig az A ponttól r_{AB} távolságban v_B sebességet kell adjon. Hasonlóképpen a 2-es tag sebesség-állapotát jellemző 2 jelű egyenes két pontja is adott a közös v_B sebességgel ill. az ettől a ponttól r_{BC} távolságban levő, B csukló pontjában érvényes zérus sebességgel.

A sebességeknek a vázolt diagram szerinti ábrázolását **Kutzbach-féle sebességábrának** nevezzük. A sebességábrában az egyes tagok sebesség-állapotát jellemző egyeneseknek a $v = 0$ tengellyel bezár α szöge a tag szögsebességét jellemzi. Egy merev testen belül ugyanis az egyes pontok sebességének különbsége a test szögsebességéből adódik. Így pl. az 1-es tag A pontbeli zérus sebességéhez képest az r_{AB} távolságban levő B pontjának v_B sebessége a

$$v_B = \omega_1 r_{AB} \text{ összefüggésből számítható, amiből: } \omega_1 = v_B / r_{AB} = \operatorname{tg} \alpha_1 ,$$

tehát a sebesség-egyenes hajlásszögének tangense a szögsebességet adja. Hasonlóképpen a 2-es tagra, figyelembe véve a sebesség és a távolság előjeles voltát:

$$v_B = \omega_2 (-r_{BC}) , \text{ amiből: } \omega_2 = -v_B / r_{BC} = \operatorname{tg} \alpha_2 ,$$

azaz a $v = 0$ tengelyhez képesti hajlás iránya a szögsebesség előjelét is megadja.

A példa szerinti fogaskerék kapcsolatnak, mint mechanizmusnak a szerkezeti képlete: ABC . Szabadságfokának meghatározásához a centrois-mechanizmus szabadságfokát, és a zárással kapcsolatos κ_z kötöttségi fokot kell megállapítani. Ha a fogaskerék kapcsolat, mint centrois-mechanizmus szabadságfokát $\gamma = 2$ -nek vesszük, akkor a kinematikai lánc zárásával együttjáró kötöttségi fokot $\kappa_z = 3$ -ra kell vennünk. Ha pedig a fogaskerék kapcsolat szabadságfokát $\gamma = 1$ -nek vesszük (csak a forgó mozgásokat tekintjük, a tengellyel párhuzamos elmozduló képességet nem), akkor a zárással együttjáró kötöttségi fok $\kappa_z = 2$. Így a példa szerinti mechanizmusra a szabadságfok az

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \downarrow \\ ABC & & ABC \\ \gamma = 1 & 2 & 1 - 3 = 1 & \text{vagy} & \gamma = 1 & 1 & 1 - 2 = 1 \\ \sigma = 0 & 2 & 1 - 3 = 0 & & \sigma = 0 & 1 & 1 - 2 = 0 \end{array}$$

képletek szerint is meghatározhatjuk, hajtásként a A kényszerben a szögelfordulást ill. szögsebességet figyelembe véve.

A szögsebességek közötti számszerű kapcsolat feltárásához a zárt kinematikai láncra korábban kapott $\sum_{j=A}^N \mathbf{v}_j + \sum_{i=1}^n \boldsymbol{\omega}_{0i} \times \mathbf{r}_i = \mathbf{0}$ összefüggésből kiindulva a $\sum_{i=1}^n \boldsymbol{\omega}_{0i} \times \mathbf{r}_i = \mathbf{0}$ képletre támaszkodhatunk, mivel a fogaskerekes mechanizmusokban a fogkapcsolatoknál és a csuklóknál is egyaránt a \mathbf{v}_j relatív sebességek zérus értékűek. Ezen túlmenően, ha a fogaskerekes mechanizmus valamennyi tengelye párhuzamos (pl. \mathbf{i} egységvektor irányú) és a kapcsolódási pontokat is egymással párhuzamos (pl. \mathbf{j} egységvektor irányú) \mathbf{r}_i vektorok kötik össze, akkor a vektori szorzás eredményeképpen kapott kerület sebességek mind párhuzamos (pl. \mathbf{k} egységvektor irányú) vektorok lesznek, és a szorzótényező vektorok merőleges helyzetének megfelelően a szorzatvektor abszolút értéke a tényezők abszolút értékének szorzata lesz.

A vektoregyenlet helyett tehát minden zárt kinematikai láncunkra a

$$\boxed{\sum_{i=1}^n \omega_{0i} r_i = 0}, \text{ vagy } \boxed{\sum_{i=1}^n \omega_i r_i = 0}$$

sebesség-egyensúlyi egyenlet írható fel, ahol a második felírásban a tagok ω_i szögsebességeinél a 0 jelű állványra, mint viszonyítási alapra való hivatkozás jelölését elhagytuk.

A sebesség-egyensúlyi egyenletet az ábra szerinti, egy darab, zárt kinematikai láncból álló mechanizmusra felírva az

$$\omega_1 r_{AB} + \omega_2 r_{BC} = 0$$

összefüggésre jutunk, amiből átrendezéssel pl. $\omega_2 = -\omega_1 r_{AB} / r_{BC}$, és a hajtómű

$$i = \omega_2 / \omega_1 = -r_{AB} / r_{BC}$$

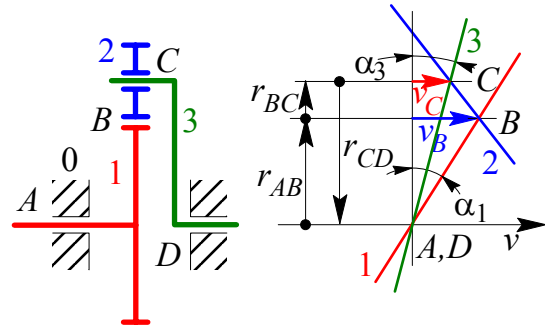
szögsebesség módosítása is előjelhelyesen meghatározható.

Elemi bolygómű

Az elemi bolygómű vázlatát az ábra mutatja

A bolygóművet alkotó tagok megnevezése:

- 1. Napkerék
- 2. Bolygókerék
- 3. Forgattyú



ABCD

$$\gamma = 1 \ 2 \ 1 \ 1 - 3 = 2$$

Az elemi bolygómű szerkezeti képlete, és ennek alapján szabadságfoka:

A két szabadságfok azt jelenti, hogy két független szögsebességet választhatunk meg a bolygóműben, ennek megfelelően a sebességábrában is két szögsebesség egyenes hajlásszöge vehető fel (az ábrában α_1 és α_3). A harmadik szögsebesség (ω_2) már a szerkesztésből kiadódik abból a két feltételből, hogy egyrészt a B fogaskerék kapcsolódási pontban a napkerék 1 jelű egyenesével, másrészt pedig a C csukló pontjában a forgattyú 3 jelű egyenesével kell közös pontja legyen, a sebességek adott pontokban való azonossága miatt.

