Об обобщенных производных непрерывных функций

Л. В. Канторович (Ленинград)

Dini ввел в анализ понятие обобщенных производных. Пусть $f(x)$ — некоторая функция. Ее четыре обобщенных производных определяются следующим образом[1]:

$$\text{верхняя справа: } D^{+} = \overline{\lim_{\to o}} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \quad (h>0),$$

$$\text{нижняя справа: } D_{+} = \underline{\lim_{h\to o}} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \quad (h>0),$$

$$\text{верхняя слева: } D^{-} = \overline{\lim_{h\to}} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \quad (h<0),$$

$$\text{нижняя слева: } D_{-} = \underline{\lim_{h\to o}} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \quad (h<0).$$

Укажем некоторые известные результаты относительно этой системы четырех чисел: D^{+}, D_{+}, D^{-}, D_{-}. Эти результаты можно разделить на два вида: 1) дающие необходимые условия, которым должна удовлетворять эта четверка чисел или функций, 2) дающие достаточные условия для того, чтобы данная четверка функций могла быть системой обобщенных производных некоторой непрерывной функции.

Наиболее важные из первых результатов это:

1) Почти везде эти числа удовлетворяют одному из условий: a) $D^{+}=D_{+}=D^{-}=D_{-}$, b) $D^{+}=D^{-}=+\infty$, $D_{+}=D_{-}=-\infty$, c) $D_{-}=-\infty$ $D^{+}=+\infty$, $D^{-}=D_{+}$ конечны, d) $D^{-}=+\infty$, $D_{-}=-\infty$, $D_{+}=D^{+}$ конечны (теорема A. Denjoy[2]).

2) Совокупность точек, в которых $D_{+}>D^{-}$ или $D_{-}>D^{+}$, исчислима (G. Ch. Young[3]).

---

[1] См., например, Валле-Пуссен, курс Анализа, том 1, стр. 103—107.

[2] Одно из наиболее простых ее доказательств принадлежит Saks'y („Fund. Math.", t. V). Мы не пользуемся этой теоремой в дальнейшем.

[3] См. Young, „Acta Mathem.", т. 37, стр. 144; W. Sierpinski, Bull. Ac. Sc. de Cracovie, 1912, стр. 850.

Верхние производные D^+ и D^- функции типа g_2, а нижние D_+ и D_- — типа G_2 по классификации Young'а [4 5].

В отношении достаточных условий никаких сколько-нибудь общих результатов не имеется. Здесь можно указать только на классический результат о том, что всякая непрерывная функция есть производная некоторой непрерывной функции, а также на пример Weierstrass'а и другие подобные ему, решающие задачу для очень специальных случаев задания производных (например, $D^+ = D^- = +\infty$, $D_+ = D_- = -\infty$, А. С. Безикович [6]). Сюда нельзя отнести работы Lebesgue'а и Denjoy, которые указывают возможность выяснить вопрос о том, является ли данная функция производной или обобщенной производной, но не дают классов функций, могущих быть таковыми.

Настоящая работа также посвящена отысканию достаточных и частично необходимых условий для того, чтобы система четырех функций была системой обобщенных производных непрерывной функции. В виду того, что во всем промежутке согласно теореме Denjoy для них представляются весьма ограниченные возможности, мы ставим этот вопрос для совершенной совокупности меры нуль.

В § 1 при дополнительном ограничении (D^+, $D^- \geqslant 0$, D_+, $D_- \leqslant 0$) мы показываем, что для специального класса совершенных совокупностей меры нуль любая система четырех функций соответственных типов Young'а може быть системой обобщенных производных непрерывной функции на сово купности этого класса. В § 2 мы даем некоторые необходимые условия дл системы производных; из этих условий, в частности, следует, что клас совокупностей, на которых можно решить задачу, поставленную в § 1, ест некоторый специальный класс, который несколько шире рассмотренног в § 1. Наконец, в § 3 мы показываем, что поставленная задача разрешима н всякой совокупности последнего класса. Таким образом для совокупносте на которых эта задача может быть разрешена, получаются необходимые достаточные условия. § 4 стоит несколько особняком; здесь мы отказ ваемся от различного задания производных справа и слева, тогда можн показать, что если F — любая замкнутая совокупность меры нуль и $\varphi \geqslant$ произвольные функции соответственных типов, то всегда существует непр рывная функция $F(x)$, которая имеет в совокупности F верхнюю произво ную (справа и слева), равную φ, а нижнюю — ψ.

§ 1. Введем некоторые определения, относящиеся к структуре за кнутых совокупностей:

1) Замкнутая совокупность F обладает в точке x свойств

---

[4] О классификации Young'a см. H. Hahn, Theorie der reellen Funktionen, стр. 328 и с Эта классификация строится следующим образом: предел возрастающей последовательно непрерывных функций называется функцией типа G_1, предел убывающей последовател сти функций типа G_1, типа g_2. Производя предельные переходы в обратном порядке, по чим функции типов g_1 и G_2.

[5] Этот результат представляет частный случай теоремы Banach'a („Fund. Math.", t. стр. 128), но для данного случая он может быть получен из элементарных соображе (Валле-Пуссен, стр. 303).

[6] Матем. сборник, т. 31, стр. 529.

$(\overline{k}_d)$ при $k=k_1$, если, каковы бы ни были $\varepsilon_1, \varepsilon_2>0$, найдется справа от x промежуток (α, β), дополнительный к F, такой, что

$$x \leqslant \alpha < x+\varepsilon_1, \frac{\beta-\alpha}{\beta-x} > k_1-\varepsilon_2. \tag{1}$$

2) Если промежуток найдется слева, то будем говорить, что F обладает в точке свойством $(\overline{k}_g)$ при $k=k_1$.

3) Если F в точке x обладает свойством (k_d) при всех $k=k_1<1$, то будем говорить, что F в точке x обладает свойством (k_d),[7] аналогично можно ввести и свойство (k_g).

Если F в точке x обладает свойством (k_d) и (k_g), то будем говорить, что она обладает в x свойством (k). Заметим, что правые концы дополнительных к F промежутков всегда обладают свойством (k_g), а левые (k_d).

4) Если F во всех точках x обладает свойством (k) $[(k_d), (k_g)]$, то будем говорить, что F обладает свойством (k) $[(k_d), (k_g)]$.

Теорема 1. Какова бы ни была система функций $\varphi_1(x)\geqslant 0$, $\varphi_2(x)\geqslant 0$, $\psi_1(x)\leqslant 0$, $\psi_2(x)\leqslant 0$, причем φ_1, φ_2 типа g_2, а ψ_1, ψ_2 типа G_2, и замкнутая совокупность F, расположенная в промежутке (a, b), обладающая свойством (k), существует всегда непрерывная в (a, b) функция $F(x)$, для которой в точках F:

$$D^+ F(x)=\varphi_1(x),\ D_+F(x)=\psi_1(x),\ D^-F(x)=\varphi_2(x),\ D_-F(x)=\psi_2(x) \tag{2}$$

Доказательство. Предварительно мы покажем, что существует функция $F_1(x)$, для которой:

$$D^+F_1(x)=\varphi_1(x),\ D_+F_1(x)=\psi_1(x),\ D^-F(x)=D_-F(x)=0\,^{8}. \tag{3}$$

Построим предварительно замкнутую совокупность F^*, содержащую F, обладающую свойством (k) и такую, что никакая точка F не является концом интервала, дополнительного к F^*. Нетрудно проверить, что для получения F^* достаточно прибавить к F в каждом интервале (α, β), дополнительном к ней, точки:

$$\left(\alpha+\frac{(\beta-\alpha)}{(i+1)!}\right) \text{ и } \left(\beta-\frac{(\beta-\alpha)}{(i+1)!}\right)\ (i=1, 2, \ldots).$$

Переходим теперь к построению $F_1(x)$. По теореме Степанова-Гольдовского[9] существует последовательность непрерывных в промежутке (a, b) функций $\{\chi_n(x)\}$ таких, что

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\ \chi_n(x)=\varphi_1(x),\ \underline{\lim_{n\to\infty}}\ \chi_n(x)=\psi_1(x). \tag{4}$$

[7] Можно сказать, что совокупность F обладает свойством (k_d) в точке x, если сколь угодно близко к x справа найдутся интервалы, дополнительные к F, составляющие как угодно большую часть окрестности.

