

НОВ БЪЛГАРСКИ УНИВЕРСИТЕТ

Департамент Информатика

**Оптимално разпределение на мандатите
на партиите за 40-то Народно събрание
по избирателни райони**

Николай Киров

9 март 2006 г.

- ЗАКОН ЗА ИЗБИРАНЕ НА НАРОДНИ ПРЕДСТАВИТЕЛИ
- Задача за разпределение на мандатите по партии
- Задача за разпределение на мандатите на партиите по райони
 - Модел 1. Транспортна задача
 - Модел 2. Минимизиране на най-малката цена на мандата
 - Модел 3. Минимална разлика между най-големи и най-малки цени на мандати
 - Модел 4. Задача за монотонност
 - Модели 5, 6, 7. Минимизиране на отклонението по l_∞ , l_1 и l_2 норми.
- Сравнителни резултати

ЗАКОН ЗА ИЗБИРАНЕ НА НАРОДНИ ПРЕДСТАВИТЕЛИ (Извадки)

Чл. 6. (2) За разпределение на мандатите между партии и коалиции се използва **методът Д'Ондт** на национално ниво.

Чл. 23. (1) **Централната избирателна комисия:**

10. (предишна т. 9, доп. - ДВ, бр. 32 от 2005 г., в сила от 12.04.2005 г.) приема и обнародва в "Държавен вестник" методика за определяне на броя на мандатите в избирателните райони и **методика за определяне на резултатите от гласуването** не по-късно от 55 дни преди изборния ден;

11. (предишна т. 10 - ДВ, бр. 32 от 2005 г., в сила от 12.04.2005 г.) определя броя на мандатите в многомандатните избирателни райони въз основа на единна норма на представителство за цялата страна в зависимост от броя на населението;

Чл. 107. (Изм. - ДВ, бр. 32 от 2005 г., в сила от 12.04.2005 г.)

(1) Общият брой спечелени мандати за всяка партия и коалиция се определя от Централната избирателна комисия въз основа на сумата на подадените за нея действителни гласове в страната и в чужбина по **метода на Д'Ондрт** според методиката по чл. 23, ал. 1, т. 10.

(3) Броят на мандатите на партии и коалиции в многомандатните избирателни райони се определя по **метода Д'Ондрт** въз основа на съотношението на гласовете за тях, подадени от страната.

Чл. 109. (Изм. - ДВ, бр. 32 от 2005 г., в сила от 12.04.2005 г.)
Разпределянето на мандатите по кандидатските листи на партиите и коалициите в многомандатните избирателни райони става съгласно методиката по чл. 23, ал. 1, т. 10.

МЕТОДИКА ЗА ОПРЕДЕЛЯНЕ НА БРОЯ НА МАНДАТИТЕ В
ИЗБИРАТЕЛНИТЕ РАЙОНИ И НА РЕЗУЛТАТИТЕ ОТ
ГЛАСУВАНЕТО
(Извадка)

Чл. 16. (1) Получените от всяка партия или коалиция мандати в национален мащаб (съгласно чл. 15, ал. 1) се разпределят по избирателни райони като се прилага метода на Д'Ондрт (приложение номер 1) към гласовете на партията или коалицията в районите, където имат регистрирани кандидатски листи.

(2) Ако има несъответствие между предварително определените мандати за районите и получените такива в резултат на разпределението по райони по ал. 1 за коалиции, партии и независими кандидати, то се извършва **преразпределение** съгласно приложение номер 2.

Задача за разпределение на мандатите по партии

Дадени са p партии ($p = 7$), които събират повече от 4% от действителните гласове на изборите за 40. Народно събрание.

Означаваме партиите с 3@, 6@, 8@, 12@, 14@, 17@ и 19@ (съгласно номерацията на ЦИК)

Нека на изборите i -тата партия е получила общо V_i действителни гласове, $i = 1, 2, \dots, p$.

Дадени са p неотрицателни числа V_i , $i = 1, 2, \dots, p$, и цяло число M , ($M = 240$). Търсим цели $n_i \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, p$, такива че

$$\sum_{i=1}^p n_i = M$$

и $\{n_i\}$ да са “пропорционални” на $\{V_i\}$.