Az egy darab, zárt kinematikai láncra a szerkezeti képlet szerint az

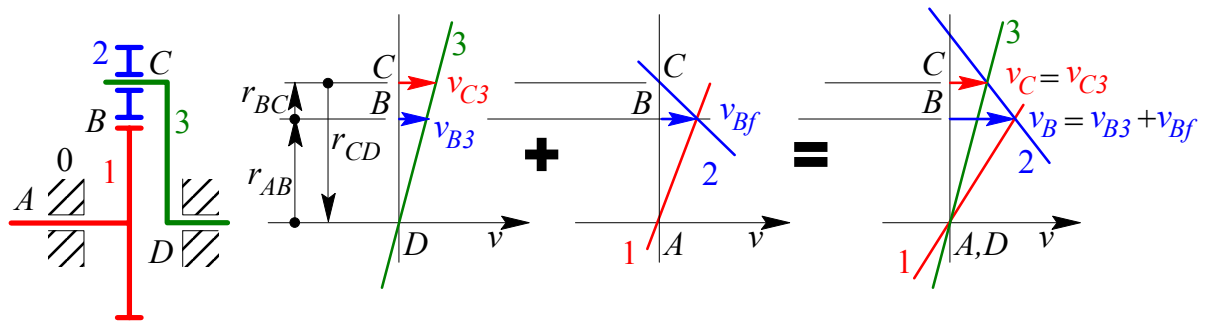
$$\omega_1 r_{AB} + \omega_2 r_{BC} + \omega_3 r_{CD} = 0 \tag{*}$$

sebesség-egyensúlyi egyenletet írható fel, és a két geometriai szabadságfok itt abban nyilvánul meg, hogy egy felírható egyenlethez 3 ismeretlen szögsebesség adódik.

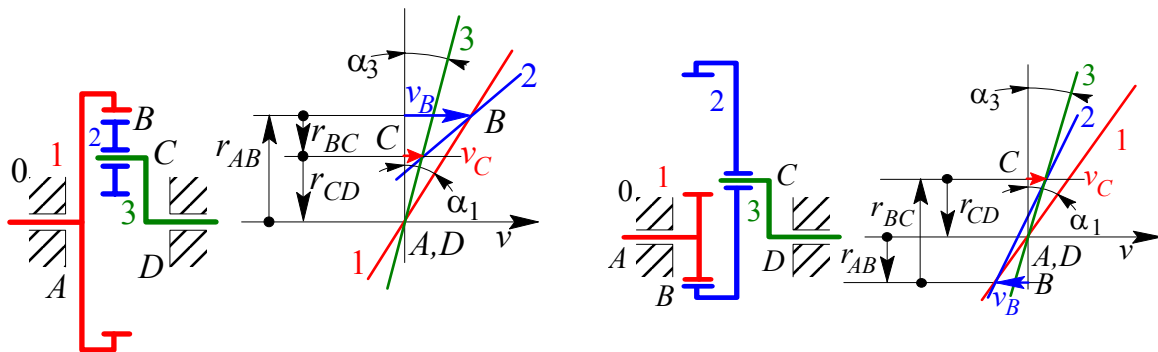
Mivel az ábra szerint $r_{CD} = -r_{DC} = -(r_{AB} + r_{BC})$, az egyenlet átalakítható:

$$\omega_1 r_{AB} + \omega_2 r_{BC} - \omega_3 (r_{AB} + r_{BC}) = 0 \rightarrow \boxed{(\omega_1 - \omega_3) r_{AB} + (\omega_2 - \omega_3) r_{BC} = 0}$$

Az egyenlet alapján tehát a két fogaskeréknek a forgattyúhoz viszonyított $(\omega_1 - \omega_3)$ és $(\omega_2 - \omega_3)$ relatív szögsebességeit tekintve megegyezik az előzőekben az egyszerű fogaskerék áttételre kapott összefüggéssel. Az elemi bolygómű sebességviszonyai tehát előállíthatók a forgattyú ω_3 szögsebességű merev test szerű forgásának és az egyszerű fogaskerék áttétel mozgásviszonyainak szuperpozíciójaként, ahogy azt a sebességábrákkal a következő vázlat is szemlélteti.



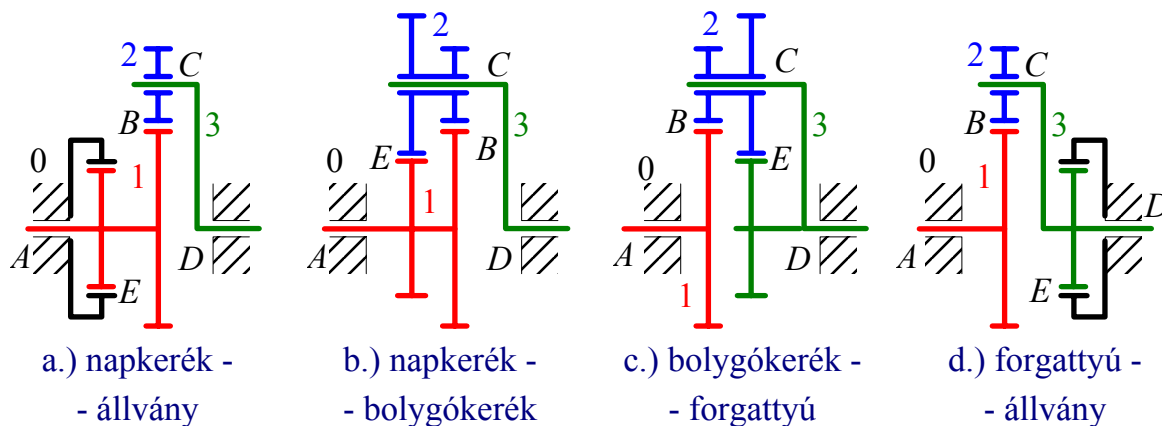
Elemi bolygómu belső fogazású fogaskerekkel felhasználásával is összeállítható, mint ahogy azt az alábbi ábra példái mutatják. A geometriai elrendezés függvényében a sebességábra is változó alakot ölthet, de a (*) egyenlet alakja változatlan, habár benne az egyes r_{AB} , r_{BC} , r_{CD} sugarak hol pozitív, hol negatív előjelűek, miáltal a forgásirányok is változatosak lehetnek. Az a.) ábrán a *napkerék*, a b.) ábrán pedig a *bolygókerék* készült belső fogazással (az ábrákon az ω_1 és ω_3 szögsebességeket változatlanul hagytuk).



Egyszerű bolygómu - egyszabadságfokú bolygómu

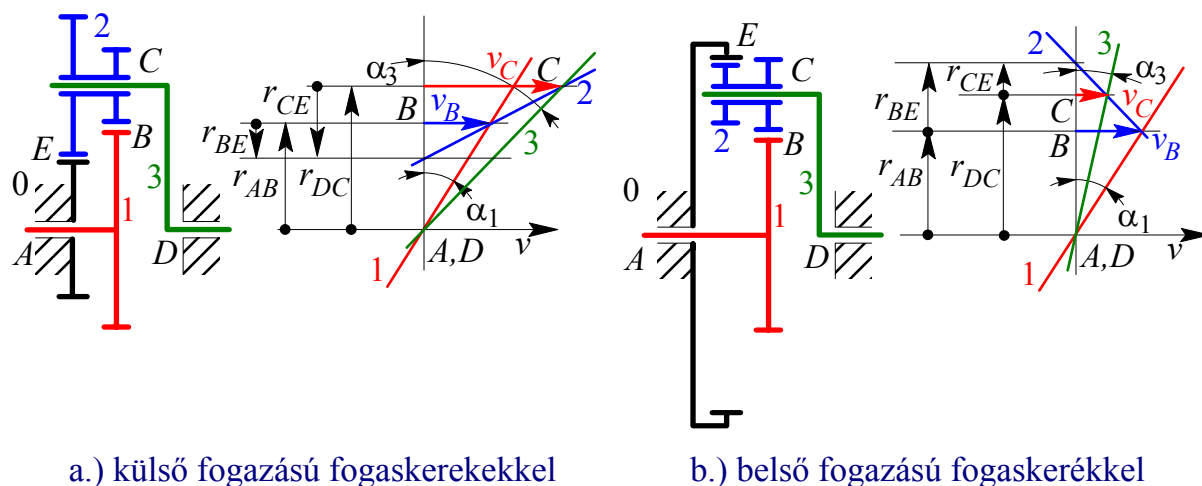
Az egy láncú, $\gamma = 2$ szabadságfokú *elemi* bolygómuiból legegyszerűbben úgy juthatunk egyszabadságfokú mechanizmushoz, hogy egy egyszeresen túlhatározott ($\gamma = -1$ szabadságfokú) zárt kinematikai láncot hozzákapcsolunk. Így jutunk az **egyszerű** (egyszabadságfokú) **bolygómu**hoz.