[8] Эта часть доказательства, как не трудно проследить, остается справедливой для всех совокупностей, обладающих свойством (k_d).

[9] W. Stepanoff, Sur les suites de fonctions continues, «Fund. Math.», t. XI, p. 264; G. Goldowsky, там же, p. 275. Ср. также мою заметку, «Fund. Math.», т. XIII, p. 177.

Возьмем произвольную последовательность $\{\varepsilon_n\}$, стремящихся к нулю. По ε_n найдется такое δ_n, что

$$|\chi_n(x_2)-\chi_n(x_1)|<\varepsilon_n \text{ при } |x_2-x_1|<\delta_n. \tag{5}$$

Обозначим через M_n верхнюю границу функции $\chi_n(x)$ в (a, b). Возьмем теперь возрастающую последовательность положительных чисел $k_n>0$, стремящихся к единице, удовлетворяющую условиям:

$$(1-k_n)^{\frac{1}{3}} M_n<1 \text{ и } (1-k_n)^{\frac{1}{8}}<\delta_n. \tag{6}$$

Так как все точки F^* обладают свойством (k), то для всякой точки $x \varepsilon F^*$ по δ_1 и k_1 по (1) найдется интервал (a_x, b_x), дополнительный к F^* и такой, что

$$0 \leqslant a_x-x<\delta, \text{ и } (b_x-a_x)>k_1(b_x-x). \tag{7}$$

Этот же интервал (a_x, b_x) удовлетворяет условиям (7) не только для точки x, но и для всех точек F^*, расположенных в некотором промежутке

$$\left(x-h_x, \frac{a_x+b_x}{2}\right), \text{ где } h_x>0.$$

Если мы составим систему интервалов $\left(x-h_x, \frac{a_x+b_x}{2}\right)$, то каждая точка F^* будет находиться внутри одного из них, а потому можно выбрать из них конечное число обладающих тем же свойством; пусть это будет:

$$\left(x_1-h_{x_1}, \frac{a_{x_1}+b_{x_1}}{2}\right), \ldots, \left(x_{n_1}, \frac{a_{x_{n_1}}+b_{x_{n_1}}}{2}\right).$$

Тогда конечная система интервалов

$$(a_{x_1}, b_{x_1}), \ldots, (a_{x_{n_1}}, b_{x_{n_1}}) \tag{8}$$

о б с л у ж и в а е т все точки F^*, т. е. для каждой точки $x \varepsilon F^*$ один из интервалов (8) удовлетворяет условиям (7). Обозначим для краткости письма эти интервалы

$$d_1^{(1)}, d_2^{(1)} d_3^{(1)}, \ldots, d_{n_1}^{(1)}.$$

Возьмем, далее, какой-либо промежуток (c, d) между двумя соседними интервалами первой системы или между первым из них и точкой a. Концы этого интервала будут точками F^*, но F не принадлежат, поэтому можно взять еще меньший интервал (c^1, d^1), концы которого принадлежат cF^* и который содержит все точки F из (c, d). В (c^1, d^1) проделаем то же построение, что мы проделали в (a, b), взяв вместо k_1 и δ_1 числа k_2 и δ_2.

Проделав это во всех интервалах (c^1, d^1), получим вторую систему интервалов

$$d_1^{(2)}, d_2^{(2)}, \ldots, d_{n_2}^{(2)},$$

такую, что, какова бы ни была точка $x \varepsilon F$, найдется интервал $(\alpha, \beta)=d_{i_x}^{(2)}$ из этой системы, для которого:

$$0 \leqslant \alpha-x<\delta_2 \text{ и } \beta-\alpha>k_2(\beta-x).$$

Продолжая этот процесс, выделим m-ую систему интервалов

$$d_1^{(m)},\ d_2^{(m)}, \ldots,\ d_{nm}^{(m)} \tag{9}$$

такую, что для каждого $x \varepsilon F$ найдется интервал $(\alpha, \beta) = d_{i_x}^{(m)}$ так, что

$$0 < \alpha - x < \delta_m \text{ и } \beta - \alpha > k_m (\beta - x). \tag{10}$$

Определим теперь функцию $F_1(x)$ следующим образом: если $(\bar{a}, \bar{b})$ — интервал n-ой системы $d_i^{(n)}$ то

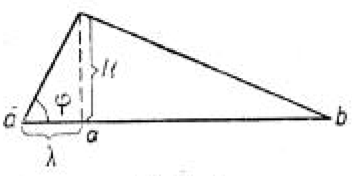
$$F_1(x) = \begin{cases} \chi_n(\bar{a}) \quad (x - \bar{a}) & \text{при } \bar{a} \leqslant x \leqslant \bar{a} + (1-k_n)^{\frac{1}{2}} (\bar{b} - \bar{a}), \\ \dfrac{(1-k_n)^{\frac{1}{2}} \chi_n(\bar{a})}{[1 - (1-k_n)^{\frac{1}{2}}]} (\bar{b} - x) & \text{при } \bar{a} + (1-k_n)^{\frac{1}{2}} (\bar{b} - \bar{a}) \leqslant x \leqslant \bar{b}. \end{cases} \tag{11}$$

Введем обозначения:

$$\bar{b} - \bar{a} = d;\ (1-k_n)^{\frac{1}{2}} d = \lambda;\ \alpha = \bar{a} + \lambda;\ \chi_n(\bar{a}) = \operatorname{tg} \varphi;\ H = \lambda \operatorname{tg} \varphi. \tag{12}$$

График $F_1(x)$ b $(\bar{a}, \bar{b})$ имеет вид треугольника (фиг. 1).

Во всех остальных точках интервала (a, b) положим $F_1(x) = 0$. Функция $F_1(x)$ определена в (a, b) и, как нетрудно проверить, пользуясь (6) и (11), непрерывна.



Фиг. 1.

Покажем теперь, что в каждой точке $x \varepsilon F$ выполняется (3).