Тук понятието “пропорционални” означава, че отношенията V_i/n_i , $i = 1, 2, \dots, p$, са максимално “близки”.

Решението по *метода на Д’Ондр* се определя от условието “минималната цена на мандата е максимална”, т.е. решение на следната оптимизационна задача:

$$\min_i \frac{V_i}{n_i} \rightarrow \max$$

при условие

$$\sum_{i=1}^p n_i = M.$$

Полученото решение за тези избори е:

No i	партия	гласове V_i	мандати n_i
1	3@	1129196	82
2	6@	725314	53
3	8@	234778	17
4	12@	189268	13
5	14@	296848	21
6	17@	467400	34
7	19@	280323	20
			240

Това е и разпределението на ЦИК на мандатите по партиите.

Решението е монотонно – за повече гласове се получават повече мандати.

$$(V_i - V_k)(n_i - n_k) \geq 0, \quad i, k = 1, 2, \dots, p$$

Задача за разпределение на мандатите на партиите по райони

Дадени са r избирателни района ($r = 31$), като за всеки район е определен предварително броят на мандатите m_j , $j = 1, 2, \dots, r$ в този район – по закон пропорционално на населението му.

Броят на мандатите в избирателните райони са:

01: 02: 03: 04: 05: 06: 07: 08: 09: 10: 11: 12: 13: 14: 15:
10 13 14 9 4 7 4 7 5 5 5 6 9 5 10

16: 17: 18: 19: 20: 21: 22: 23: 24: 25: 26: 27: 28: 29: 30: 31:
10 11 5 8 4 7 4 13 11 12 8 11 4 8 6 5

Задачата е да се разпределят получените мандати на партиите по избирателните райони, ако са известни гласовете на всяка партия във всеки район.

Нека x_{ij} са мандатите на i -тата партия в j -тия район от търсеното разпределение.

$$\sum_{j=1}^r x_{ij} = n_i, \quad i = 1, 2, \dots, p$$

$$\sum_{i=1}^p x_{ij} = m_j, \quad j = 1, 2, \dots, r$$

x_{ij} са цели неотрицателни числа.

(транспортни равенства)

Ще решаваме задачата при следните две предположения за участващите в разпределението партии:

- Всяка партия има регистрация във всички избирателни райони с достатъчно дълга партийна листа.
- Всяка партия получава поне един глас във всеки избирателен район, т.е. $v_{ij} > 0$ за всички i и j .

Получените действителни гласове образуват матрицата на вота с елементи v_{ij} – броят на гласовете на i -тата партия в j -тия район, $i = 1, 2, \dots, p$; $j = 1, 2, \dots, r$.

	01:	02:	03:	04:	05:	06:	07:	08:	09:	10:
3@	34771	56050	55942	45205	24545	38996	19817	35478	17746	27685
6@	28448	35201	60248	27521	10869	19679	16417	21457	4870	16955
8@	7376	8683	13130	7247	2594	3685	4025	4002	1064	3762
12@	7497	7468	11707	7357	2795	6515	3622	5955	540	2818
14@	6142	20679	17920	15272	2608	6808	6303	7748	2229	3065
17@	25472	28557	18916	6121	8026	1213	4041	14058	63570	978
19@	14899	12697	15427	10226	4327	6771	6459	3926	1975	4844

	11:	12:	13:	14:	15:	16:	17:	18:	19:	20:
3@	25531	30826	39100	23444	52499	42434	54575	15975	33400	23262
6@	16765	15824	23978	15455	26851	42996	33498	9549	25945	10162
8@	4538	2461	5560	3839	6470	14105	6027	1430	7050	1360
12@	3793	3138	7089	2889	8609	7678	7474	1772	7396	1805
14@	6485	4418	9163	4029	14165	12946	12314	5133	15125	4250
17@	5658	3047	14829	261	10238	11797	15331	36435	14483	27514
19@	5867	6514	12725	7058	11920	21187	15060	2290	10558	2130

