SANTI VALENTI

DALL'INTERO ALL'IPERREALE

UN'INTRODUZIONE GRADUATA ALL'ANALISI NON-STANDARD

"L'Analisi Matematica è una sinfonia coerente dell'infinito".

DAVID HILBERT

PREMESSA
(... che gli studenti non possono leggere)

“Ma insomma, che cos’è un conservatore?”, domanda spazientito il giovane B . “Figliolo”, gli risponde sornione il vecchio A , “un conservatore non è altro che un rivoluzionario avanti negli anni”.

Questo sketch *in due battute non troverà tutti d’accordo in fatto di ideologie, ma cade quanto mai a proposito riguardo alle dispute che hanno sempre accompagnato la comparsa del “nuovo” nei fondamenti della disciplina “che non possiede vie regie”.*

L’esempio più recente consiste nell’atteggiamento assunto da molti (troppi!) matematici nei confronti dell’Analisi Non-Standard. Tutti questi signori, infatti, che nella loro giovinezza (di categoria, non anagrafica) si batterono accanto ai progressisti, *sostenitori del numero reale, questi signori che oggi riderebbero di chi, come certi “grandi vecchi” dell’Ottocento, si azzardasse a mettere in discussione la... realtà dei numeri reali; questi signori B , insomma, sostengono essi il ruolo dei “grandi vecchi” odierni, combattendo una nuova guerra santa nei confronti dei numeri iperreali: quelli su cui, appunto, si fonda l’Analisi Non-Standard.*

Invece i signori A , giovani anch’essi come categoria, anche se non di rado anagraficamente più anziani dei signori B , si arrabattano a mostrare (peraltro con pieno successo) la coerenza interna dei numeri iperreali, a evidenziare i molteplici vantaggi del loro uso, a ottenere addirittura risultati non raggiunti dall’Analisi Standard, primo fra tutti il celebre teorema di ALLEN BERNSTEIN *sugli operatori completamente continui.*

Non è saggio affermare nel corso di una contesa che questo o quell’altro dei contendenti abbia ragione. Ma vi sono contese nelle *quali è intellettualmente doveroso schierarsi da una parte precisa. Noi ci troviamo appunto dalla parte dei signori A .*

E poiché occorrerà addurre qualche argomento, fra i non pochi a favore dell'Analisi Non-Standard, torniamo ancora più indietro che ai tempi di RICHARD DEDEKIND *e di* PAUL DU BOIS REYMOND, *per trasferirci nientemeno che all'epoca delle dispute sulla legittimità dei "numeri immaginari". E domandiamo:*

1) non è forse vero che ogni risultato ottenibile tramite il campo complesso si può ugualmente acquisire senza alcun ricorso formale *a quel campo?*

2) non è forse vero, tuttavia, che ciò comporterebbe l'adozione di un linguaggio involuto, se non addirittura contorto, in pratica una raccolta di circonlocuzioni aberranti?

3) non è forse vero, infine, che i fisici ci aggredirebbero a mano armata se, in questo raptus *da puristi a corto di svaghi, sottraessimo loro il caro, vecchio numero* $\mathrm{a} + \mathrm{ib}$ *?*

Sono tre punti, all'apparenza, ma il lettore s'accorgerà subito che portano a una sola conclusione: e cioè che oggi più che mai, ossia da quando il teorema di LÖWENHEIM-SKOLEM *ci ha privato dell'illusione di poter creare a piacimento sistemi d'assiomi categorici, ogni disputa come quella pro o contro iperreale, pro o contro il reale, pro o contro l'immaginario mostra una corda logora in più rispetto alla sua antistoricità: rivela in chi la promuove l'incapacità di riconoscere che fra i primi compiti della Matematica vi è quello di scegliere il linguaggio più idoneo ad affrontare con rigore, rapidità ed eleganza i problemi che le vengono pósti o che essa stessa si pone. E magari, quando riesce, di risolverli.*

Post scriptum

A dispetto della mia requisitoria appena conclusa, nel testo non ho mai voluto forzare la mano insinuando ambigue certezze nella mente del lettore (o peggio, dell'allievo). Intendo dire che, laddove avrei potuto rassicurarlo sul sostanziale isomorfismo ordinato fra i varî campi iperreali, ho preferito invece mettere in luce che tale isomorfismo ha carattere eminentemente algebrico; giacché, per quanto riguarda l'ordinamento, lo si può ottenere solo a un certo prezzo: *l'ipotesi del continuo*.

Questo risultato - comunicatomi parecchi anni or sono da W.S.HATCHER, ancor prima della comparsa del suo lavoro con C.LAFLAMME sui tipi d'ordine nell'iperreale - è tuttavia di enorme importanza: e in verità, quanti analisti hanno avuto a che fare con un modello della teoria degli insiemi secondo ZERMELO-FRAENKEL in cui non valesse *l'ipotesi del continuo*?

(Il teorema contenuto nel lavoro di HATCHER e LAFLAMME si basa su di un risultato di P.ERDÖS, L.GILLMAN e M.HENRIKSON del 1955).

PREMESSA
(che a tutti è permesso di leggere)

Meditato, elaborato e scritto per gli allievi del primo corso di Analisi Matematica del cosiddetto biennio propedeutico, questo volumetto potrebbe ugualmente bene indirizzarsi a non pochi laureati in Matematica, Fisica, etc.

Non si tratta di una provocazione. È soltanto una maniera di dichiarare l'intento del libro; che è quello di aprire un varco per l'Analisi Non-Standard nella formazione di base di quanti usciranno o sono usciti dalle Facoltà scientifiche, e in particolare dai Corsi di Laurea in Matematica e in Fisica.

Questa circostanza - non certo per merito o... colpa di chi scrive - ne fa un'opera obiettivamente originale; o quanto meno appartenente a una schiera così sparuta da indurre chiunque a chiedersi: quale vera *ragione si nasconde sotto la tenace "congiura del silenzio" decretata nei confronti delle discipline* non-standard *in generale?*

Noi possediamo al riguardo un'opinione abbastanza definita, ma poiché assai bene la si trova espressa in un vivace articolo di M.DAVIS *e* R.HERSCH *che comparve su "Scientific American" nel 1972, preferiamo riportare le parole di quegli autori:*

> "Sono stati pubblicati lavori sulla Dinamica Non-Standard e sulla Probabilità Non-Standard. Robinson e il suo allievo Allen Bernstein hanno fatto uso dell'Analisi Non-Standard per risolvere un problema - precedentemente insoluto - riguardante gli operatori lineari compatti. Si deve nondimeno dire che molti analisti restano scettici a proposito dell'importanza ultima del metodo di Robinson. È del tutto vero che ogni cosa che può esser fatta con gli infinitesimi può, in linea

> di principio, esser fatta senza di essi. Forse, come per altre radicali innovazioni, un uso esaustivo delle nuove idee sarà fatto da una nuova generazione di matematici, non tanto immersi nei metodi standard da non poter godere della libertà e delle ampie possibilità dell'Analisi Non-Standard".

Ebbene, se una tale nuova stagione di studi deve aprirsi (e noi crediamo che debba), non sarà certo tacendo dei numeri iperreali che si potrà inaugurarla! Lo scopo di questo testo è appunto quello e soltanto quello di introdurre i non addetti ai lavori all'uso di un campo di numeri iperreali. Tutto ciò evitando il rischio di affastellare una "guida rapida": e cioè quella sorta di pactum sceleris *che, oggi sempre più spesso, rende complici chi dovrebbe insegnare e chi dovrebbe imparare.*

Si è tuttavia accuratamente rifuggita anche un'impostazione di assiomatismo totalitario, che a nostro giudizio congiura con coloro che la sostengono a ingenerare nell'allievo i primi forti disagi già nell'approccio ai numeri reali. Si è perciò preferito il metodo degli ampliamenti: talvolta attraverso la tecnica del campo quoziente, tal altra facendo ricorso (ma senza troppo riempirsene la bocca) alla nozione di filtro e di ultrafiltro. In ogni caso, la struttura algebrica d'appoggio - dapprincipio invocata esplicitamente, poi assunta come sottinteso - è la più familiare al lettore: quella dei numeri interi, ovviamente.

Si spiega così la presenza di un primo capitolo assai discorsivo - quando non volutamente ciarliero - rivolto a illustrare il metodo del campo quoziente. Il metodo in se stesso, si badi, vale a dire senza lo specifico obiettivo degli ampliamenti: tanto che il materiale di lavoro è costituito dalle classi resto modulo un numero primo.

Nel secondo capitolo si passa alla costruzione dei numeri reali, ovviamente con procedura cantoriana; e qui l'esposizione va facendosi più rigorosa, sino a diventare per qualche verso rigida, e comunque tecnicamente in linea con lo stile dell'Analisi Matematica classicamente intesa. È questo il capitolo sul quale più deve esercitarsi l'impegno dello studioso, poiché esso, pur non costituendo l'obiettivo ultimo dell'opera, è tuttavia mirato a predisporre il terreno di giuoco su cui si dovrà decidere la partita con la compagine iperreale.

Per tutte queste ragioni, nel terzo capitolo si procede sperando di aver promosso, attraverso il secondo, sia un atteggiamento più intransigente verso certe "intuizioni" troppo spesso fallaci, sia una sufficiente autonomia nei confronti di un super-tecnicismo di cattiva lega; e così si adotta un'impostazione stilistica piuttosto asciutta, rinunciando (per dirne una) a quell'etichettatura qualificativa degli asserti che, se è indispensabile finché l'allievo non è in grado di distinguere a colpo d'occhio definizioni, assiomi e teoremi, può riuscire esasperante quando il lettore sia ormai smaliziato: qualità, questa, che appunto ci si augura acquisita una volta giunti al capitolo sugli iperreali.

Qualcuno potrà trovare eterogeneo, se non addirittura composito, un tale criterio di stesura. Ciò che possiamo dire a suo sostegno è che una sperimentazione ormai più che decennale ce ne ha confermato l'efficacia. Ed è per questo che ci sentiamo di sottoporlo al giudizio di quanti, non richiesti, si assumessero il disagevole compito di esorcizzare - per dirla col vescovo Berkeley - i fantasmi delle quantità svanite.

ELENCO DEI SIMBOLI

SIGNIFICATO DEI SIMBOLI
USATI NEL TESTO

$=$ *uguale* ($x = y$, x è uguale a y)

$\neq$ *diverso* ($x \neq y$, x è diverso da y)

$<$ *minore* ($x < y$, x è minore di y)

$\leq$ *minore o uguale* ($x \leq y$, x è minore o uguale a y)

$>$ *maggiore* ($x > y$, x è maggiore di y)

$\geq$ *maggiore o uguale* ($x \geq y$, x è maggiore o uguale a y)

$|\ |$ *valore assoluto* ($|x|$, valore assoluto del numero x ; il maggiore fra i due numeri x e $-x$)

[ ] *intervallo chiuso* ($[a, b]$, intervallo chiuso di estremi a e b ; l'insieme dei numeri non minori di a e non maggiori di b)

] [*intervallo aperto* ($]a, b[$, intervallo aperto di estremi a e b ;

l’insieme dei numeri maggiori di a e minori di b)

≡ *coincide* ($\alpha \equiv \beta$, α coincide con β ; α e β denotano il medesimo oggetto)

$\cong^{\mathbf{R}}$ *equivalente secondo* ROBINSON ($\{x_n\}$ ^{R} $\{y_n\}$, la successione $\{x_n\}$ è equivalente secondo ROBINSON alla successione $\{y_n\}$)

∈ *appartiene* (x X , x appartiene a X)

∉ *non appartiene* (x X , x non appartiene a X)

$\subset$ *è contenuto* ($X \quad Y$, X è contenuto in Y)

$\supset$ *contiene* ($X \quad Y$, X contiene Y)

$\cup$ *unione* ($X \quad Y$, X unione Y ; l'insieme di tutti gli elementi che appartengono ad almeno uno fra X e Y)

$\cap$ *intersezione* ($X \cap Y$, X intersezione Y ; l'insieme di tutti gli elementi che appartengono sia a X che a Y)

^{c} *complementare* (^cX , complementare di X ; l'insieme di tutti gli elementi di un ambiente che non appartengono a X)

$-$ *sottratto* ($X - Y$, X sottratto Y; l'insieme di tutti gli elementi di X che non appartengono a Y)

$/$ *quoziente* ($A_{/Y}$, A quoziente Y; il quoziente dell'anello A rispetto a un suo ideale Y)

$\forall$ *per ogni* [ovvero, *qualunque sia*] ($\quad x$, qualunque sia l'oggetto x)

$\exists$ *per qualche* [ovvero, *esiste*] ($\quad x$, esiste un oggetto x)

: *tale che* [ovvero, *per cui*] ($x : P$, un oggetto x per cui sussiste la proprietà P)

$\Rightarrow$ *implica* ($P \quad Q$, P implica Q; se sussiste la proprietà P, allora sussiste anche la proprietà Q)

$\Leftarrow$ *è implicato da* ($Q \quad P$, Q è implicato da P; se non sussiste la proprietà Q, allora non sussiste neanche la proprietà P)

$\Leftrightarrow$ *equivale a* ($P \Leftrightarrow Q$, P equivale a Q; la proprietà P sussiste allora e solo quando sussiste la proprietà Q)

CAPITOLO PRIMO

UN METODO
PER COSTRUIRE NUOVI NUMERI

Illustrazione sul frontespizio dell'opera di Diofanto *Arithmeticorum libri sex, et de numeris multangulis liber unus*, edita nel 1670. È qui che, con una nota a margine, Fermat enuncia (e dichiara di avere dimostrato) il suo celebre "teorema".

