klassischer Raumflug (Newton)

Ein Raumschiff fliegt mit konstanter Beschleunigung a. Die Zeitmessung im Raumschiff unterscheidet sich nicht von der auf der Erde, Geschwindigkeiten und Wegstrecken dürfen einfach addiert werden.

$a = const$	die Beschleunigung	(A)

$v(t) = \int_0^t a \cdot d\tau = a \cdot \int_0^t d\tau$	$v(t) = a \cdot t$	die momentane Geschwindigkeit zur Zeit t	(V)

$s(t) = \int_0^t a\tau \cdot d\tau = a \cdot \int_0^t \tau \cdot d\tau$	$s(t) = \frac{a \cdot t^2}{2}$	der zurückgelegte Weg zur Zeit t	(S)

und einfach umgeformt

$t = \sqrt{\frac{2d}{a}}$	die nötige Zeit, um die Distanz d zurückzulegen	(T)

$v = \sqrt{2ad}$	die Geschwindigkeit im Abstand d von der Erde	(V')

relativistischer Raumflug (Einstein)

Wir nehmen genauso an, dass das Raumschiff mit konstanter Beschleunigung a>0 fliegt. Darunter verstehen wir ganz präzise folgendes: die vom Reisenden (Eigenzeit T) festgestellte Geschwindigkeitszunahme ist zu jeder Zeit gleich $dv = a \cdot dT$
Wir müssen das Gesetz der relativistischen Geschwindigkeitsaddition (Lorentz Transformation) anwenden, da keine simple Addition von Geschwindigkeiten erlaubt ist.

$$v + dv = \frac{v + a \cdot dT}{1 + \frac{v}{c^2} a \cdot dT}$$

da für kleine x $\frac{1}{1+x} \approx 1 - x$ gilt, erhalten wir $v + dv \approx (v + a \cdot dT)(1 - \frac{v}{c^2} a \cdot dT)$ und wenn wir dies ausmultiplizieren und quadratische Terme in dT vernachlässigen erhalten wir für die Differenziale

$$v + dv = v + a \cdot dT - (\frac{v}{c})^2 a \cdot dT$$

Setzen wir wie üblich $\beta=\frac{v}{c}$, so erhalten wir $dv=a\cdot dT\cdot(1-\beta^2)$ und nach Division durch c die separierte Differentialgleichung $\frac{d\beta}{1-\beta^2}=\frac{a}{c}\cdot dT$

Diese lässt sich integrieren zu $\operatorname{artanh}(\beta)=\frac{a}{c}T+const$. Wenn bei T=0 v=0 sein soll, erhalten wir

$\beta(T)=\frac{v(T)}{c}=\tanh(\frac{a}{c}T)$	Damit haben wir eine Formel gewonnen, die uns die erreichte Endgeschwindigkeit liefert, wenn das Raumschiff über die Zeit T (Eigenzeit) hinweg mit Beschleunigung a fliegt.	(1)

Wir wollen auch den Faktor γ bestimmen, der in den Formeln der Längenkontraktion und der Zeitdilatation auftritt. Auch dies ist für ein beschleunigtes Raumschiff keine Konstante mehr! Dazu verwenden wir Gleichung (1) und wenden den Trick $1-\tanh=1-\frac{\cosh^2-1}{\cosh^2}=\frac{1}{\cosh^2}$ an

$\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}=\cosh(\frac{a}{c}T)$	relativistischer Verkürzungsfaktor zur Eigenzeit T	(1')

Praktisch wäre auch eine Formel, um zwischen Bordzeit T (bewegtes System) und Erdzeit (ruhendes System) umrechnen zu können. Wir wenden das Gesetz der Zeitdilatation an

Differenziell wird $T=t\sqrt{1-\beta^2}$ einfach zu $dT=dt\sqrt{1-\beta^2}$. Das integrieren wir zu

$$t=\int_0^T\frac{d\tau}{\sqrt{1-\beta^2}}=\int_0^T\frac{d\tau}{\sqrt{1-\tanh^2(\frac{a}{c}\tau)}}=\int_0^T\cosh(\frac{a}{c}\tau)\cdot d\tau$$

Es ergibt sich somit

$t=\frac{c}{a}\sinh(\frac{aT}{c})$	Zur Berechnung der auf der Erde vergangenen Zeit, wenn an Bord die Zeit T vergangen ist.	(2)

Drücken wir T aus, können wir auch von t auf T schließen:

$T=\frac{c}{a}\operatorname{arsinh}(\frac{at}{c})$	Zur Berechnung der im Raumschiff vergangenen Zeit, wenn auf der Erde die Zeit t vergangen ist.	(2')

Weiters können wir (2) in (1') unter Verwendung von $\cosh=\sqrt{1+\sinh^2}$ einsetzen und gewinnen

$\gamma=\sqrt{1+(\frac{at}{c})^2}$	relativistischer Verkürzungsfaktor zur Erdzeit t	(1")

Um nun die vom Raumschiff innerhalb der Erdzeit t zurückgelegte Distanz d zu ermitteln, berechnen wir durch Kombination der beiden Ergebnisse vorerst v(t). Dazu müssen wir T in (1) durch t ersetzen. Das klappt mit (2') ganz leicht. Erinnern wir uns dabei an

$\tanh=\frac{\sinh}{\cosh}=\frac{\sinh}{\sqrt{1+\sinh^2}}$, so ergibt sich

$$v(t)=c\cdot\tanh(\operatorname{arsinh}(\frac{at}{c}))=c\frac{\sinh(\operatorname{arsinh}(\frac{at}{c}))}{\sqrt{1+\sinh^2(\operatorname{arsinh}(\frac{at}{c}))}}$$ und somit

$v(t)=\frac{at}{\sqrt{1+(\frac{at}{c})^2}}$	Die Geschwindigkeit des Raumschiffes nach vergangener Zeit t des Ruhsystems	(3)

So eine 'einfache' Formel haben wir kaum erwartet.
Differenzieren wir sie doch schnell einmal, um einen Ausdruck für die von der Erde aus beobachtete Beschleunigung zu gewinnen!