Egyszeresen túlhatározott kinematikai lánc lehet, ha az elemi bolygómu meglévő valamely két tagját egy újabb fogaskerék kapcsolattal összekötjük, mert a fogaskerék 2 (ill. 1) szabadságfokához a kinematikai lánc zárásával együttjáró kötöttségi fok ennél egysel nagyobb: 3 (ill. 2). Az elemi bolygómu szomszédos tagjainak újabb fogaskerék kapcsolattal való összekötésének lehetőségeit az alábbi ábrák mutatják.



Mint látható, a szomszédos tagok újabb fogaskerék kapcsolattal való összekötése tulajdonképpen ezen tagok egymáshoz való rögzítését eredményezi, így nem jelent továbblépést. Vagy egy egyszerű bolygó fogaskerékhez jutunk (a. eset), vagy egy tengelykapcsolóhoz (b. és c. esetek), vagy egy egyszerű fogaskerék kapcsolathoz (d. eset).

Új bolygóműhöz (az egyszerű bolygóműhöz) - a következő ábra szerint - **az állvány és a bolygókerék közé beiktatott fogaskerék kapcsolattal** jutunk.



Az egyszerű bolygómű két kinematikai láncának szerkezeti képlete többféleképpen is felírható. A hajtást az *A* csuklóban felvéve határozzuk meg a kinematikai szabadságfokot is:

$$\begin{array}{l}
 \downarrow ABCD \leftarrow E \\
 \gamma = 1 \ 2 \ 1 \ 1 - 3 \ 2 - 3 = 1, \quad \text{vagy} \\
 \sigma = 0 \ 2 \ 1 \ 1 - 3 \ 2 - 3 = 0
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{l}
 \downarrow ABE \leftarrow CD \\
 \gamma = 1 \ 2 \ 2 - 3 \ 1 \ 1 - 3 = 1 \\
 \sigma = 0 \ 2 \ 2 - 3 \ 1 \ 1 - 3 = 0
 \end{array}$$

A két szerkezeti képlet egyenértékű, de mint látni fogjuk, a szögsebességek kapcsolatahoz az egyenleteket a második szerkezeti képlet vezetésével célszerű felírni.

A két zárt kinematikai láncnak megfelelően két sebesség-egyensúlyi egyenlet írható fel, a második szerkezeti képletet alapul véve egy az *ABE* ill. egy a *CD* zárt láncra:

$$\omega_1 r_{AB} + \omega_2 r_{BE} = 0 \qquad \text{és} \qquad \omega_3 r_{DC} + \omega_2 r_{CE} = 0.$$

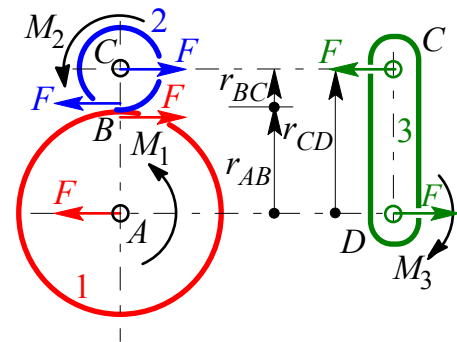
Behatótengelynek tekintjük a napkerék tengelyét ω_1 szögsebességgel, a kihajtótengely pedig legyen a forgattyú ω_3 szögsebességgel. Az ez esetben érdektelen $-\omega_2$ bolygókerék szögsebességet mindkét egyenletből kifejezve és egyenlővé téve, átalakítás után az egyszerű bolygómű $i = \omega_3 / \omega_1$ szögsebesség módosítása:

$$-\omega_2 = \omega_1 r_{AB} / r_{BE} = \omega_3 r_{DC} / r_{CE} \quad \rightarrow \quad \boxed{i = r_{AB} r_{CE} / r_{BE} r_{DC}}$$

A kapott összefüggés **valamennyi egyszerű bolygóműre érvényes**, de az egyes r sugarak aktuális nagyságától ill. előjelétől függően a képletből a módosítás számos variációja kiadódhat. Vegyük észre például, hogy az a.) ábra szerinti kialakításnál az r_{BE} távolság a triviális esettől eltekintve is felveheti a zérus értéket, miáltal az $i = \infty$ módosítás adódik azáltal, hogy ebben az esetben a napkerék tengelye reteszselődik, miközben a forgattyú tetszőleges szögsebességgel foroghat.

Nyomatéki viszonyok az elemi bolygóműben

Elemi bolygómű esetében az ábra szerint tételezzük fel, hogy a napkerékre, a bolygókerékre ill. a forgattyúra rendre az M_1, M_2, M_3 külső forgatónyomatékok hatnak. A súrlódási veszteségektől eltekintve így a B fogaskerék kapcsolatban $F = M_1 / r_{AB}$ kerületi erő kerül átvitelre, és a vízszintes erők szükséges egyensúlya alapján könnyen belátható, hogy valamennyi csuklóban ezzel az F erővel azonos nagyságú és megfelelő irányú erőnek kell ébrednie. Az ábra alapján tehát az erópárok és a külső nyomatékok egyensúlya alapján az egyes tagokra működő külső nyomatékok:



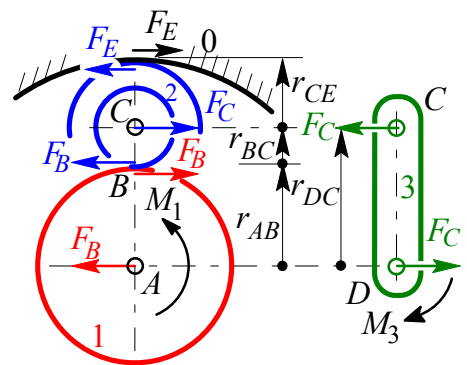
$$M_2 = F r_{BC} = M_1 r_{BC} / r_{AB} \quad \text{és} \quad M_3 = F r_{DC} = M_1 r_{DC} / r_{AB} .$$

A nyomatékegyensúly teljesül, figyelembe véve az $r_{AB} + r_{BC} = r_{DC}$ összefüggést, valamint M_3 felrajzolt irányát:

$$\Sigma M = M_1 + M_2 - M_3 = M_1 + M_1 r_{BC} / r_{AB} - M_1 r_{DC} / r_{AB} = M_1 (r_{AB} + r_{BC} - r_{DC}) / r_{AB} = 0$$

Annak ellenére tehát, hogy az elemi bolygómű mozgások szempontjából - mint korábban láttuk - 2 szabadságfokú, az erők és nyomatékok tekintetében **egyetlen nyomaték meghatározza a mechanizmus erőjátékát.**

Vegyük észre továbbá, hogy az elemi bolygómű esetében **mind a napkerékre, mind a bolygókerékre, mind pedig a forgattyúra külső nyomatéknak kell működni!**