	21:	22:	23:	24:	25:	26:	27:	28:	29:	30:	31:
3@	28006	18308	62206	47318	53267	40210	56809	22528	42585	26972	27581
6@	14878	9813	43311	36011	35644	20860	28980	6262	23826	16018	13591
8@	3363	4097	36536	29869	20693	5607	9435	2493	4452	2468	2324
12@	4363	5365	11129	13133	13636	5612	9848	2759	8505	2050	3472
14@	7941	2461	16992	15437	17554	11590	15325	5897	10033	10412	4837
17@	8414	9060	899	4097	954	4712	8929	28610	21156	27455	1943
19@	5745	5624	20148	15336	14911	7296	12046	2003	6535	6065	4207

Отново, както и при едномерната задача, понятието “пропорционални” не е добре определено.

Характерна особеност на двумерната задача е, че прилагането на аналози на едномерните пропорционални методи води до резултати, нарушаващи интуитивните разбираня за добро решение.

Например, решението може да е немонотонно (за някои партии или в някои райони), максималната и минималната цени на мандатите може да са много различни и т.н.

Тези проблеми са присъщи на двумерната задача – за определени начални данни (получаващи се естествено при избори) не може да имаме монотонност и достатъчно близки цени на мандатите!

Понятието “метод на Д’Ондрт” е приелото гражданственост у нас и по отношение на двумерната задача.

Разпределението на ЦИК означаваме с X_0 и то е:

	01:	02:	03:	04:	05:	06:	07:	08:	09:	10:	11:	12:	13:	14:	15:
3@	2	3	3	3	3	5	2	3	0	3	3	4	4	3	4
6@	2	2	4	2	1	2	2	2	0	2	2	2	2	2	2
8@	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
12@	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
14@	0	2	2	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1
17@	2	3	1	0	0	0	0	1	5	0	0	0	1	0	1
19@	2	1	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1

	16:	17:	18:	19:	20:	21:	22:	23:	24:	25:	26:	27:	28:	29:	30:	31:
3@	2	3	1	2	1	3	2	1	1	3	5	5	1	2	1	4
6@	2	3	0	2	0	2	1	2	2	2	2	2	0	2	1	1
8@	1	0	0	0	0	0	0	5	4	2	0	1	0	0	0	0
12@	1	1	0	1	0	0	0	1	1	1	0	1	0	1	0	0
14@	1	1	0	1	0	1	0	2	1	2	1	1	0	1	1	0
17@	1	1	4	1	3	1	1	0	0	0	0	0	3	2	3	0
19@	2	2	0	1	0	0	0	2	2	2	0	1	0	0	0	0

Накратко, методиката на ЦИК е следната:

- мандатите на всяка партия се разпределят пропорционално на получените гласове по районите по Д'Ондр
- преразпределение на мандатите по районите в рамките на една партия

Защо това разпределение не ни харесва?

Примери по райони:

Район →	23:	24:
3@	62206 1	47318 1
6@	43311 2	36011 2
8@	36536 5	29869 4

Район →	09:
3@	17746 0
17@	63570 5

Примери по партии:

Партия	6:	17:	23:
3@	38996 5	54575 3	62206 1
6@	19679 2	33498 3	43311 2

Кое е “хубаво” разпределение?

Няма най-добър критерий за това – зависи от модела.

Модел 1.

Модел, аналогичен на транспортна задача.

За повече гласове се получават повече мандати – “транспортните разходи” са обратно пропорционални на броя гласове.

Целева функция (общите “транспортни разходи”) е:

$$F_1(X) = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^r \frac{x_{ij}}{v_{ij}} \rightarrow \min$$

при транспортните ограничения:

$$\sum_{j=1}^r x_{ij} = n_i, \quad i = 1, 2, \dots, p \quad \sum_{i=1}^p x_{ij} = m_j, \quad j = 1, 2, \dots, r$$

Стойност на целевата функция $F_1(X_1) = 0.00908$.

Това решение е неприемливо, защото мандатите в един район се дават само на една или две партии.

Решението на ЦИК: $F_1(X_0) = 0.01165$.

Модел 2.

Максимизираме най-малката цена на мандата.

