

## II. Klassische EM-Felder in Vakuum

Motivation: Berechnung der Felder ausserhalb von Quellen mittels Rand- bzw. Anfangswerten von Feldverteilungen

zB Nahfeld in Nähe der Quelle sei bekannt: wie sieht Fernfeld aus?

### 1. Wellengleichung im Vakuum

Aus Maxwellgleichungen im Vakuum

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \partial_t \mathbf{E}, \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

folgt die Wellengleichung für das elektrische und das magnetische Feld:

$$\begin{array}{l|l} \nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \nabla \times \mathbf{B} & \nabla \times \nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \partial_t (\nabla \times \mathbf{E}) \\ \nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}) - \Delta \mathbf{E} = -\frac{1}{c^2} \partial_t^2 \mathbf{E} & \nabla (\nabla \cdot \mathbf{B}) - \Delta \mathbf{B} = -\frac{1}{c^2} \partial_t^2 \mathbf{B} \\ \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \text{ im Vakuum} & \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \Delta E_i - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 E_i = 0 & \Delta B_i - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 B_i = 0 \end{array}$$

## Wellengleichung im Vakuum 2

- $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{B}$  erfüllen (komponentenweise) die homogene Wellengleichung
- Erinnerung: bei gewöhnlichen Differentialgleichungen  $n$ -ter Ordnung:  $n$ -parametrische Lösungsschar ( $\hat{=} n$  Konstanten)
- partielle Dgl.: im allg. treten  $n$  unbestimmte Funktionen auf  
→ wesentlich größere Lösungsmannigfaltigkeit

Beispiel für 1d-Fall :  $x, t$

-Schwingungsgleichung: 2 bestimmte Funktionen + 2 Konstanten  
(Anfangsbedingungen)

-Wellengleichung in  $x, t$ : Lösung ist  $f(x - ct) + g(x + ct)$

$f$  und  $g$  sind zwei unbestimmte Lösungen, sind aus Anfangsbedingungen bzw. Randbedingungen festzulegen, um die vollständige Lösung zu gewinnen.

## 2. Spektralzerlegung

Spektralanalyse eines Felds über Fourierzerlegung:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) e^{-i\omega t} \quad (1)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) e^{i\omega t} \quad (2)$$

$|\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega)|^2 \hat{=} \text{Powerspektrum (wird gemessen)}$

Ansatz zur Lösung von Wellengleichung :

$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_\omega(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}$  ist eine monochromatische Lösung (feste Freq.  $\omega$ )

Überlagerung nach Gl.(1) gibt volle Lösung wenn die Lösung für eine feste Frequenz gefunden ist.

## 3. Ebene Wellen als Fundamentallösungen

Fundamentallsg.: Satz von Basisfunktionen nach denen eine Lösung entwickelt werden kann, jetzt: ebene Wellen als Fundamentallsg.:

$$B_i(\mathbf{r}, t) = e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} B_{i\mathbf{k}}, \quad E_i(\mathbf{r}, t) = e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} E_{i\mathbf{k}}$$

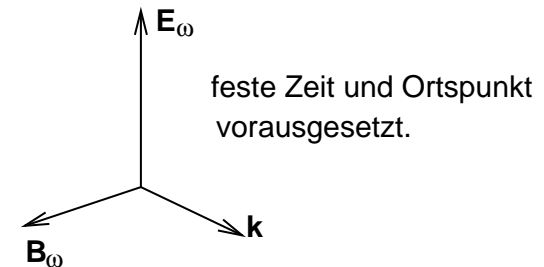
mit  $\omega = \omega(k) = c|k|$  ist eine Lösung der homogenen Wellengleichung (Vakuum), die Überlagerung gibt die allg. Lösung da das System vollständig ist (später).

### a) Orthogonalität der Felder

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \partial_t \mathbf{E}$$

$$i \mathbf{k} \times \mathbf{E}_{\mathbf{k}} = i \omega \mathbf{B}_{\mathbf{k}}, \quad i \mathbf{k} \times \mathbf{B}_{\mathbf{k}} = -i \frac{\omega}{c^2} \mathbf{E}_{\mathbf{k}}$$

$$\mathbf{k} \times \mathbf{E}_{\mathbf{k}} = \omega \mathbf{B}_{\mathbf{k}}, \quad \mathbf{k} \times \mathbf{B}_{\mathbf{k}} = -\frac{\omega}{c^2} \mathbf{E}_{\mathbf{k}}$$



⇒  $\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{E}_\omega$ ,  $\mathbf{B}_\omega$  bilden ein orthogonales Satz von Vektoren.