Nyomatéki viszonyok az egyszerű bolygóműben

Egyszerű, egyszabadságfokú bolygómű esetében a bolygókerékre a külső forgatónyomaték az E fogkapcsolaton kialakuló F_E kerületi erőből adódik. A súrlódási veszteségektől a továbbiakban is eltekintve a napkerékre ható külső M_1 forgatónyomatékból a B fogaskerék kapcsolatban $F_B = M_1 / r_{AB}$ kerületi erő indukálódik, és az egyensúlyi egyenletek között a bolygókerékre ható vízszintes erők $F_C = F_B + F_E$ kapcsolatát is figyelembe kell venni. A bolygókerék nyomatéki egyensúlyából:

$$F_B r_{BC} = F_E r_{CE} \rightarrow F_E = F_B r_{BC} / r_{CE} = M_1 r_{BC} / r_{CE} r_{AB} .$$

Ennek alapján: $F_C = F_B + F_E = M_1 / r_{AB} + M_1 r_{BC} / r_{CE} r_{AB} = M_1 (1 + r_{BC} / r_{CE}) / r_{AB} .$

Mivel $r_{BC} + r_{CE} = r_{BE}$: $F_C = M_1 r_{BE} / r_{CE} r_{AB} ,$

és a forgattyú egyensúlyából: $M_3 = F_C r_{CD} = M_1 r_{BE} r_{CD} / r_{CE} r_{AB} .$

A korábbiaknak megfelelően a napkereket, mint bemenete, és a forgattyút, mint kimenetet tekintve a *nyomaték módosítás*:

$$k = M_3 / M_1 = r_{BE} r_{CD} / r_{CE} r_{AB} = 1 / i .$$

III. 7. Járműhajtásrendszerek jellegzetes bolygóműves mechanizmusai

Homlokfogaskerekes tengelyhajtómű

Az ábra szerinti homlokfogaskerekes tengelyhajtómű, melynek a háza a rugalmas nyomatéktám miatt el tud fordulni a keréktengely körül, egy *elemi bolygómű*. A keréktengelyre szerelt nagy fogaskerék a *napkerék*, a behajtótengelyre szerelt kis fogaskerék a *bolygókerék*, a hajtómű háza pedig a *forgattyú*. Állványként a keréktengely csapágyazása tekinthető. Behajtó tengelyként ennek megfelelően most a *bolygókerék* tengelye (C csukló), kihajtó tengelyként pedig a *napkerék* (A csukló) tekintendő. A szerkezet képlet a szabadságfokokkal:

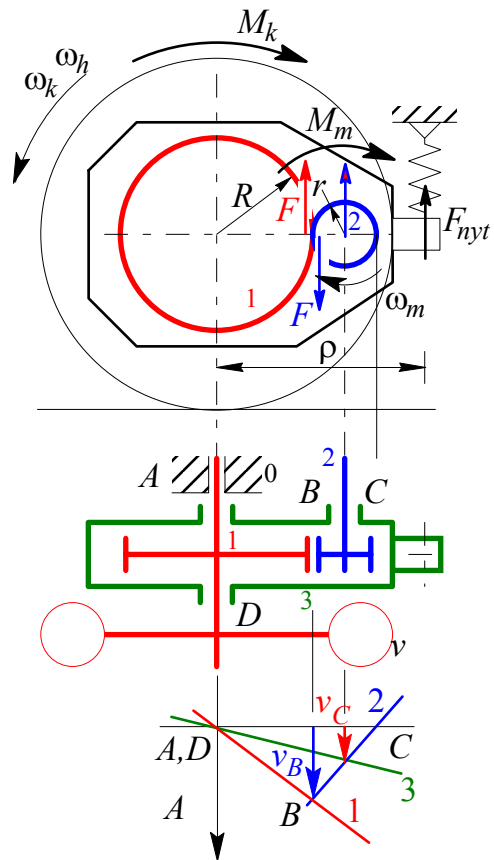
$$\begin{matrix} \downarrow \\ ABCD \\ \gamma = 1 \ 2 \ 1 \ 1 - 3 = 1 . \\ \sigma = 1 \ 2 \ 0 \ 1 - 3 = 0 \end{matrix}$$

Az ábra szerinti szögforgás-irányokat figyelembe véve a sebesség-egyensúlyi egyenlet:

$$\omega_k R - \omega_m r + \omega_h (-R - r) = 0 ,$$

amiből a keréktengely szögsebessége:

$$\omega_k = \omega_m r / R + \omega_h (1 + r / R) .$$

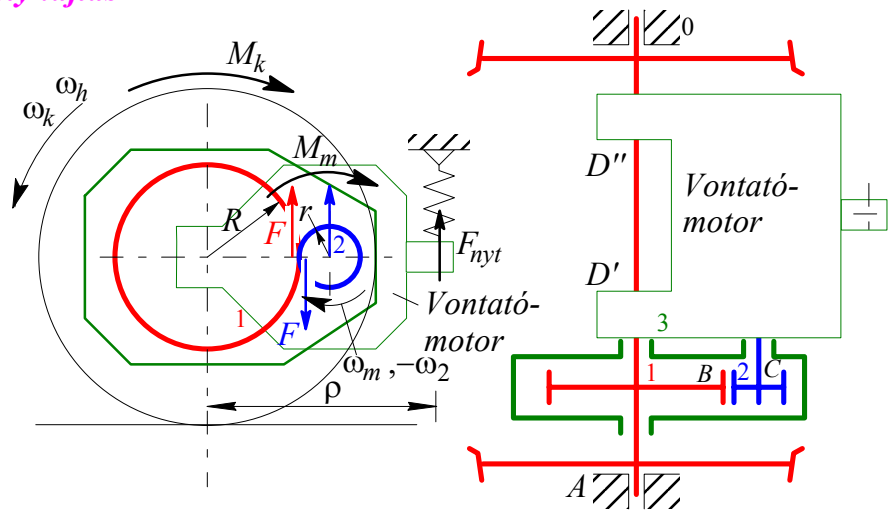


A bolygókerék tengelyére ható M_m motornyomatékból a fogaskerék kapcsolatán átadódó F kerületi erő a veszteségek elhanyagolásával: $F = M_m / r$, így a napkerék ill. a ház nyomatéki egyensúlyából az M_k keréknyomaték ill, az F_{nyt} nyomatéktám-erő:

$$M_k = F R = M_m R / r \quad \text{ill.} \quad F_{nyt} = (F (R + r)) / \rho = M_m (1 + R / r) / \rho$$

Marokcsapágyas tengelyhajtás

Ebben az esetben a kerékpárt hajtó vontatómotor a D' ; és D'' u.n. "marokcsapágyakon" a kerékpártengelyre támaszkodik, és a hajtómű háza a motor házához mereven van rögzítve. A bolygómű forgattyújaként a hajtóműházzal egybeépített vontatómotor-ház tekintendő.



A motor forgórész, és ezzel együtt a "behajtótengely" szögsebessége ebben az esetben azonban a "forgattyúhoz" viszonyított relatív szögsebesség: $\omega_m = -(\omega_2 - \omega_h)$.

Ennek megfelelően a sebesség-egyensúlyi egyenlet: $\omega_k R + \omega_2 r + \omega_h (-R - r) = 0$,
 amiből $\omega_k = -\omega_2 r / R + \omega_h (1 + r/R) = -(\omega_2 - \omega_h) r / R + \omega_h \rightarrow \boxed{\omega_k = \omega_m r / R + \omega_h}$.