Цената на мандата за i -тата партия в j -тия район е $\frac{v_{ij}}{x_{ij}}$.

$$\min_{i,j} \frac{v_{ij}}{x_{ij}} \rightarrow \max$$

За да избегнем безкрайни стойности и да линеаризираме модела, вземаме реципрочна стойност на цената на мандата.

$$F_2(X) = \max_{i,j} \frac{x_{ij}}{v_{ij}} \rightarrow \min$$

Едно оптимально решение е:

	01:	02:	03:	04:	05:	06:	07:	08:	09:	10:	11:	12:	13:	14:	15:
3@	5	7	6	6	3	5	2	4	0	4	3	4	5	3	2
6@	4	0	0	1	0	2	2	3	0	1	2	2	0	1	3
8@	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
12@	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1
14@	0	2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2
17@	1	1	2	0	1	0	0	0	5	0	0	0	2	0	1
19@	0	1	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1

	16:	17:	18:	19:	20:	21:	22:	23:	24:	25:	26:	27:	28:	29:	30:	31:
3@	0	1	0	0	1	4	2	0	0	0	5	1	0	3	2	4
6@	4	4	0	3	0	1	1	3	2	5	1	4	0	3	0	1
8@	2	0	0	0	0	0	0	5	4	3	0	1	0	0	0	0
12@	1	1	0	1	0	0	0	1	1	1	0	1	0	1	0	0
14@	0	1	0	2	0	1	0	2	2	2	1	2	0	1	1	0
17@	0	2	5	1	3	1	1	0	0	0	0	1	4	0	3	0
19@	3	2	0	1	0	0	0	2	2	1	1	1	0	0	0	0

Целева функция $F_2(X_2) = 0.00014502$.

Тя се достига в (3@, 31:)

$$\max_{i,j} \frac{x_{ij}}{v_{ij}} = \frac{x_{1\ 31}}{v_{1\ 31}} = \frac{4}{27581} = 0.00014502.$$

За решението на ЦИК получаваме $F(X_0) = F(X_2)$.

Модел 3.

Минимална разлика между най-големи и най-малки цени на мандати (реципрочните стойности на цените на мандатите)

$$\max_{i,j} \frac{x_{ij}}{v_{ij}} - \min_{i,j: x_{ij} > 0} \frac{x_{ij}}{v_{ij}} \rightarrow \min,$$

По-проста целева функция, която отново реализира идеята на модела:

$$F_3(X) = \max_{i,j} \frac{x_{ij}}{v_{ij}} - \min_{i,j} \frac{x_{ij} + 1}{v_{ij}} \rightarrow \min.$$

Намереното оптимално решение X_3 е:

	01:	02:	03:	04:	05:	06:	07:	08:	09:	10:	11:	12:	13:	14:	15:
3@	2	4	4	3	2	3	2	2	1	3	3	4	2	2	3
6@	2	2	4	2	1	2	2	2	0	2	2	2	2	2	2
8@	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
12@	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1
14@	0	2	1	1	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	2
17@	2	2	1	0	1	0	0	2	4	0	0	0	2	0	1
19@	2	1	2	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1

	16:	17:	18:	19:	20:	21:	22:	23:	24:	25:	26:	27:	28:	29:	30:	31:
3@	3	4	1	2	1	3	2	4	3	3	3	4	1	3	1	4
6@	3	2	0	1	0	2	1	3	2	2	3	2	0	1	1	1
8@	2	0	0	1	0	0	0	4	3	2	0	1	0	0	0	0
12@	0	1	0	1	0	0	0	0	1	2	0	1	0	1	0	0
14@	0	1	0	2	0	1	0	1	1	1	1	2	0	1	1	0
17@	0	1	4	1	3	1	1	0	0	0	0	0	3	2	3	0
19@	2	2	0	0	0	0	0	1	1	2	1	1	0	0	0	0

Целевата функция $F_3(X_3) = 7.3538 \times 10^{-5}$.

