Об универсальных функциях.

Л. В. Канторович.

Гр. М. Фихтенгольцом был поставлен следующий вопрос: что можно сказать о классе функции двух переменных $\mathbf{F}(x, t)$, универсальной для всех функций $y=f(x)$ одной переменной x, класса $\leqslant\alpha$ по классификации Baire'a[1]).

При рассмотрении этого вопроса мы пришли к следующим результатам:

1) Для функций классификации Young'a существует функция двух переменных типа $g_\alpha(G_\alpha)$[2]), универсальная для всех функций одной переменной x типа (не выше) $g_\alpha(G_\alpha)$. Здесь (и ниже) через α обозначается любое число первого или второго числового класса.

2) Не существует функции двух переменных α-го класса Baire'a, универсальной для всех функций одной переменной не выше того же класса.

Здесь же важно отметить, что мы рассматриваем и функции, допускающие несобственные значения $+\infty$ или $-\infty$. Для конечных функций невозможность существования универсальных функций $\mathbf{F}(x, t)$ в обоих указанных случаях сразу вытекала бы (от противного) из рассмотрения функции $\mathbf{F}(x, x)+1$.

В дальнейшем все наши построения мы будем производить в квадрате $0\leqslant x\leqslant 1$, $0\leqslant t\leqslant 1$.

---

[1]) Функция $\mathbf{F}(x, t)$ называется универсальной для функций одной переменной определенного класса, если для каждой функции $f(x)$ этого класса существует такое значение t' параметра t, что $\mathbf{F}(x, t')=f(x)$, и, обратно, при каждом значении параметра t получается функция от x, принадлежащая упомянутому классу.

[2]) Здесь (и в дальнейшем) мы пользуемся терминологией и обозначениями H. Hahn'a; см. его Theorie der reellen Funktionen [Berlin, 1921], стр. 328 и след.

Обозначим через P совокупность тех чисел t, которых разложение по троичной системе может быть написано с помощью цифр 0 и 1, так что $t=\frac{a_1}{3}+\frac{a_2}{3^2}+\ldots+\frac{a_k}{3^k}+\ldots$, где $a_k=0$ или 1. Как известно, совокупность P есть совершенная.

Разобьем последовательность $\{a_k\}$ на бесконечное множество частичных; для этого достаточно разбить таким образом последовательность натуральных чисел, например, по схеме:

$$
(1)\qquad \begin{cases}
1, & 3, & 5, & \ldots\ldots, 2i-1, & \ldots\ldots \\
2\cdot 1, & 2\cdot 3, & 2\cdot 5, & \ldots\ldots, 2(2i-1), & \ldots\ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\
2^{k-1}\cdot 1, & 2^{k-1}\cdot 3, & 2^{k-1}\cdot 5, & \ldots\ldots, 2^{k-1}(2i-1), & \ldots\ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots
\end{cases}
$$

Определим теперь функции $l_1(t), l_2(t), \ldots\ldots$ следующим образом:

$$l_1(t)=\frac{a_1}{2}+\frac{a_3}{2^2}+\frac{a_5}{2^3}+\ldots\ldots,\ l_2(t)=\frac{a_2}{2}+\frac{a_6}{2^2}+\frac{a_{10}}{2^3}+\ldots\ldots;\ \cdots$$

Относительно этих функций справедливо следующее:

1) Функции $l_1(t), l_2(t), \ldots$ непрерывны в P (и вдоль P).

2) Каковы бы ни были числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ $(0\leqslant\lambda_k\leqslant 1)$, по ним найдется в совокупности P точка t', для которой одновременно:

$$l_1(t')=\lambda_1,\ l_2(t')=\lambda_2, \ldots,\ l_k(t')=\lambda_k, \ldots\ldots$$

Заметим, что замкнутая совокупность вполне определяется исчислимым множеством чисел, именно, расстояниями всех рациональных точек до этой совокупности. Теперь, благодаря этому замечанию и свойству функций l, мы без труда построим плоскую замкнутую совокупность $\mathbf{E}$, универсальную [3]) для линейных замкнутых совокупностей [4]).