A nyomatéktámon ébredő erő is egy kicsit másképpen alakul, mint az előző esetben. A fogaskerék kapcsolatban ébredő kerületi erő itt is $F = M_m / r$, de, mivel a hajtómű háza és a motor állórész mereven összekacsolt, ezért a ház egyensúlyához az M_m nyomatékt is figyelembe kell venni:

$$M_k = F R = M_m R / r \quad \text{ill.} \quad F_{nyt} = (F (R + r) - M_m) / \rho = M_m (R / r) / \rho$$

(Az M_m nyomaték "belső" nyomaték, és a "forgattyút" elforgatni akaró erő a kerékpártengelytől R távolságban, közvetlenül a fogkapcsolatban ébredő F erő.)

Kúpkerekes tengelyhajtás

Az ábra szerinti kúpkerekes tengelyhajtás ugyancsak az elemi bolygómű egyik megjelenési formája. Az előző, homlokfogaskerekes tengelyhajtástól csak az különbözteti meg, hogy a bolygókerék tengelye (a behajtótengely) iránya merőleges a hajtott napkerék irányára.

A Kutzbach-féle sebesség-ábrát ebben az esetben csak térben tudjuk felrajzolni.

Az ábrák alapján írjuk fel a sebesség-egyensúlyi egyenletet. A térbeli elhelyezkedés miatt a vektoros felírást kell választani, és a szögsebességeket is vektorokként kell kezelni. A koordináta tengelyek irányában a szokásos egységvektorokat felvéve, az egyes tagok szögsebesség vektorai:

$$\omega_1 = \omega_k \mathbf{j}, \quad \omega_2 = \omega_h \mathbf{j} + \omega_m \mathbf{i}, \quad \omega_3 = \omega_h \mathbf{j},$$

a bolygókerék ω_2 szögsebességénél figyelembe vettük az ω_m ábra szerinti irányát, valamint azt, hogy a bolygókerék a forgattyúhoz csuklósan kapcsolódik (hajtóműházban van csapágyazva), így az y tengely körül azzal együtt forog. A kényszerkapcsolódási pontokat (A, B, C, D) összekötő vektorokat is felírhatjuk a koordináta egységvektorok segítségével, az ábra szerint tehát:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{AB} &= -R \mathbf{i} + (a+r) \mathbf{j}, \\ \mathbf{r}_{BC} &= -c \mathbf{i} - r \mathbf{j}, \\ \mathbf{r}_{CD} &= (R+c) \mathbf{i} + (r+b) \mathbf{j}. \end{aligned}$$

A vektoros sebesség-egyensúlyi egyenlet pedig:

$$\omega_1 \times \mathbf{r}_{AB} + \omega_2 \times \mathbf{r}_{BC} + \omega_3 \times \mathbf{r}_{CD} = \mathbf{0},$$

amibe behelyettesítve:

$$\omega_k \mathbf{j} \times [-R \mathbf{i} + (a+r) \mathbf{j}] + [\omega_h \mathbf{j} + \omega_m \mathbf{i}] \times (-c \mathbf{i} - r \mathbf{j}) + \omega_h \mathbf{j} \times [(R+c) \mathbf{i} + (r+b) \mathbf{j}] = \mathbf{0}.$$

A vektori szorzatokat rendre elkészítve

$$\omega_k R \mathbf{k} + (\omega_h c - \omega_m r) \mathbf{k} - \omega_h (R+c) \mathbf{k} = \mathbf{0}.$$

Valamennyi vektorösszetevő \mathbf{k} irányú, így a

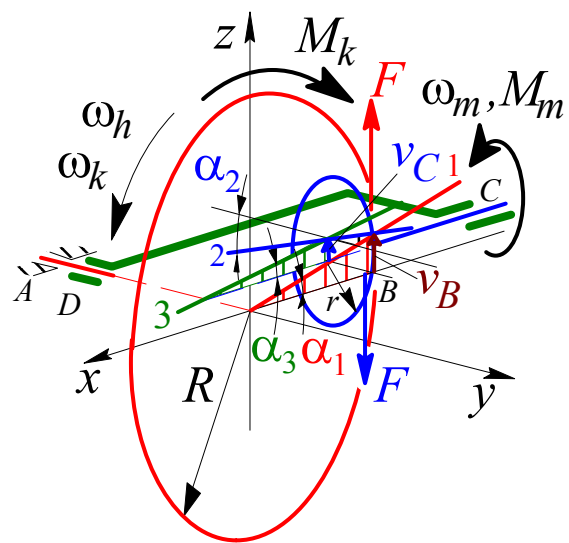
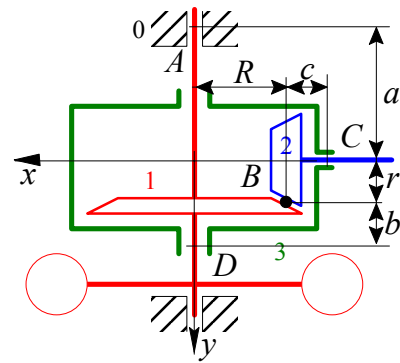
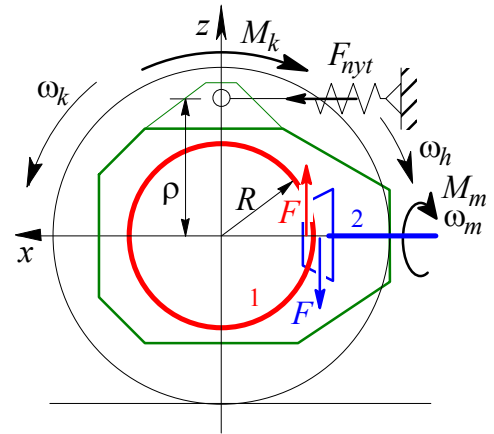
$$\omega_k R + (\omega_h c - \omega_m r) - \omega_h (R+c) = 0$$

skalár egyenlet írható, amit egyszerűsítve és átrendezve:

$$\omega_k R - \omega_m r - \omega_h R = 0 \rightarrow$$

$$\boxed{\omega_k = \omega_m r / R + \omega_h}.$$

Eredményként a marokcsapágyas hajtásnál is kapott összefüggésre jutottunk, ami azt is jelenti, hogy a két rendszer hasonló működésű.



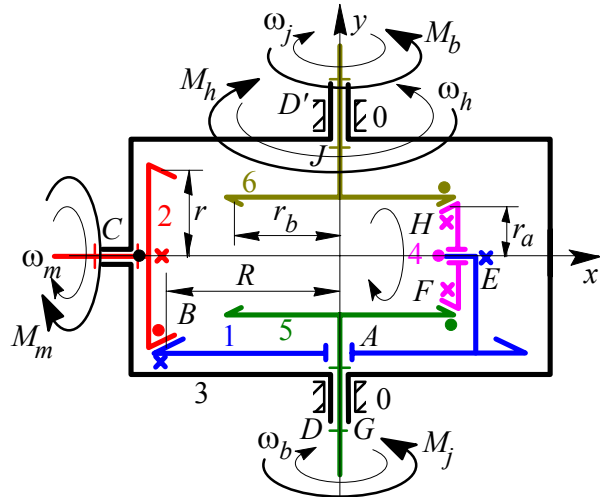
Az erő- és nyomaték viszonyokat ugyancsak az ábrák alapján tárhatjuk fel. Az M_m motornyomatékból származó kerületi erő a fogkapcsolatban $F = M_m / r$, így a kerék-tengelyre ható nyomaték, ill. a ház egyensúlya alapján a nyomatéktám erő:

$$M_k = F R = M_m R / r \quad \text{ill.} \quad F_{nyt} = F R / \rho = (M_m R / r) / \rho,$$

mivel a hajtóműházra a behajtó fogaskerék (bolygókerék) csapágyazásán keresztül a fogkapcsolatban ébredő kerületi erő fejti ki erőhatást a csapágyazás tengelyvonalában.