Der Betrag von  $\mathbf{B}$  und  $\mathbf{E}$  unterscheidet sich durch  $c$ :  $B_{\mathbf{k}} = E_{\mathbf{k}}/c$

# Ebene Welle als Fundamentallsg. 5

## b) Phasenfronten:

$$\operatorname{Re} \left[ E_\omega e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \right] = E_\omega \cos(\underbrace{\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t}_{=\varphi})$$

$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t = \varphi$  Phase der Welle  $\rightarrow$  Fläche konstanter Phase sind Ebenen

wobei  $\mathbf{k}$  senkrecht auf den Ebenen steht

## c) Polarisationsseigenschaften: Richtung des E-Vektors f. festes $\mathbf{k}$ ?

allgemeinste Darstellung einer Fundamentallsg.:  $E_{\mathbf{k}}$

$$\mathbf{E}_{\mathbf{k}} = (E_1 \mathbf{e}_1 + E_2 \mathbf{e}_2) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \quad \mathbf{E} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{E}_{\mathbf{k}} \text{ bzw. } \mathbf{E} = 2\operatorname{Re} \left[ \sum_{k \geq 0} \mathbf{E}_{\mathbf{k}} \right]$$

hier sind  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{k}$  ein Satz orthogonaler Basisvektoren

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\mathbf{k}} &= \left\{ |E_1| e^{i\phi_1} \mathbf{e}_1 + |E_2| e^{i\phi_2} \mathbf{e}_2 \right\} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \\ &= \left\{ |E_1| \mathbf{e}_1 + |E_2| e^{i(\phi_2 - \phi_1)} \mathbf{e}_2 \right\} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \phi_1)} \end{aligned}$$

$\phi_1$  ist eine unbedeutende Phase in  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t$

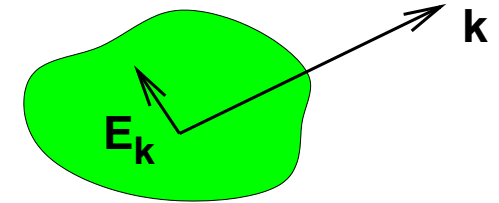
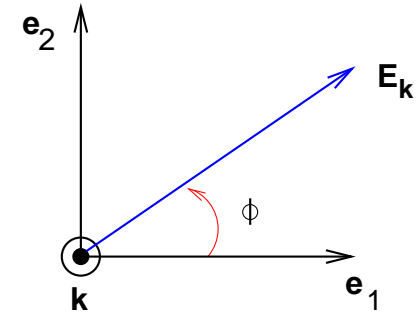
# Ebene Welle als Fundamentallsg. 6

$\text{Re}[\mathbf{E}_{\mathbf{k}}]$  bestimmt das meßbare Feld :

$$\text{Re}[\mathbf{E}_{\mathbf{k}}] = \begin{pmatrix} 2|E_1| \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) \\ 2|E_2| \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \Delta\phi) \end{pmatrix}$$

Winkel von  $\mathbf{E}_{\mathbf{k}}$  zu  $\mathbf{e}_1$  sei  $\varphi$

$$\varphi = \arctan \left( \frac{2|E_2| \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \Delta\phi)}{2|E_1| \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \right)$$



**Unterscheidung:**

**1. Fall: linear polarisiert**  $\Delta\phi = 0 \rightarrow \varphi = \text{zeitlich und räumlich konstant}$

Die  $\mathbf{E}_{\mathbf{k}}$ -Feld Richtung steht fest im Raum bzgl.  $\mathbf{k}$  für alle Orte und Zeiten.  
Man nennt die Fundamentallwelle linear polarisiert.

**2. Fall: zirkular polarisiert**  $\Delta\phi = \pm\pi/2, |\mathbf{E}_1| = |\mathbf{E}_2| \rightarrow \varphi = (\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)$

Das E-Feld Vektor rotiert auf einen Kreis um die Ausbreitungsrichtung  $\mathbf{k}$  mit der Winkelfrequenz  $\omega$ . ( $\mathbf{r}$  festgehalten und  $t$  laufen lassen)  
Man nennt diese Welle zirkular polarisiert.

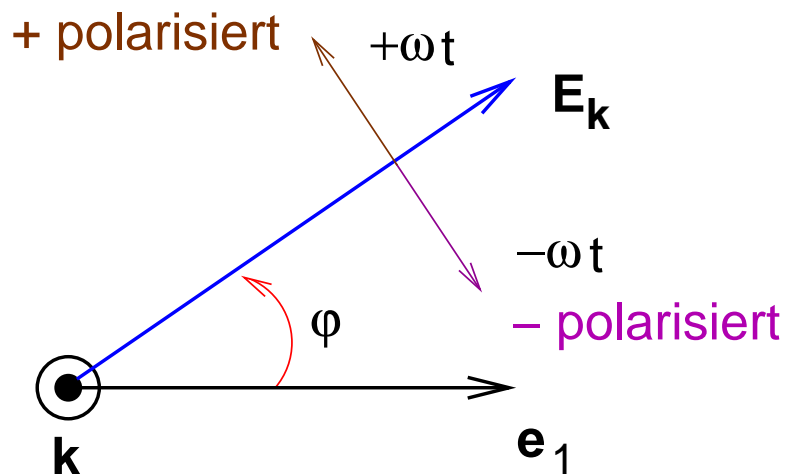
## Ebene Welle als Fundamentallsg. 7

Rechnung für den zirkular polarisierten Fall:

$$\varphi = \arctan \left( \frac{\cos(-\omega t \pm \frac{\pi}{2})}{\cos(-\omega t)} \right) = \pm \omega t$$

Der Winkel  $\varphi$ , den  $\mathbf{E}_{\mathbf{k}}$  mit der x-Achse ( $\mathbf{e}_1$ ) einschließt, ändert sich mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$ .