---

[3]) Аналогично [1]), плоская совокупность $\mathbf{E}$ называется универсальной (Н. Лузин) для линейных совокупностей определенного класса, если все эти совокупности (и только они) получаются при сечении совокупности $\mathbf{E}$ прямыми $t=t'$.

Следует оговорить, что под сечением двумерной совокупности $\{(x, t)\}$ прямой $t=t'$ мы разумеем совокупность тех значений x, при которых точка (x, t') принадлежит двумерной совокупности.

[4]) Впервые такого рода совокупности построили T. Ważewski (Fund. Math., t. IV, стр. 214) и W. Sierpiński (ibid, t. VII, стр. 198).

Перенумеруем все рациональные числа в промежутке $J=(0,1)$: $r_1, r_2, \cdots r_k, \cdots$, и определим совокупность $\mathbf{E}$ следующим образом:

$$\mathbf{E}=\prod_{k=1}^{\infty} \mathcal{E}\left(t\varepsilon P, |x-r_k| \geqslant l_k(t)\right). \tag{2}$$

Эта совокупность $\mathbf{E}$ и будет искомой. Действительно, прежде всего из непрерывности функций $l_1(t)$, $l_2(t)$, .. вытекает замкнутость $\mathbf{E}$; таким образом, и все сечения ее будут замкнутыми.

Покажем теперь, что, какова, бы ни была линейная замкнутая совокупность E в интервале J по ней найдется такое $t'\varepsilon P$, что сечением совокупности $\mathbf{E}$ прямой $t=t'$ будет именно совокупность E. Для краткости мы обозначим это сечение через $\overset{t'}{\mathbf{E}}$. Пусть дана совокупность E; положим λ_k равным расстоянию точки r_k до совокупности E. По свойству 2) функций l, найдется такое $t'\varepsilon P$, что $l_k(t')=\lambda_k$ $(k=1, 2, \ldots)$. Это значение t и будет искомым, т.-е. $\overset{t'}{\mathbf{E}}=E$. В самом деле, из определения $\mathbf{E}$ (см.(2)) имеем, что

$$\overset{t'}{\mathbf{E}}=\prod_{k=1}^{\infty} \mathcal{E}_x(|x-r_k| \geqslant \lambda_k).$$

Пусть точка $x_0\varepsilon E$; тогда расстояние ее до любой точки r_k будет $\geqslant \lambda_k$ и потому $x_0\varepsilon\overset{t'}{\mathbf{E}}$, так что $E \subset \overset{t'}{\mathbf{E}}$. Наоборот, если $x_0\varepsilon\overset{t'}{\mathbf{E}}$, то она не может принадлежать дополнительному к E промежутку, ибо иначе можно было бы найти рациональную точку r_k, для которой расстояние от E было бы б о л ь ш е расстояния от x_0; итак, $\overset{t'}{\mathbf{E}} \subset E$, и в результате: $\overset{t'}{\mathbf{E}}=E$.

[Заметим, что и п у с т а я совокупность может быть получена таким же путем, если выбрать t' так, чтобы все $l_k(t')=1$.]

Разобьем последовательность функций $l_1(t), l_2(t), \ldots$ на бесконечное множество частичных, хотя бы по схеме (1):

$$\begin{matrix} l_1(t), & l_3(t), & \ldots \\ l_2(t), & l_6(t), & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{matrix} \tag{3}$$

Пользуясь этими последовательностями функций, построим ряд совокупностей $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \ldots$ точно так же, как мы, исходя из последовательности $l_1(t)$, $l_2(t), \ldots$, построили совокупность $\mathbf{E}$.