Differenciálmű rugalmas nyomatéktámmal

A differenciálmű is egyfajta tengelyhajtás, a befoglaló házát nyomatéktámon rugalmasan meg kell támasztani. A megtámasztás rugalmassága miatt a hajtóműház szöglengéseket végez, ω_h szögsebessége tehát zérustól különböző. Az ábrán újból felrajzoltuk a differenciálmű kinematikai vázlatát, de a redundáns részeket az egyszerűség érdekében elhagytuk. A kúpfogaskerekes tengelyhajtómű példájában láttuk, hogy a mechanizmus csuklóinak tengelyirányú eltolása a mozgásviszonyokat nem befolyásolja, így az egyszerűség érdekében a továbbiakban tekintünk úgy, hogy a csuklós csapágyazások a fogaskerekek síkjában vannak. A behajtás történjen a 2-es jelű tagon (bolygókerék), a kihajtótengelyek pedig legyenek az 5-ös és 6-os tagok tengelyei. A behajtó motor vagy hajtómű szögsebessége ω_m , és a behajtó nyomaték nagysága pedig M_m . A differenciálmű egy lehetséges szerkezeti képlete, valamint a mechanizmus szabadságfoka:



$$\begin{aligned} & \downarrow \\ & A B C D \leftarrow E F G \leftarrow H J \\ \gamma &= 1 \ 2 \ 1 \ 1 - 3 \ 1 \ 2 \ 1 - 3 \ 2 \ 1 - 3 = 3 \\ \sigma &= 1 \ 2 \ 0 \ 1 - 3 \ 1 \ 2 \ 1 - 3 \ 2 \ 1 - 3 = 2 \end{aligned}$$

A szerkezeti képlet szerint a mechanizmus három zárt kinematikai láncból áll, ennek megfelelően három sebesség-egyensúlyi egyenlet írható fel. A képlet szerinti zárt láncokra tehát:

$$\begin{aligned} \omega_1 \times \mathbf{r}_{AB} + \omega_2 \times \mathbf{r}_{BC} + \omega_3 \times \mathbf{r}_{CD} &= \mathbf{0}, \\ \omega_1 \times \mathbf{r}_{AE} + \omega_4 \times \mathbf{r}_{EF} + \omega_5 \times \mathbf{r}_{FG} &= \mathbf{0}, \\ \omega_1 \times \mathbf{r}_{AE} + \omega_4 \times \mathbf{r}_{EH} + \omega_6 \times \mathbf{r}_{HJ} &= \mathbf{0}, \end{aligned}$$

vektoregyenletek írhatók fel. Az egyes tagoknak a képletben szereplő szögsebességei, figyelembe véve, hogy a 2-es jelű tag a 3-jelű házzal, a 4-es jelű tag pedig az 1-es jelű tányérkerékkel az y tengely körül együtt forog:

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \omega_1 \mathbf{j}, & \omega_2 &= \omega_m \mathbf{i} + \omega_h \mathbf{j}, & \omega_3 &= \omega_h \mathbf{j}, \\ \omega_4 &= \omega_E \mathbf{i} + \omega_1 \mathbf{j}, & \omega_5 &= -\omega_b \mathbf{j}, & \omega_6 &= -\omega_j \mathbf{j},\end{aligned}$$

A kényszerkapcsolódási pontokat összekötő vektorok:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_{AB} &= -R \mathbf{i}, & \mathbf{r}_{BC} &= r \mathbf{j}, & \mathbf{r}_{CD} &= R \mathbf{i} - r \mathbf{j}, & \mathbf{r}_{AE} &= r_b \mathbf{i} + r \mathbf{j}, \\ \mathbf{r}_{EF} &= -r_a \mathbf{j}, & \mathbf{r}_{FG} &= -r_b \mathbf{i}, & \mathbf{r}_{EH} &= r_a \mathbf{j}, & \mathbf{r}_{HJ} &= -r_b \mathbf{i}.\end{aligned}$$

A sebesség-egyensúlyi egyenletekbe behelyettesítve:

$$\begin{aligned}-\omega_1 \mathbf{j} \times (R \mathbf{i}) + (\omega_m \mathbf{i} + \omega_h \mathbf{j}) \times (r \mathbf{j}) + \omega_h \mathbf{j} \times (R \mathbf{i} - r \mathbf{j}) &= \mathbf{0}, \\ \omega_1 \mathbf{j} \times (r_b \mathbf{i} + r \mathbf{j}) - (\omega_E \mathbf{i} + \omega_1 \mathbf{j}) \times (r_a \mathbf{j}) + \omega_b \mathbf{j} \times (r_b \mathbf{i}) &= \mathbf{0}, \\ \omega_1 \mathbf{j} \times (r_b \mathbf{i} + r \mathbf{j}) + (\omega_E \mathbf{i} + \omega_1 \mathbf{j}) \times (r_a \mathbf{j}) + \omega_j \mathbf{j} \times (r_b \mathbf{i}) &= \mathbf{0},\end{aligned}$$

majd egyszerűsítve, \mathbf{k} egységvektorral is osztva:

$$\begin{aligned}\omega_1 R + \omega_m r - \omega_h R &= 0, \\ -\omega_1 r_b - \omega_E r_a - \omega_b r_b &= 0, \\ -\omega_1 r_b + \omega_E r_a - \omega_j r_b &= 0.\end{aligned}$$

Utóbbi két egyenletet összeadva, r_b -vel egyszerűsítve: $(\omega_b + \omega_j) / 2 = -\omega_1$,

azaz a baloldali és a jobboldali kihajtótengely szögsebességének átlaga a tányérkerék szögsebessége. A tányérkerék szögsebességét az 1. egyenletből is kifejezve:

$$-\omega_1 = \boxed{\omega_m r / R - \omega_h = (\omega_b + \omega_j) / 2}.$$

A kapott összefüggésben 4 szögsebesség szerepel, tehát a mechanizmus 3 szabadságfokának megfelelően 3 megválasztott szögsebességhez kiszámítható belőle a negyedik szögsebesség.

A differenciálmű nyomatéki viszonyait az egyes tagok egyensúlya alapján tárhatjuk fel. A kerületi erők az ábránk síkjára merőlegesek, így ezeket az ábrán kis ponttal jelöltük, ha a síkból felfelé, kifelé mutató irányúak, és kis keresztekkel, ha a síkba befelé, lefelé irányulnak. Az egyes kapcsolati erőkre a kapcsolat betűjele szerinti index utal.