Покажем сначала, что

$$D^+ F_1(x) \leqslant \varphi_1(x) + \varepsilon. \tag{13}$$

Выберем N настолько большим, чтобы при $n \geqslant N$:

$$\varepsilon_n < \frac{\varepsilon}{2};\quad \chi_n(x) < \varphi_1(x) + \frac{\varepsilon}{2};\ (b-a)(1-k_n)^{\frac{1}{24}} < \varepsilon. \tag{14}$$

Обозначим через Δ наименьшее расстояние точки x до интервалов $d_i^{(m)}$, у которых $m \leqslant N$ ($\Delta > 0$, так как таких интервалов конечное число и точка $x \varepsilon F$ не может быть концом одного из них). Чтобы получить (13) достаточно показать, что при $0 < h < \Delta$:

$$\frac{F_1(x+h) - F_1(x)}{h} < \varphi_1(x) + \varepsilon. \tag{15}$$

Если $x + h$ не принадлежит никакому интервалу $d_i^{(m)}$, то $F_1(x)$ обращается в нуль в обеих точках x и $x + h$, и (15) удовлетворено. Пусть $x + h$ принадлежит некоторому $d_i^{(n)} = (\bar{a}, \bar{b})$ ($n > N$ по определению Δ), тогда возможны два случая:

$$1)\ \bar{a} - x > \delta_n,$$

очевидно, по (11), (12), (14), (15):

$$\frac{F_1(x+h) - F_1(x)}{h} \leqslant \frac{\{H\}}{\bar{a} - x} \leqslant \frac{\{H\}}{\delta_n} = \frac{(1-k_n)^{\frac{1}{2}} (\bar{b} - \bar{a}) \{\chi_n(\bar{a})\}}{\delta_n} < (\bar{b} - \bar{a})(1-k_n)^{\frac{1}{24}} <$$

$$< \varepsilon \leqslant \varphi_1(x) + \varepsilon,$$

где $\{t\} = \frac{1}{2}(t + |t|)$.

$$2)\ \bar{a} - x \leqslant \delta_n.$$

Имеем тогда по (11), (12), (14):

$$\frac{F_1(x+h)-F_1(x)}{h}\leqslant\frac{\{H\}}{\alpha-x}=\frac{(\alpha-\bar{a})\{\chi_n(\bar{a})\}}{\alpha-\bar{a}+\bar{a}-x}\leqslant\{\chi_n(\bar{a})\}\leqslant\chi_n(x)\}+\varepsilon_n<\varphi_1(x)+\varepsilon.$$

Итак, (15) и (13) доказаны, а потому $D^+F_1(x)\leqslant\varphi_1(x)$.

Покажем теперь, что по $\delta>0$, $\varepsilon>0$ найдется такое $h<\delta$, что

$$\frac{F_1(x+h)-F_1(x)}{h}>\varphi_1(x)-\varepsilon. \tag{16}$$

Найдем по (4) такое n, что

$$\chi_n(x)>\varphi(x)-\frac{\varepsilon}{6};\ \delta_n\leqslant\delta;\ (1-k_n)^{\frac{1}{6}}<\frac{\varepsilon}{2};\ \varepsilon^n<\frac{\varepsilon}{6};\ 2(1-k_n)^{\frac{3}{8}}(b-a)<1. \tag{17}$$

По (10) найдется промежуток n-ой системы $d_i^{(n)}=(\bar{a},\bar{b})$, что

$$x\leqslant\bar{a}<x+\delta_n \text{ и } (\bar{b}-\bar{a})>k_n(\bar{b}-x). \tag{18}$$

Возьмем за $x+h$ точку α этого промежутка, тогда по (12), (6), (17) и (18):

$$h=\alpha-x<d(1-k_n)^{\frac{1}{2}}+\frac{1-k_n}{k_n}d<(1-k_n)^{\frac{1}{8}}\ 2(1-k_n)^{\frac{3}{8}}(b-a)<\delta_n\leqslant\delta.$$

Далее, имеем по (11), (12), (6), (17), (18) и (5):

$$\frac{F_1(x+h)-F_1(x)}{h}=\frac{H}{\bar{a}-x+\lambda}=\frac{(1-k_n)^{\frac{1}{2}}\chi_n(\bar{a})(\bar{b}-\bar{a})}{\bar{a}-x+(1-k_n)^{\frac{1}{2}}(\bar{b}-\bar{a})}>$$

$$>\frac{(1-k_n)^{\frac{1}{2}}\chi_n(\bar{a})(\bar{b}-x)k_n}{(\bar{b}-x)(1-k_n)+(1-k_n)^{\frac{1}{2}}(\bar{b}-x)}\geqslant[1-(1-k_n)^{\frac{1}{2}}]\ \chi_n(x)-\frac{\varepsilon}{2}\Big)=\chi_n(x)-$$

$$-(1-k_n)^{\frac{1}{2}}\chi_n(x)-\frac{\varepsilon}{6}-(1-k_n)^{\frac{1}{2}}\frac{\varepsilon}{6}>\varphi(x)-\varepsilon.$$

Отсюда следует, что $D^+F_1(x)\geqslant\varphi_1(x)$ и вместе с ранее полученным неравенством дает первое из соотношений (3). Заменой $F_1(x)$ на $-F_1(x)$ мы получаем второе из этих соотношений $D_+F_1(x)=\psi_1(x)$.

Докажем теперь третье из соотношений (3):

$$D^-F_1(x)=D_-F_1(x)=0.$$

Возьмем N настолько большим, чтобы при $n>N$:

$$\frac{(1-k_n)^{\frac{1}{6}}}{1-(1-k_n)^{\frac{1}{2}}}<\varepsilon. \tag{19}$$

Возьмем теперь $\delta>0$ настолько малым, чтобы в интервале $(x-\delta_1 x)$ не было точек интервалов $d_i^{(n)}$ при $n\leqslant N$. Покажем, что при $-\delta<h<0$:

$$\left|\frac{F_1(x+h)-F_1(x)}{h}\right|<\varepsilon. \tag{20}$$

Действительно, если точка $x+h$ не принадлежит никакому $d_i^{(n)}$, то (20), очевидно, справедливо.

Пусть теперь $x+h$ есть точка $d_i^{(n)}$ $(n>N)$, тогда по (6), (12) и (19):

$$\left|\frac{F_1(x+h)-F_1(x)}{h}\right|<\left|\frac{H}{\overline{b}-\overline{a}}\right|=\left|\frac{\chi_n(\overline{a})(1-k_n)^{\frac{1}{2}}(\overline{b}-\overline{a})}{[1-(1-k_n)^{\frac{1}{2}}](\overline{b}-\overline{a})}\right|<\varepsilon.$$

Итак, (20), а вместе с ними и третье из соотношений (3), доказано. Заменив x на $-x$, мы могли бы построить функцию $F_2(x)$ так, что

$$D^- F_2(x)=\varphi_2(x);\ D_- F_2(x)=\psi_2(x);\ D^+ F_2(x)=D_+ F_2(x)=0. \qquad (21)$$

Тогда, положив:

$$F(x)=F_1(x)+F_2(x),$$

мы получим в силу (3) и (21) функцию, удовлетворяющую условиям (2), ч. т. д.

Назовем правым и левым расхождением производных функций $F(x)$ $[O^+F(x)$ и $O^-F(x)]$ разности между ее верхними и нижними производными, которым мы будем придавать бесконечное значение, если одна из этих производных бесконечна, т. е.

$$O^+F(x)=D^+F(x)-D_+F(x)=\overline{\lim_{h_1,h_2\to 0}}\left|\frac{F(x+h_2)-F(x)}{h_2}-\frac{F(x+h_1)-F(x)}{h_1}\right|,$$

$$(h_1, h_2>0), \qquad (22)$$

$$O^-F(x)=D^-F(x)-D_-F(x)=\overline{\lim_{h_1,h_2\to 0}}\left|\frac{F(x+h_2)-F(x)}{h_2}-\frac{F(x+h_1)-F(x)}{h_1}\right|,$$

$$(h_1, h_2<0).$$

Тогда из теоремы 1 можно вывести следующее:

Следствие. *Каковы бы ни были функции $\xi(x)\geqslant 0$ и $\eta(x)\geqslant 0$ типа g_2 и замкнутая совокупность F, обладающая свойством (k), существует непрерывная функция $F(x)$, для которой в точках F:*

$$O^+F(x)=\xi(x),\ O^-F(x)=\eta(x).^{10} \qquad (23)$$

§ 2. Прежде чем перейти к изложению дальнейших теорем, относящихся к обобщенным производным, дадим еще два определения, касающиеся структурных свойств совокупностей:

1) Будем говорить, что совокупность E (замкнутая или нет) неприводима (k), если существует совершенная совокупность $F_1\subset E$, на которой точки, не обладающие свойством (k) (по отношению к ней), расположены везде плотно. Если такой совокупности F_1 не существует, то будем говорить, что E приводима (k).