$a(t)=\frac{a}{\sqrt{1+(\frac{at}{c})^2}^{\,3}}$	Von der Erde aus beobachtete Beschleunigung des Raumschiffes, wenn dieses mit konstanter Beschleunigung a fliegt.	(4)

Nun aber endlich zum zurückgelegten Weg. Dafür brauchen wir nur (3) zu integrieren, was mittels Substitution leicht gelingt:

$$s(t)=\int_0^t v\cdot d\tau=\int_0^t\frac{a\cdot d\tau}{\sqrt{1+(\frac{a\tau}{c})^2}}d\tau=\frac{c^2}{a}(\sqrt{1+(\frac{at}{c})^2}-1)$$

$s(t)=\frac{c^2}{a}(\sqrt{1+(\frac{at}{c})^2}-1)$	Der innerhalb der Zeit t (Ruhsystem) zurückgelegte Weg	(5)

Da wir aus (2) wissen, dass $\frac{at}{c}=\sinh(\frac{aT}{c})$ gilt, können wir mit $1+\sinh^2=\cosh^2$ umformen

$s(T)=\frac{c^2}{a}(\cosh(\frac{aT}{c})-1)$	Der innerhalb der Zeit T (Raumschiff) zurückgelegte Weg, von der Erde aus betrachtet	(5')

In vielen Aufgaben ist die vom Raumschiff zurückzulegende Distanz d bekannt.
Formen wir (5') um:

$\frac{ad}{c^2}+1=\cosh(\frac{aT}{c})$ und durch auflösen nach T

$T=\frac{c}{a}\operatorname{arcosh}(\frac{ad}{c^2}+1)$	Zeit im Raumschiff nach Zurücklegen der Strecke d (von Erde aus gesehen)	(6)

Gleichung (2) besagt $t^2=(\frac{c}{a})^2\sinh^2(\frac{aT}{c})=(\frac{c}{a})^2(\cosh^2(\frac{aT}{c})-1)$. Mit (5') gibt das

$$t^2=\frac{c^2}{a^2}((\frac{ad}{c^2}+1)^2-1)=\frac{c^2}{a^2}(\frac{a^2d^2}{c^4}+\frac{2ad}{c^2})$$ und somit

$t=\sqrt{(\frac{d}{c})^2+\frac{2d}{a}}$	Erdzeit die das Raumschiff zum Zurücklegen der Strecke d benötigt	(7)

Weiters können wir (1") und (5) verbinden:

$\gamma=\sqrt{1+(\frac{at}{c})^2}$ und $\frac{ad}{c^2}=\sqrt{1+(\frac{at}{c})^2}-1$

$\gamma=\frac{ad}{c^2}+1$	relativistischer Verkürzungsfaktor nach Durchfliegen der Strecke d	(8)

Bemerkung:

Die abgeleiteten Gleichungen gelten nur im Rahmen der speziellen Relativität, also innerhalb von Millionen Lichtjahren in einem nicht gekrümmten leeren Raum.
Genaugenommen müssten wir Gravitationsfelder berücksichtigen (die Rakete muss das Feld der Erde, der Sonne, der Galaxie verlassen) und die Änderung der Raumgeometrie (und dadurch eine Veränderung der Längen und der Uhren) durch Massen berücksichtigen.
Für größere Distanzen (Milliarden Lichtjahre) spielt außerdem die Expansion des Weltalls eine Rolle.
Berechnungen sind dann nur mehr im Rahmen der allgemeinen Relativität möglich.

Zusammenfassung:

a konstante Beschleunigung des Raumschiffs im eigenen System
T Bordzeit, Eigenzeit des Raumschiffes
t Erdzeit, Zeit im ruhenden System
v Geschwindigkeit des Raumschiffs
d Distanz zum Ziel

zurückgelegter Weg	$s(t)=\frac{c^2}{a}\left(\sqrt{1+\left(\frac{at}{c}\right)^2}-1\right)$	(5)
	$s(T)=\frac{c^2}{a}\left(\cosh\left(\frac{aT}{c}\right)-1\right)$	(5')

erreichte Geschwindigkeit	$v(t)=\frac{at}{\sqrt{1+\left(\frac{at}{c}\right)^2}}$	(3)
	$v(T)=c\tanh\left(\frac{a}{c}T\right)$	(1)

Beschleunigung (im Erdsystem)	$a(t)=\frac{a}{\sqrt{1+\left(\frac{at}{c}\right)^2}^3}$	(4)

relativistischer Faktor	$\gamma=\sqrt{1+\left(\frac{at}{c}\right)^2}$	(1")
	$\gamma=\cosh\left(\frac{a}{c}T\right)$	(1')
	$\gamma=\frac{ad}{c^2}+1$	(8)

Flugdauer	$t=\sqrt{\left(\frac{d}{c}\right)^2+\frac{2d}{a}}$	(7)
	$T=\frac{c}{a}\operatorname{arcosh}\left(\frac{ad}{c^2}+1\right)$	(6)

Zeitumrechnung	$t=\frac{c}{a}\sinh\left(\frac{aT}{c}\right)$	(2)
	$T=\frac{c}{a}\operatorname{arsinh}\left(\frac{at}{c}\right)$	(2')

Erdbeschleunigung g = 9.807 m/s^2 = 1.032 $\text{Lichtjahre/Jahre}^2$