A behajtótengelyre működő M_m behajtó (motor, hajtómű) nyomatékkal a B fogaskerék kapcsolat $F_B = M_m / r$ kerületi ereje tart egyensúlyt. Az 1 jelű tányérkeréken az F_B kerületi erő nyomatéka az F_E csapágyazáson fellépő erő nyomatékával tart egyensúlyt az

$$F_B R = F_E r_b \quad \text{összefüggés szerint, melyből:} \quad F_E = F_B R / r_b.$$

A 4 jelű kis kúpogaskeréken az F_H és F_F kerületi erőknek azonosnak kell lenniük a nyomaték egyensúlyához, és a függőleges erők egyensúlyához a két erő összege az F_E erővel meg kell egyezzen, tehát

$$F_H = F_F = F_E / 2 = F_B R / 2 r_b.$$

Az $F_H = F_F$ egyenlőség miatt az ezen erők r_b karon kifejtett nyomatékával egyensúlyt tartó M_b és M_j kihajtótengelyi nyomatékok is egyenlők lesznek:

$$M_b = M_j = F_H r_b = F_F r_b = F_B R / 2 = \boxed{M_m R / 2 r = M_b = M_j} .$$

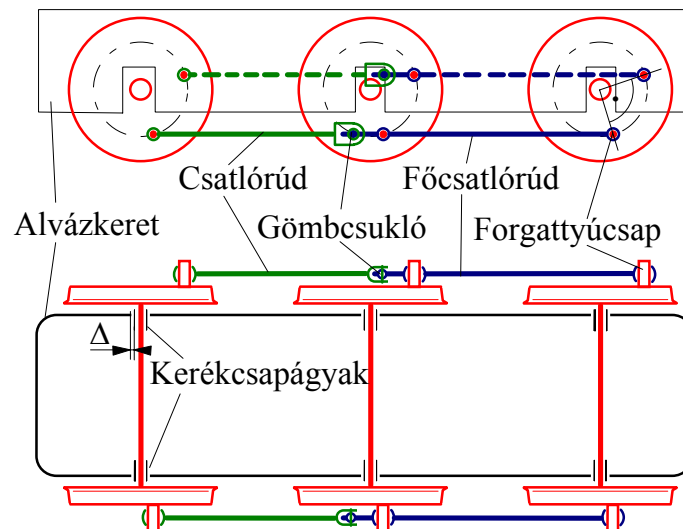
A mozgás 3 szabadságfokától függetlenül tehát a nyomatéki viszonyok egyértelműen meghatározottak, és függetlenül a bal- és jobboldali kihajtótengelyek szögsebességétől, a **bal- és jobboldali kihajtó nyomatékok egymással meg kell egyezzenek** állandósult üzemben. Ez az oka annak, hogy differenciálmű esetében, ha az egyik oldali kerék az átvihető súrlódóerő lecsökkenésével megcsúszik, akkor az átvihető nyomaték a másik keréken sem lehet nagyobb, mint a csúszó keréken.

A hajtóműházra ható, az ábrán nem jelölt F_{nyt} nyomatéktám-erőből származó nyomaték a C csapágyazáson ébredő, és az F_B erővel megegyező F_C erőből származik, tehát

$$M_h = F_C R = F_B R = \boxed{M_m R / r = F_{nyt} \rho} .$$

III. 8. Rudazatos hajtás

Rudazatos hajtás esetén a forgó tengelyeket összekötő rudak (csatlórudak) segítségével történik a tengelyek együttes forgásának biztosítása.



A tengelyek között a forgatónyomaték továbbítása a csatlórudakban ébredő húzó- és nyomóerő által történik a keréktárcsákon elhelyezkedő forgattyúcsapokon keresztül. A csatlórudak közül egy (a főcsatlórúd) két tengely forgattyúcsapján nyugszik, a további csatlórudak pedig egy forgattyúcsaphoz, és egy megelőző csatlórúd végén kialakított gömbcsuklóhoz kapcsolódnak.

Amikor a forgattyúcsap a tengelyközéphez képest vízszintes helyzetbe kerül, akkor a csatlórudakban ébredő rúdirányú erő hatásvonala keresztülmegy a forgás tengelyén, így a rúderő a tengelyre forgatónyomatékot nem képes kifejteni. Ezért a jármű mindkét

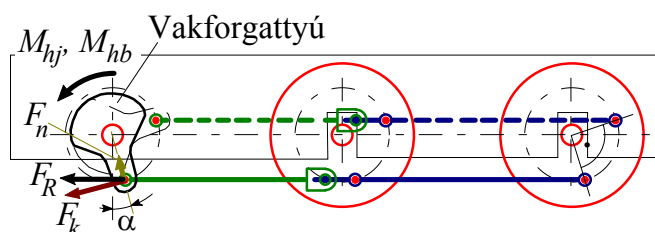
oldalán kialakítjuk a csatlórudas kapcsolatot a tengelyek között, és a nyomaték tetszőleges szöghelyzetben való átvitelének biztosításához a jobb- és a bal oldalon levő rudazatot 90° -al eltolt helyzetben építjük be. Ezáltal, amikor az egyik oldalon a forgattyúcsap helyzete miatt a nyomatékkifejtés nem lehetséges, akkor az ellentétes oldal éppen a legkedvezőbb nyomatékkifejtési helyzetben van (a csatlórúd merőleges a forgattyúsugárra).

Ahogy az ábrán is látható, a kerékpártengelyek hosszirányú távolsága többszörösen túlhatározott, mivel a kétoldali csatlórúd-rendszer, valamint a kerékpárok alvázkeretben való csapágyazása is definiál egy hosszirányú helyzetet. A tengelyek befeszülésének elkerülésére ezért - a gyártási méretpontosság megfelelő szinten tartása mellett is - a kerécsapágyazás alvázkerethez való csatlakozásánál megfelelő hosszirányú Δ hézagot biztosítani kell. A Δ hézagra ezen kívül azért is szükség van, mivel a függőleges pályaegyenletlenségek, valamint a pályáívekben való haladás miatt a kerékpártengelyek egymáshoz képest mind függőleges-, mind pedig keresztirányban elmozdulnak, és ezek az elmozdulások a csatlórudak fix hossza miatt a kerékpártengelyek egymáshoz való közeledését igénylik. A vázolt, szükségszerű elmozdulások lehetőségének biztosításához az is szükséges, hogy a csatlórudak kapcsolata, valamint a csatlórudaknak a forgócsapokhoz való kapcsolódása is gömbcsuklós kialakítású legyen.

Az összekapcsolt tengelyekre a forgatónyomaték bevezethető forgattyús mechanizmuson keresztül (gőzmozdonyok) ill. vakforgattyús hajtómű alkalmazásával.

Vakforgattyús rudazatos hajtás

Vakforgattyús rudazatos hajtás esetén a rudazattal összekötött tengelyek közül az egyiket, az u.n. *vakforgattyús* tengelyt hozzuk forgásba a motorral, és a hajtás erről a tengelyről a rudazat közvetítésével kerül tovább a hajtott tengelyekre.



A vakforgattyún fellépő $M_h = M_{hb} + M_{hj}$ hajtónyomaték megoszlik a baloldali rudazaton átvitelre kerülő M_{hb} , valamint a jobboldali rudazaton átvitelre kerülő M_{hj} nyomatéokra, és ezekkel a nyomatékokkal a bal- ill. jobb oldalon fellépő rúderők tartanak egyensúlyt. Például az ábra szerint a bal oldalt tekintve, a vakforgattyú csapjára ható rúdirányú F_{Rb} erő felbontható a sugárirányú F_{nb} és a kerületi irányú F_{kb} erőkre. Az adott oldalon átviendő nyomatékkal az r forgattyúsugáron az F_{kb} kerületi erő tart egyensúlyt

$$M_{hb} = r F_{kb} = r F_{Rb} \cos \alpha$$

összefüggés szerint. Ebből a rudazatban fellépő erő:

$$F_{Rb} = M_{hb} / r \cos \alpha .$$

A $\cos \alpha$ számértékének csökkenésével a rúderő forgatónyomatéka is csökken, és $\cos \alpha = 0$ esetén ($\alpha = \pi/2 \pm \pi$) a forgató hatás meg is szűnik. Ilyenkor a teljes M_h nyomaték átvitelét a másik oldali rudazatnak kell megvalósítania. A két oldali rudazat 90° -os relatív helyzete miatt az ellentett oldal ilyenkor a nyomatékátvitel szempontjából a legkedvezőbb, $\alpha = 0 \pm \pi$ helyzetben van. Méretezés szempontjából úgy szokás tekinteni, hogy az egyik oldali rudazat az $\alpha = 45^\circ$ -os szöghelyzetig *egyedül* képes legyen a nyomaték átvitelére, azaz a rudazatban fellépő F_{Rmax} maximális rúderő

$$F_{Rmax} = M_h / r \cos 45^\circ = M_h / (r \sqrt{2}/2) = \sqrt{2} M_h / r .$$

A rudazatos hajtás tömegkiegyenlítése

A rudazatos hajtásnál a keréktárcsákon elhelyezett forgattyúcsapok, valamint a forgattyúcsapokra támaszkodó csatlórudak excentrikusan elhelyezkedő tömegeket jelentenek. Az ezekhez a forgás következtében hozzárendelhető centrifugális erők kiegyensúlyozás hiányában a csapágyazáson keresztül, mint forgó erők jelentős dinamikus terhelést jelentenek a járműre. Ezeket a forgó terheléseket ellensúlyok alkalmazásával egyenlíthetjük ki.