“... i fattori primi ideali rivelano l’essenza dei numeri... , li rendono trasparenti e scoprono la loro cristallina struttura intima”.

ERNST KUMMER

1 - *Una vecchia conoscenza: le numerazioni.*

Uno dei più innocenti svaghi a cui possa indulgere un fannullone è senza dubbio quello di... “fare numerazioni”. Ma dopo tutto, chi non si è mai trastullato - se non altro mentalmente - a schierare i numeri in un drappello come questo?

$$(0)\qquad \begin{array}{ccccccc} 1 & 4 & 7 & 10 & 13 & 16 & \dots \\ 2 & 5 & 8 & 11 & 14 & 17 & \dots \\ 3 & 6 & 9 & 12 & 15 & 18 & \dots \end{array}$$

L’*aritmomania*, la tendenza a ingaggiare sfide coi numeri, non di rado è sintomo di turbe nervose. Tuttavia, anche se non così spesso, essa si è rivelata un eccellente punto di partenza verso traguardi di tutto rispetto; e questo che abbiamo sotto gli occhi è proprio uno di quei casi. Verifichiamolo subito con qualche semplice osservazione.

Intanto, si nota subito che i numeri di ciascuna riga sono intervallati di tre unità. Da bambini chiamavamo questi allineamenti “le numerazioni per tre”.

E poi? Si può ancora osservare che - come del resto suggeriscono i puntini - ciascuno degli allineamenti è prolungabile indefinitamente verso destra, sempre procedendo di tre in tre unità. E se chiamiamo in causa anche lo zero e i numeri interi negativi, ciascuno degli allineamenti può prolungarsi anche verso sinistra, dando così luogo allo schema ampliato:

$$(1)\qquad \begin{array}{ccccccccccc} \dots & -8 & -5 & -2 & 1 & 4 & 7 & 10 & 13 & 16 & \dots \\ \dots & -7 & -4 & -1 & 2 & 5 & 8 & 11 & 14 & 17 & \dots \\ \dots & -6 & -3 & 0 & 3 & 6 & 9 & 12 & 15 & 18 & \dots \end{array}$$

Ancora un’osservazione: per formare il nostro drappello ci siamo accontentati di tre soli allineamenti. Non avremmo potuto aggiungere allo schema (0) una quarta, una quinta, una sesta riga, e così di séguito? Proviamo, dunque.

La quarta riga sarebbe stata:

(2) 4 7 10 13 16 19 ...

Perché ci siamo fermati? Qualcosa ci impensierisce? Ma sicuro! Quest'allineamento è già presente nella prima riga del nostro schema iniziale... Allo stesso modo, l'allineamento successivo:

(3) 5 8 11 14 17 20 ...

si trova già nella seconda riga... E ancora: il successivo a questo sarà incluso nella terza, quello che lo segue ricomparirà nella prima, e così via ciclicamente.

Ma c'è di più: prolungando gli ulteriori allineamenti (2) , (3) , etc. verso sinistra, come si è già fatto per i tre dello schema (0) , si ottengono ancora una volta *interamente* le tre righe dello schema (1) ; e soltanto queste. In breve, lo schema (1) non può essere ampliato oltre la terza riga.

Se dunque indichiamo con Z l'insieme dei numeri interi - positivi, negativi e zero - (vedi *Appendice I* , paragrafo **1.5**), possiamo affermare senza esitazioni che *tutto* Z si ripartisce in tre sole numerazioni per 3 . Tuttavia, fra queste, ne esiste una privilegiata, e precisamente la terza, che noi indicheremo col simbolo I_3 .

Le particolari proprietà di cui essa gode possono riassumersi nelle seguenti circostanze:

α) la differenza fra due qualunque elementi di I_3 è ancora un elemento di I_3 [*p.es.:* $9 - (-6) = 15$] ;

β) il prodotto di un qualunque elemento di I_3 per un qualunque elemento di Z è ancora un elemento di I_3 [*p.es.:* $(-6) \times (-2) = 12$] .

Nessuna delle altre due numerazioni dello schema (1) *soddisfa a tali requisiti!* I quali, nonostante la loro assoluta semplicità, ci indirizzano verso una delle più feconde nozioni dell'intera Matematica: quella a cui ERNST KUMMER, lo studioso che la introdusse, diede il nome di *"numero ideale"*; ma che oggi, più brevemente, viene detta *"ideale"*.

L'accostamento a una simile nozione esige l'apertura di una breve parentesi, che fra l'altro varrà ad ampliare la nostra terminologia. Si tratterà di avere qualche minuto di pazienza e di superare il primo, fastidioso impatto con l'elenco di assiomi che stiamo per enunciare.

I vantaggi risulteranno dalle considerazioni successive.

2 - *Un po' di nomenclatura: l'anello*

Dato un insieme A di oggetti di natura qualsiasi, supponiamo che abbiano luogo le seguenti circostanze:

❶ Sia data in A una prima operazione $\oplus$ ("addizione") che *ad ogni coppia* di elementi di A faccia corrispondere *un elemento* di A (la loro "somma").

❷ Tale operazione sia *associativa* e *commutativa*.

❸ Rispetto a tale operazione esista un *elemento neutro*, e cioè un elemento che, "addizionato" a qualsiasi altro, lo lasci inalterato.

❹ Per ogni elemento di A esista l'*elemento opposto*, ossia uno che, "addizionato" al primo, dia come risultato l'elemento neutro.

❺ Sia data in A una seconda operazione $\otimes$ ("moltiplicazione") che *ad ogni coppia* di elementi di A faccia corrispondere *un elemento* di A (il loro "prodotto").

❻ Tale operazione sia *associativa* e *commutativa*.

❻ Rispetto a tale operazione esista un *elemento neutro*, e cioè un elemento che, “moltiplicato” per qualsiasi altro, lo lasci inalterato.

❽ L’elemento neutro relativo alla prima operazione ($\oplus$) sia *diverso* da quello relativo alla seconda ($\otimes$) .

❾ La seconda operazione ($\otimes$) sia *distributiva* rispetto alla prima ($\oplus$) .

Si dice allora che su A è data una struttura di *anello commutativo con unità* (o *unitario*).

Anche se presumibilmente superfluo, rammentiamo, a chiarimento di quanto detto, il significato delle locuzioni “*operazione associativa*”, “*operazione commutativa*” e “*operazione distributiva rispetto a un’altra*”.

Che un’operazione $\oplus$ è *associativa* significa che, quali che siano gli elementi x , y , z , risulta sempre

(4) $$x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z \ ;$$

(si pensi, per esempio, al segno $+$ al posto di $\oplus$ e si otterrà la proprietà associativa dell’addizione ordinaria).

Che un’operazione $\otimes$ è *commutativa* significa che, quali che siano gli elementi x , y , risulta sempre

(5) $$x \otimes y = y \otimes x \ ;$$

(si pensi, per esempio, al segno $\times$ al posto di $\otimes$ e si otterrà la proprietà commutativa della moltiplicazione ordinaria).

Che un’operazione $\otimes$ è *distributiva* rispetto ad un’altra $\oplus$ significa che, quali che siano gli elementi x , y , z , risulta sempre

(6) $$x \otimes (y \oplus z) = (x \otimes y) \oplus (x \otimes z) \ ;$$

(sostituendo a $\otimes$ e $\oplus$ i segni $\times$ e $+$ si ottiene l'ordinaria proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione).

Aggiungiamo che, in un anello, l'operazione di *sottrazione* non necessita di alcun ulteriore assioma. Essa può infatti costruirsi basandosi sull'addizione e sulla definizione di elemento opposto. Precisamente, chiameremo *differenza* fra l'elemento x di A e l'elemento y di A (in quest'ordine, evidentemente...) *la somma di x e dell'opposto di y*.

Avvertiamo infine che usualmente, per significare che sull'insieme A è data una struttura di anello, si dice brevemente che A *è* un anello.

3 - *L'ideale: come una numerazione diventa un "numero".*

Anche il lettore più distratto si sarà accorto, a questo punto, che l'insieme Z degli interi (positivi, negativi e zero) costituisce un esempio immediato di *anello commutativo con unità*. "Bella scoperta!", potrebbe obiettare qualcun altro. "Ma se è proprio dall'osservazione delle proprietà dei numeri interi che abbiamo ricavato le proprietà (assiomi, come dicono i matematici) che definiscono un anello!". E anche questo secondo lettore avrebbe ragione. Tuttavia, la cosa merita qualche parola di commento.

Se gl'interi fossero *l'unico* impianto matematico con le proprietà che abbiamo numerato da ❶ a ❾, tutto il nostro lavoro d'astrazione, più che gratuito, sarebbe stato fondamentalmente inutile. Ma per fortuna non è così. La Matematica è addirittura... costellata di strutture, profondamente diverse da quella degli interi Z, le quali rispondono in pieno alla definizione di anello, con o senza unità. Per non dire poi delle conseguenze del tutto generali che da questa nozione derivano in gran copia. Di tutto ciò avremo conferma fra non molto: al lettore chiediamo ancora un po' di pazienza.

Chiusa questa parentesi, proseguiamo nella ricognizione del nostro schema (1) e delle tre parti che lo costituiscono. Avevamo appena finito di dire che la riga I_3 (che è un sottoinsieme di Z) gode delle seguenti proprietà:

α) se x e y sono elementi di I_3, lo è anche $x-y$

;

β) se x è un elemento di I_3 e z è un elemento di Z , $x \times z$ è un elemento di I_3 .

Ebbene, come si era anticipato, a un qualunque sottoinsieme non vuoto I di un anello A si dà il nome di *ideale di* A quando quel sottoinsieme gode delle proprietà α) e β) ; nelle quali, com'è ovvio, deve leggersi A al posto di Z e assumersi che le operazioni a cui si fa riferimento siano quelle che agiscono in A .

Dunque, nel nostro esempio, si può affermare che I_3 *è un ideale di* Z . Per contro, *non lo sono* gli altri due sottoinsiemi di Z costituenti la prima e la seconda riga dello schema (1) , che indicheremo, nell'ordine, coi simboli Z_1 e Z_2 .

Tutto ciò non esclude che Z_1 e Z_2 meritino anch'essi un attento esame. Ed è Z_1 , in particolare, ad attrarre la nostra attenzione. Infatti, come subito si verifica:

> il prodotto di un qualunque elemento di Z_1 per un qualunque elemento di Z_1 è ancora un elemento di Z_1 ;
>
> il prodotto di un qualunque elemento di Z_1 per un qualunque elemento di Z_2 è ancora un elemento di Z_2 ;
>
> il prodotto di un qualunque elemento di Z_1 per un qualunque elemento di I_3 è ancora un elemento di I_3 (e questo già lo sapevamo...);

ossia, denotando I_3 , Z_1 e Z_2 coi simboli più concisi o , u ed a :

♦ $u \otimes u = u$;
♦ $u \otimes a = a$;
♦ $u \otimes o = o$.

dove, per il momento, il segno $\otimes$ serve solo a rammentare che ciascun intero dell'allineamento scritto alla sua sinistra va moltiplicato per ciascun intero dell'allineamento scritto alla sua destra.

Ora che ci si è fatta la mano, vediamo un po' se qualcosa di simile accade con I_3 , ma questa volta utilizzando l'addizione.

Ancora una volta siamo fortunati. Infatti, come è facile verificare (e il lettore lo faccia sempre!), risulta che:

> la somma di un qualunque elemento di I_3 con un qualunque elemento di Z_1 è ancora un elemento di Z_1 ;
>
> la somma di un qualunque elemento di I_3 con un qualunque elemento di Z_2 è ancora un elemento di Z_2 ;
>
> la somma di un qualunque elemento di I_3 con un qualunque elemento di I_3 è ancora un elemento di I_3 (e anche questo, già lo sapevamo...);

e come prima, il tutto può essere riassunto con questa formulazione:

♦ $o \oplus u = u$;
♦ $o \oplus a = a$;
♦ $o \oplus o = o$.

Anche qui il simbolo $\oplus$, almeno provvisoriamente, serve solo ad avvertire che ogni elemento della riga scritta alla sua sinistra viene addizionato ad ogni elemento della riga scritta alla sua destra.

E tuttavia, ci rimane ancora qualcosa da approfondire: precisamente, il risultato delle "operazioni" $a \otimes a$, $a \otimes o$, $o \otimes o$, $a \oplus a$, $a \oplus u$, $u \oplus u$. (Il lettore avrà certo osservato che l'evidente commutatività delle due "operazioni" $\otimes$ e $\oplus$ ci dispensa dall'esaminare singolarmente i casi restanti: $o \otimes a$ e $u \oplus a$, ad esempio, saranno precisate quando lo siano rispettivamente $a \otimes o$ e $a \oplus u$).