Тази стойност се достига за (19@, 06:)

$$\max_{i,j} \frac{x_{ij}}{v_{ij}} = \frac{x_{76}}{v_{76}} = \frac{1}{6771} = 14.7689 \times 10^{-5}$$

и (3@, 30:)

$$\min_{i,j} \frac{x_{ij} + 1}{v_{ij}} = \frac{x_{130} + 1}{v_{130}} = \frac{2}{26972} = 7.4151 \times 10^{-5}.$$

$$F_3(X_0) \approx 11.2 \times 10^{-5}$$

Модел 4.

Задача за монотонност едновременно по партии и по райони.

Когато една партия е получила повече гласове в един район в сравнение с друг, тя получава и не по-малко мандати в първия район в сравнение с втория.

Ако за i -тата партия в j -тия и k -тия райони е в сила $v_{ij} > v_{ik}$, тогава е изпълнено $x_{ij} \geq x_{ik}$

Когато една партия е получила повече гласове от друга партия в даден район, тя получава не по-малко мандати в този район.

Ако в j -тия район за i -тата и k -тата партии е изпълнено $v_{ij} > v_{kj}$, то сила е и $x_{ij} \geq x_{kj}$.

$$\mu_{ijk} = (x_{ij} - x_{ik}) \operatorname{sign}(v_{ij} - v_{ik}) \geq 0, \quad i = 1, \dots, p, \quad j = 1, \dots, r, \quad k = 1, \dots, j;$$

$$\nu_{ijk} = (x_{ij} - x_{kj}) \operatorname{sign}(v_{ij} - v_{kj}) \geq 0, \quad i = 1, \dots, p, \quad j = 1, \dots, r, \quad k = 1, \dots, i.$$

Областта, определена от тези неравенствата и транспортните равенства е празна.

Модификация – ако разликата в гласовете на две партии в даден район е по-малко от 1000, считаме, че тези две партии са получили равен брой гласове – допустимата област на новата задачата е отново празна.

Релаксирана задача:

$$F'_4(X) = z \rightarrow \min$$

при условия транспортните равенства и

$$\mu_{ijk} + z \geq 0, \quad i = 1, \dots, p, \quad j = 1, \dots, r, \quad k = 1, \dots, j;$$

$$\nu_{ijk} + z \geq 0, \quad i = 1, \dots, p, \quad j = 1, \dots, r, \quad k = 1, \dots, i.$$

Тази задача има решение с оптимална стойност $z = 1$.

Това означава, че ако $v_{ij} > v_{ik}$, то $x_{ij} \geq x_{ik} - 1$.

Минимизираме броя на немонотонностите.

Немонотонност в район j наричаме двойка партии (i_1, i_2) , за които $v_{i_1j} > v_{i_2j}$ и $x_{i_1j} < x_{i_2j}$.

Аналогично се дефинира и немонотонност в партия.

$$\mu_{ijk} + My_{ijk} \geq 0, \quad i = 1, \dots, p, \quad j = 1, \dots, r, \quad k = 1, \dots, j - 1;$$

$$\nu_{ijk} + Mz_{ijk} \geq 0, \quad i = 1, \dots, p, \quad j = 1, \dots, r, \quad k = 1, \dots, i - 1,$$

$$y_{ijk}, z_{ijk} \in \{0, 1\}, \quad M > 0$$

Когато двоична променлива y_{ijk} или z_{ijk} има стойност 0, тогава удовлетворяването на съответното неравенство показва монотонност, а при стойност 1 – немонотонност.

Целевата функция е броят на немонотонностите:

$$F_4''(X) = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^{j-1} y_{ijk} + \sum_{j=1}^r \sum_{i=1}^p \sum_{k=1}^{i-1} z_{ijk} \rightarrow \min$$

Получено е решение X_4'' при $M = 1$ и $F_4''(X_4'') = 24$.