2) Будем говорить, что совокупность E неприводима (k), если существует совершенная совокупность $F_1\subset E$ и такое число k_1 $(0<k_1<1)$,

[10] Нетрудно видеть из (22), что функции $O^+F(x)$ и $O^-F(x)$ не отрицательны, и если $F(x)$ непрерывна, то они типа g_2, поэтому ограничения, наложенные на $\xi(x)$ и $\eta(x)$, вызваны существом вопроса.

что точки F_1, не обладающие свойством (k_d) или (k_g), при $k=k_1$, расположены на F_1 везде плотно. В противном случае будем говорить, что E приводима $(\bar{k})$.

Совершенно аналогично можно ввести понятия совокупности приводимой и неприводимой (k_d), (k_g), $(\bar{k}_d)$ и $(\bar{k}_g)$. [11]

Лемма. *Пусть $f(x)$ — функция, определенная в промежутке (a, b) и непрерывная в точке x_0 этого промежутка. Пусть D_1 — одна из ее правых производных и D_2 — одна из ее конечных левых производных и k — некоторое число $(0<k<1)$. Тогда, каково бы ни было $\varepsilon>0$, по нему можно найти такое число h, $0<h<\varepsilon$, что для всякой точки x промежутка $\{x_0+(1-k)h, x_0+h\}$ найдутся два числа h_1 и h_2, $-\varepsilon<h_1, h_2<0$, для которых:*

a) если D_1 конечна, то

$$\left|\frac{f(x+h_1)-f(x)}{h_1}-\frac{f(x+h_2)-f(x)}{h_2}\right| \geqslant |D_1-D_2|(1-k)-\varepsilon, \tag{24}$$

b) если D_1 бесконечно, то

$$\left|\frac{f(x+h_1)-f(x)}{h_1}-\frac{f(x+h_2)-f(x)}{h_2}\right| \geqslant N \ (N \text{ произвольно}). \tag{25}$$

Доказательство. Благодаря возможности замены функции $f(x)$ на $f(x)-D_2x$ можем считать, что $D_2=0$. Далее, с помощью замены $f(x)$ на $-f(x)$ можем добиться того, чтобы $D_1\geqslant 0$ и, так как при $D_1=0$ лемма, очевидно, верна, то можем считать $D_1>0$.

Уменьшим $\varepsilon>0$ настолько, чтобы

$$D_1>\frac{\varepsilon}{3}. \tag{26}$$

Так как мы предположили $D_2=0$, то можем найти τ_1 так, чтобы

$$0>\tau_1>-\frac{\varepsilon}{2}, \left|\frac{f(x_0)+\tau_1)-f(x_0)}{\tau_1}\right|<\frac{\varepsilon}{3}. \tag{27}$$

Далее, по числу $\varepsilon_1=|\tau_1|\frac{\varepsilon}{3}$, благодаря непрерывности $f(x)$ в точке x_0, найдем $\delta_0<\frac{\varepsilon}{2}$ такое, что, при $|h|<\delta_0$, $|f(x_0+h)-f(x_0)|<\varepsilon_1$. (28)

Так как D_1 есть одна из правых производных $f(x)$ в точке x_0, то можем найти τ_2, для которого:

$$0<\tau_2<\delta_0(1-k) \text{ и } \frac{f(x_0+\tau_2)-f(x_0)}{\tau_2}=\alpha, \tag{29}$$

причем:

$$\text{в случае a) } |\alpha-D_1|<\frac{\varepsilon}{3}; \text{ в случае b) } \alpha>\frac{N+\varepsilon}{1-k}. \tag{30}$$

[11] Нетрудно проверить, что все приводимые совокупности E, если они измеримы, то имеют меру нуль, так как всякая точка совершенной совокупности с плотностью 1 не обладает свойствами (k) и $(\bar{k})$.

Покажем, что условиям леммы удовлетворяет:

$$h = \frac{\tau_2}{1-k}. \tag{31}$$

Действительно, пусть дано число x из промежутка $\{x_0+(1-k)h,\ x_0+h\}$ или что то же самое $(x_0+\tau_2,\ x_0)$; введем обозначения:

$$h' = x - x_0,\ k_1 = 1 - \frac{\tau_2}{x-x_0}[k_1<k],\ s = f(x_0+\tau_2)-f(x_0),\ \gamma = f(x)-f(x_0). \tag{32}$$

Покажем, что всегда можно выбрать h_1 и h_2, удовлетворяющие условиям (24) и (25) для $D_2=0$.

Рассмотрим три случая: 1) $\gamma \geqslant s$, 2) $0<\gamma<s$, 3) $\gamma\leqslant 0$:

1) $\gamma\geqslant s$. Для такой точки x положим $h_1=-h'$, $h_2=\tau_1-h'$, тогда по (26)—(32):

$$\left|\frac{f(x_0+h_1)-f(x)}{h_2}-\frac{f(x_0+h_2)-f(x)}{h_2}\right| \geqslant \left|\frac{f(x-h')-f(x)}{h'}\right| - \left|\frac{f(x-h'+\tau_1)-f(x)}{\tau_1-h'}\right| \geqslant$$

$$\geqslant \left|\frac{\gamma}{h'}\right| - \left|\frac{f(x_0+\tau_1)-f(x_0)}{\tau_1}\right| - \frac{|f(x_0)-f(x)|}{|\tau_1|} \geqslant \left|\frac{f(x_0+\tau_2)-f(x_0)}{\tau_2}\right|\frac{\tau_2}{h_1}-\frac{\varepsilon}{3}-\frac{\varepsilon_1}{|\tau_1|}=$$

$$=(1-k)\alpha-\frac{2}{3}\varepsilon \geqslant \begin{cases} \text{a) } \left(D_1-\frac{\varepsilon}{3}\right)(1-k)-\frac{2}{3}\varepsilon>(1-k)D_1-\varepsilon, \\ \text{b) } N+\frac{\varepsilon}{3}>N, \end{cases}$$

ч. т. д.

2) $0<\gamma<s$. Положим $h_1=-h'$, $h_2=h^1+\tau_2=-h_1k_1$; по (29), (30) и (32):

$$\left|\frac{f(x+h_1)-f(x)}{h_1}-\frac{f(x+h_2)-f(x)}{h_2}\right| = \frac{\gamma}{h'}+\frac{s-\gamma}{k_1h_1}\geqslant\frac{s}{k_1h'}=\frac{1-k_1}{k_1}\alpha\geqslant$$

$$\geqslant(1-k)\alpha\geqslant \begin{cases} \text{a) } (1-k)\left(D_1-\frac{\varepsilon}{3}\right)>(1-k)D_1-\varepsilon, \\ \text{б) } \frac{N+\varepsilon}{1-k}(1-k)>N. \end{cases}$$

ч. т. д.

