MÉMOIRE

Sur les équations du mouvement relatif des systèmes de corps;

PAR G. CORIOLIS.

Dans un Mémoire qui fait partie du XXI^{e} Cahier du *Journal de l'École Polytechnique*, j'ai montré que pour appliquer le principe des forces vives aux mouvemens relatifs des systèmes entraînés avec des plans coordonnés ayant un mouvement quelconque dans l'espace, il suffisait d'ajouter aux forces données d'autres forces opposées à celles qui sont capables de forcer les points matériels à rester invariablement liés aux plans mobiles auxquels on rapporte les mouvemens relatifs.

J'ai fait remarquer dans ce Mémoire que la proposition qui en est l'objet, ne peut s'appliquer en général à d'autres équations du mouvement que celles des forces vives; mais je n'avais pas examiné alors s'il y a des circonstances où la marche qu'elle fournit peut s'appliquer à certaines équations du mouvement; et si, dans le sens où elle ne s'applique pas, on peut donner une expression simple des nouveaux termes de correction.

C'est la question dont je me suis occupé dans le Mémoire que je présente aujourd'hui. J'y donne cette proposition générale, savoir : que pour établir une équation quelconque de mouvement relatif d'un système de corps ou d'une machine quelconque, il suffit d'ajouter aux forces existantes deux espèces de forces supplémentaires; les premières sont toujours celles auxquelles il faut avoir égard pour l'équation des forces vives, c'est-à-dire que ce sont des forces opposées à celles qui sont capables de maintenir les points matériels invariablement liés aux plans mobiles : les secondes sont dirigées perpendiculairement aux vitesses relatives et à l'axe de rotation des plans mobiles; elles sont égales au double du produit de la vitesse angulaire des plans mobiles multipliée par la quantité de mouvement relatif projetée sur un plan perpendiculaire à cet axe.

Ces dernières forces ont la plus grande analogie avec les forces centrifuges ordinaires.

Pour mettre en évidence cette analogie, il suffit de remarquer que la force centrifuge est égale à la quantité de mouvement multipliée par la vitesse angulaire de la tangente à la courbe décrite, et qu'elle est dirigée perpendiculairement à la vitesse et dans le plan osculateur, c'est-à-dire perpendiculairement aussi à l'axe de rotation de la tangente. Ainsi, pour passer de ces forces centrifuges ordinaires aux secondes forces dont les doubles entrent dans l'énoncé précédent; on n'a qu'à remplacer la vitesse angulaire de la tangente par celle des plans mobiles, et substituer à la direction de l'axe de rotation de cette tangente, la direction de l'axe de rotation de ces mêmes plans mobiles. En d'autres termes, il suffit de substituer à tout ce qui se rapporte en grandeur et en direction à la rotation de la tangente, ce qui se rapporte à celle des plans mobiles, et de prendre le double des forces ainsi obtenues.

C'est à cause de cette analogie que j'ai cru devoir donner à ces nouvelles forces la dénomination de *forces centrifuges composées :* elles participent en effet du mouvement relatif par la quantité de mouvement, et du mouvement des plans mobiles par l'emploi de leur axe de rotation et de leur vitesse angulaire.

On dira donc que pour poser une équation de mouvement relatif, qui n'est pas celle des forces vives, il faut introduire de plus que pour cette équation, les double *des forces centrifuges composées.*

Les directions de ces secondes forces supplémentaires étant perpendiculaires aux vitesses relatives, on voit de suite qu'elles disparaissent dans l'équation des forces vives pour le mouvement relatif, puisqu'on n'emploie dans cette dernière que les composantes des forces dans le sens des vitesses relatives.

C'est dans cette disparition de ces *forces centrifuges composées* que

$$(A)\quad \begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= 2\left(rm\frac{dy}{dt} - qm\frac{dz}{dt}\right) + X - X_e + \lambda\frac{dL}{dx} + \text{etc.},\\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= 2\left(pm\frac{dz}{dt} - rm\frac{dx}{dt}\right) + Y - Y_e + \lambda\frac{dL}{dy} + \text{etc.},\\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= 2\left(qm\frac{dx}{dt} - pm\frac{dy}{dt}\right) + Z - Z_e + \lambda\frac{dL}{dz} + \text{etc.} \end{aligned}$$