Пусть теперь E_1, E_2, ... будет произвольная после
вательность замкнутых совокупностей в промежутке J.
же, как и раньше, мы убедимся, что есть такие числа $\lambda_1, \lambda_3, \dots$
что лишь только t' удовлетворяет условиям:

$$(4) \qquad l_1(t')=\lambda_1,\ l_3(t')=\lambda_3, \dots,$$

сечение совокупности $\mathbf{E}_1$ прямой $t=t'$ есть E_1. Также су
ствуют такие числа $\lambda_2, \lambda_6, \dots$, что если только

$$(4^*) \qquad l_2(t')=\lambda_2,\ l_6(t')=\lambda_6, \dots,$$

то сечение совокупности $\mathbf{E}_2$ прямой $t=t'$ есть E_2, и т. д. Н
по свойству 2) функций l_1, l_2, ..., мы можем найти
числам λ_1, λ_2, ... такое число t' в промежутке J, чтоб
одновременно удовлетворялись все условия (4), (4*) и т.

Этим доказана основная

Лемма I. Существует последовательность пл
ских замкнутых совокупностей $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \dots$, обл
дающая следующим свойством: какова бы н
была последовательность линейных замкнуть
совокупностей E_1, E_2, ..., существует тако
число t', что сечениями прямой $t=t'$ совокупн
стей $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$, ... и будут именно совокупност
E_1, E_2, ...

Замечание. В тексте леммы можно было бы замкну
тые совокупности заменить открытыми, если тольк
вместо построенных при ее доказательстве плоских совокупно
стей $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$, ..., взять их дополнения $C\mathbf{E}_1$, $C\mathbf{E}_2$, ... д
основного квадрата (0,1; 0,1).

F. Hausdorff [5]) ввел в рассмотрение так называемы
δs—функции (суммы произведений) и σd—функции (произве
дения сумм) от последовательности $E_1, E_2, \dots E_n, \dots$ сово
купностей, взятых из какого-нибудь класса совокупностей $(E$
Функции первого типа, например, определяются так. Пуст
дано произвольное множество N различных последовательно
стей $\nu=(n_1, n_2, \dots, n_k, \dots)$ возрастающих натуральных чисел

Взяв последовательность E_1, E_2, ... совокупностей из (E)
положим

$$G=\Phi(E_1, E_2, \dots)=\underset{\nu \in N}{\mathfrak{S}} E_{n_1}E_{n_2}\dots E_{n_k}\dots,$$

[5]) F. Hausdorff, Mengenlehre (Berlin. 1927), стр. 89.

где суммирование распространено на все последовательности ν из N. Аналогично определяются и σd—функции, с заменой произведений суммами, и наоборот.

Из леммы I (и замечания к ней) непосредственно вытекает

Лемма II. Какова бы ни была δs—функция или σd—функция $\Phi(E_1, E_2, \ldots.)$, для класса совокупностей G, которые получаются с помощью этой функции из линейных замкнутых (открытых) совокупностей, существует универсальная плоская совокупность $\mathbf{G}$, представляемая тою же функцией от некоторой последовательности замкнутых (открытых) плоских совокупностей.

Для доказательства достаточно положить, например,

$$\mathbf{G} = \Phi(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \ldots.),$$

где $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \ldots.$—плоские замкнутые (открытые) совокупности, о которых была речь в лемме I (и в замечании к ней). Вместо последовательности $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \ldots.$, очевидно, можно было бы исходить и из любой ее частичной последовательности.

Далее, как явствует из рассуждений F. Hausdorff'a [6]) для каждого типа Borel'евых совокупностей, $\mathfrak{D}_\alpha$ или $\mathfrak{B}_\alpha$, существует такая δs—или σd—функция Φ, с помощью которой из замкнутых, соответственно, открытых совокупностей получаются все совокупности (не выше) этого типа и только они; при этом тою же функцией Φ можно пользоваться как для линейных, так и для плоских совокупностей. Тогда из леммы II следует существование плоской совокупности $\mathbf{D}$ типа $\mathfrak{D}_\alpha$, универсальной для линейных совокупностей (не выше) этого типа [7]).