Ora, per quanto riguarda i "prodotti" $a \otimes o$ e $o \otimes o$, il fatto che o (vale a dire I_3) sia un ideale di Z ci assicura, senza ricorso a ulteriori verifiche, che dovrà risultare:

♦ $a \otimes o = o$;
♦ $o \otimes o = o$.

Circa i rimanenti casi, basta osservare che:

il prodotto di un qualunque elemento di Z_2 per un qualunque elemento di Z_2 è sempre un elemento di Z_1 ;

la somma di un qualunque elemento di Z_2 con un qualunque elemento di Z_2 è sempre un elemento di Z_1 ;

la somma di un qualunque elemento di Z_2 con un qualunque elemento di Z_1 è sempre un elemento di I_3 ;

la somma di un qualunque elemento di Z_1 con un qualunque elemento di Z_1 è sempre un elemento di Z_2 ;

e ancora una volta, se ne deduce la seguente traduzione in formule:

- ♦ $a \otimes a = u$;
- ♦ $a \oplus a = u$;
- ♦ $a \oplus u = o$;
- ♦ $u \oplus u = a$.

4 - *Una fenice aritmetica: la tavola pitagorica.*

Giunti a questo punto, ci soffermiamo perplessi. I soprascritti riquadri contengono nientemeno che *dodici formule*, necessarie (e per fortuna sufficienti) a illustrare il meccanismo di funzionamento delle due “operazioni” $\oplus$ e $\otimes$ sull’insieme dei tre simboli o , u , a .

Ma è proprio indispensabile portarsele dietro tutte e dodici? Non si può tentare di riassumerle in uno schema ancora più conciso, pur senza rinunciare al pregio della loro chiarezza?

È qui che ci viene in soccorso uno degli algoritmi più antichi e, se si vuole, geniali che l’uomo abbia mai ideato: la... tavola pitagorica.

Proprio così. Sfruttando lo stesso principio in base al quale i bambini alle prese con la moltiplicazione stabiliscono il valore del prodotto di (diciamo) 7 per 9 , andandolo a trovare all’incrocio fra la *settima riga* e la *nona colonna* (oppure fra la *nona riga* e la *settima colonna*) della loro fida tavola pitagorica, anche noi codifichiamo in due piccole tavole, ciascuna di nove caselle, tutte le possibili "addizioni" e tutte le possibili "moltiplicazioni" fra i tre elementi o , u , a .

Ecco le due tavole:

$\oplus$	o	u	a
o	o	u	a
u	u	a	o
a	a	o	u

$\otimes$	o	u	a
o	o	o	o
u	o	u	a
a	o	a	u

E adesso, finalmente, la sintesi. Poniamo che un lettore, tediato dalle nostre divagazioni iniziali (in effetti piuttosto sempliciotte), abbia saltato a piè pari tutto ciò che precede, interessandosi della cosa solo a partire dalla pagina che ci sta davanti.

Che cosa vedrà questo nostro amico? È presto detto.

Vedrà che si discorre di un insieme $\tilde{A}$ costituito da tre "oggetti" di natura imprecisata: o , u , a , e che in esso agiscono *due distinte operazioni* (adesso senza virgolette!) denotate con $\oplus$ e $\otimes$. Esse gli appariranno immediatamente *associative*, *commutative* e dotate ciascuna di un suo *elemento neutro*: l'"oggetto" o per la prima, l'"oggetto" u per la seconda.

Inoltre, egli si accorgerà che i tre "oggetti" o , u , a , posseggono ciascuno un *opposto*; la prima tavola mostra infatti che $u \oplus a$ dà o , $a \oplus u$ dà o e $o \oplus o$ dà o . Infine, a prezzo di qualche verifica un po' noiosa (ma la effettui anche il lettore che ci ha seguito fin dall'inizio...), egli noterà che la seconda operazione ($\otimes$) è *distributiva* rispetto alla prima ($\oplus$) .

Sicché (ammesso che egli sappia di algebra, *ma nulla sapendo di che cosa le due tavole abbiano a che vedere coi numeri interi*) l'impaziente signore potrà concludere, senza téma di smentite, che $\tilde{A}$ è *un anello commutativo con unità*.

Egli si è così risparmiato tutto il lavoro d'astrazione a cui noi, invece, ci siamo sobbarcati.

Chi ci ha guadagnato in termini di conoscenza? Lo decida il lettore più paziente: lui solo è in grado di farlo.

5 - *Prime sorprese: due più due non fa quattro*

Tutto il marchingegno messo in opera dall'inizio fino a questo punto (che già possiamo considerare un notevole traguardo) merita di essere riesaminato per sommi capi; il che ci servirà a vedere più chiaramente all'interno del meccanismo. E si sa che conoscere i principî di funzionamento di una macchina pòrta non soltanto a usarla meglio, ma addirittura a ricavarne ulteriori prestazioni e, se possibile, a costruirne di più complete e potenti.

Ecco dunque gli stadi del nostro procedimento:

I. abbiamo preso in considerazione un ben noto *anello commutativo unitario*: quello degli interi relativi Z;

II. lo abbiamo ripartito in *tre* opportuni sottoinsiemi (le sue *numerazioni per* 3, poi denotate brevemente con o, u, a) e ci siamo accorti che fra tali sottoinsiemi compariva un *ideale* di Z: precisamente, il sottoinsieme o;

III. abbiamo poi ribadito che, anche per i due restanti sottoinsiemi, aveva luogo la seguente, ovvia proprietà: che due qualsiasi elementi dell'uno, così come due qualsiasi elementi dell'altro, avevano sempre come differenza un elemento di o (vale a dire un multiplo di 3);

IV. su questa base, ossia facendo uso dei tre soli "oggetti" o, u, a, abbiamo costruito un altro *anello* $\tilde{A}$ *commutativo unitario*, per il quale è lecito, oltre che naturale, riguardare quei tre "oggetti" come "nuovi numeri", dal momento che fra essi risulta definito un ben preciso calcolo algebrico; *in più*, le regole di questo calcolo possono totalmente prescindere dalla natura intrinseca di o, u, a: vale a dire che esse si applicano anche senza tenere in alcun conto il fatto che i tre "oggetti" siano "in realtà" tre insiemi di numeri interi.

E adesso, a costo di sembrare volubili, stabiliamo di mutare ancora il nome dei tre "oggetti" o, u, a. Converremo infatti di ribattezzarli con tre simboli che richiamino meglio la loro qualità di “nuovi numeri”, intendendo ciò nel senso sopra precisato.

L’espediente più naturale è di contrassegnare *o* col simbolo che indica ordinariamente lo zero (ossia 0), *u* col simbolo che denota ordinariamente l’unità (ossia 1) e *a* col simbolo che ordinariamente designa il primo numero intero positivo diverso da entrambi i precedenti (ossia 2). La ragione e i vantaggi di quest’ulteriore adeguamento della simboleggiatura verranno apparendo sempre più chiaramente a mano a mano che procederemo.

Una sola avvertenza: per scongiurare ogni rischio di confusione con gli abituali numeri 0 , 1 e 2 , (confusione possibilissima, quando ancora non si possegga una sufficiente familiarità con *l’abitudine del matematico a non annettere suggestivi quanto presunti significati intrinseci ai simboli che egli usa*), ci accorderemo di adottare la scrittura $\underline{0}$, $\underline{1}$ e $\underline{2}$, anziché semplicemente 0 , 1 e 2 , per intendere *o* , *u* e *a* .

Ciò pósto, la semplice riscrittura delle precedenti tavole di addizione e di moltiplicazione le trasformerà in queste altre:

$\oplus$	$\underline{\mathbf{0}}$	$\underline{\mathbf{1}}$	$\underline{\mathbf{2}}$
$\underline{\mathbf{0}}$	$\underline{0}$	$\underline{1}$	$\underline{2}$
$\underline{\mathbf{1}}$	$\underline{1}$	$\underline{2}$	$\underline{0}$
$\underline{\mathbf{2}}$	$\underline{2}$	$\underline{0}$	$\underline{1}$

$\otimes$	$\underline{\mathbf{0}}$	$\underline{\mathbf{1}}$	$\underline{\mathbf{2}}$
$\underline{\mathbf{0}}$	$\underline{0}$	$\underline{0}$	$\underline{0}$
$\underline{\mathbf{1}}$	$\underline{0}$	$\underline{1}$	$\underline{2}$
$\underline{\mathbf{2}}$	$\underline{0}$	$\underline{2}$	$\underline{1}$

Vogliamo sentire come suonano, nel consueto linguaggio dell’aritmetica infantile, le operazioni desunte da queste tavole? Bene.

Ecco dunque qualche esempio che il lettore può direttamente verificare: zero più uno uguale uno, uno più uno uguale due, due più zero uguale due; e fin qui, come si vede, niente di strano. E ancora: zero per zero uguale zero, due per uno uguale due, uno per uno uguale uno; anche qui, tutto sembra filare liscio. Ma proseguiamo. *Due più due uguale uno*! *Uno più due uguale zero*! E ancora: *due per due uguale uno*!...

Che diavolo è successo? Di dove spunta quest’aritmetica sconclusionata? Si direbbe che, una volta per tutte, l’antico caposaldo del buon senso, il cosiddetto “due e due quattro”, sia stato mandato a quel paese... A meno di non pensare che la matematica sia diventata un'opinione, occorre un immediato chiarimento! Dov'è il "trucco"?

Eppure non c'è alcun trucco; anzi, è tutto molto semplice.

Qual era lo scopo delle sottolineature apposte ai simboli 0 , 1 e 2 ? Proprio quella di ricordarci che, qui, *zero*, *uno* e *due* non individuano gli usuali numeri, bensì o , u ed a , ossia gl'insiemi I_3 , Z_1 e Z_2 ; così come i termini *più* e *per* non indicano le antiche operazioni dei banchi di scuola, ma due operazioni un tantino più complesse, seppure perfettamente definite.

Interpretando coll'ausilio di questo dizionario minimo quelle affermazioni tanto stravaganti, vediamo subito che di stravagante, forse, c'è soltanto il linguaggio: i concetti, al contrario, ne escono limpidi, sintetici e ineccepibili.

Ad esempio: traducendo la frase "due più due uguale uno", ecco che cosa otteniamo: "se si somma un qualsiasi elemento dell'insieme Z_2 a un qualsiasi elemento dell'insieme Z_2 , si ottiene un elemento dell'insieme Z_1 ". Assolutamente esatto!

E ancora: "uno più due uguale zero" non significa forse che "la somma di un qualsiasi elemento di Z_1 con un qualsiasi elemento di Z_2 fornisce un elemento di I_3 "? Sicuro! E così per quell'altra strana moltiplicazione: "due per due uguale uno"...

Ma allora, per quanto il nuovo linguaggio possa apparirci stravagante, noi ce lo teniamo; perché è conciso, preciso e comodissimo. E sono questi, per un matematico, i pregi d'un linguaggio. La stranezza non lo preoccupa, se non vi è rischio di equivoco: basta solo precisare sin dall'inizio *in quale lingua si sta parlando*.

A questo proposito, chi non ricorda il vecchio bisticcio dei nostri primi anni di ginnasio? "*I VITELLI DEI ROMANI SONO BELLI*", ci si diceva ammiccando... Ebbene, se stabiliamo di intenderci in latino, nessuno potrà pensare che quella frase annetta leggiadria ai giovenchi dell'agro pontino; capirà invece che essa intima al prode Vitellio di accorrere allo squillo di guerra del dio patrio.

Trattandosi di letteratura, per quanto spicciola e giocosa, la stravaganza della frase è degna di nota. In ambito matematico, essa non merita che un fuggevole cenno.

6 - *Tentativi di generalizzazione: un insuccesso?*

Ma le sorprese forniteci dal piccolo anello $\tilde{A}$, costituito dai tre elementi $\underline{0}$, $\underline{1}$, $\underline{2}$, non sono ancora finite.

Nel riesaminare infatti la sua tavola di moltiplicazione, ci colpisce un particolare di notevole interesse: tutti i suoi elementi, *ad eccezione di* $\underline{0}$, hanno un *"inverso"*. In altri termini, qualunque sia l'elemento di $\tilde{A}$ diverso da $\underline{0}$, c'è un altro elemento di $\tilde{A}$ che, moltiplicato per il primo, dà per risultato l'unità, cioè $\underline{1}$; la verifica non è difficile, dal momento che si tratta di controllare la nostra affermazione per due soli elementi: $\underline{1}$ e $\underline{2}$.

E infatti:

$$(7) \qquad \underline{1} \otimes \underline{1} = \underline{1} \quad , \quad \underline{2} \otimes \underline{2} = \underline{1} \quad .$$

Dunque, l'inverso di $\underline{1}$ è $\underline{1}$, l'inverso di $\underline{2}$ è $\underline{2}$.

Non si tratta di una circostanza trascurabile! Basti pensare al fatto che *è proprio l'esistenza di un inverso per ogni elemento diverso dallo zero a consentire l'operazione di "divisione"*.

Quest'operazione, come ben si sa, non è possibile nell'ambito degl'interi Z ; o per lo meno, *non sempre* lo è. E saremmo tentati di dire "quasi mai", dal momento che, fra gl'infiniti numeri interi, soltanto due posseggono un inverso; e precisamente, il numero intero 1 e il numero intero -1 ; i quali (ma il fatto è del tutto contingente) sono ciascuno l'inverso di se stesso.