3) $\gamma\leqslant 0$. Положим теперь $h_1=\tau_1-h^1$, $h_2=-(h^1-\tau_2)=-k_1h^1$, тогда:

$$\left|\frac{f(x+h_2)-f(x)}{h_2}-\frac{f(x+h_1)-f(x)}{h_1}\right| \geqslant \left|\frac{f(x_0+\tau_2)-f(x)}{-k_1h'}\right| - \left|\frac{f(x_0+\tau_1)-f(x_0)}{\tau_1-h'}\right| \geqslant$$

$$\geqslant\left|\frac{f(x_0+\tau_2)-f(x_0)}{k_1h'}+\frac{f(x_0)-f(x)}{k_1h'}\right|-\frac{\varepsilon}{3}\geqslant\left|\frac{f(x_0+\tau_2)-f(x_0)}{\tau_2}\right|\frac{1-k_1}{k_1}-\frac{2}{3}\varepsilon\geqslant$$

$$\geqslant(1-k)\alpha-\frac{\varepsilon}{3}\geqslant \begin{cases} \text{a) } (1-k)D_1-\frac{2}{3}\varepsilon>(1-k)D_1-\varepsilon, \\ \text{b) } N+\frac{2}{3}\varepsilon>N. \end{cases}$$

Итак, во всех случаях (24) и (25) установлены, ч. т. д.

Теорема II. *Пусть $f(x)$ — непрерывная в промежутке (a, b) функция,* *тогда совокупность E тех точек, в которых $f(x)$ имеет слева конечное производное число, а справа хоть одно бесконечное, есть приводимая (k_d) совокупность.*

Доказательство. Пусть E неприводима $(\bar{k}_d)$, тогда существует совершенная совокупность $F_1 \subset E$, на которой точки, не обладающие свойством (k_d), расположены везде плотно.

Возьмем некоторую точку x_0, в которой F не обладает свойством (k_d), тогда она не обладает в этой точке свойством $(\bar{k}_d)$, при некотором $k = k_1^0 < k^0 < 1$, и найдется такое ε_0, что, какой мы ни возьмем дополнительный к F интервал $(\bar{a}, \bar{b})$, расположенный внутри $(x_0, x_0 + \varepsilon_0)$, непременно:

$$(\bar{b} - \bar{a}) < k^0 (\bar{b} - x). \tag{32}$$

Благодаря сделанным в теореме предположениям можем в точке x_0 применить случай b) леммы, т. е. можем утверждать, что найдется $h_0 < \varepsilon_0$ такое, что для каждой точки внутри интервала $[x_0 + (1 - k^0) h, x_0 + h_0]$ существуют $h_1^0 h_2^0$ $(0 > h, h_2 > -\varepsilon_0)$ с

$$\left| \frac{f(x + h_1^0) - f(x)}{h_1^0} - \frac{f(x + h_2^0) - f(x)}{h_2^0} \right| > N_0. \tag{33}$$

По (33) интервал $[x_0 + (1 - k^0) h_0, x_0 + h_0]$ не может лежать целиком ни в каком дополнительном к F_1 интервале, а потому он содержит некоторый участок F_1. По выбору F_1 мы можем найти в этом участке точку x_1, не обладающую свойством (k), она не будет обладать свойством (k_d) при $k = k_1^{(1)} < k_1^{(1)}$. Благодаря этому можно найти $\varepsilon_1 < \varepsilon_0$ достаточно малое, чтобы, каков бы ни был интервал $(\bar{a}, \bar{b})$ внутри $(x_1, x_1 + \varepsilon_1)$, дополнительный к F_1, непременно $\bar{b} - \bar{a} < k^1 (\bar{b} - x)$, при этом ε_1 мы можем считать настолько малым, чтобы интервал $(x_1, x_1 + \varepsilon_1)$ не вышел за пределы интервала $(x_0 + (1 - k^0) h_0, x_0 + h_0)$.

Согласно лемме опять можем найти такой интервал $[x_1 + (1 - k^1) h_1, x_2 + h_1]$ с $h_1 < \varepsilon_1$, что для каждой точки этого интервала найдутся h_1^1, h_2^1 $(0 > h_1, h_2 > \varepsilon_1)$ с

$$\left| \frac{f(x + h_1^1) - f(x)}{h_1^1} - \frac{f(x + h_2^1) - f(x)}{h_2^1} \right| > N_1. \tag{34}$$

Промежуток $[x_1 + (1 - k^1) h_1, x_1 + h_1]$ содержит точки F_1, и мы можем найти в нем точку x_2, не обладающую свойством (k) и т. д. Продолжая этот процесс, определим последовательности точек x_i, чисел ε_i, $k^{(i)}$ и N_i, — причем можем считать $\lim\limits_{i \to \infty} \varepsilon_i = 0$, $\lim\limits_{i \to \infty} N_i = +\infty$, — и промежутков

$$[x_i + (1 - k^{(i)}) h_i, x_1 + h_i].$$

Эти промежутки, длины которых стремятся к нулю, и которые содержатся один в другом, дадут в пересечении точку $x^1 \subset F_1 \subset E$.

Рассмотрим левое расхождение производных в точке x^1 [см. (22)]. Так как точка x^1 принадлежит всем интервалам $[x_i + (1 - k^{(i)}) h_i, x_i + h_i]$, то можно найти для нее $h_1^{(i)}$ и $h_2^{(i)}$ $(0 > h_1^{(i)}, h_2^{(i)} > -\varepsilon_i)$ такие, что

$$\left| \frac{f(x^1 + h_2^i) - f(x^1)}{h_1^i} - \frac{f(x^1 + h_2^i) - f(x^1)}{h_2^i} \right| > N_i, \tag{35}$$

тогда по (35):

$$O^- f(x) = \overline{\lim_{\substack{h_1,\, h_2 \to 0 \\ (h_1,\, h_2 < 0)}}} \left| \frac{f(x^1+h_1)-f(x_1)}{h^1} - \frac{f(x^1-h_2)-f(x^1)}{h_2} \right| \geqslant \lim_{i\to\infty} N_i = +\infty .$$

Итак, мы получили, что одна из левых производных в точке x^1 бесконечна, что противоречит тому, что $x^1 \subset E$. Таким образом совокупность E не может быть неприводимой, ч. т. д.

Следствие. *Если существуют функции $F_1(x)$ и $F_2(x)$, такие, что в точках E*

$$O^+ F_1(x) = +\infty,\ O^- F_1(x) = 0,\ O^- F_2(x) = +\infty,\ O^+ F_2(x) = 0,$$

то совокупность E приводима (k).

Укажем еще одну теорему, аналогичную теореме II.

Теорема II'. *Совокупность E точек, в которых непрерывная в (a, b) функция $f(x)$ имеет конечную единственную производную слева, а справа имеет расхождение производных, ограниченное снизу положительным числом, т. е. $E_1 = E\ (O^- f(x) = 0,\ O^+ f(x) > m > 0)$, неприводима (k).*

Доказательство совершенно аналогично доказательству теоремы II только вместо случая b) леммы, нужно воспользоваться случаем a).

§ 3. Следствие теоремы II показывает, что для того, чтобы для любой пары функций $\xi(x) \geqslant 0$, $\eta(x) \geqslant 0$ типа g_2 существовала непрерывная функция, имеющая расхождения производных, равные $\xi(x)$ и $\eta(x)$ на замкнутой совокупности F, необходимо, чтобы F была приводима (k). Мы покажем теперь, что это условие является и достаточным, а именно, докажем, что результаты теоремы I и следствия из нее § 1, доказанные для совокупностей, обладающих свойством (k), переносятся и на совокупности, приводимые (k).