Entsprechend der Richtung bezgl.  $\mathbf{k}$  in die sich der Winkel mit fortschreitender Zeit dreht, nennt man das Feld rechts (+) oder links (-) zirkular polarisiert.



## Ebene Welle als Fundamentallsg. 8

da es diese wieder 2 unabhängig Lösungen sind, kann man die Felder anstatt nach kartesischen Vektoren auch nach zirkularen Vektoren  $e_{\pm}$  zerlegen:

$$\mathbf{E}_{\mathbf{k}}^{\pm} = |\mathbf{E}_1| \left( \mathbf{e}_1 + e^{\pm i \frac{\pi}{2}} \mathbf{e}_2 \right) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$$

$$= |\mathbf{E}_1| (\mathbf{e}_1 \pm i \mathbf{e}_2) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$$

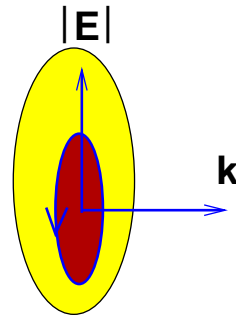
$$\mathbf{E}_{\mathbf{k}}^{\pm} = |\mathbf{E}_1| \mathbf{e}_{\pm} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$$

so wie  $\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_2$  ein vollständige System bilden, sind  $e_{\pm}$  Polarisationsvektoren auch ein vollständiges System in der Ebene senkrecht zu  $\mathbf{k}$ . In manchen Anwendungen kann dies mehr angepasst sein.

z.B. Emission von angeregten Atomen oft zirkular (Zeemaneffekt QM)



## 3. Fall: elliptisch polarisiertes Licht $\Delta\phi$ beliebig



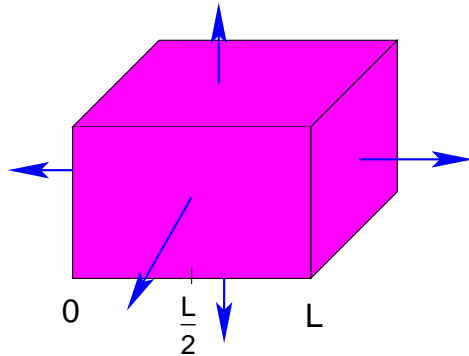
$\mathbf{E}$  bewegt sich auf Ellipse.

### Bemerkungen:

- Die Polarisations-eigenschaften einer Strahlungsquelle/ eines Strahlungsfelds sind wichtige Größen zu dessen Charakterisierung.
- Durch die sogenannten Stokes-parameter  $S_i$ , die gemessen werden können, kann die Polarisation einer  $\mathbf{k}$ -Fundamentallösung vollkommen bestimmt werden. (siehe, z.B., in "Principles of Optics" von "M. Born & E. Wolf")

## 3. Zerlegung des elektrischen Felds in ebene Wellen

Betrachten das Feld im Vakuum (Würfel)



- stellen uns periodische Fortsetzung der Würfel vor.
- der Würfel enthält das gesamte Experiment.

- n-ter Würfel:  $(n_x L + L/2, n_y L + L/2, n_z L + L/2)$ , wobei  $(n_x, n_y, n_z)$  ganze Zahlen, alle Kombinationen treten auf.
- period. Fortsetzung:  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r} + \mathbf{R}, t)$ ,  $\mathbf{R} = (n_x L, n_y L, n_z L)$

Ansatz für Feld : Fourier-Reihe mit Amplitudenfunktion  $E_\mu$  :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mu, \sigma} \frac{1}{2} \mathbf{e}_{\mu, \sigma} E_\mu e^{i(\mathbf{k}_\mu \cdot \mathbf{r} - \omega t)} + c.c., \quad \mathbf{k}_\mu = \left( \frac{2\pi}{L} l_x, \frac{2\pi}{L} l_y, \frac{2\pi}{L} l_z \right)$$

$(l_x, l_y, l_z)$  ganze Zahlen,  $\omega_\mu = c|\mathbf{k}_\mu|$ ,  $\mathbf{e}_{\mu, \sigma=1,2}$  Einheitsvektoren pro  $k_\mu$

Zahlen  $(\mathbf{k}_\mu, \sigma)$  beschreiben eine **Mode** des em. Felds.

# Zerlegung des elek. Felds in ebene Wellen 11

## Bemerkungen:

Die Zerlegung ist vollständig.

Da ebene Wellenzerlegung:  $\mathbf{k}_\mu \perp$  auf Ebene, in der das Feld schwingt:  
 $\Rightarrow$  zu jedem  $\mathbf{k}_\mu$  gehören 2 orthogonale Einheitsvektoren um Feld darzustellen.