Orbene, qui non ha alcuna rilevanza il fatto che gli elementi di Z dotati di inverso siano *tanti quanti* gli elementi di $\tilde{A} \equiv \{ \underline{0} , \underline{1} , \underline{2} \}$, che pure ne posseggono uno. Il fatto profondamente diverso, quello che essenzialmente distingue le due strutture in esame (quella di $\tilde{A}$ e quella di Z), è che *tutti gli elementi non nulli* di $\tilde{A}$ ammettono un inverso, mentre soltanto *alcuni degli elementi non nulli* di Z ne sono provvisti.

L'evidente importanza della cosa ha fatto sì che si adottasse un termine speciale per indicare quegli anelli commutativi unitarî nei quali *ogni* elemento non nullo possiede un inverso: a tali anelli, infatti, si dà il nome di *campi*.

Orbene, il piccolo anello $\tilde{A}$ da noi realizzato tramite gli elementi

$\underline{0}$, $\underline{1}$, $\underline{2}$ è un *campo*. Esso possiede quindi una struttura notevolmente più raffinata di quella dell'anello Z al quale, per così dire, deve le sue origini!

Tutto questo, fatalmente, ci rimanda a un quesito, che è poi il nodo concettuale dell'intera questione. Vale a dire: la laboriosa e - ce lo si conceda - elegante costruzione da noi messa in opera a partire da quel remoto ideale (l'allineamento costituito dai multipli di 3 , rammentate?) deve ritenersi l'esempio tipico di analoghe costruzioni realizzabili a partire da *qualsiasi altro ideale* dell'anello Z ?

Più precisamente: se avessimo preso le mosse da un qualsiasi altro ideale di Z (ad esempio quello dei multipli di 5 , o dei multipli di 6 , o dei multipli di 8...) saremmo pervenuti a un risultato analogo *in tutto e per tutto*? In una parola, avremmo ancora ottenuto un *campo*?

Un'ulteriore applicazione del "nostro" metodo *sembrerebbe* farci propendere per il sì...

Partiamo infatti dall'ideale I_5 (quello dei multipli di 5); con lo stesso procedimento adottato per l'ideale I_3 , otterremo senza alcuna difficoltà un anello commutativo unitario dotato della seguente tavola di moltiplicazione:

(8)

$\otimes$	$\underline{\mathbf{0}}$	$\underline{\mathbf{1}}$	$\underline{\mathbf{2}}$	$\underline{\mathbf{3}}$	$\underline{\mathbf{4}}$
$\underline{\mathbf{0}}$	$\underline{0}$	$\underline{0}$	$\underline{0}$	$\underline{0}$	$\underline{0}$
$\underline{\mathbf{1}}$	$\underline{0}$	$\underline{1}$	$\underline{2}$	$\underline{3}$	$\underline{4}$
$\underline{\mathbf{2}}$	$\underline{0}$	$\underline{2}$	$\underline{4}$	$\underline{1}$	$\underline{3}$
$\underline{\mathbf{3}}$	$\underline{0}$	$\underline{3}$	$\underline{1}$	$\underline{4}$	$\underline{2}$
$\underline{\mathbf{4}}$	$\underline{0}$	$\underline{4}$	$\underline{3}$	$\underline{2}$	$\underline{1}$

(e omettiamo la tavola di addizione poiché, come il lettore può riconoscere per suo conto, essa è del tutto irrilevante ai fini delle considerazioni che stiamo svolgendo).

Allo stesso modo, prendendo le mosse dall'ideale I_6 (quello dei multipli di 6), avremmo costruito un anello commutativo con unità dotato della seguente tavola di moltiplicazione:

(9)

$\otimes$	$\underline{\mathbf{0}}$	$\underline{\mathbf{1}}$	$\underline{\mathbf{2}}$	$\underline{\mathbf{3}}$	$\underline{\mathbf{4}}$	$\underline{\mathbf{5}}$
$\underline{\mathbf{0}}$	$\underline{0}$	$\underline{0}$	$\underline{0}$	$\underline{0}$	$\underline{0}$	$\underline{0}$
$\underline{\mathbf{1}}$	$\underline{0}$	$\underline{1}$	$\underline{2}$	$\underline{3}$	$\underline{4}$	$\underline{5}$
$\underline{\mathbf{2}}$	$\underline{0}$	$\underline{2}$	$\underline{4}$	$\underline{0}$	$\underline{2}$	$\underline{4}$
$\underline{\mathbf{3}}$	$\underline{0}$	$\underline{3}$	$\underline{0}$	$\underline{3}$	$\underline{0}$	$\underline{3}$
$\underline{\mathbf{4}}$	$\underline{0}$	$\underline{4}$	$\underline{2}$	$\underline{0}$	$\underline{4}$	$\underline{2}$
$\underline{\mathbf{5}}$	$\underline{0}$	$\underline{5}$	$\underline{4}$	$\underline{3}$	$\underline{2}$	$\underline{1}$

(e omettiamo la tavola di addizione per le ragioni già dette).

Ma, a questo punto, un attento confronto delle tavole (8) e (9) ci riserva una spiacevole sorpresa: mentre tutti gli elementi non nulli dell'anello desunto da I_5 ammettono inverso, *nell'anello desunto da* I_6 *, i soli elementi non nulli dotati di inverso sono* $\underline{1}$ *e* $\underline{5}$. Tutti gli altri ne sono privi!

Dalla (8) , infatti, risulta che:

- ♣ l'inverso di $\underline{1}$ è $\underline{1}$,
- ♣ l'inverso di $\underline{2}$ è $\underline{3}$,
- ♣ l'inverso di $\underline{3}$ è $\underline{2}$,
- ♣ l'inverso di $\underline{4}$ è $\underline{4}$,

mentre, a norma della (9) :

- ♣ l'inverso di $\underline{1}$ è $\underline{1}$,
- ♣ l'inverso di $\underline{5}$ è $\underline{5}$,

ma gli elementi $\underline{2}$, $\underline{3}$, $\underline{4}$, (oltre che, ovviamente, lo $\underline{0}$), non ammettono inverso.

Dunque, l'anello ottenuto da I_5 *è ancora un campo*, quello ottenuto da I_6 *non lo è*.

Si tratta d'un semplice incidente? È difficile crederlo: si è piuttosto indotti a sospettare che il guaio derivi da qualche anomalia intrinseca - da qualche... gene, staremmo per dire - dell'ideale di partenza. E quindi, visto che ciascuno di tali ideali è individuato da un numero intero (i cui multipli lo costituscono), da qualche proprietà di questo numero.

Come ora vedremo, le cose stanno proprio così.

7 - *Un ospite sgradito: il "divisore dello zero".*

Per chiarire la questione, occorre prender le mosse un po' da lontano; ma alla fine vedremo che ne sarà valsa la pena, poiché avremo scoperto una quantità di "cosette" interessanti.

Cominciamo dunque con l'osservare che la tavola (9) , oltre all'anomalia già rilevata, ne presenta un'altra non meno imbarazzante.

Si tratta di questo: mentre nella tavola di moltiplicazione di $\tilde{A}$, così come nella (8), *non si ottiene mai lo* $\underline{0}$ *come prodotto di due fattori diversi da* $\underline{0}$, nella tavola (9) ciò avviene in svariati modi. Qui, infatti, si può ottenere $\underline{0}$ come prodotto di $\underline{2}$ per $\underline{3}$ e di $\underline{3}$ per $\underline{4}$ oltreché, ovviamente, invertendo l'ordine dei fattori in queste moltiplicazioni.

Che cosa ha a che vedere tutto questo con la mancata esistenza dell'inverso per i "numeri" $\underline{2}$, $\underline{3}$ e $\underline{4}$? Ebbene, *questo fatto ne è proprio la causa!*

Supponiamo infatti di non sapere che, per esempio, $\underline{3}$ e $\underline{4}$ non hanno inverso, ma di esserci accorti che $\underline{3}$ per $\underline{4}$ dà $\underline{0}$. Questo ci basterà a dimostrare, *senza alcun esame della tavola* (9), che né $\underline{3}$, né $\underline{4}$, possono ammettere un inverso.

In effetti, se $\underline{n}$ fosse l'inverso - diciamo - di $\underline{3}$, se cioè fosse:

$$\underline{3} \otimes \underline{n} = \underline{1} \ , \tag{10}$$

moltiplicando per $\underline{4}$ ambo i membri dell'uguaglianza, si avrebbe:

$$\underline{4} \otimes (\underline{3} \otimes \underline{n}) = \underline{4} \otimes \underline{1} \ ; \tag{11}$$

la quale, per la proprietà associativa, può scriversi:

$$(\underline{4} \otimes \underline{3}) \otimes \underline{n} = \underline{4} \otimes \underline{1} \ ; \tag{12}$$

ma poiché noi sappiamo che $\underline{4}$ "per" $\underline{3}$ dà $\underline{0}$ e che $\underline{4}$ "per" $\underline{1}$ *deve* dare $\underline{4}$, la (12) non afferma altro se non che:

$$\underline{0} \otimes \underline{n} = \underline{4} \ , \tag{13}$$

ossia, dato che lo 0 annulla tutti i "prodotti":

(14) $$\underline{0} = \underline{4} \ ,$$

uguaglianza evidentemente assurda. Dunque il “numero” $\underline{n}$, ossia il presunto inverso di $\underline{3}$, non esiste.

In modo analogo si può dedurre che non esiste l’inverso di $\underline{4}$; e lo stesso potrà farsi per il “numero” $\underline{2}$.

È quindi il caso di denotare con un termine apposito quegli anelli commutativi unitarî nei quali un prodotto è nullo se solo se è nullo uno almeno dei fattori; e in effetti, un siffatto anello viene detto *dominio di integrità*.

Inoltre, se x e y sono elementi non nulli dell’anello A ed è nullo il prodotto $x \otimes y$, allora si dice che x , al pari di y , è un *divisore dello zero*. Sicché, si può anche dire che *un dominio d’integrità è un anello privo di divisori dello zero*.

Tornando al nostro caso, possiamo concludere che, mentre i due anelli ottenuti da I_3 ed I_5 sono dominî d’integrità, quello ottenuto da I_6 non lo è.

Qui il lettore potrebbe muovere un’obiezione: “Neppure Z (l’anello degli interi) ammette divisori dello zero! Dunque, anche Z è un dominio d’integrità. Come mai, allora, in Z non esiste l’inverso per ciascun elemento diverso da 0 ? ”.

Una simile obiezione si fonda in realtà su di un falso ragionamento: tanto frequente quanto banale, ma non per questo meno grave.

Noi non abbiamo mai detto che *se* mancano divisori dello zero, *allora* esiste l’inverso per ogni elemento non nullo! Noi ci siamo limitati ad affermare che *se* vi sono divisori dello zero, *allora* non tutti gli elementi non nulli posseggono l’inverso.

In altre parole, *l’assenza di divisori dello zero è una condizione necessaria ma non sufficiente a garantire l’esistenza dell’inverso per ogni elemento non nullo dell’anello* A .

In termini ancora equivalenti: se è indiscutibile che *ogni campo è un dominio di integrità*, non è affatto vero che *ogni dominio di integrità sia un campo*!

Tuttavia, un noto teorema d’algebra - che qui non è il caso di dimostrare - afferma che *ogni dominio d’integrità finito* (dotato cioè di un numero finito di elementi) *è un campo*.

Ecco così svelato l'arcano: gli anelli dedotti da I_3 e I_5, in quanto dominî d'integrità *finiti*, sono anche *campi*; l'anello Z degli interi, seppure dominio d'integrità, *non è finito*, e dunque nulla di strano che esso *non sia un campo*.

8 - *La chiave del rebus: i numeri primi.*

Ora è chiaro che la questione sollevata dalle spiacevoli scoperte sull'anello ottenuto da I_6 è alquanto ridimensionata: si tratta di appurare per quale ragione taluni ideali portino a dominî d'integrità, mentre altri portano ad anelli con divisori dello zero.

Quando l'avremo capito, sarà anche chiaro (dal momento che tali anelli sono sempre dotati di un numero finito di elementi) il motivo per cui, nel primo caso, si ottengano campi; nel secondo, soltanto puri e semplici anelli.

Per quanto i casi fin qui esaminati indirizzino già verso la soluzione del problema, forse non sarà inutile fornire al lettore un'ulteriore base di riflessione, consistente appunto in un ennesimo esempio di anello costruito con un ideale degli interi.

Esso sarà ancora un anello *con divisori dello zero*, e precisamente quello che si ottiene a partire da I_8 (l'ideale costituito dai multipli di 8, come ormai ben sappiamo). Applicando il procedimento che ci è divenuto familiare, potremo scrivere senza alcuna difficoltà la sua tavola di moltiplicazione.