Теорема I bis. *Каковы бы ни были функции $\varphi_1(x) \geqslant 0$, $\psi_1(x) \leqslant 0$, $\psi_2(x) \leqslant 0$, φ_1 и φ_2 типа g_2 и ψ_1, ψ_2 типа G_2 и замкнутая совокупность F, приводимая (k), расположенная в (a, b), существует функция $F(x)$, непрерывная в (a, b), для которой в точках F:*

$$D^+F(x) = \varphi_1(x);\quad D^+F(x) = \psi_1(x);\quad D^-_1F(x) = \varphi_2(x);\quad D_-F(x) = \psi_2(x) \tag{2}$$

Доказательство. Укажем сначала некоторый способ приведения F. Пусть E замкнутая совокупность, обозначим через $\varphi(E)$ совокупность точек E, не обладающих свойством (k), тогда, очевидно: 1) $\varphi(E)$ замкнута, 2) $\varphi(E) \subset E$. Если E несовершенная, то $\varphi(E) \neq E$, так как изолированные точки E не войдут в $\varphi(E)$.

Положим $E_0 = E$ и, если определена E_ξ для всех трансфинитных чисел $\xi < \eta$, то положим:

$$E_\eta = \prod_{\xi < \eta} \varphi(E_\xi).$$

Таким образом по E определяется единственным образом вполне упорядоченное множество замкнутых совокупностей $\{ E_\xi \}$.

Так как [12] каждая из этих совокупностей содержится в предшествующих, то возможны два случая:

1) При некотором ξ: $E_\xi = E_{\xi+1} = \ldots \neq 0$. В этом случае $E_\xi \subset E$ совершенная совокупность, для которой $\varphi(E_\xi) = E_\xi$ а потому на E_ξ точки, не обладающие свойством (k), расположены везде плотно и совокупность E неприводима (k).

2) При некотором ξ:

$$E_\xi \neq 0;\ E_{\xi+1} = E_{\xi+2} = \ldots = 0.$$

В этом случае, как нетрудно видеть, совокупность E приводима: мы будем говорить в таком случае, что E приводима после ξ действий. Заметим, что при таком определении совокупность, обладающая свойством (k), будет приводима сразу после 0 действий.

Доказательство теоремы будем вести индуктивно, именно, индуктируя следующее предложение: какова бы ни была замкнутая совокупность F, расположенная в некотором промежутке (c, d), приводимая после ξ действий, существует непрерывная в (c, d) функция $F(x)$, равная нулю в точках F, для которой на F выполняется условие (3). Для случая $\xi = 0$ это предложение доказано в теореме I, поэтому достаточно показать, что если оно верно для всех трансфинитных чисел $\xi < \eta$, то оно верно и для η.

Пусть F приводима после η действий, т. е. $F_\eta \neq 0$, $F_{\eta+1} = 0$. Для того чтобы построить непрерывную функцию $F^{(1)}(x)$, удовлетворяющую на совокупности F условию (3), достаточно построить и сложить следующие две функции: 1) $F_1(x)$, которая в точках $F - F_\eta$ удовлетворяла бы условию (3), а в точках F_η имела обычную производную, равную нулю, и 2) $F_2(x)$ в точках F_η, удовлетворяющую условию (3), и в точках $F - F_\eta$, имеющую производную, равную нулю. Построив затем функцию, удовлетворяющую условию, аналогичному (3) $F^{(2)}(x)$ [соответствующую $F_2(x)$ в теореме I], и сложив их, получим функцию, удовлетворяющую условию (2).

1) Для построения функции $F_1(x)$ разобьем совокупность CF_η на исчислимое множество интервалов (c_i, d_i), имеющих разве лишь общие концы, принадлежащие CF. В каждом интервале (c_i, d_i) участок F, находящийся в нем, представляет совокупность, приводимую после $\xi_i < \eta$ действий. Поэтому мы можем построить функцию $f_i(x)$ непрерывную в (c_i, d_i), удовлетворяющую в точках F условию (3) и равную нулю в этих точках.

Легко можно добиться того, чтобы она кроме того обращалась в нуль на концах промежутка:

$$f_i(c_i) = f_i(d_i) = 0. \tag{36}$$

Определим теперь функцию $F_1^*(x)$ следующим образом:

$$F_1^*(x) = \begin{cases} f_i(x), & \text{если } x \subset (c_i, d_i) \\ 0, & \text{если } x \text{ не принадлежит никакому } (c_i, d_i). \end{cases} \tag{37}$$

Из свойств функций $f_i(x)$, (36) и (37), заключаем, что F_1^* непрерывная

[12] См., например, F. Hausdorff, Mengenlehre (Berlin 1927), S. 170.

CF_η и удовлетворяет в $F-F_\eta$ условию (3).

Положим:

$$\sigma(x)=[\rho(x, F_\eta)]^2, \ \rho(x, F_\eta)=\operatorname*{Min}_{x^1 \varepsilon F}|x^1-x|, \tag{38}$$

как нетрудно видеть $\sigma(x)$ непрерывная функция, имеющая в точке F_η производную, равную нулю. Определим теперь функцию $F_1(x)$ следующим образом:

$$F_1(x)=\operatorname{Max}\left\{-\sigma(x), \ \operatorname{Min}[\sigma(x), \ F_1^*(x)]\right\}. \tag{39}$$

Эта функция и будет удовлетворять поставленным условиям. Действительно, в CF_η она непрерывна, так как там непрерывны $\sigma(x)$ и $F_1^*(x)$, в F_η она непрерывна и имеет производную, равную нулю, так как $|F_1(x)|<\sigma(x)$; наконец, если $x \varepsilon (F-F_\eta)$; то вблизи $x: F_1^*(x)=F_1(x)$, а потому $F_1(x)$ вместе с $F_1^*(x)$ удовлетворяет условию (3).

2) Для построения функции $F_2(x)$ мы повторим тот процесс, который был применен при доказательстве теоремы I. Также мы определим последовательно: совокупность F_η^* числа k_η, системы интервалов $d_i^{(n)}$, точку α и число H для каждого интервала. Справа от точки α интервала $d_i^{(n)}$ возьмем интервал (g, h) из совокупности CE, лежащий весьма близко от α, так что $h=\alpha<(1-k_n)\,d$. [см. (12)]. В таком интервале (g, h) мы определим $F_2(x)$ геометрически в виде равнобедренного треугольника с высотою H и положим $F_2(x)=0$ во всех остальных точках (a, b). Как нетрудно проверить[13], повторив рассуждения, приведенные в теореме I, в точках F_η функция $F_2(x)$ удовлетворяет условиям (3); в точках же $F-F_\eta$ непременно $DF_2(x)=0$, так как в некоторой окрестности такой точки $F_2(x)=0$.

Функции $F_1(x)$ и $F_2(x)$, а также и $F(x)=F_1(x)+F_2(x)$ таким образом построены и удовлетворяют поставленным условиям, что и требовалось доказать.