	01:	02:	03:	04:	05:	06:	07:	08:	09:	10:	11:	12:	13:	14:	15:
3@	3	4	3	3	2	3	2	3	0	3	2	3	3	2	3
6@	2	2	4	2	1	2	2	2	0	2	2	2	2	2	2
8@	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1
12@	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
14@	0	2	1	1	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	1
17@	2	2	2	0	1	0	0	1	5	0	0	0	1	0	1
19@	1	1	2	1	0	1	0	0	0	0	0	1	1	1	1

	16:	17:	18:	19:	20:	21:	22:	23:	24:	25:	26:	27:	28:	29:	30:	31:
3@	3	3	0	3	2	3	2	4	3	3	3	4	2	3	2	3
6@	2	2	0	2	0	2	1	2	2	2	2	2	0	2	1	2
8@	1	1	0	0	0	0	0	3	2	2	1	1	0	0	0	0
12@	1	1	0	0	0	0	0	1	1	2	0	1	0	1	0	0
14@	1	1	0	1	0	1	0	1	1	2	1	1	0	1	1	0
17@	1	2	5	1	2	1	1	0	0	0	0	1	2	1	2	0
19@	1	1	0	1	0	0	0	2	2	1	1	1	0	0	0	0

Решението на задачата при $M = 1$ с непрекъснати променливи

$$y_{ijk}, z_{ijk} \in [0, 1]$$

е целочислено (различно от X_4'') със същата стойност 24 на целевата функция.

Моделът за $M = 1$ беше решен с двете програми GLPK и CPLEX.

И двата пакета не можаха да решат същия модел за $M = 10$.

Модел 5.

Минимизираме отклонението от средното за всеки район и за всяка партия.

Например, ако една партия е получила $\frac{1}{k}$ част от гласовете в даден район, то тази партия би трябвало да получи приблизително $\frac{1}{k}$ част от определените мандати за този район, т.е. $\frac{v_{ij}}{w_j} \approx \frac{x_{ij}}{m_j}$, където w_j е сумата от гласовете на участващите в разпределението партии в този район.

$$w_j = \sum_{i=1}^p v_{ij}, \quad j = 1, 2, \dots, r.$$

Аналогично се реализира тази идея и за разпределението на мандатите на една партия по райони – искаме $\frac{v_{ij}}{v_i} \approx \frac{x_{ij}}{n_i}$, където v_i е сумата

от гласовете на партия i във всички райони.

$$v_i = \sum_{j=1}^r v_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, p.$$

Прецизирането на понятието близост ни води към използване на класическа l_p норма (l_s норма).

$$\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^r \left| \frac{v_{ij}}{v_i} - \frac{x_{ij}}{n_i} \right|^s + \sum_{j=1}^r \sum_{i=1}^p \left| \frac{v_{ij}}{w_j} - \frac{x_{ij}}{m_j} \right|^s \rightarrow \min$$

Най-напред да формулираме задачата с равномерна (l_∞) норма:

$$F_5(X) = \max_{i,j} \left| \frac{v_{ij}}{v_i} - \frac{x_{ij}}{n_i} \right| + \max_{i,j} \left| \frac{v_{ij}}{w_j} - \frac{x_{ij}}{m_j} \right| \rightarrow \min$$

Решението X_5 е:

	01:	02:	03:	04:	05:	06:	07:	08:	09:	10:	11:	12:	13:	14:	15:	
3@	2	6	6	2	2	3	1	2	1	3	2	3	2	2	5	
6@	2	2	3	2	1	1	1	2	0	1	1	1	3	1	1	
8@	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	
12@	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	
14@	0	1	1	1	0	1	1	0	0	0	1	1	0	1	1	
17@	3	1	1	1	1	1	0	2	4	0	1	1	2	0	0	
19@	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	0	0	1	1	1	
	16:	17:	18:	19:	20:	21:	22:	23:	24:	25:	26:	27:	28:	29:	30:	31:
3@	2	5	1	2	1	3	1	5	2	6	3	3	1	2	1	2
6@	4	2	1	1	1	2	1	2	4	1	3	3	1	2	2	1
8@	1	0	0	1	0	0	0	3	2	2	1	1	0	0	0	0
12@	1	1	0	1	0	0	0	1	1	1	0	1	0	1	0	0
14@	1	1	0	1	0	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1
17@	0	1	3	1	2	1	1	0	0	0	0	1	2	2	2	0
19@	1	1	0	1	0	0	1	1	1	1	0	1	0	0	0	1

Стойност на целевата функция

$$F_5(X_5) = 0.16124 + 0.03775 = 0.19899$$

при (12@, 13:) и (6@, 28:).