Esaminiamola, dunque:

$\otimes$	$\underline{0}$	$\underline{1}$	$\underline{2}$	$\underline{3}$	$\underline{4}$	$\underline{5}$	$\underline{6}$	$\underline{7}$
$\underline{0}$	$\underline{0}$	$\underline{0}$	$\underline{0}$	$\underline{0}$	$\underline{0}$	$\underline{0}$	$\underline{0}$	$\underline{0}$
$\underline{1}$	$\underline{0}$	$\underline{1}$	$\underline{2}$	$\underline{3}$	$\underline{4}$	$\underline{5}$	$\underline{6}$	$\underline{7}$
$\underline{2}$	$\underline{0}$	$\underline{2}$	$\underline{4}$	$\underline{6}$	$\underline{0}$	$\underline{2}$	$\underline{4}$	$\underline{6}$
$\underline{3}$	$\underline{0}$	$\underline{3}$	$\underline{6}$	$\underline{1}$	$\underline{4}$	$\underline{7}$	$\underline{2}$	$\underline{5}$
$\underline{4}$	$\underline{0}$	$\underline{4}$	$\underline{0}$	$\underline{4}$	$\underline{0}$	$\underline{4}$	$\underline{0}$	$\underline{4}$
$\underline{5}$	$\underline{0}$	$\underline{5}$	$\underline{2}$	$\underline{7}$	$\underline{4}$	$\underline{1}$	$\underline{6}$	$\underline{3}$
$\underline{6}$	$\underline{0}$	$\underline{6}$	$\underline{4}$	$\underline{2}$	$\underline{0}$	$\underline{6}$	$\underline{4}$	$\underline{2}$
$\underline{7}$	$\underline{0}$	$\underline{7}$	$\underline{6}$	$\underline{5}$	$\underline{4}$	$\underline{3}$	$\underline{2}$	$\underline{1}$

anche qui compaiono tre elementi privi di inverso: $\underline{2}$, $\underline{4}$ e $\underline{6}$ (senza contare, com'è d'obbligo, lo $\underline{0}$); e, manco a dirlo, $\underline{2}$, $\underline{4}$ e $\underline{6}$ sono divisori dello zero.

Ma, per esempio, vogliamo tradurre nel linguaggio dei "vecchi numeri" la frase: " $\underline{2}$ è un divisore dello zero"? Essa suonerà pressappoco così: *"un qualunque intero della numerazione Z_2 , (numerazione, beninteso, per* 8 *) quando venga moltiplicato per un qualunque intero della numerazione Z_4 , dà luogo a un intero dell'ideale I_8".* Niente di più.

Pertanto, affinché un ideale I_k *non* dia luogo a queste sgradite sorprese occorrerà (e basterà) che l'anello da esso ottenuto *non* presenti numerazioni, oltre Z_k e Z_1 , il cui prodotto conduce fra i multipli di k .[*]

Ma che cosa occorre (e basta) perché non compaiano simili numerazioni? A questo punto, la risposta diviene banale: *occorre (e basta) che il numero k (con $k > 1$) non possa ottenersi come prodotto di due numeri interi (positivi) diversi da k stesso e da* 1 (si rilegga la nota a piè di pagina...). In termini più concisi, *occorre (e basta) che k sia un numero primo.*

È proprio ciò che andavamo cercando!

Più che naturale, quindi, attribuire agli ideali I_k (con k primo) un ruolo privilegiato fra tutti gli ideali di Z , e chiamarli coerentemente *ideali primi*; per poi estendere la cosa a qualsiasi anello commutativo unitario A e dire *primo* un suo ideale I quando *non vi è alcuna coppia di elementi estranei ad I che dia come prodotto un elemento di I .*

Con ciò non si ritenga che, in un qualsiasi anello, basta ricorrere a un ideale primo per ottenere, tramite il "nostro" metodo, un *campo* di "nuovi numeri": un noto teorema dell'algebra assicura infatti che, mediante ideali primi, si costruiscono *dominî d'integrità*; il che, come sappiamo, garantisce *l'assenza di divisori dello zero*, ma non sempre *l'esistenza dell'inverso per ogni elemento non nullo*.

Questa piccola delusione verrà tuttavia superata nel prossimo paragrafo: vedremo infatti che alcuni speciali ideali primi (i cosiddetti *ideali massimali*) portano in ogni caso al *campo quoziente*, come

---

[*] Qui, come sempre, s'intende $k > 1$. Il lettore ne veda la ragione...

appunto suol dirsi il campo cui si perviene col “nostro” metodo.

9 - *L’ideale massimale, ovvero: l’ultima frontiera.*

Considerando dunque la questione dal punto di vista più generale, sia ancora A un anello commutativo unitario.

Per quanto poco possiamo sapere su di esso, sussisterà pur sempre fra i suoi ideali una gerarchia - per così dire - “naturale”: quella stabilita dalla relazione di contenimento fra insiemi. A norma di questa, diremo che un ideale I' *precede* un ideale I'' allorché I' è contenuto (propriamente o non) in I'' ; e, con locuzione conseguente, diremo che I'' *segue* I' .

Basterà tuttavia un attimo di riflessione sugli esempi a noi noti per convincerci che *non sempre due ideali si lasciano confrontare secondo questa gerarchia*. Chi infatti si sentirebbe di affermare che l’ideale I_3 precede l’ideale I_5 ? O che I_5 precede I_3 ? D’altro canto, si vede subito che I_{15} li precede entrambi; e che, per esempio, esso segue I_{105} .

Rinunciando allora a pretese tanto esigenti, ci si potrebbe quanto meno chiedere se in A esista sempre un ideale I_0 che precede tutti gli altri; o viceversa, se ne esista uno I_Ω che li segue tutti. Ma fin qui la cosa non presenta lati oscuri, giacché l’ideale costituito dallo 0 di A è contenuto in ogni altro ideale, così come l’ideale costituito da A contiene ogni altro ideale.

Non altrettanto pronta è la risposta se ci si riferisce a ideali che, nella suddetta gerarchia, *si collochino tra* $\{ 0 \}$ *ed* A . Ossia, limitando la questione al suo aspetto più interessante: *possiamo esser certi che in qualunque anello* A *vi sia un ideale* I_Ω *cui “sovrasta” il solo* A *?*

Questa domanda è lievemente ma... terribilmente diversa dalla precedente: in essa infatti non si parla di *ideali che contengano tutti gli altri*, bensì di *ideali che non siano contenuti in alcuno degli altri*; fuorché, ovviamente, in A . E le due cose sono ben distinte!

Ebbene, qualunque sforzo vòlto alla ricerca di una *procedura costruttiva* utile a fornire tali ideali è votato al fallimento.

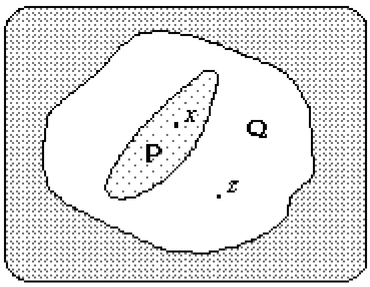
Addentrarci in simili questioni, che investono i fondamenti stessi della Matematica, non è nei nostri scopi. Va detto tuttavia che, proprio in questo frangente in cui sembra prevalere la rassegnazione, ecco intervenire uno dei più riposti ma insieme più fecondi risultati del pensiero matematico moderno: è un risultato che si riconduce direttamente all'importantissimo "assioma della scelta" (vedi l'*Appendice II*) e consiste nel cosiddetto

Lemma di KRULL - *Se* A *è un anello commutativo dotato di unità, allora ogni ideale di* A *che non sia* A *stesso è contenuto in un ideale* I_Ω *che gode delle seguenti proprietà:*

♠ $I_\Omega \neq A$ *;*
♠ *nessun ideale segue* I_Ω *se non* I_Ω *stesso ed* A .

Tutto ciò non esclude che, in alcuni casi particolari, si possano costruire... "pezzo per pezzo" ideali che godono delle due suddette proprietà; i quali, come si è accennato al termine del paragrafo precedente, vengono detti *massimali*.

Noi lo abbiamo fatto, *in* Z , proprio con *gli ideali primi*, i quali, per l'appunto, *risultano massimali*.



Se infatti Q è un ideale che contiene propriamente l'ideale primo P , si dica x il numero primo che individua P e $z \neq x$ l'intero che individua Q ; poiché la differenza $x - z$ appartiene a Q , esiste un intero k (ovviamente diverso sia da 0 che da -1) per il quale risulta $x - z = k\,z$, il che è come dire: $x = (k+1)\,z$; ma, essendo x un numero primo, quest'uguaglianza implica $z = 1$. Dunque l'ideale Q coincide con l'intero anello Z , e l'asserto resta dimostrato.

Attenzione, però: se è vero che ogni ideale massimale è primo, *non sempre un ideale primo risulta massimale*! Ma in ogni caso, rispetto alla questione che ci eravamo pósti all'inizio di questo paragrafo, il *lemma di* KRULL risponde affermativamente.

Un tale risultato ci tornerà addirittura indispensabile nel terzo capitolo, dove ci impegneremo a dimostrare, costruendolo "pezzo per pezzo", l'esistenza del campo "iperreale". Ma a questo scopo occorrerà (come del resto lascia intendere la denominazione stessa di quel campo) una conoscenza adeguata - vale a dire essenzialmente *strutturale* - del campo dei numeri "reali".

CAPITOLO SECONDO

DALL’ENTE NUMERO
AL NUMERO-PROCEDIMENTO

M.C.Escher, *Metamorphosis III*, particolare.

"A pensarci bene, è soltanto una difficoltà di ordine psicologico a conferire carattere problematico al concetto di numero reale. Che cosa intendiamo, a rigor di termini, quando diciamo di conoscere un numero irrazionale, per esempio $\sqrt{2}$ *, e che possiamo formarci un'idea della sua grandezza? Che cosa nasconde in sé tale convinzione? Certamente nient'altro se non la conoscenza di un procedimento idoneo a calcolare* $\sqrt{2}$ *con un numero di cifre decimali grande quanto si vuole".*

FRIEDRICH WAISMANN

LEGENDA

In questo capitolo si sono adottati alcuni espedienti grafici destinati a rendere la lettura più fluida e la trattazione più discorsiva.

E così, le definizioni, i teoremi e le proposizioni più significative sono preceduti a margine rispettivamente dalle lettere D , T e P , ciascuna seguita dal relativo numero d'ordine.

Inoltre, subito dopo quei passaggi che più facilmente potrebbero ingenerare equivoci o dar luogo a interpretazioni erronee, si è pensato di inserire un richiamo in qualche modo... clamoroso, racchiudendo la corrispondente precisazione entro un riquadro di questo tipo:

> ATTENZIONE !
>
> [TESTO DELLA PRECISAZIONE ED EVENTUALI ESEMPI]

Nel corso dell'esposizione, quando occorra farvi riferimento, un simile riquadro viene chiamato "cartello d'allarme".

1 - ***Quadrato e diagonale: la Waterloo dei razionali.***

Nel primo capitolo, come "materiale" per l'applicazione del metodo ivi introdotto, si è scelto *l'anello* Z *dei numeri interi* (positivi, negativi e zero); e come *ideale massimale* rispetto al quale effettuare il quoziente, un *ideale primo* I_k . Ne è venuto, come *anello quoziente* , il *campo* delle cosiddette *classi resto modulo* k , dove k è il numero primo i cui multipli costituiscono l'ideale *divisore*.

Un metodo, come si è detto, ampiamente applicabile in diversissimi contesti. Non vi sarebbe, quindi, che l'imbarazzo della scelta, se ci si volesse sbizzarrire in una massiccia quanto indiscriminata opera di... quozientamento di anelli! E in effetti, anche se con criteri sistematici e risultati assai profondi, è stato ed è tuttora questo un capitolo fra i più interessanti di una vasta silloge di studi di Algebra.

Anche noi, mirando a un preciso obiettivo (e lo dichiara il titolo di questo libro), siamo ben orientati riguardo al successivo passo da compiere: esso dovrà avviarci su di una strada al termine della quale troveremo quell'importantissimo anello quoziente che va sotto il nome di *campo dei numeri reali*, e che si designa col simbolo R .

Ripercorrendo in astratto i vari stadi del nostro metodo, vediamo subito che ci occorre anzitutto individuare un *anello commutativo con unità*, possibilmente costituito da "oggetti" a noi familiari i quali rispondano, almeno parzialmente, ai requisiti pratici che speriamo pienamente soddisfatti dal nuovo campo numerico.

Ora, per quanto vago possa apparire il progetto, l'esperienza di ogni giorno, oltre che gli studi matematici della scuola secondaria, ci hanno preparato a considerare come ragionevole punto di partenza il *campo dei numeri razionali*, di norma indicato col simbolo Q .

È presumibile, del resto, che gli elementi di tale campo siano in qualche misura familiari, quanto meno sotto l'impropria denominazione di “frazioni”, anche al cosiddetto “uomo della strada”; e che essi vengano utilizzati, anche se a volte con una certa difficoltà, per le quotidiane esigenze di calcolo. Daremo quindi per scontata, da parte del lettore, una certa conoscenza del campo Q , ma avvertiamo subito che *l’anello commutativo con unità* da cui prenderemo le mosse *non sarà questo campo.* (Quozientando Q non troveremmo altro che lo stesso Q ...). Ricorreremo invece a un particolare anello di successioni di suoi elementi: vale a dire, a un anello costituito da successioni di numeri razionali opportunamente scelte.

A chiarire i criterî che guideranno un tale scelta può giovare, più di ogni considerazione teorica, un momento di riflessione sul classico problema dell’*incommensurabilità della diagonale del quadrato rispetto al lato del quadrato stesso.* Riassumiamolo rapidamente.