Nous voyons ici, dans l'expression des forces qu'on doit considérer dans les mouvemens relatifs, deux termes supplémentaires; les uns sont exprimés par $-X_e$, $-Y_e$, $-Z_e$, et sont des forces opposées à celles qui seraient capables d'obliger les points mobiles à rester invariablement liés aux plans coordonnés mobiles; les autres sont exprimés par

$$\begin{aligned} &2\left(rm\frac{dy}{dt} - qm\frac{dz}{dt}\right),\\ &2\left(pm\frac{dz}{dt} - rm\frac{dx}{dt}\right),\\ &2\left(qm\frac{dx}{dt} - pm\frac{dy}{dt}\right). \end{aligned}$$

Remarquons que si x, y, z, x', y', z', sont les projections de deux longueurs r et r'; le parallélogramme construit sur r et r', et dont l'expression est $rr'\sin(rr')$, a pour projections sur les plans coordonnés

$$\begin{aligned} &(xz' - zx'),\\ &(xy' - yz'),\\ &(yx' - xy'). \end{aligned}$$

Les expressions ci-dessus peuvent être aussi les projections sur les axes coordonnés d'une longueur égale à $rr'\sin(rr')$, laquelle sera portée perpendiculairement au plan des deux droites r et r' et sera située du même côté, par rapport au sens qui va de r vers r', que l'axe des z l'est par rapport au sens qui va de y vers x.

D'après cette remarque, les expressions ci-dessus en p, q, r, dx, dy, dz, seront les doubles des composantes suivant les axes d'une force dirigée perpendiculairement au plan de l'axe de rotation et de la vitesse relative; laquelle force aura pour grandeur le produit de la vitesse angulaire $\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}$, multipliée par la projection ou la composante, dans un plan perpendiculaire à l'axe de rotation, de la quantité de mouvement due à la vitesse relative du point matériel. Le sens dans lequel cette force devra être portée, par rapport à un mouvement se dirigeant de l'axe de rotation vers la vitesse relative, sera le même que celui de l'axe de rotation par rapport à la vitesse de rotation.

L'introduction des termes ci-dessus revient donc à celle d'une nouvelle force, qui a une analogie complète avec la force centrifuge ordinaire.

En effet, en désignant par ω la vitesse angulaire avec laquelle tourne la tangente à la courbe décrite par un point matériel dont la masse est m, par v la vitesse; la force centrifuge ordinaire peut se mettre sous la forme

$$\omega m v,$$

c'est-à-dire qu'elle est le produit de cette vitesse angulaire multipliée par la quantité de mouvement du point matériel; de plus, sa direction est à la fois perpendiculaire à la vitesse v et à l'axe de rotation de la tangente, puisqu'elle est dans le plan osculateur qui est celui dans lequel tourne la tangente.

On voit donc que, pour passer des forces centrifuges ordinaires aux secondes forces dont les doubles entrent dans les équations du mouvement relatif, il suffit de substituer en même temps, à l'axe de rotation de la tangente, à la vitesse angulaire, et à la quantité de mouvement du point mobile; l'axe de rotation des plans mobiles, la vitesse angulaire de ces plans, et la quantité de mouvement projeté sur un plan perpendiculaire à cet axe.

Ces secondes forces centrifuges, résultant de l'emploi simultané des mouvemens relatifs et des mouvemens des plans mobiles, on peut les nommer *forces centrifuges composées*. On arrive ainsi à cette proposition, que *les expressions des forces à ajouter aux forces données pour avoir les expressions des forces dans les mouvemens relatifs* *sont*, 1°. *celles qui sont opposées aux forces capables de produire sur chaque point le mouvement qu'il aurait s'il était lié aux plans mobiles*, 2°. *les doubles des forces centrifuges composées.*

On voit de suite que ces secondes forces disparaissent dans l'équation des forces vives comme les forces centrifuges ordinaires, puisqu'elles sont dirigées perpendiculairement aux vitesses relatives, et qu'on n'obtient l'équation des forces vives qu'en projetant les forces relatives sur la direction des vitesses relatives elles-mêmes.

Elles disparaissent aussi lorsque les mouvemens relatifs doivent se faire dans des plans parallèles à l'axe de rotation des plans mobiles, puisque les équations du mouvement dans ces plans ne contiendront pas des forces qui, étant perpendiculaires à l'axe de rotation, le seront aussi aux plans dans lesquels les mouvemens s'opèrent.