Az ábra szerinti kerékpár esetében jelölje m_I a kiegyensúlyozandó, excentrikus elhelyezkedésű tömegek keréksíkba eső részét (a forgócsap kerékvázba való bekötésének kialakításából adódó többletanyag tömege), m_{II} pedig a kerékváz síkjától t távolságra, a rudazat síkjába eső kiegyensúlyozandó tömeget (a forgócsap tömegének egy része és a rudazat tömegéből az adott forgócsapra eső tömeg). Az ω szögsebességgel forgó kerék esetében, r forgattyúsugar mellett az m_I és m_{II} tömegekre figyelembe vehető F_I és F_{II} centrifugális erők:

$$F_I = m_I r \omega^2 \quad \text{és} \quad F_{II} = m_{II} r \omega^2 .$$

Az erők egyensúlyának megteremtéséhez ezen F_I és F_{II} erőkkel azonos nagyságú, de ellentétes irányú erőket kell generálni, alkalmasan elhelyezett ellensúlyokkal. Az ellensúlyok azonban csak a kerék síkjában helyezhetők el, ami az F_I erő esetében megfelelő, de az F_{II} erő esetében azt eredményezi, hogy az m_{II} tömegre ható F_{II} erő és az ellensúlyon ébredő F_{II} erő hatásvonalai között t távolság következtében egy $\Delta M = F_{II} t$ nagyságú nyomaték is keletkezik. Ez a nyomaték csak az egymástól s távolságra levő két keréktárcsa síkjában generált, ellentétes irányú, de azonos nagyságú ΔF erő segítségével egyensúlyozható ki. A nyomatéki egyensúlyhoz

$$\Delta M = F_{II} t = \Delta F t, \quad \text{amiből} \quad \Delta F = F_{II} t / s .$$

Így egy-egy keréktárcsánál a forgattyúcsap síkjában összesen $F_I + F_{II} + \Delta F$ nagyságú erőt, míg a síkra merőlegesen ΔF nagyságú erőt kell az ellensúly segítségével létrehozni. Az ellensúlyon ébredő F_e eredő erő nagysága tehát

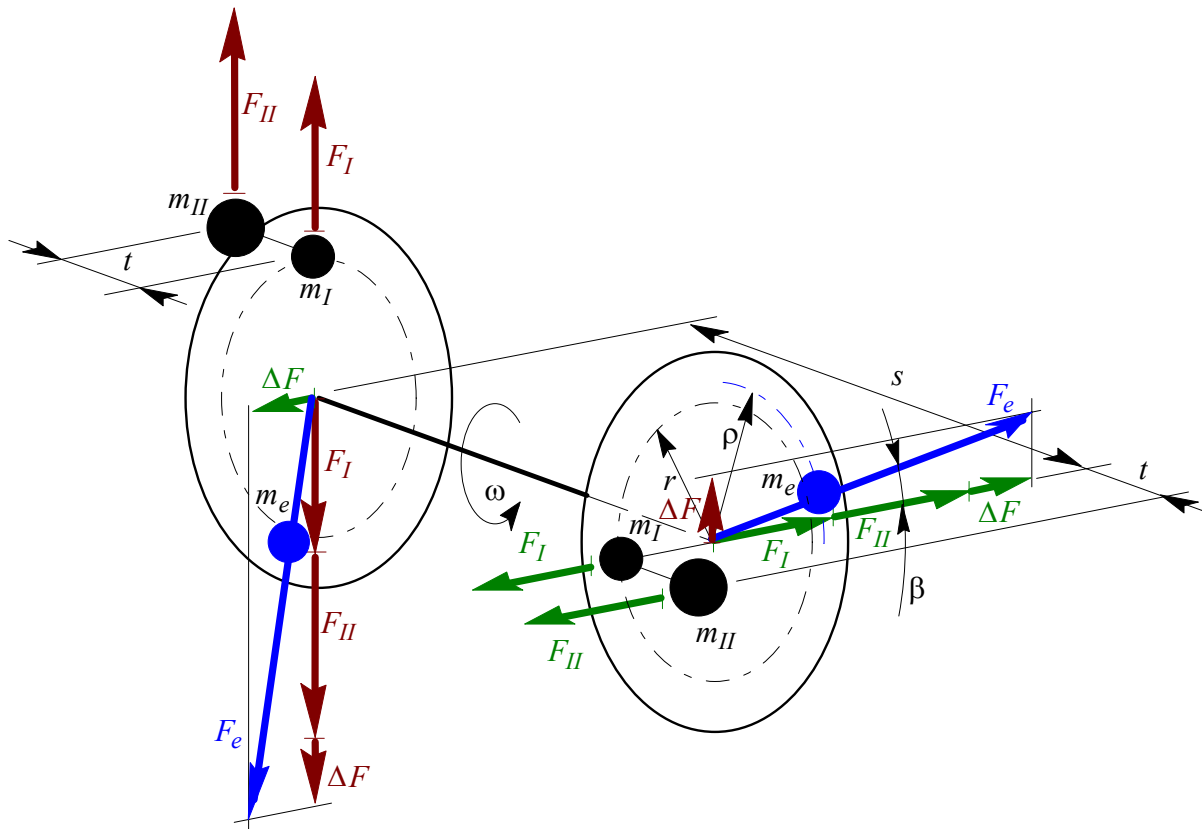
$$F_e = \sqrt{(F_I + F_{II} + \Delta F)^2 + \Delta F^2} = r \omega^2 \sqrt{(m_I + m_{II}(1 + t/s))^2 + (m_{II} t/s)^2} = m_e \rho$$

lesz, ha az m_e tömegű ellensúlyt ρ sugáron tudjuk elhelyezni. ω^2 -el való egyszerűsítés és átrendezés után ebből az ellensúly m_e tömege:

$$m_e = r / \rho \sqrt{(m_I + m_{II}(1 + t/s))^2 + (m_{II} t/s)^2} .$$

Az ellensúly helyét az ábra szerint meghatározó β szöget, ill. annak tangensét az eredő erő két merőleges komponensének hányadosából határozhatjuk meg:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\Delta F}{F_I + F_{II} + \Delta F} = \frac{m_{II} t/s}{m_I + m_{II}(1 + t/s)} .$$



IRODALOMJEGYZÉK

A tananyag ezen fejezetének elsajátítását az alábbi *könyvek és jegyzetek* segítik:

1. Sályi B.-Michelberger P.-Sályi I.: Kinematika és kinetika, TK 44526, Bp. 1991.