Chi dovesse determinare la lunghezza della diagonale di un quadrato il cui lato abbia lunghezza 1 e conoscesse appena il teorema di PITAGORA, sulle prime riterrebbe la questione del tutto banale. Il suddetto teorema, infatti, fornisce la lunghezza d di quella diagonale attraverso i seguenti, immediati passaggi:

$$(1) \qquad d = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \quad ;$$

dopo di che, non vi sarebbe che da individuare quel numero *razionale* (ossia rappresentato da un *rapporto* - in latino *ratio* - di numeri interi) che si ottiene calcolando la radice quadrata di 2 ...

Senonché, seguitando su questa strada, si va incontro a un’amara sorpresa: quella che tanto costernò gli stessi pitagorici (così narra la leggenda) da indurli a tutelare la loro scoperta con una terribile maledizione contro lo sciagurato che ne avesse fatto parola...

Ma di che si tratta? Semplicissimo: *non esiste alcun numero razionale che valga “radice di* 2 *”!* E altrettanto semplice è convincersene. Se infatti un qualche numero razionale p/q (evidentemente con p e q entrambi non nulli) fosse la radice quadrata di 2 , il suo quadrato varrebbe 2 , e pertanto dovrebbe aversi:

$$(2) \qquad p^2 = 2\,q^2 \;;$$

ebbene: *quest'uguaglianza*, dall'aria tanto innocente, *ha luogo se e soltanto se è* $p = q = 0$. Proprio così: *il quadrato d'un numero intero non è mai il doppio del quadrato d'un altro numero intero, a meno che essi non siano entrambi nulli*.

In verità, se valesse la (2) con p non nullo (si noti che q deve esserlo senz'altro), i due interi p^2 e $2q^2$, per quanto uguali, conterrebbero un numero diverso di fattori 2 . Più precisamente, p^2 ne conterrebbe un numero pari (eventualmente nessuno), mentre $2q^2$ ne conterrebbe un numero dispari (almeno uno, come è evidente).

Dunque, con nostro disappunto, anche per risolvere un problema tanto semplice dovremo contentarci di fastidiose ma *inevitabili* approssimazioni: "approssimazioni successive", come si usa dire, anzi sempre migliorabili, ma che non corrisponderanno mai al nostro intento di individuare *con esattezza* quel numero sfuggente: $\sqrt{2}$, per l'appunto. Siamo così costretti a battere sentieri senza un preciso punto d'arrivo, a servirci di procedure al cui confronto appaiono di misura umana persino i rituali di un ente burocratico o di una corte di giustizia. Insomma, ci piaccia o no, dovremo affrontare quei bizzarri oggetti matematici che vanno sotto il nome di *successioni*.

Eccone appunto una che ci torna utile nel caso in esame. O meglio, ecco i suoi primi sei termini:

$$(3) \qquad \frac{14}{10}, \frac{141}{100}, \frac{1414}{1000}, \frac{14142}{10000}, \frac{141421}{100000}, \frac{1414213}{1000000}, \ldots$$

ognuno di essi, dal secondo in poi, "migliora l'approssimazione", nel senso che il suo quadrato differisce da 2 meno di quanto accada per il precedente; e anzi, ne differisce per una quantità che, pur di procedere abbastanza, si potrà fare vicina allo zero più di quanto chiunque possa via via pretendere. E nondimeno, per le ragioni viste poco prima, l'"algoritmo" da cui si origina la successione (3) - che qualcuno avrà senz'altro riconosciuto come quello dell'*estrazione di radice quadrata* - non ha alcuna speranza di pervenire, *nel campo razionale* Q , ad un qualunque traguardo.

Tutto questo, come si è accennato all'inizio, dovrebbe essere più che sufficiente a giustificare la scelta del nostro "materiale di lavoro" nell'insieme Q^N delle *successioni di numeri razionali*. Ma ancora una volta, prima di procedere, vogliamo incoraggiare il lettore annunciandogli che anche la soluzione dell'attuale problema ci sarà fornita da quell'ingegnoso "metodo per costruire nuovi numeri".

2 - *Successioni "convergenti": ancora un anello.*

Nell'insieme Q^N di *tutte* le successioni di numeri razionali privilegeremo un sottoinsieme C di particolare interesse: in tutto questo capitolo esso sarà detto "delle successioni *convergenti*" (o anche "delle *C-successioni*").

Ricordiamo inoltre che, per denotare la generica successione:

$$x_1 \ , \ x_2 \ , \ x_3 \ , \ \ldots \ , \ x_n \ , \ \ldots \tag{4}$$

si adotta anche la scrittura $\{ x_n \}$, corredata, se occorre, dalle eventuali precisazioni.

D1

Entrambe le scritture alludono molto espressivamente al fatto che *una successione di numeri razionali è una corrispondenza che a ogni intero positivo* n (in questo contesto, detto anche "indice" o "posto") *associa uno e un solo elemento* x *di* Q (detto anche, in questo contesto, "termine della successione").

Così, ad esempio, nella successione (3), il termine x_4 è 1,4142 . Nella successione:

$$1 \ , \ \frac{1}{2} \ , \ \frac{1}{3} \ , \ \frac{1}{4} \ , \ \ldots \ , \ \frac{1}{n} \ , \ \ldots \tag{5}$$

il termine x_7 è 1/7 .

D2

E veniamo alla proprietà che individua, fra tutte le successioni di numeri razionali, quelle del sottoinsieme C (che abbiamo deciso di chiamare "convergenti"). Tale proprietà può enunciarsi come segue:

P1

comunque si scelga un razionale positivo ε *, i termini della successione cadono, da un certo posto in poi* (posto che in generale dipende da ε), *in un intervallo di ampiezza* $2\,\varepsilon$.

> ATTENZIONE !
>
> DI NORMA, NEI TESTI, TALI SUCCESSIONI VENGONO DETTE "DI CAUCHY", MENTRE IL TERMINE "CONVERGENTE" SI ADOTTA PER DESIGNARE UNA PROPRIETÀ CHE ESIGE MOLTO DI PIÙ...
>
> MA SU TUTTO QUESTO RITORNEREMO AL MOMENTO OPPORTUNO.

Sarà utile, per il séguito, disporre di una scrittura che descriva con tutto il rigore formale la proprietà che abbiamo appena introdotto. Indicato dunque con Q^+ l'insieme dei razionali positivi e con Z^+ quello degli interi positivi, esprimeremo il fatto che una successione è *convergente* mediante la formula:

$$\varepsilon \quad Q^+ \qquad n_\varepsilon \quad Z^+$$

(6)

$$[\, p \quad Z^+ \quad q \quad Z^+ \quad p>n_\varepsilon \quad q>n_\varepsilon \,] \qquad |\, x_p - x_q \,| < \varepsilon \ .$$

Un po' ostica, senza dubbio. Ma, imparando a leggerla, riusciremo a capirla meglio. In effetti, la (6) afferma quanto segue:

P2

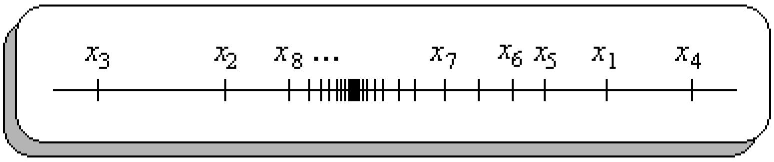
per ogni *numero* ε ***che appartiene a*** Q^+
esiste *un indice* n_ε ***che appartiene a*** Z^+
tale che*:*

se p ***appartiene a*** Z^+ ***e*** q ***appartiene a*** Z^+
e p *è maggiore di* n_ε ***e*** q *è maggiore di* n_ε ,
allora

il valore assoluto della differenza fra x_p *e* x_q ***è minore*** *di* ε .

Qualcuno potrà chiedersi se davvero questa equivalga alla P1 . Là, infatti, si esige che, da un certo posto in poi, *tutti* i termini *stiano in un intervallo di ampiezza* $2\,\varepsilon$; qui invece basta che, *a due a due*, essi *distino fra loro meno di* ε . Ma in effetti, il lettore può facilmente dimostrare che *le due circostanze si implicano a vicenda*.

Resta dunque ben definito che cosa debba intendersi per *successione convergente* (ovvero, *C-successione*). In linguaggio geometrico si può dire che, data una tale successione, i punti che la rappresentano sulla retta cadono tutti, ad eccezione di un numero finito, entro un segmento di ampiezza piccola a piacere.



D3

A questo proposito è bene sapere che, quando una successione soddisfa a una certa proprietà *pur di escludere un numero finito di termini*, si dice che essa gode di quella proprietà *definitivamente*.

Il semplice algoritmo di approssimazione in cui ci siamo imbattuti nel paragrafo precedente sembra accreditare la scelta delle successioni convergenti fra tutte quelle di numeri razionali. Ma è solo l'inizio: ora infatti, sempre che sia possibile, dovremo costruire, mediante tali successioni, i "nuovi numeri" destinati a colmare le carenze del campo razionale Q . Perché allora non tentare con quel "metodo del quoziente" già collaudato sulle "classi resto modulo k "?

Mettiamoci dunque all'opera.

T1

Quello che in primo luogo c'interessa mostrare è che *il sottoinsieme* C *possiede* - "naturalmente", per così dire - *una struttura di anello commutativo con unità*. È chiaro che, affinché quest'affermazione acquisti pieno significato, occorrerà, ma anche basterà:

❶ stabilire che cosa debba intendersi per "somma" di due *C*-successioni;

❷ verificare che la relativa operazione (l'"addizione") è *associativa* e *commutativa*;

❸ individuare, per essa, l'*elemento neutro*;

❹ individuare l'*opposto* di ogni *C*-successione;

❺ stabilire che cosa debba intendersi per "prodotto" di due *C*-successioni;

❻ verificare che la relativa operazione (la "moltiplicazione") è *associativa* e *commutativa*;

❻ individuare, per essa, l'*elemento neutro*;

❽ accertarsi che esso sia *diverso* dal precedente;

❾ verificare che la "moltiplicazione" è *distributiva* rispetto all'"addizione".

Ebbene, vedremo ora che tutto ciò è possibile anche nel più vasto ambiente Q^N costituito da *tutte* le successioni di razionali; e C risulterà un suo *sottoanello*. Inoltre, le scelte più adeguate coincideranno, come si è accennato, con le più "naturali".

D4

E infatti:

somma delle successioni $\{ x_n \}$ e $\{ y_n \}$ di Q^N si dirà la successione $\{ x_n + y_n \}$, ossia quella in cui ciascun termine è *l'ordinaria somma* dei termini con lo stesso indice nelle successioni date;

prodotto delle successioni $\{ x_n \}$ e $\{ y_n \}$ di Q^N si dirà la successione $\{ x_n \ \ y_n \}$, ossia quella in cui ciascun termine è *l'ordinario prodotto* dei termini con lo stesso indice nelle successioni date;

P3

ne viene che l'elemento neutro per l'addizione [la moltiplicazione] in Q^N è la successione a termini tutti nulli [uguali a 1]. Si lascia al lettore di riconoscere l'opposto del generico elemento di Q^N e di verificare l'associatività e la commutatività delle operazioni definite, oltre che la distributività della seconda rispetto alla prima.

In effetti, dunque, Q^N risulta strutturato da anello commutativo con unità. Ma lo è anche il suo sottoinsieme C?

P4

Dal momento che la successione

(7) $$0 \ , \ 0 \ , \ 0 \ , \ \ldots \ , \ 0 \ , \ \ldots$$

(elemento neutro per l'"addizione") e l'altra

(8) $$1 \ , \ 1 \ , \ 1 \ , \ \ldots \ , \ 1 \ , \ \ldots$$

(elemento neutro per la "moltiplicazione") sono, come peraltro ogni successione costante, palesemente convergenti, e considerato che

P5

se una successione soddisfa alla condizione (6), *allora lo fa anche la sua opposta*, per esser certi che C è un sottoanello di Q^N resta solo da stabilire che, effettivamente, le successioni "somma" e "prodotto" di due successioni convergenti sono pur esse convergenti.

T2

Cominceremo dunque col dimostrare che, *se* $\{ x_n \}$ *e* $\{ y_n \}$ *sono due C-successioni, tale è anche* $\{ x_n + y_n \}$.

A questo scopo, tuttavia, occorrerà premettere un facile lemma.

P6

Esso afferma che, per ogni coppia di razionali a e b , risulta:

(9) $$| a + b | \leq | a | + | b | \ .$$

E infatti, poiché è sempre $ab \leq | ab | = | a | | b |$, si ottiene di séguito: $| a + b |^2 = (a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2\, ab \leq a^2 + b^2 + 2 | ab | = = | a |^2 + | b |^2 + 2 | a | | b | = (| a | + | b |)^2$. E di qui la (9) .