(Nummer :  $\sigma=1,2$  für jedes feste  $k_\mu$ )

Zu einer Mode gehören zwei Größen :  $(\mathbf{k}_\mu, \sigma)$  mit  $(\sigma = 1, 2)$

es gilt:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \rightarrow \mathbf{e}_{\mu\sigma} \cdot \mathbf{k}_\mu = 0$$

$$\text{per Def. : } \rightarrow \mathbf{e}_{\mu\sigma} \cdot \mathbf{e}_{\mu\sigma'} = \delta_{\sigma\sigma'}$$

## 4. Anfangswertprobleme für die Zerlegung nach ebenen Wellen

Das Feld  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  soll aus einer Anfangsverteilung für alle Zeiten bestimmt werden. Dies kann bei bekanntem dem E-Feld und der Ableitung des E-Felds zur Zeit  $t = 0$  gemacht werden:

$$1) \varphi_i(r) = E_i(\mathbf{r}, t = 0), \quad 2) \psi_i(r) = \partial_t E_i(\mathbf{r}, t = 0)$$

Das elek. Feld  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  kann in ebene Wellen zerlegt werden:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \sum_{e\sigma} \frac{1}{2} \mathbf{e}_{e\sigma} E_{e\sigma} e^{i(\mathbf{k}_e \cdot \mathbf{r} - \omega_e t)} + c.c.$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, 0) = \sum_{e\sigma} \frac{1}{2} \mathbf{e}_{e\sigma} E_{e\sigma} e^{i\mathbf{k}_e \cdot \mathbf{r}} + c.c.$$

$$\partial_t \mathbf{E}(\mathbf{r}, 0) = \sum_{e\sigma} \frac{-i\omega_e}{2} \mathbf{e}_{e\sigma} E_{e\sigma} e^{i\mathbf{k}_e \cdot \mathbf{r}} + c.c.$$

nehmen jetzt eine Mode  $e\sigma$  heraus und lösen das Anfangswertproblem.

## Anfangswertproblem 13

Eindim. Modellfall für ein feste  $\epsilon\sigma$  (3d-analog)

$$E(x, t) = \frac{1}{2} \int dk E(k) e^{i(kx - \omega(k)t)} + c.c.$$

$$E(x, 0) = \frac{1}{2} \left( \int dk E(k) e^{ikx} + \int dk E^*(k) e^{-ikx} \right)$$

$$\partial_t E(x, 0) = \frac{1}{2} \left( \int dk (-i\omega(k)) E(k) e^{ikx} + \int dk (i\omega(k)) E^*(k) e^{-ikx} \right)$$

durch Fouriertrafo invertieren  $\rightarrow$

$$\frac{1}{2\pi} \int dx E(x, 0) e^{-ikx} = \frac{1}{2} (E(k) + E^*(-k))$$

$$\frac{1}{2\pi} \int dx \partial_t E(x, 0) e^{-ikx} = \frac{1}{2} (-i\omega(k) E(k) + \underbrace{i\omega(-k)}_{=\omega(k)} E^*(-k))$$

$$E(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx \left( E(x, 0) e^{-ikx} - \frac{\partial_t E(x, 0)}{i\omega(k)} e^{-ikx} \right)$$

$\rightarrow$  Damit ist  $E(k)$  bestimmt und das AWP gelöst, soweit  $E(x, 0)$ ,  $\partial_t E(x, 0)$  bekannt ist denn es kann oben eingesetzt und gelöst werden.

## Anfangswertproblem 14

Beispiel: Dynamik eines bei  $x = 0$  lokalisierten elektromagnetischen Pulses

untersuchen:  $E(x, 0) = 2\delta(x)$ ,  $\dot{E}(x, 0) = 0$  (Schnappschuss)

Was erhält man für die Zeitdynamik?

$$E(k) = \frac{1}{2\pi} \int dx 2\delta(x) e^{-ikx} + 0 = \frac{1}{\pi}$$

$$E(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int dk e^{i(kx - c|k|t)} + c.c.$$