On peut encore, si l'on veut, donner un autre énoncé des termes de correction dus à ces forces centrifuges composées, lorsqu'on les considère, non plus isolément dans l'expression de chaque force, mais dans une équation quelconque du mouvement obtenue en choisissant un système de vitesses virtuelles relatives.

En appelant δx, δy, δz, etc., les composantes des vitesses virtuelles prises dans le mouvement relatif, c'est-à-dire des vitesses compatibles avec les liaisons relatives exprimées par $\mathrm{L}=0$, etc., on aura, en indiquant par Σ une somme s'étendant à tous les points qui entrent dans l'équation $\mathrm{L}=0$,

$$\Sigma\left(\frac{d\mathrm{L}}{dx}\,\delta x+\frac{d\mathrm{L}}{dy}\,\delta y+\frac{d\mathrm{L}}{dz}\,\delta z\right)=0.$$

En multipliant chacune des équations (A) par la vitesse virtuelle correspondante et les ajoutant toutes ensemble, les termes en $\frac{d\mathrm{L}}{dx}$, $\frac{d\mathrm{L}}{dy}$, $\frac{d\mathrm{L}}{dz}$, etc., s'en iront, c'est-à-dire que ces forces qui proviennent des liaisons s'élimineront, et il viendra

$$
(B)\quad
\begin{aligned}
&\Sigma m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\delta x+\frac{d^2y}{dt^2}\delta y+\frac{d^2z}{dt^2}\delta z\right)+2p\Sigma m\left(\frac{dy\delta z-dz\delta y}{dt}\right)\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +2q\Sigma m\left(\frac{dz\delta x-dx\delta z}{dt}\right)\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +2r\Sigma m\left(\frac{dx\delta y-dy\delta x}{dt}\right)\\
&=\Sigma(X\delta x+Y\delta y+Z\delta z)-\Sigma(X_e\delta x+Y_e\delta y+Z_e\delta z).
\end{aligned}
$$

Telle est la formule générale qui donnera toutes les équations se rapportant aux mouvemens relatifs.

Ces équations, au lieu d'être à deux termes comme pour les mouvemens absolus, contiennent toujours quatre espèces de termes qui dépendent 1°. des différentielles secondes; 2°. des différentielles premières; 3°. des variables elles-mêmes; 4°. de termes qui dépendent des forces données, lesquelles, suivant les cas, dépendront des coordonnées ou de leurs différentielles premières.

On voit qu'il y a deux espèces de termes supplémentaires; les uns sont dus aux forces X_e, Y_e, Z_e, qui dépendent ainsi des coordonnées x, y, z, qui sont les inconnues du problème; les autres qui dépendent des différentielles dx, dy, dz de ces inconnues.

Remarquons que le facteur

$$m(dy\delta z - dz\delta y)$$

n'est autre chose que l'aire du parallélogramme construit sur la projection de la vitesse effective et de la vitesse virtuelle sur le plan des yz; ainsi

$$\Sigma m(dy\delta z - dv\delta y)$$

sera la somme algébrique de toutes les aires semblables pour tous les points du système.

Chacune de ces aires, dans l'espace, peut s'exprimer par........ $mds\delta s \sin(\widehat{ds\delta s})$. En représentant par λ, μ, ν, les angles que la perpendiculaire à son plan fait avec les axes coordonnés, on aura

$$\Sigma m\left(\frac{dy}{dt}\delta z - \frac{dz}{dt}\delta y\right) = \Sigma m \frac{ds}{dt}\delta s \sin(\widehat{ds\delta s}) \cos\lambda,$$
$$\Sigma m\left(\frac{dz}{dt}\delta x - \frac{dx}{dt}\delta z\right) = \Sigma m \frac{ds}{dt}\delta s \sin(\widehat{ds\delta s}) \cos\mu,$$
$$\Sigma m\left(\frac{dx}{dt}\delta y - \frac{dy}{dt}\delta x\right) = \Sigma m \frac{ds}{dt}\delta s \sin(\widehat{ds\delta s}) \cos\nu.$$

Représentons par α, β, γ, les angles que l'axe instantané de rotation des plans mobiles fait avec ces axes, et par ω leur vitesse angulaire de rotation autour de cet axe; on aura

$$p = \omega \cos\alpha,$$
$$q = \omega \cos\beta,$$
$$r = \omega \cos\gamma.$$

La somme des termes en question dans l'équation (B), devient ainsi égale à

$$2\omega\Sigma m \frac{ds}{dt}\delta s \sin(\widehat{ds\delta s})(\cos\alpha\cos\lambda + \cos\beta\cos\mu + \cos\gamma\cos\nu).$$