Possiamo ora dimostrare l'asserto T2 . Sia dunque ε un arbitrario razionale positivo, e σ la sua metà; poiché anche σ è un razionale positivo, e per ipotesi $\{ x_n \}$ è convergente, vi sarà un intero positivo ${}^x n_\sigma$ per cui, se due indici p e q lo superano, riesce:

(10) $$| x_p - x_q | < \sigma \ ;$$

ma poiché anche $\{ y_n \}$ è per ipotesi convergente, esiste anche un intero positivo ${}^y n_\sigma$ per cui riesce:

(11) $$| y_p - y_q | < \sigma \ .$$

Detto allora n_σ il più grande fra ${}^x n_\sigma$ e ${}^y n_\sigma$, le due ultime disuguaglianze sussisteranno insieme quando ognuno degl'indici p e q superi n_σ . In tal caso, sommandole membro a membro, si avrà:

(12) $$| x_p - x_q | + | y_p - y_q | < 2\, \sigma \ ;$$

da cui, grazie alla (9) , si ricava:

$$| (x_p + y_p) - (x_q + y_q) | = | (x_p - x_q) + (y_p - y_q) | \leq$$

(13)

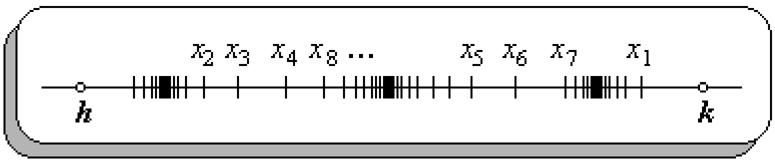
$$\leq \; | x_p - x_q | + | y_p - y_q | \; < \; 2\,\sigma \; = \; \varepsilon \; .$$

Ma questa, quando si confrontino il primo e l'ultimo membro, afferma che anche $\{ x_n + y_n \}$ è una *C*-successione.

Il che è quanto ci si proponeva di dimostrare.

D5

Prima di passare ad analoga dimostrazione per la successione prodotto, converrà rammentare che una successione $\{ x_n \}$ Q^N si dice *limitata* quando esistono due numeri razionali h e k tali che, per ogni n si abbia: $h < x_n < k$. In termini geometrici, ciò equivale a dire che, per una tale successione, i punti che la rappresentano sulla retta si trovano tutti entro un segmento di ampiezza $k - h$.



Come lascia intuire la figura, il fatto che una successione risulti limitata è ben lungi dal garantirne la convergenza.

P7

Viceversa - e lo afferma un altro semplice lemma che ci tornerà utile fra poco - *ogni successione convergente è limitata*.

Infatti, per definizione, tutti i termini di una successione convergente, pur di escluderne un numero finito, cadono in un intervallo aperto - e cioè privo degli estremi - di ampiezza scelta a piacere.

Allora, se termini della successione cadono a sinistra d'un tale intervallo, e x_μ è il più piccolo, si ponga $h' = x_\mu$; altrimenti, si dica h' l'estremo sinistro dell'intervallo stesso. Analogamente, se termini della successione cadono a destra d'un tale intervallo, e x_ν è il più grande, si ponga $k' = x_\nu$; altrimenti, si dica k' l'estremo destro dell'intervallo stesso.

Pósto dunque $h = h' - 1$ e $k = k' + 1$, si vede immediatamente che l'intera successione cade nell'intervallo aperto (ossia, privo degli estremi) $] \, h \, , k \, [$.

E questa è appunto la tesi del lemma.

T3

Possiamo ora dimostrare che, *se* $\{ x_n \}$ *e* $\{ y_n \}$ *sono due C-successioni, tale è anche* $\{ x_n \; y_n \}$.

Sia dunque ε un razionale positivo arbitrario. Grazie al lemma P7 , esisterà un intervallo aperto di estremi h_0 e k_0 che include entrambe le successioni date; detti allora h^+ e k^+ i valori assoluti di h_0 e k_0 rispettivamente, sia c il più grande fra h^+ e k^+ e σ il rapporto fra ε e $2\,c$.

Poiché σ è pur esso un razionale positivo, dovrà esistere un intero positivo ${}^x n_\sigma$ tale che, per ogni coppia di indici p e q che lo superano, sia soddisfatta la (10) ; e un intero positivo ${}^y n_\sigma$ per cui, sotto analoghe condizioni, valga la (11) . E al solito, le due disuguaglianze varranno simultaneamente per ogni coppia di indici p e q maggiori del più grande fra ${}^x n_\sigma$ e ${}^y n_\sigma$.

Sicché, ricorrendo ancora al lemma P6 , si ottiene:

$$
\begin{aligned}
& |\, x_p \; y_p - x_q \; y_q \,| = |\, x_p \; y_p - x_p \; y_q + x_p \; y_q - x_q \; y_q \,| = \\
& \qquad = |\, x_p \; (y_p - y_q) + y_q \; (x_p - x_q) \,| \leq \\
(14) \quad & \qquad \leq |\, x_p \; (y_p - y_q) \,| + |\, y_q \; (x_p - x_q) \,| = \\
& = |\, x_p \,| \; |\, y_p - y_q \,| + |\, y_q \,| \; |\, x_p - x_q \,| < c\,\sigma + c\,\sigma = \varepsilon \ .
\end{aligned}
$$

E questa porta a concludere, circa la successione prodotto, come prima si è fatto circa la successione somma.

Che è quanto si doveva dimostrare.

Dunque, come preannunciato in T1 , C *è un anello commutativo unitario*. Ma non più di tanto! Noti infatti il lettore che le sue successioni non ammettono inverso se anche un solo loro termine è 0 .

ATTENZIONE !

ANCHE SE SI POTESSERO ESTROMETTERE DA C TUTTE LE SUCCESSIONI IN CUI COMPAIONO TERMINI NULLI (MA *NON* SI PUÒ FARLO!), CIÒ NON SERVIREBBE AD AGGIRARE L'OSTACOLO. PROVI INFATTI IL

LETTORE A TROVARE IN C L'INVERSO DELLA SUCCESSIONE

$$1\ ,\ \frac{1}{2}\ ,\ \frac{1}{3}\ ,\ \frac{1}{4}\ ,\ \dots\ ,\ \frac{1}{n}\ ,\ \dots$$

CHE PURE È UNA SUCCESSIONE CONVERGENTE...

Occorre dunque, come ben sappiamo, individuare *un ideale massimale dell'anello delle C-successioni*, per poi sperimentare in tale anello il metodo del quoziente.

A tale scopo, ci affideremo ancora una volta a criterî euristici, improntati cioè a considerazioni di analogia, di opportunità e soprattutto di efficacia rispetto all'obiettivo che ci siamo proposti: *quello di costruire un campo numerico che, pur contenendo i razionali, non presenti le sistematiche lacune che crivellano Q* .

Rammentiamo al riguardo che, stando alle regole del nostro metodo, un ideale massimale dovrà fungere da "zero" del costruendo campo quoziente.

Sarà dunque opportuno rivolgere la nostra attenzione verso una qualche proprietà che non soltanto sia tipica dello zero, ma che per giunta lo contraddistingua nella consueta tecnica dei procedimenti di approssimazione: per esempio, la proprietà che impone a un siffatto numero *di non essere negativo*, ma allo stesso tempo *di essere più piccolo di ogni razionale positivo*; o, se si preferisce, *di non essere positivo*, ma allo stesso tempo *di essere più grande di ogni razionale negativo*.

3 - *"Zero- successioni": ancora un ideale.*

Oltre che enunciata un po' alla buona, la nostra ultima osservazione rischia di apparire lapalissiana. Eppure è proprio quella che ci fornirà lo spunto per raggiungere il nostro obiettivo.

D6

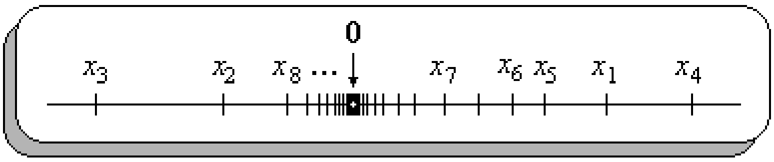
Esaminiamo infatti quelle successioni che, quando si fissi ad arbitrio un razionale positivo ε , risultano costituite - almeno *defini-*

tivamente - da numeri *il cui valore assoluto* è minore del numero ε prescelto; e precisiamo tutto ciò convenendo di dire che una successione z_1 , z_2 , ... , z_n , ... di numeri razionali è una *zero-successione* quando essa gode della seguente proprietà:

P8

comunque si scelga un razionale positivo ε , *i termini della successione cadono, da un certo posto in poi* (posto che in generale dipende da ε), *in un intervallo di centro* 0 *e di ampiezza* 2 ε .

Si noti che la rappresentazione geometrica di questa circostanza differisce ben poco da quella relativa alla generica *C*-successione. E tuttavia quel poco (e cioè la richiesta che il tutto graviti attorno allo 0) è di estrema importanza:



E anche qui sarà utile una scrittura che esprima tutto ciò col dovuto rigore. Pertanto, rammentando il significato dei simboli Q^+ e Z^+ , riassumeremo la P1 nella formula:

(15) $\varepsilon \quad Q^+ \quad n_\varepsilon \quad Z^+ : [\, n \quad Z^+ \quad n > n_\varepsilon \,] \qquad |x_n| < \varepsilon$,

che - ormai lo sappiamo - va letta come segue:

P9

per ogni *numero* ε ***che appartiene a*** Q^+
esiste *un indice* n_ε ***che appartiene a*** Z^+
tale che:

se *n* ***appartiene a*** Z^+ ***ed*** *n è maggiore di* n_ε ,
allora

il valore assoluto di x_n ***è minore*** *di* ε .

Ma intanto...

> ATTENZIONE !
>
> MEMORE DEL PRECEDENTE "CARTELLO D'ALLARME", IL LETTORE NOTI (E MAGARI DIMOSTRI...) CHE, SE UNA SUCCESSIONE $\{x_n\}$ DI C NON PRESENTA ZERI, *LA SUCCESSIONE DEGLI INVERSI DEI SUOI TERMINI CONVERGE SE E SOLO SE* $\{x_n\}$ *NON È UNA ZERO-SUCCESSIONE*.

E veniamo finalmente al seguente basilare teorema:

T4

D è un ideale massimale dell'anello C .

Detto D l'insieme delle zero-successioni di Q^N e lasciando ancora al lettore di verificare che D è effettivamente un sottoinsieme di C , dimostriamo in primo luogo che la differenza fra due qualunque elementi di D appartiene a D . Siano dunque $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ due arbitrarie zero-successioni, ed ε un razionale positivo. Poiché anche $\sigma = \varepsilon/2$ è un razionale positivo, dovrà aversi definitivamente $|\, x_n \,| < \sigma$ e $|\, -y_n \,| < \sigma$; dunque, grazie alla (9) , risulterà, sempre definitivamente, $|\, x_n - y_n \,| < \varepsilon$; il che significa appunto che la differenza fra le successioni date è anch'essa una zero-successione.

Mostriamo ora che, se $\{t_n\}$ è una C-successione e $\{z_n\}$ una zero-successione, tale è anche $\{\, t_n\ z_n \,\}$. In effetti, per il lemma P7 , esiste un razionale a tale che, per ogni $n\ Z^+$, si ha $|\, t_n \,| < a$; detto quindi ε un qualsiasi razionale positivo e pósto $\sigma = \varepsilon/a$, dal momento che $\{z_n\}$ è una zero-successione e σ un razionale positivo, si avrà definitivamente: $|\, z_n\ \ t_n \,| = |\, z_n \,|\,|\, t_n \,| < \ |\, z_n \,|\ a\ < \sigma\, a = \varepsilon$. Onde la successione-prodotto è anch'essa una zero-successione.

Col che resta acquisito che D è un ideale di C .

Proveremo ora che esso è massimale, ossia che *se un ideale di C contiene propriamente D , esso coincide con C .*

Sia dunque T un tale ideale: in esso dovrà esistere almeno una successione convergente, e diciamola $\{w_n\}$, che non è una zero-successione. Pertanto, quando si eccettui al più un numero finito di suoi termini, $\{w_n\}$ è contenuta in un intervallo che non include lo zero di Q; ciò significa che, a partire da un certo indice n_0, sarà $w_n \neq 0$. Detta allora $\{w'_n\}$ una zero-successione i cui termini siano tutti nulli ad eccezione dei primi $n_0 - 1$ (e quindi, al pari di $\{w_n\}$, appartenente a T), si noti che a T apparterrà anche la successione-somma $\{w''_n\} \equiv \{w_n + w'_n\}$ (che si riduce a $\{w_n\}$ se questa non ha alcun termine nullo). Ora, considerato che $\{w''_n\}$ non presenta zeri (e ovviamente non è una zero-successione), l'ultimo "cartello d'allarme" garantisce che la successione degli inversi dei suoi termini, vale a dire $\{1/w''_n\}$, appartiene a C; ne segue che, essendo T un ideale di C, il prodotto di $\{w''_n\}$ per $\{1/w''_n\}$ appartiene a T. Ma tale prodotto non è altro che l'unità di C; e pertanto T, come ogni ideale in cui sia presente l'unità di C, coincide con C.

Che è quanto ci proponevamo dimostrare.

4 - *Il campo reale e il suo ordinamento.*

Possiamo così enunciare il risultato cruciale di questo capitolo:

l'anello quoziente $C_{/D}$ è un campo.