Из этой теоремы можно получить следствие, совершенно аналогичное следствию из теоремы I. Наконец, соединяя вместе результаты следствий из теоремы II и I bis, мы можем высказать следующую теорему:

Теорема III. *Пусть F замкнутая совокупность, расположенная в промежутке (a, b), тогда, для того чтобы при любых функциях $\xi(x)\geq 0$ $\eta(x)\geq 0$*[14] *(типа g_2) существовала непрерывная в (a, b) функция $F(x)$, для которой в точках F*

$$O^+F(x)=\xi(x); \ O_-F(x)=\eta(x),$$

необходимо и достаточно, чтобы совокупность F была приводима (k).

§ 4. Мы докажем здесь следующую теорему:

Теорема IV. *Если F замкнутая совокупность меры нуль, расположен-*

---

[13] Эту проверку можно упростить, если взять за высоту треугольника не H, а $H'=\dfrac{(1-k_n)^{\frac{1}{2}}\chi_n(\overline{a})}{1-(1-k_n)^{\frac{1}{2}}]}\left(b-\dfrac{g+h}{2}\right)$, тогда, как нетрудно видеть, придется проверить только неравенство $D^+F_2(x)\geq\varphi_1(x)$.

[14] Напомним, что функции $\xi(x)$ и $\eta(x)$ могут принимать и бесконечные значения.

ная в (a, b) *то, каковы бы ни были функции* $\varphi(x)$ *типа* g_2, $\psi(x)$ *типа* G_2 *такие, что* $\varphi(x) \geqslant \psi(x)$, *существует непрерывная в* (a, b) *функция* $F(x)$, *для которой в точках совокупности* F:

$$D^+F(x) = D^-F(x) = \varphi(x); \; D^+F(x) = D_-F(x) = \psi(x). \tag{40}$$

Доказательство. По теореме Степанова-Гольдовского найдется последовательность непрерывных функций $\chi_n(x)$, для которой

$$\overline{\lim_{h\to\infty}}\chi_n(x) = \varphi(x); \; \underline{\lim_{h\to\infty}}\chi_n(x) = \psi(x). \tag{41}$$

Возьмем какой-либо сходящийся ряд положительных чисел ε_n. По ε_n найдем $1 \geqslant \delta_n > 0$ такое, что

$$\text{при } |x' - x''| < \sigma_n; \; |\chi_n(x') - \chi_n(x'')| < \varepsilon_n. \tag{42}$$

Через M_n обозначим верхнюю границу $|\chi_n(x)|$ в промежутке (a, b), можем считать при этом $M_n \geqslant 1$.

Выберем теперь конечную систему интервалов S_1 такую, что каждая точка F находится внутри одного из них, длина которой l, равная сумме длин промежутков, удовлетворяет неравенствам:

$$l_1 < \frac{\delta_1 \varepsilon_1}{m_1} \text{ и } l_1 < \delta_2.$$

Обозначим через ρ_1 расстояние от совокупности F до совокупности CS_1, т. е.

$$\rho_1 = \rho(F_1 CS_1).$$

Предположим теперь, что для всех номеров $n' < n$ совокупности $S_{n'}$ и числа $\rho_{n'}$ и $l_{n'}$ уже определены, определим тогда совокупность $S_{n'}$ и числа ρ_n и l_n следующим образом. За S_n возьмем конечную систему интервалов, покрывающую совокупность F, лежащую внутри S_{n-1}, и такую, что длина ее:

$$l_n < \delta_{n+1}; \; l_n < \frac{\delta_n \varepsilon_n}{M_n} \text{ и } l_n < \frac{\delta_n \rho_{n-1}}{M_n + M_{n-1}}. \tag{43}$$

Через ρ_n обозначим расстояние от совокупности F до CS_n:

$$\rho_n = \rho(F, CS_n). \tag{44}$$

Обозначим через e_n совокупность точек S_n, не принадлежащих S_{n+1}, т. е.

$$e_n = S_n - S_{n+1}. \tag{45}$$

Очевидно, что в таком случае

$$me_n < l_n. \tag{46}$$

Функцию $F_n(x)$ определим как неопределенный интеграл функции $\chi_n(x)$, взятый вдоль совокупности e_n в пределах от a до x:

$$F_n(x) = \int\limits_{e_n a}^{x} \chi_n(x)\,dx. \tag{47}$$

Покажем теперь, что функция

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(x) \tag{48}$$

удовлетворяет условиям теоремы.

Действительно функция $F(x)$ непрерывна,[15] так как ряд (48) сходится равномерно, ибо по (43), (46) и (47)

$$|F_n(x)| \leqslant \int\limits_{e_n a}^{x} |\chi_n(x)|\,dx < M_n l_n < \varepsilon_n, \tag{49}$$

т. е. его общий член не превосходит члена сходящегося ряда с постоянными положительными членами.

Покажем теперь, что функция $F(x)$ удовлетворяет условиям (40); для этого достаточно показать, что

$$D^{+}F(x) = \varphi(x), \tag{50}$$

так как остальные соотношения (40) получатся посредством обычных замен [16].

Для доказательства (50) покажем сначала, что каково бы ни было $\varepsilon > 0$ при достаточно малом h:

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} < \varphi(x) + \varepsilon. \tag{51}$$ [17]

Выберем N настолько большим, чтобы при всех $n \geqslant N$

$$\sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon_{n+s} < \frac{\varepsilon}{4}\,\frac{1}{1+|\varphi(x)|};\quad \chi_n(x) < \varphi(x) + \frac{\varepsilon}{4}\,. \tag{52}$$

Это возможно в силу (41) и того, что ряд $\sum \varepsilon_n$ сходится.

Покажем теперь, что при

$$0 < h < \rho_N$$

выполняется (51). Так как $\rho_n \to 0$, то можно найти такое $n \geqslant N$, что

$$\rho_{n+1} < h \leqslant \rho_n. \tag{53}$$

Рассмотрим теперь частное

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h} \sum_{n=0}^{\infty} \int\limits_{e_n x}^{x+h} \chi_n(x)\,dx. \tag{54}$$

---

[15] Нетрудно проверить также, что $F(x)$ даже абсолютно непрерывна.

[16] Ср. Валле-Пуссен, цит. стр. 103—104.

[17] Приведенное ниже доказательство относится к случаю, когда в рассматриваемой точке x.

Так как $h \leqslant \rho_n$, то в силу (44) и (45), промежуток $(x, x+h)$ лежит внутри S_n, а потому первые $(n-1)$ слагаемых суммы (54) равны нулю и

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\frac{1}{h}\sum_{s=0}^{\infty}\int\limits_{\substack{x\\ e_{n+s}}}^{x+h}\chi_{n+s}(x)dx=\frac{1}{h}\int\limits_{\substack{x\\ e_n}}^{x+h}\chi_{n+1}(x)dx+\frac{1}{h}\int\limits_{\substack{x\\ e_{n+1}}}^{x+h}\chi_{n+1}(x)dx+$$
$$+\frac{1}{h}\sum_{s=2}^{\infty}\int\limits_{\substack{x\\ e_{n+s}}}^{x+h}\chi_{n+s}(x)dx. \tag{55}$$

Оценим сначала последнее слагаемое (55), пользуясь (43), (49), (52) и (53):

$$\frac{1}{h}\sum_{s=2}^{\infty}\int\limits_{e_{n+s}\,x}^{x+h}\chi_{n+s}(x)dx<\frac{1}{\rho_{n+1}}\sum_{s=2}^{\infty}l_{n+s}M_{n+s}<\frac{1}{\rho_{n+1}}\sum_{s=2}^{\infty}\varepsilon_{n+s}\,\rho_{n+s-1}<\frac{\varepsilon}{4}. \tag{56}$$