За решението на ЦИК получаваме

$$F_5(X_0) = 0.13509 + 0.35964 = 0.49473$$

при (8@, 23:) и (17@, 20:).

Модел 6.

Минимизираме отклонението от средното за всеки район и за всяка партия.

За да получим лесно решими задачи с l_s норма за $1 \leq s < \infty$, предлагаме една подходяща линеаризация на тези задачи.

За всяка двойка (i, j) , $i = 1, \dots, p$, $j = 1, \dots, r$ полагаме:

$$x_{ij} = x_{ij1} + 2x_{ij2} + \dots + qx_{ijq} = \sum_{k=1}^q kx_{ijk},$$

$$\left| \frac{v_{ij}}{v_i} - \frac{k}{n_i} \right|^s = f_{ijk}^{(1)}, \quad \left| \frac{v_{ij}}{w_j} - \frac{k}{m_j} \right|^s = f_{ijk}^{(2)}, \quad k = 0, 1, \dots, q.$$

Целевата функция е:

$$F(X) = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^r \sum_{k=0}^q \left(f_{ijk}^{(1)} + f_{ijk}^{(2)} \right) x_{ijk}.$$

Търсим

$$\min F(X)$$

при преобразуваните транспортни равенства:

$$\sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^q kx_{ijk} = n_i, \quad i = 1, 2, \dots, p,$$

$$\sum_{i=1}^p \sum_{k=1}^q kx_{ijk} = m_j, \quad j = 1, 2, \dots, r$$

и

$$\sum_{k=0}^q x_{ijk} = 1, \quad i = 1, 2, \dots, p, \quad j = 1, 2, \dots, r,$$

$$x_{ijk} \in \{0, 1\}, \quad \text{за всяко } i, j, k.$$

Размерите на задачата за $p = 7$, $r = 31$, $q = 6$ са:

– брой неизвестни: $pr(q + 1) = 1519$;

– брой събираеми в целевата функция: $pr(q + 1) = 1519$;

– брой ограничения: $p + r = 38$ от първия вид и $pr = 217$ от втория вид.

Най-напред ще използваме l_1 норма.

$$F_6(X) = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^r \left| \frac{v_{ij}}{v_i} - \frac{x_{ij}}{n_i} \right| + \sum_{j=1}^r \sum_{i=1}^p \left| \frac{v_{ij}}{w_j} - \frac{x_{ij}}{m_j} \right| \rightarrow \min$$

Прилагаме описаната техника за този модел и решаваме получената задача.

Оптималната стойност на целевата функция е $F_6(X_6) = 12.2766$ за следното решение:

	01:	02:	03:	04:	05:	06:	07:	08:	09:	10:	11:	12:	13:	14:	15:
3@	3	4	4	3	2	3	1	3	1	2	2	3	3	2	4
6@	2	3	4	2	1	2	1	2	0	2	1	1	2	1	2
8@	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
12@	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	1
14@	0	1	1	1	0	1	1	1	0	0	1	0	1	0	1
17@	2	2	2	0	1	0	0	1	4	0	1	1	1	0	1
19@	1	1	1	1	0	0	1	0	0	1	0	1	1	1	1

	16:	17:	18:	19:	20:	21:	22:	23:	24:	25:	26:	27:	28:	29:	30:	31:
3@	3	4	1	2	1	3	1	4	3	4	3	4	1	3	2	3
6@	3	2	1	2	1	1	1	3	2	3	2	2	1	1	1	1
8@	1	1	0	1	0	0	0	3	2	2	1	1	0	0	0	0
12@	0	1	0	0	0	0	0	1	1	1	0	1	0	1	0	0
14@	1	1	0	1	0	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1
17@	1	1	3	1	2	1	1	0	1	0	0	1	2	2	2	0
19@	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0

Модел 7.