Эту совокупность $\mathbf{D}$ мы строили на последовательности совокупностей $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \ldots.$. Разобьем теперь последовательность $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \ldots.$ на частичные по схеме (1):

$$\begin{array}{l} \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_3, \mathbf{E}_5, \ldots. \\ \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_6, \mathbf{E}_{10}, \ldots. \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{array}$$

---

[6]) Ibid., стр. 85—90 и 177—178.

[7]) Так как аналитические совокупности могут быть получены из класса замкнутых (или открытых) совокупностей с помощью некоторой δs — функции [см., например, F. Hausdorff, loc. cit., стр. 93], то из леммы II, между прочим, вытекает существование плоской аналитической совокупности, универсальной для линейных аналитических совокупностей. Ср.: W. Sierpiński, Fund. Math., t. VII, стр. 201 и N. Lusin, Fund. Math., t. X, стр. 79.

Если мы, исходя из первой частичной последовательности, построим совокупность $\mathbf{D}_1$, исходя из второй—$\mathbf{D}_2$, и т. д., то мы придем к следующей лемме (аналогичной лемме I):

Лемма III. Существует последовательность плоских совокупностей $\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2, \ldots$ типа $\mathfrak{D}_\alpha$, обладающая следующим свойством: какова бы ни была последовательность линейных совокупностей $D_1, D_2, \ldots$ типа (не выше) $\mathfrak{D}_\alpha$, существует такое число t', что для них всех одновременно:

$$\overset{t'}{\mathbf{D}}_n = D_n. \tag{5}$$

Перейдем теперь к доказательству указанных вначале утверждений:

Теорема I. Каково бы ни было α, существует функция двух переменных $\mathbf{F}(x, t)$ типа g_α, универсальная для функций одной переменной $y = f(x)$ типа (не выше) g_α.

Доказательство. Расположив все рациональные числа в виде последовательности: $r_1, r_2, r_3, \ldots r_n, \ldots$, каждому рациональному числу r_n поставим в соответствие совокупность $\mathbf{D}_n$ (из леммы III). Положим теперь функцию $\mathbf{F}(x, t)$ равной точной нижней границе тех чисел r_n, для которых точка (x, t) не принадлежит $\mathbf{D}_n$. Если же точка (x, t) принадлежит всем $\mathbf{D}_n$, то пусть $\mathbf{F}(x, t) = +\infty$.

Покажем прежде всего, что при любом вещественном ρ:

$$\underset{x,\, t}{\mathcal{E}} (\mathbf{F}(x, t) \geqslant \rho) = \prod_{r_n < \rho} \mathbf{D}_n, \tag{6}$$

где произведение распространено на те значения n, при которых $r_n < \rho$.

Пусть точка (x_0, t_0) принадлежит совокупности в левой части; это значит, что $\mathbf{F}(x_0, t_0) \geqslant \rho$ и, по определению функции $\mathbf{F}$, при всяком $r_n < \rho$ точка (x_0, t_0) принадлежит $\mathbf{D}_n$, а потому принадлежит и произведению, стоящему справа. Обратно, если точка $(x_0, t_0) \varepsilon \prod\limits_{r_n<\rho} \mathbf{D}_n$, т. е., при $r_n < \rho$, $(x_0, t_0) \varepsilon \mathbf{D}_n$, то $\mathbf{F}(x_0, t_0)$, равная точной нижней границе тех r_n, при которых (x_0, t_0) не принадлежит $\mathbf{D}_n$, не может быть меньше ρ, т. е. $\mathbf{F}(x_0, t_0) \geqslant \rho$ и точка (x_0, t_0) принадлежит и совокупности в левой части. Таким образом, соотношение (6) доказано.