Рассмотрим теперь первые два слагаемые (55), приняв во внимание, что в силу (43) и (53)

$$h \leqslant \rho_n < l_n < \delta_n,\ \delta_{n+1}, \tag{57}$$

и пользовавшись (42), (43), (46), (52), (59) и (57), найдем:

$$\frac{1}{h}\Bigg[\int\limits_{\substack{x\\ e_n}}^{x+h}\chi_n(x)dx+\int\limits_{\substack{x\\ e_{n+1}}}^{x+h}\chi_{n+1}(x)dx\Bigg]\leqslant\frac{1}{h}\left(\varphi(x)+\frac{\varepsilon}{2}\right)\Big[m\,\underset{x}{\overset{x+h}{e_{n+s}}}+m\,\underset{x}{\overset{x+h}{e_{n+1}}}\Big]^{18}=$$
$$=\left(\varphi(x)+\frac{\varepsilon}{2}\right)\frac{1}{h}\Big[h-\sum_{s=2}^{\infty}m\,\underset{x}{\overset{x+h}{e_{n+s}}}\Big]<\varphi(x)+\frac{\varepsilon}{2}+|\varphi(x)|\frac{1}{\rho_{n+1}}\sum_{s=2}^{\infty}l_{n+s}<$$
$$<\varphi(x)+\frac{3}{4}\varepsilon. \tag{58}$$

Из (55), (57) и (58) вытекает (51), а в виду произвольности ε найдем, что

$$D^+F(x)\leqslant\varphi(x). \tag{59}$$

Для доказательства неравенства противоположного знака покажем, что для любого $\varepsilon>0$ найдутся сколь угодно малые h

$$0<h<\varepsilon \tag{60}$$

такие, что

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}>\varphi(x)-\varepsilon. \tag{61}$$

Благодаря (41) можем найти такое число $n_0 \geqslant N$, что

$$\chi_{n_0}(x)\geqslant\varphi(x)-\frac{\varepsilon}{4}. \tag{62}$$

Покажем теперь, что $h=\rho_{n_0}$ удовлетворяет поставленным условиям. Пользуясь (43) и (52), убеждаемся в (60): $h=\rho_{n_0}<l_{n_0}<\varepsilon_{n_0}<\varepsilon$.

функция $\varphi(x)$ имеет конечное значение; если же она бесконечна, то в приведенные рассуждения нужно внести незначительные изменения.

[18] Здесь $\underset{x}{\overset{x+h}{e_n}}$ обозначает часть совокупности l_n, заключающуюся в $(x, x+h)$.

Покажем, что имеет место и (61). Действительно, по (42), (43), (49), (52), (55), (57) и (62)

$$\frac{F(x+\rho_n)-F(x)}{\rho_{n_0}}=\frac{1}{\rho_{n_0}}\int\limits_{\substack{x\\ e_{n_0}}}^{x+\rho_{n_0}}\chi_{n_0}(x)\,dx+\frac{1}{\rho_{n_0}}\sum_{s=1}^{\infty}\int\limits_{\substack{x\\ e_{n_0+s}}}^{x+\rho_{n_2}}\chi_{n_0+s}(x)dx\geqslant$$

$$\geqslant\left(\varphi(x)-\frac{\varepsilon}{2}\right)\frac{1}{\rho_{n_0}}\,m\,\overset{x+\rho_{n_0}}{\underset{x}{e_{n_0}}}-\sum_{s=1}^{\infty}\frac{l_{n_0+s}\,M_{n_0+s}}{\rho_{n_0}}\geqslant$$

$$\geqslant\left(\varphi(x)-\frac{\varepsilon}{2}\right)\frac{1}{\rho_{n_0}}\left[\rho_{n^0}-\sum_{s=1}^{\infty}\overset{x+\rho_{n_0}}{\underset{x}{e_{n_0+s}}}\right]-\sum_{s=1}^{\infty}\varepsilon_{n_0+s}\geqslant$$

$$\geqslant\varphi(x)-\frac{\varepsilon}{2}-|\varphi(x)|\sum_{s=1}^{\infty}\varepsilon_{n_0+s}-\sum_{s=1}^{\infty}\varepsilon_{n_0+s}\geqslant\varphi(x)-\frac{3}{4}\varepsilon>\varphi(x)-\varepsilon.$$

Итак, (61) установлено, а потому $D^+F(x)\geqslant\varphi(x)$, что вместе с (59) дает (50), что и требовалось доказать.

Следствие. *Если F замкнутая совокупность меры нуль, расположенная в промежутке (a, b), то, какова бы ни была функция $f(x)$ первого класса Baire'а, существует непрерывная в промежутке (a, b) функция $F(x)$, которая в точках совокупности F имеет единственную производную, равную $f(x)$*:

$$F'(x)=f(x).$$

Замечание. Отметим, что в тексте теоремы IV можно заменить обобщенные производные, взятые при непрерывном изменении x на производные, взятые вдоль совокупности F. Для доказательства этого предложения нужно внести лишь небольшие изменения в доказательство теоремы IV.

Июнь 1931 г.

(Поступило в редакцию 6. V 1932).

Sur les nombres dérivés des fonctions continues.

L. Kantorovitch (Leningrad)

(Résumé)

Nous allons donner d'abord une définition concernant quelque propriété de structure des ensembles fermés. Nous dirons que l'ensemble fermé F jouit de la propriété (k) au point x, si quelques soient nombres $\delta>0$ et $0<k<1$ il existe un intervalle $(\bar{a}, \bar{b})$ contigu à l'ensemble F tel que $0\leqslant\bar{a}-x<\delta$ et $(\bar{b}-\bar{a})>k\ (\bar{b}-x)$.

Nous dirons que l'ensemble F est réductible (k), si pour tous sous-ensembles fermés $F_1\subset F$ les points auxquels F_1 ne jouit pas de la propriété (k) [relativement à F_1], ne font pas un ensemble partout dense sur F_1.

Les résultats principaux de cet article sont les suivants.

Théorème I bis. Soit F un ensemble fermé réductible (k); alors quelques soient les fonctions $\varphi_1, \varphi_2 \geqslant 0$ (finies ou infinies) du type g_2 et $\psi_1, \psi_2 \leqslant 0$ du type G_2 (suivant les notations de M. H. Hahn) il existe toujours une fonction continue $F(x)$, tell que aux points de l'ensemble F_1:

$$D^+F = \varphi_1;\ D^-F = \varphi_2;\ D_+F = \psi_1\ D_-F = \psi_2.$$

Théorème II. Soit $f(x)$ une fonction continue; alors l'ensemble E de points, dans lesquels les nombres D^- et D_- tous les deux sont finis et un des nombres D^+ et D_+ est infini, ne contient que les ensembles fermes reductibles (k)

De ce théorème il suit que la classe des ensembles fermés pour lesquels le problème posé dans le théorème I bis admet la solution pour toutes les fonctions φ et ψ est la classe des ensembles fermés réductibles (k).

Théorème IV. Quelque soient l'ensemble fermé F de mesure nulle et les fonctions $\varphi(x)$ du type g_2 et $\psi(x)$ du type G_2 $[\varphi(x) \geqslant \psi(x)]$, il existe toujours une fonction continue $F(x)$, telle que au points de F:

$$D^+F = D^-F = \varphi(x);\ D_+F = D_-F = \psi(x).$$

La démonstration des théorèmes I bis et IV repose sur un théorème de M. M. Stepanoff et Goldowsky [„Fundamenta Mathem.“, t. XI].