Най-използваният модел за отклонение от средното е минимизация с l_2 норма (най-малки квадрати).

$$F_7(X) = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^r \left(\frac{v_{ij}}{v_i} - \frac{x_{ij}}{n_i} \right)^2 + \sum_{j=1}^r \sum_{i=1}^p \left(\frac{v_{ij}}{w_j} - \frac{x_{ij}}{m_j} \right)^2 \rightarrow \min$$

Въпреки, че CPLEX решава квадратични задачи с линейни ограничения, опитът за директно решаване на модела не доведе до успех.

След линеаризиране на задачата по описания по-горе начин и решаването на получената линейна целочислена задача, намираме стойност на целевата функция $F_7(X_7) = 0.702059$ за следното разпределение:

	01:	02:	03:	04:	05:	06:	07:	08:	09:	10:	11:	12:	13:	14:	15:
3@	3	4	4	3	2	3	1	3	1	2	2	3	3	2	4
6@	2	2	4	2	1	2	1	2	0	2	1	2	2	1	2
8@	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
12@	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	1
14@	0	1	1	1	0	1	1	1	0	0	1	0	1	0	1
17@	2	3	2	0	1	0	0	1	4	0	1	0	1	0	1
19@	1	1	1	1	0	0	1	0	0	1	0	1	1	1	1

	16:	17:	18:	19:	20:	21:	22:	23:	24:	25:	26:	27:	28:	29:	30:	31:
3@	3	4	1	2	1	3	1	4	3	4	3	4	1	3	2	3
6@	3	2	1	2	1	1	1	3	2	3	2	2	1	1	1	1
8@	1	1	0	1	0	0	0	3	2	2	1	1	0	0	0	0
12@	0	1	0	0	0	0	0	1	1	1	0	1	0	1	0	0
14@	1	1	0	1	0	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1
17@	1	1	3	1	2	1	1	0	1	0	0	1	2	2	2	0
19@	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0

Това решение е единствено!

За да докажем това твърдение, към ограниченията на задачата добавяме още едно:

$$\sum_{i,j,k:x_{ijk}^{(0)}=1} x_{ijk} \leq pr - 1,$$

където $\{x_{ijk}^{(0)}\}$ е намереното решение на линеаризираната задача. Тъй като очевидно

$$\sum_{i,j,k:x_{ijk}^{(0)}=1} x_{ijk}^{(0)} = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^r \sum_{k=0}^q x_{ijk}^{(0)} = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^r 1 = pr,$$

то решението на новата задача ще бъде друго. За стойност на целевата функция за новото решение получаваме

$$0.703095 > F_7(X_7) = 0.702059.$$

Защо полученото от този модел разпределение е по-добро?

Примери по райони:

Район →	23:	24:
3@	62206 4	47318 3
6@	43311 3	36011 2
8@	36536 3	29869 2

Район →	09:
3@	17746 1
17@	63570 4

Примери по партии:

Партия	6:	17:	23:
3@	38996 3	54575 4	62206 4
6@	19679 2	33498 2	43311 3

Сравнителни резултати

Таблица със стойностите на целевите функции за получените от моделите решения, за решението на ЦИК и предложеното от И. Божинов.

	F_1 $\times 10^{-2}$	F_2 $\times 10^{-4}$	F_3 $\times 10^{-4}$	F_4''	F_5	F_6 $\times 10$	F_7
X_1	0.908	8.80	8.64	246	1.7634	4.987	18.39
X_2	1.151	1.45	1.29	352	0.7296	2.627	4.173
X_3	1.216	1.48	0.74	153	0.4409	1.691	1.585
X_4'	2.421	3.83	3.70	378	0.5982	2.029	2.197
X_4''	1.128	1.79	1.25	24	0.5793	1.511	1.359
X_5	1.520	8.24	7.68	214	0.1990	1.617	1.183
X_6	1.426	3.28	2.49	61	0.2035	1.228	0.705
X_7	1.400	2.60	1.82	61	0.2035	1.231	0.702
X_0	1.166	1.45	1.12	148	0.4947	1.836	2.043
IB	1.435	5.32	4.53	178	0.4458	1.459	1.200

Благодаря за вниманието.