On voit que c'est la somme des projections des aires $m\frac{ds}{dt}\delta s \sin(\widehat{ds\delta s})$ sur un plan perpendiculaire à l'axe de rotation. Ainsi l'on peut dire que, *pour avoir une équation du mouvement relatif, il faut ajouter aux termes ordinairement existans pour le mouvement absolu, d'abord celui qui provient des forces qui sont capables de forcer les points à rester invariablement liés aux plans mobiles, et en outre un terme qui est égal à deux fois la vitesse angulaire de rotation des axes mobiles multipliée par la somme des projections sur un plan perpendiculaire à l'axe de rotation de ces plans, de toutes les aires des parallélogrammes compris entre les quantités de mouvement effectives et les vitesses virtuelles.*

Dans le cas de l'équation des forces vives, chaque aire est nulle, puisque la vitesse virtuelle coïncide avec la vitesse effective; la somme de ces aires l'est donc aussi, et le dernier terme de correction disparaît. Cette remarque forme précisément le théorème que j'ai donné sur le principe des forces vives dans les mouvemens relatifs.

Il y a un autre cas assez général où ces aires disparaissent aussi, c'est celui où les mouvemens relatifs et virtuels se font pour chaque point dans un plan parallèle à l'axe de rotation des plans mobiles. Il est clair, en effet, que les aires comprises entre ces deux vitesses deviennent nulles en projection sur un plan perpendiculaire à l'axe de rotation. Ainsi, dans ce cas, toutes les équations du mouvement, par exemple, celles du centre de gravité et des aires ont lieu pour le mouvement relatif, en ajoutant seulement les forces $-X_e$, $-Y_e$, $-Z_e$.

Lorsqu'on veut avoir des équations qui, pour ce mouvement relatif, se rapportent au centre de gravité, c'est-à-dire qui résultent de vitesses virtuelles égales et parallèles à l'un des axes mobiles, il suffit d'ajouter ensemble toutes les équations (A) qui se rapportent à une même coordonnée.

En représentant par ξ, η et ζ, les coordonnées du centre de gravité, par rapport aux axes mobiles, et posant $\Sigma m = M$, on a

$$\Sigma m \frac{d^2x}{dt^2} = M \frac{d^2\zeta}{dt^2}$$

et

$$\Sigma m \frac{dx}{dt} = M \frac{d^2\zeta}{dt};$$

ce qui donne pour les sommes en question, où les forces $\lambda \frac{dZ}{dx}$, etc., disparaissent toujours,

$$(C) \quad \begin{aligned} M\frac{d^2\xi}{dt^2} + 2M\left(q\frac{d\zeta}{dt} - r\frac{d\eta}{dt}\right) &= \Sigma X - \Sigma X_e, \\ M\frac{d^2\eta}{dt^2} + 2M\left(r\frac{d\xi}{dt} - p\frac{d\zeta}{dt}\right) &= \Sigma Y - \Sigma Y_e, \\ M\frac{d^2\zeta}{dt^2} + 2M\left(p\frac{d\eta}{dt} - q\frac{d\xi}{dt}\right) &= \Sigma Z - \Sigma Z_e. \end{aligned}$$

Si, dans le mouvement relatif, le centre de gravité du système reste sur une droite parallèle à l'axe de rotation des plans mobiles, on a

$$\frac{d\xi}{p} = \frac{d\eta}{q} = \frac{d\zeta}{r},$$

ou bien

$$q\frac{d\zeta}{dt} - r\frac{d\eta}{dt} = 0,$$

$$r\frac{d\xi}{dt} - p\frac{d\zeta}{dt} = 0,$$

$$p\frac{d\eta}{dt} - q\frac{d\xi}{dt} = 0.$$

Ainsi les équations ci-dessus n'ont plus de second terme, et se réduisent à

$$\mathrm{M}\frac{d^2\xi}{dt^2} = \Sigma\mathrm{X} - \Sigma\mathrm{X}_e,$$

$$\mathrm{M}\frac{d^2\eta}{dt^2} = \Sigma\mathrm{Y} - \Sigma\mathrm{Y}_e,$$

$$\mathrm{M}\frac{d^2\zeta}{dt^2} = \Sigma\mathrm{Z} - \Sigma\mathrm{Z}_e.$$

Une seule de ces trois peut subsister de la même manière sans le second terme de correction, si la direction de la coordonnée relative, qui entre dans la différentielle du deuxième ordre, se trouve perpendiculaire à la fois à l'axe de rotation et à la vitesse du centre de gravité. Car alors, si c'est la coordonnée ξ, par exemple, on a