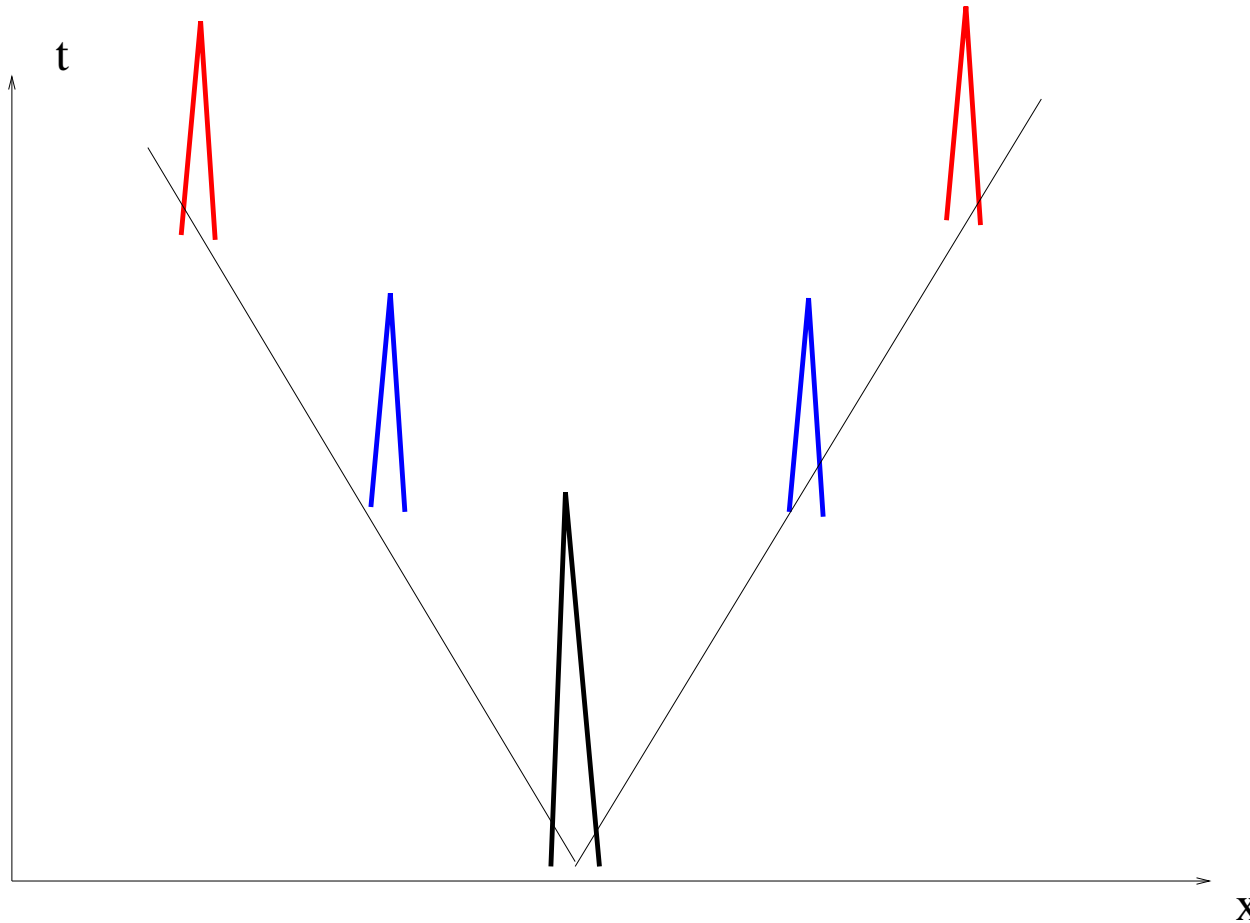
$$E(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 dk e^{i(kx + ckt)} + \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} dk e^{i(kx - ckt)} + c.c.$$

$$E(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk e^{i(kx + ckt)} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk e^{i(kx - ckt)}$$

$$E(x, t) = \delta(x + ct) + \delta(x - ct)$$

## Anfangswertproblem 15

Dynamik eines bei  $x = 0$  lokalisierten elektromagnetischen Pulses



sind 2 Pulse die sich schon bei negativen Zeiten aufeinander zubewegt haben

## 5. Zylinder und Kugelwelle

**Bisher:** Ebene Welle als Fundamentallösung, ist nicht gut für axial- oder kugelsymmetrische Probleme geeignet.

- **Zylinderwellen:**  $\Delta$  in Zylinderkoord. verwenden.

$$\underbrace{\frac{\partial E}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial E}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 E}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2}}_{\Delta E \text{ in Zylinderkoord.}} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial E}{\partial t^2} = 0$$

zylindersymmetrisch:  $\partial_\varphi = 0 = \partial_z$

$$\partial_\rho^2 E_\omega + \frac{1}{\rho} \partial_\rho E_\omega + \frac{\omega^2}{c^2} E_\omega = 0, \quad \text{Besselsche Dgl.}$$

$$E(\rho, t) = \{ \alpha_1 H_0^{(1)}(k\rho) + \alpha_2 H_0^{(2)}(k\rho) \} e^{-i\omega t},$$

$H_0^{(1)}$ ,  $H_0^{(2)}$  sind Hankelfunktion 1. & 2. Gattung



# Zylinder und Kugelwelle 17

$$\text{Asymptotisch: } \rho \rightarrow \infty, \quad H_0^{(1/2)} \sim \frac{e^{i(\pm k\rho - \omega t)}}{\sqrt{k\rho}}$$

- 1) Zylinderwellen werden axialsymmetrisch abgestrahlt ( $\rho$ -Abhängigkeit).
- 2) Der Nenner sorgt für E-Erhaltung (Interaktion über Zylinderkoordinaten).

● **Kugelwellen:**  $\Delta$  in Kugelkoord. verwenden.

$$\underbrace{\frac{\partial E}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial E}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 E}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial^2 E}{\partial \theta^2} + \cot \theta \frac{\partial E}{\partial \theta} \right)}_{\Delta E \text{ in Kugelkoord.}} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial E}{\partial t^2} = 0$$

Kugelwelle: kugelsymmetrisch:  $\partial_\theta = 0 = \partial_\varphi$

$$\frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \partial_r E) - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 E = 0, \quad \text{monoch. Lsg.}$$

$$\frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \partial_r E_\omega) + \frac{\omega^2}{c^2} E_\omega = 0$$

$$E_\omega(r) = \frac{g(r)}{r}$$

$$\frac{1}{r^2} \partial_r \left( r^2 \frac{g' r - q}{r^2} \right) + \frac{\omega^2}{c^2} \frac{q}{r} = 0$$

$$\frac{1}{r^2} (g'' r + g' - g') + \frac{\omega^2}{c^2} \frac{q}{r} = 0$$

$$g'' + k^2 g = 0$$

$$E_\omega(r) \sim \frac{e^{\pm ikr}}{r}, \quad E(r, t) = \alpha_\pm \frac{e^{i(\pm kr - \omega t)}}{kr}$$

kugelsymmetrische Abstrahlung. Flächen gleicher Phase=Kugeln.