Так как все совокупности $\mathbf{D}_n$ типа $\mathfrak{D}_\alpha$, то и их произведение будет (не выше) этого типа, так что [согласно (6)] совокупности $\mathcal{E}(\mathbf{F}(x, t) \geqslant \rho)$ будут типа (не выше) $\mathfrak{D}_\alpha$, откуда, как известно, следует [8]), что функция $\mathbf{F}(x, t)$ будет типа (не выше) g_α.

Покажем теперь, что функция $\mathbf{F}(x, t)$ будет универсальной для функций одной переменной типа (не выше) g_α; отсюда уже будет, между прочим, вытекать, что функция $\mathbf{F}$ сама будет точно типа g_α.

Возьмем любую функцию $f(x)$ типа (не выше) g_α. Положим

$$D_n = \mathcal{E}(f(x) \geqslant r_n) \quad (n=1, 2, 3, \ldots); \tag{7}$$

все эти совокупности будут типа (не выше) $\mathfrak{D}_\alpha$. Тогда, по лемме III, найдется такое число t', что для всех n одновременно будет выполняться соотношение (5). В таком случае, каково бы ни было вещественное число ρ, в виду (6) и (7),

$$\mathcal{E}_x(\mathbf{F}(x, t') \geqslant \rho) = \prod_{r_n < \rho} \overset{t'}{\mathbf{D}}_n = \prod_{r_n < \rho} \mathcal{E}_x(f(x) \geqslant r_n) = \mathcal{E}(f(x) \geqslant \rho),$$

откуда и следует, что тождественно

$$\mathbf{F}(x, t') = f(x).$$

Теорема II. Не существует функции двух переменных $\mathbf{F}(x, t)$ α-го класса (по классификации Baire'a), универсальной для функций одной переменной $y=f(x)$ (не выше) α-го класса.

Доказательство. Предположим противное, т. е. что такая функция $\mathbf{F}(x, t)$ класса α существует. Полагаем $f_0(x)=\mathbf{F}(x, x)$; функция $f_0(x)$ будет (не выше) α-го класса. Очевидно,

$$\mathcal{E}(f_0(x) > 0) \supset \mathcal{E}(f_0(x) = +\infty) \text{ и } \mathcal{E}(f_0(x) < 0) \supset \mathcal{E}(f_0(x) = -\infty).$$

Совокупности в левых частях обоих включений будут типа $\mathfrak{B}_{\alpha+1}$, а в правых—типа $\mathfrak{D}_{\alpha+1}$ [9]). По одной теореме W. Sier-

[8]) H. Hahn, loc. cit., стр. 343

piński'ого[10]), существуют такие совокупности A_1 и A типа $\mathfrak{D}_{\alpha+1}$ и $\mathfrak{B}_{\alpha+1}$ одновременно, что:

$$\mathcal{E}(f_0(x)>0) \supset A_1 \supset \mathcal{E}(f_0(x)=+\infty) \text{ и}$$
$$\supset \mathcal{E}(f_0(x)<0) \supset A_2 \supset \mathcal{E}(f_0(x)=-\infty).$$

Обозначим через A_3 дополнение к сумме совокупносте A_1, A_2 до основного промежутка: $A_3=C(A_1+A_2)$. Эта совокупность, очевидно, также будет типа $\mathfrak{D}_{\alpha+1}$ и $\mathfrak{B}_{\alpha+1}$ одновременно. Определим теперь функцию $f(x)$ следующим образом:

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{в } A_1+A_2 \\ f_0(x)+1 & \text{в} A_3 \end{cases}.$$