$$\frac{d\eta}{q} = \frac{d\zeta}{r}.$$

Ainsi quand deux axes seulement des coordonnées relatives sont mobiles, et que le troisième, celui des ξ, par exemple, reste parallèle à l'axe de rotation auquel se rapportent les quantités p, q, r, comme on a alors $q = 0$, $r = 0$, on aura l'équation

$$\mathrm{M}\frac{d^2\xi}{dt^2} = \Sigma\mathrm{X} - \Sigma\mathrm{X}_e.$$

Enfin, si le centre de gravité se meut sur une ligne donnée par rapport au plan mobile; en la prenant pour axe des ζ, on aura $\frac{d\eta}{dt} = 0$, $\frac{d\xi}{dt} = 0$, et par suite,

$$M \frac{d^2\xi}{dt^2} = \Sigma X - \Sigma X_e.$$

Si maintenant nous voulons examiner ce que deviennent les équations des aires, il faudra, dans l'équation (B), prendre des vitesses virtuelles de rotation autour d'un des axes des coordonnées, par exemple, poser

$$\delta z = 0, \quad x\delta x + y\delta y = 0,$$

ou

$$\delta z = 0, \quad \frac{\delta x}{y} = \frac{\delta y}{-x}.$$

On obtiendra ainsi

$$\begin{aligned} &\Sigma m \left(y \frac{d^2x}{dt^2} - x\frac{d^2y}{dt^2}\right) - 2r\Sigma m\,(xdx + ydy) \\ &+ \Sigma m\,(px + qy)dz = \Sigma(Xy - Xx) - \Sigma(X_e y - Y_e x). \end{aligned}$$

Cette équation, ainsi que les deux autres semblables qu'on obtiendrait pour les vitesses virtuelles de rotation autour des autres axes de coordonnées, ne se simplifient pas en général.

Si l'axe de rotation des plans mobiles a une direction constante dans l'espace, auquel cas on sait qu'il en est ainsi par rapport aux axes mobiles; on pourra le prendre pour axe des z, et l'on aura

$$p = 0, \quad q = 0.$$

L'équation ci-dessus devient alors

$$\begin{aligned} &\Sigma m \left(\frac{yd^2x - xd^2y}{dt^2}\right) - 2r\Sigma m\,(xdx + ydy) \\ &= \Sigma(Xy - Yx) - \Sigma(X_e y - Y_e x). \end{aligned}$$

Ainsi cette relation est toujours au nombre des équations du mouvement relatif quand l'axe de rotation du mouvement qui entraîne les plans mobiles a une direction constante dans l'espace. Si les points mobiles, dans leur mouvement relatif, ne changent pas de distance par rapport à l'axe autour duquel on prend les aires; c'est-à-dire à partir duquel on compte ici les coordonnées x et y; le terme de correction $2r\Sigma m(xdx + ydy)$ disparaît dans l'équation ci-dessus.

Si les forces XY sont dirigées vers l'origine des coordonnées, elles disparaissent de cette équation. Il en sera de même des forces X_e, Y_e, si l'axe de rotation conserve une direction constante qu'on prenne pour axe des z, et si la vitesse angulaire de rotation des plans mobiles est uniforme, c'est-à-dire si r est constant et égal à ω; on aura donc

$$\Sigma m\left(\frac{yd^2x - xd^2y}{dt^2}\right) = 2\omega\Sigma m(xdx + ydy).$$

En désignant par A le moment d'inertie variable du système à un instant quelconque, et par λ la somme des aires décrites sur le plan des x, y; on aura, en intégrant entre deux instans, et indiquant la première limite par l'indice zéro,

$$\frac{d\lambda}{dt} - \frac{d\lambda_0}{dt} = 2\omega(A - A_0).$$

Ainsi, dans les hypothèses précédentes, les différentielles des aires dans les mouvemens relatifs, lorsqu'elles sont projetées sur un plan perpendiculaire à l'axe de rotation, croissent comme les momens d'inertie.