## 6. Multipolentwicklung nach Kugelfunktionen

$\Delta$  in Kugelkoord. verwenden,  $\omega$  Index unterdrücken, eine Komponente

$$\underbrace{\frac{\partial E}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial E}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 E}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial^2 E}{\partial \theta^2} + \cot \theta \frac{\partial E}{\partial \theta} \right)}_{\Delta E \text{ in Kugelkoord.}} + \frac{\omega^2}{c^2} E = 0$$

Ansatz ähnlich wie in QM bei Schrödingergleichung:

$$E_i = \sum_{lm} R_l(r) Y_{lm}(\theta, \varphi)$$

separiert den Winkelanteil und Radialanteil:

$$\mathbf{L}^2 Y_{lm} = l(l+1) Y_{lm}, \quad \mathbf{L} = \frac{1}{i} \mathbf{r} \times \nabla$$

$Y_{lm}$  sind die Kugelflächenfunktionen

## Multipolentwicklung nach Kugelfunktionen 20

neue Koordinate  $\xi = kr$

$$\begin{aligned} & \left( -\frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} r + \frac{l(l+1)}{r^2} \right) R_l = k^2 R_l \\ & - \left( \frac{d^2}{d\xi^2} r - \frac{l(l+1)}{\xi^2} \right) (\xi R_l) = k^2 (\xi R_l) \\ & \text{z.B. } l = 0, \quad \xi R_0 \sim e^{\pm i\xi} \end{aligned}$$

man nennt  $h_0 = e^{\pm i\xi} / i\xi$  Hankelfunktion 0-ter Ordnung

die allgemeine Lsg. für  $l = 0$  ist  $R_0 = a_0 h_0 + b_0 h_0^*$

für beliebige  $l$  sind die sphärischen Hankelfunktionen die Lsg.:

$$R_l = a_l h_l(kr) + b_l h_l^*(kr)$$

$R_l$  ist eine Überlagerung von aus und einlaufenden Wellen, siehe  $l = 0$ .

## Multipolentwicklung nach Kugelfunktionen 21

zur Multipolentwicklung werden einige Identitäten benötigt:

$$\begin{aligned}\nabla^2(\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}) &= \mathbf{r} \cdot (\nabla^2 \mathbf{E}) + 2\nabla \cdot \mathbf{E} \\ (\Delta + k^2)\mathbf{r} \cdot \mathbf{E} &= \mathbf{r} \cdot (\nabla^2 \mathbf{E}) + 2\nabla \cdot \mathbf{E} + k^2\mathbf{r} \cdot \mathbf{E} = 0\end{aligned}$$

also erfüllen  $\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}$  und  $\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}$  die Helmholtzgleichung  $(\Delta + k^2)\mathbf{r} \cdot \mathbf{E} = 0$ , daher:

$$\begin{aligned}\mathbf{r} \cdot \mathbf{E} &= \sum_{lm} (a_{lm} h_{lm}(kr) + b_{lm} h_{lm}^*(kr)) Y_{lm}(\theta, \varphi) \\ \mathbf{r} \cdot \mathbf{B} &= \sum_{l'm'} (a_{l'm'} h_{l'm'}(kr) + b_{l'm'} h_{l'm'}^*(kr)) Y_{l'm'}(\theta, \varphi)\end{aligned}$$

andererseits ist aus Maxwellgleichungen im Vakuum bekannt:

$$\begin{aligned}\mathbf{B} &= \frac{-i}{ck} \nabla \times \mathbf{E} \\ ckr \cdot \mathbf{B} &= \frac{1}{i} \mathbf{r} \cdot \nabla \times \mathbf{E} = \frac{1}{i} (r \times \nabla) \cdot \mathbf{E} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{E} \\ ckr \cdot \mathbf{B} &= \mathbf{L} \cdot \mathbf{E}\end{aligned}$$

## Multipolentwicklung nach Kugelfunktionen 22

föhren jetzt Multipolkomponenten  $\mathbf{E}_{lm}$ ,  $\mathbf{B}_{lm}$  ein und unterteilen das Gesamtfeld in ein Feld aus:

a) reinen magnetische Multipolen:

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}_{lm}^M = 0, \mathbf{r} \cdot \mathbf{B}_{lm}^M \neq 0$$

und eines aus

b) reinen elektrischen Multipolen:

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}_{lm}^E = 0, \mathbf{r} \cdot \mathbf{E}_{lm}^E \neq 0$$

betrachten zunächst die M-Felder:

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}_{lm}^M = \frac{l(l+1)}{ck} g_{lm}(kr) Y_{lm}(\theta, \varphi)$$

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{E}_{lm}^M = l(l+1) g_{lm}(kr) Y_{lm}(\theta, \varphi)$$

aus  $L^2 Y = l(l+1) Y$  folgt

$$\mathbf{E}_{lm}^M = g_{lm}(kr) \mathbf{L} Y_{lm}(\theta, \varphi)$$

$$\mathbf{B}_{lm}^M = \frac{-i}{ck} \nabla \times \mathbf{E}_{lm}^M$$

## Multipolentwicklung nach Kugelfunktionen 23

mit einer analogen Rechnung findet man für den Fall, daß das Feld ein reines elektrisches Multipolfeld darstellt:

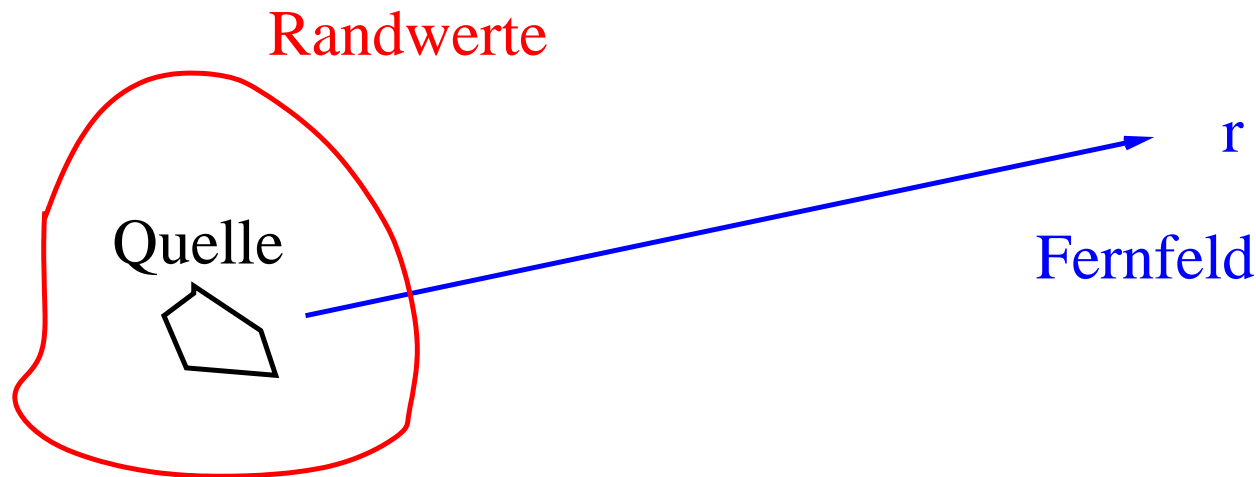
$$\begin{aligned} B_{lm}^E &= f_{lm}(kr) \mathbf{L}Y_{lm}(\theta, \varphi) \\ \mathbf{E}_{lm}^E &= \frac{i}{ck} \nabla \times \mathbf{B}_{lm}^E \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung in einer Multipolentwicklung ist die Summe aus E, M Feldern und schreibt sich daher wie folgt:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \sum_{lm} \left( \frac{i}{ck} a_{lm}^E \nabla \times f_l(kr) \mathbf{L}Y_{lm}(\theta, \varphi) + a_{lm}^M g_l(kr) \mathbf{L}Y_{lm}(\theta, \varphi) \right) \\ \mathbf{B} &= \sum_{lm} \left( \frac{-i}{ck} a_{lm}^M \nabla \times g_l(kr) \mathbf{L}Y_{lm}(\theta, \varphi) + a_{lm}^E f_l(kr) \mathbf{L}Y_{lm}(\theta, \varphi) \right) \end{aligned}$$

## 7. Randwertaufgabe für die Bestimmung eines Fernfelds

Ziel: Berechnung des Fernfelds einer Quelle aus gegebenen Randwerten  
(Darstellung in Kugelkoordinaten, Kugelfunktionen)



Fernfeld:  $kr = \frac{2\pi}{\lambda}r \gg 1$  suchen also Feld in großer Entfernung der Quelle  
(im Vergleich zur Wellenlänge der emittierten Wellen)



## Annahmen:

- Fernfeld:  $h_l^{(*)} \approx (-i)^{l+1} \frac{e^{\pm ikr}}{kr}$  (asymptotische Entwicklung)
- auswärtslaufende Wellen (Pluszeichen)
- keine Ströme, Magnetisierung, d.h. reine elektrische Multipolfelder sollten ausserhalb der Quelle vorliegen ( $a_{lm}^M = 0$ )

$$\mathbf{E} = \sum_{lm} a_{lm}^E \frac{(-i)^l}{k} \nabla \times \left( \frac{e^{ikr}}{ckr} \mathbf{L} Y_{lm} \right)$$

$$\mathbf{B} = \sum_{lm} a_{lm}^E (-i)^{l+1} \frac{e^{ikr}}{ckr} \mathbf{L} Y_{lm}$$

dabei:

$$\nabla = \left( \partial_r, \frac{1}{r} \partial_\theta, \frac{1}{r \sin \theta} \partial_\varphi \right)$$

$$i\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \nabla$$

## Nahfeld-Fernfeld Transformation 26

betrachten das E-Feld, enthält Produktregel für den  $\nabla$  Operator, in Fernfeld nur Term  $\sim k$  mitnehmen, da  $\sim \frac{1}{\lambda}$

$$\mathbf{E} \approx - \sum_{lm} a_{lm}^E \frac{(-i)^{l+1} e^{ikr}}{ck} \frac{e^{ikr}}{r} \mathbf{e}_r \times \mathbf{L} Y_{lm}$$

$$\mathbf{E} = -\mathbf{e}_r \times \mathbf{B}$$

der Abfall mit  $r$  ist typisch für ein Fernfeld, siehe Kugelwelle  
jetzt mit  $\mathbf{e}_r \times$  multiplizieren um Koeffizienten zu bestimmen:

$$\mathbf{e}_r \times \mathbf{E} = - \sum_{lm} a_{lm}^E \frac{(-i)^{l+1} e^{ikr}}{ck} \frac{e^{ikr}}{r} (\mathbf{e}_r \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{L} Y_{lm} - \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_r \mathbf{L}) Y_{lm}$$

$$\mathbf{e}_r \times \mathbf{E} = \sum_{lm} a_{lm}^E \frac{(-i)^{l+1} e^{ikr}}{ck} \frac{e^{ikr}}{r} \mathbf{L} Y_{lm}$$

$$(\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{L} = 0)$$

## Nahfeld-Fernfeld Transformation 27

jetzt mit  $\mathbf{L}$ , dann  $Y_{lm}$  multiplizieren, dann integrieren, Orthogonalität nutzen.

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{e}_r \times \mathbf{E} = \sum_{lm} a_{lm}^E (-i)^{l+1} \frac{e^{ikr}}{r} l(l+1) Y_{lm}$$

$$\int d\Omega Y_{l'm'}^* \mathbf{L} \cdot \mathbf{e}_r \times \mathbf{E} = \sum_{lm} a_{lm}^E (-i)^{l+1} \int d\Omega Y_{l'm'}^* Y_{lm} \frac{e^{ikr}}{r} l(l+1)$$

$$\int d\Omega Y_{l'm'}^* \mathbf{L} \cdot \mathbf{e}_r \times \mathbf{E} = a_{l'm'}^E (-i)^{l'+1} \frac{e^{ikr}}{r} l(l+1)$$

jetzt nutzen, daß  $\mathbf{E}$  auf dem Rand bekannt ist,

damit Koeffizienten bestimmen, Integral berechnen, damit folgt  $a_{lm}^E$ .

## Beispiel für eine Nahfeld-Fernfeld Transformation 28

konkretes Beispiel:

auf einer Kugel mit dem Radius  $R$  sei das Feld durch  $\mathbf{E} = E_0 \sin \theta \mathbf{e}_\theta$  gegeben.

wir brauchen:  $\int d\Omega Y_{l'm'}^* \mathbf{L} \cdot \mathbf{e}_r \times \mathbf{E}$

$$\mathbf{e}_r \times \mathbf{E}|_R = E_0 \sin \theta \mathbf{e}_\varphi$$

$$i\mathbf{L} \cdot \mathbf{e}_r \times \mathbf{E}|_R = (\mathbf{r} \times \nabla) \cdot (\mathbf{e}_r \times \mathbf{E})|_R = E_0 \cos \theta = E_0 \sqrt{\frac{4\pi}{3}} Y_{10}$$

durch einsetzen in die Koeffizientengleichung folgt:

$$a_{lm}^M = \frac{R}{(-i)^l e^{ikR} l(l+1)} \int d\Omega Y_{lm} E_0 \sqrt{\frac{4\pi}{3}} Y_{10}$$

$$a_{10}^M = \frac{iE_0 k R \pi}{e^{ikR} 3}$$

alle anderen  $a^M$  sind Null.

## Beispiel für eine Nahfeld-Fernfeld Transformation 29

damit ergibt sich z.B. das B-Feld zu:

$$\mathbf{B} = -iE_0 \sqrt{\frac{\pi}{3}} \frac{R}{r} e^{ik(r-R)} \mathbf{L}Y_{10} = -iE_0 \sqrt{\frac{\pi}{3}} \frac{R}{r} e^{ik(r-R)} \partial_\theta Y_{10} \mathbf{e}_\varphi$$
$$\mathbf{E} = \mathbf{B} \times \mathbf{e}_r$$

sind die gesuchten Felder im Fernfeld, damit ist das Randwertproblem gelöst. Ausbreitung als Kugelwelle in  $\mathbf{e}_r$  Richtung, Felder und Ausbreitungsrichtung stellen Dreibein dar.

kompliziertere Funktionen auf einem Rand müssen in das vollständige Funktionensystem entwickelt werden, dann erhält man ein lineares Gleichungssystem um alle Koeffizienten  $a_{lm}$  zu bestimmen, dann kann die Lösung konstruiert werden.