Очевидно, что при всяком x выполняется неравенство $f(x)\neq f_0(x)$. В том, что функция $f(x)$ будет (не выше) α-го класса, нетрудно убедиться[11]), установив, что совокупности $\mathcal{E}(f(x)\geqslant p)$ и $\mathcal{E}(f(x)>q)$, будут, соответственно, типа (не выше) $\mathfrak{D}_{\alpha+1}$ и $\mathfrak{B}_{\alpha+1}$. Например, при $p>0$, совокупность $\mathcal{E}(f(x)\geqslant p)=A_3\cdot\mathcal{E}(f_0(x)\geqslant p-1)$ — типа $\mathfrak{D}_{\alpha+1}$; при $p\leqslant 0$, совокупность $\mathcal{E}(f(x)\geqslant p)=A_1+A_2+\mathcal{E}(f_0(x)\geqslant p-1)$ — также типа $\mathfrak{D}_{\alpha+1}$.

Итак, мы построили функцию $f(x)$ (не выше) α-го класса, которая в каждой точке отличается от функции $f_0(x)$. Функция $f(x)$ благодаря этому будет отличаться от всякой функции $\mathbf{F}(x, t')$, при любом постоянном t', по крайней мере, в точке $x=t'$ и поэтому $f(x)$ не может быть получена из функции $\mathbf{F}(x, t)$ ни при каком значении параметра t, вопреки допущению, что функция $\mathbf{F}(x, t)$ является универсальной для функций (не выше) α-го класса. Это противоречие и доказывает теорему.

Замечание I. Если мы, взяв функцию $\mathbf{F}(x, t)$, существование которой устанавливается в теореме I, положим: $f_0(x)=\mathbf{F}(x, x)$, то эта функция будет типа (не выше) g_α. Очевидно, что ее изображение [совокупность точек $(x, f_0(x))$] будет иметь общую точку с изображением всякой функции $f(x)$ типа (не выше) g_α. Напротив, не существует функции $f_0(x)$ (не выше) α-го класса, изображение которой необходимо пере-

9) Ibid., стр. 346 и 343.

10) W. Sierpiński, Fund. Math., t. VI, стр. 1, 2.

11) H. Hahn, loc. cit., стр. 349.

секалось бы с изображением каждой другой функции (не выше) α-го класса. Действительно, построения, выполненные при доказательстве теоремы II, позволяют для каждой функции $f_0(x)$ (не выше) α-го класса определить такую функцию $f(x)$ также (не выше) α-го класса, которая при каждом значении x отлична от первой.

Замечание II. Теореме II (при $\alpha > 1$) можно было бы придать и несколько более общую форму, заменив функции α-го класса (по классификации Baire'a) функциями типа g_α и G_α одновременно (по классификации Young'a).

Sur les fonctions universelles.

Par L. V. Kantorovitch.

Le but de cet article est de démontrer deux théorèmes suivants:

Th. I. Quel que soit le nombre fini ou transfini α, il existe une fonction de deux variables $\mathbf{F}(x, t)$ du type g_α (suivant les notations de M. H. Hahn), universelle pour les fonctions $f(x)$ d'une variable x qui sont g_α au plus.

Cela veut dire qu'en fixant le paramètre t, dans la fonction $\mathbf{F}(x, t)$, on obtiendra toutes les fonctions d'une variable du type g_α au plus et ces fonctions seulement.

Th. II. Il n'existe aucune fonction $\mathbf{F}(x, t)$ de classe α (de Baire), universelle pour les fonctions d'une variable x des classes $\leqslant \alpha$.

Bien entendu, on admet pour les fonctions en question les valeurs $+\infty$ et $-\infty$ aussi.

La démonstration repose sur ce lemme:

On peut construire une suite d'ensembles plans $\{\mathbf{D}_n\}$, du type $\mathfrak{D}_\alpha$, jouissant de la propriété suivante: quelle que soit la suite d'ensembles linéaires $\{D_n\}$, du type $\mathfrak{D}_\alpha$ au plus, on les obtiendra tous simultanément, en coupant les ensembles $\mathbf{D}_n$ par la même droite, convenablement choisie, parallèle à l'axe d'abscisses.