Gli elementi di tale campo, universalmente denotato col simbolo R, sono (come ormai ci è noto sin dal precedente capitolo) le classi di equivalenza in cui si ripartisce C quando venga quozientato rispetto al suo ideale D. Da ciò la seguente definizione:

D7

si dirà "numero reale" ogni elemento $\mathbf{x}$ $\;$ R*, vale a dire ogni famiglia* $\mathbf{x}$ *di C-successioni tale che, se* $\{x_n\}$ $\;$ $\mathbf{x}$ *e* $\{x'_n\}$ $\;$ $\mathbf{x}$*, la differenza* $\{x_n\}-\{x'_n\}$ *è una zero-successione.*

È chiaro che, per mostrare come effettivamente il nuovo campo R sopperisca alle lamentate carenze di quello razionale Q, occorre che anche R sia munito di un *ordinamento compatibile con le ope-*

razioni. (L'esatto significato di questa locuzione si intenderà appieno nel séguito del paragrafo).

P10

Pertanto, premesso che, come già fatto in D7, useremo il grassetto per indicare gli elementi di R, iniziamo con l'osservare che R *contiene un sottoinsieme* R^+ *non vuoto, privo dello zero e soddisfacente ai seguenti requisiti:*

$$[\, \mathbf{x} \;\; R^+ \quad \mathbf{y} \;\; R^+ \,] \qquad [(\, \mathbf{x} + \mathbf{y} \,) \quad R^+ \quad (\, \mathbf{x}\,\mathbf{y} \,) \quad R^+ \,] \;;$$

$$\mathbf{z} \quad R \qquad \mathbf{z} \quad R^+ \;\; aut \quad \mathbf{z} = \mathbf{0} \quad aut \quad -\mathbf{z} \quad R^+ \;.$$

Il primo di questi altro non esige se non che *al sottoinsieme* R^+ *appartengano le somme e i prodotti di tutte le coppie di suoi elementi*; il secondo, che *ogni numero reale non nullo appartenga al sottoinsieme* R^+ *allora e solo quando non gli appartiene il suo opposto*.

Per convincersi dell'esistenza d'un tale sottoinsieme, che chiameremo "dei reali positivi", si considerino *tutte le classi di equivalenza* $\mathbf{x}$ R *ciascuna delle quali è costituita da C-successioni i cui termini risultano definitivamente maggiori di qualche razionale positivo*. È allora abbastanza facile (ma soprattutto estremamente utile...) verificare che l'insieme di queste classi - ossia di questi numeri reali - soddisfa ai requisiti espressi in P10 .

P11

In termini più concisi, potremo affermare che R^+ *è l'insieme dei reali* $\mathbf{x}$ *per ciascuno dei quali esiste una successione* $\{x_n\}$ $\mathbf{x}$ *e un razionale* $a > 0$ *tali che si abbia definitivamente* $x_n > a$.

ATTENZIONE !

SI RAMMENTI CHE UN REALE $\mathbf{x}$ SI DICE *POSITIVO* QUANDO NELLA CLASSE $\mathbf{x}$ ESISTE UNA SUCCESSIONE A TERMINI DEFINITIVAMENTE MAGGIORI DI QUALCHE RAZIONALE POSITIVO...

- Ma come? - protesterà qualcuno. - Non si era appena detto che ogni elemento di R^+ è *tutto fatto* di *C*-successioni i cui termini sono definitivamente maggiori di qualche razionale positivo?

Questo apparente disguido ci dà modo di evidenziare - anche se solo con una breve digressione - una circostanza di portata ben più ampia di quanto non sembri a prima vista.

D8

Vediamo di che si tratta. È certo vantaggioso, purché lecito, operare su singoli elementi di una classe (i cosiddetti *rappresentanti*) per introdurre una certa proprietà. A volte, però, ciò può riuscire o apparire illecito per via di una definizione difettosa o fraintesa.

Per riferirci al precedente "cartello d'allarme": il fatto che $\boldsymbol{x}$ ammetta un rappresentante $\{ x_n \}$ i cui termini sono definitivamente maggiori di un assegnato numero razionale non garantisce affatto che ciò accada per ogni altro rappresentante di $\boldsymbol{x}$. Si pensi, per esempio, alle due successioni $\{a+1/n\}$ e $\{a-1/n\}$: esse differiscono per la zero-successione $\{2/n\}$, eppure i termini dell'una sono tutti maggiori di a , quelli dell'altra tutti minori di a .

Ciò che tuttavia si può dire è che, se esiste un razionale positivo a per cui riesca definitivamente $x_n > a$, allora ne esiste un altro b per cui, *quale che sia la successione* $\{x'_n\}$ $\boldsymbol{x}$, riesce definitivamente $x'_n > b$. Invero, dal fatto che per ogni razionale $\varepsilon > 0$ si abbia definitivamente $| x_n - x'_n | < \varepsilon$ discende $x_n - \varepsilon < x'_n$; cosicché, assunto $a/2$ in luogo di ε e tenuto conto dell'ipotesi circa $\{x_n\}$, si avrà $a - a/2 < x_n - a/2 < x'_n$; da cui, sempre definitivamente, $x'_n > a/2$. Il che, pósto $b = a/2$, prova l'asserto.

D9

Può dunque accadere che il requisito su cui si basa una certa definizione non sia soddisfatto da tutti i gli elementi di una data classe solo *perché formulato in termini eccessivamente quanto inutilmente restrittivi*; e che una formulazione meno esigente, ma che nella sostanza nulla toglie al concetto da definire, trasformi quel requisito in una proprietà di tutti gli elementi della classe in esame.

Va da sé che, quando ciò avviene, la definizione "migliorata" può senz'altro considerarsi come riferibile all'intera classe. In tal caso si usa dire che la definizione è *"ben pósta"*.

E ora, tramite il sottoinsieme R^+, siamo finalmente in grado di introdurre in R l'ordinamento auspicato.

D10

Si dirà infatti che il numero reale $\boldsymbol{x}$ *è minore* del numero reale $\boldsymbol{y}$ (ovvero che $\boldsymbol{y}$ *è maggiore* di $\boldsymbol{x}$) *quando la differenza* $\boldsymbol{y-x}$ *appartiene a* R^+. Dopo di che, estendendo la notazione in uso per i razionali, si continuerà a scrivere $\boldsymbol{x < y}$ (ovvero $\boldsymbol{y > x}$) e si attribuirà il solito significato alla scrittura $\boldsymbol{x \leq y}$ (ovvero $\boldsymbol{y \geq x}$) e alla locuzione *"minore o uguale"* (*"maggiore o uguale"*).
Infine, quando sia $\boldsymbol{x < y}$, si dirà anche che $\boldsymbol{x}$ *precede* $\boldsymbol{y}$ (ovvero che $\boldsymbol{y}$ *segue* $\boldsymbol{x}$); analogamente, quando sia $\boldsymbol{x \leq y}$, si dirà anche che $\boldsymbol{x}$ *non segue* $\boldsymbol{y}$ (ovvero che $\boldsymbol{y}$ *non precede* $\boldsymbol{x}$).

Ciò pósto, è facile vedere che, se è $\boldsymbol{x < y}$, allora, per ogni reale $\boldsymbol{z}$, riesce $\boldsymbol{x + z < y + z}$; e che, se $\boldsymbol{z}$ è positivo, riesce $\boldsymbol{x\,z < y\,z}$.

D11

Tutto questo si riassume dicendo, appunto, che l'ordinamento introdotto è *compatibile con le operazioni*.
E ora verifichiamo, ad esempio, la seconda di tali proprietà. In effetti, nelle ipotesi dette, il prodotto $(\boldsymbol{y-x})\,\boldsymbol{z}$ appartiene a R^+; ma poiché tale prodotto è uguale alla differenza $\boldsymbol{y\,z - x\,z}$, anche questa risulta positiva; il che significa che $\boldsymbol{y\,z}$ è maggiore di $\boldsymbol{x\,z}$.

A conclusione di questo paragrafo rileviamo un'ulteriore, notevole proprietà dell'ordinamento introdotto tramite P10 e D10 ; è cioè il fatto che tale ordinamento è *totale*.

P12

Ciò significa che, *quali che siano i reali* $\boldsymbol{x}$ *ed* $\boldsymbol{y}$, *si ha*:

(16) $\qquad \boldsymbol{x \neq y} \qquad [\ \boldsymbol{x < y} \quad aut \quad \boldsymbol{y < x}\ ]$.

Come al solito, l'abitudine al calcolo coi numeri reali - acquisita acriticamente - ci fa apparire lapalissiana questa rilevantissima osservazione. Nondimeno, si pensi quante strutture algebriche, non presentando alcun ordinamento, non si prestano a considerazioni di questo genere; e quante altre, dotate soltanto di un ordinamento parziale, seguitano a violare la P12 .

Una tale proprietà, per quanto banalmente riconducibile al secondo dei requisiti in P10 , è tuttavia indispensabile quando si vogliano ritrovare in R tutte le situazioni cui dà luogo l'ordinamento dei razionali. Grazie ad essa, per esempio, si può esser certi che, come per il campo razionale Q , anche per quello reale R accade che:

P13

preso ad arbitrio un reale $\mathbf{x}$ *, tutto* R *si ripartisce in due classi* $A_{\mathbf{x}}$ *e* $B_{\mathbf{x}}$ *tali che ogni elemento della prima precede ogni elemento della seconda, mentre* $\mathbf{x}$ *non precede alcun elemento della prima né segue alcun elemento della seconda.* Del che non avremmo la minima garanzia se i reali, discostandosi in ciò dai razionali, presentassero elementi non confrontabili nel suddetto ordinamento!

Non a caso - è bene notarlo - abbiamo scelto come esempio una proprietà che a prima vista potrebbe apparire di ben poco interesse: poiché, al contrario, *è proprio la possibilità di invertire una tale proposizione ciò che conferisce al campo reale una fisionomia unica fra tutti i campi totalmente ordinati*.

5 - *La retta reale: non più lacune.*

Ritornando per un momento al campo Q , rienunciamo con più precisione la circostanza cui si è sopra accennato.

Assunto ad arbitrio un numero razionale r , si considerino quegli elementi ρ per cui riesce $\rho < r$ ($\rho \leq r$) e quelli σ per cui riesce $\sigma \geq r$ ($\sigma > r$) . In virtù dell'ordinamento totale di cui è dotato Q , i numeri ρ e i numeri σ formano rispettivamente due classi A_r e B_r nessuna delle quali è vuota, e tali che:

- la loro unione A_r B_r *dà luogo all'intero campo* Q ;

♦ ogni elemento $\rho \quad A_r$ *precede* ogni elemento $\sigma \quad B_r$;

ebbene, è fin troppo evidente che esiste uno ed un solo numero razionale (ed è proprio r) il quale:

♣ *segue* ogni (*non precede* alcun) elemento di A_r ;

♣ *non segue* alcun (*precede* ogni) elemento di B_r .

È chiaro tuttavia che il campo Q può ripartirsi in due classi A e B nessuna delle quali è vuota, e per cui valgano le proprietà contrassegnate con ♦ , anche senza fare uso di alcun razionale r che soddisfi alle condizioni contrassegnate con ♣ : si pensi alla classe A dei numeri razionali il cui quadrato è minore di 2 e a quella B dei restanti.

Senonché, a questo punto, una semplice riflessione su quanto si è detto a suo tempo riguardo alla radice quadrata di 2 basterà a convincerci che possono presentarsi dei casi in cui quel razionale r , proprio quando *occorrerebbe*, addirittura *non esiste*! E infatti, sempre per rimanere all'esempio considerato, si osservi che, se un tale numero esistesse, il suo quadrato dovrebbe valere 2 ; e questo, come ben sappiamo, è impossibile.

Vale dunque la pena di trasportare l'intera questione nel contesto più generale di un qualsiasi campo ordinato K , e quindi di porre le seguenti definizioni:

D12

si dirà "sezione" del campo K ogni coppia (A, B) di suoi sottoinsiemi, nessuno dei quali vuoto, per cui valgano le proprietà contrassegnate con ♦ ;

D13

si dirà "elemento di separazione" (o "elemento separatore") della sezione (A, B) ogni elemento di K per cui valgano le proprietà contrassegnate con ♣ ;

D14

*si dirà infine che il campo K è"completo" quando ogni sua sezione ammette un "elemento di separazione". (*In tal caso si suole anche dire che K *soddisfa al "principio di* DEDEKIND*").*

T5

Non è affatto difficile vedere che, *se una sezione ammette elemento di separazione, questo è unico*. Alquanto più complicato è, invece, dimostrare il seguente, fondamentale risultato, che stabilisce appunto quanto annunciato al termine del precedente paragrafo:

T6

il campo R *dei numeri reali è un campo completo.* ( )

Alla dimostrazione di questo asserto sarà utile premettere alcune considerazioni, peraltro di rilevanza generale, che riguardano ancora il campo Q dei numeri razionali.

A dispetto della sua ovvietà, l'ingenua osservazione secondo la quale *ogni successione costante di* Q^N *è convergente* si rivela il punto di partenza per un risultato di estremo interesse.

Consideriamo infatti la famiglia $Q^0 \quad Q^N$ di tutte le successioni del tipo $\{ r , r , r , ... , r , ... \}$, ottenuta al variare di r in Q ; essendo appunto $Q^0 \quad C$, ciascuna di tali successioni rappresenterà una classe di equivalenza del quoziente $C_{/D}$, vale a dire un numero reale $\boldsymbol{r}$. Ebbene, oltre all'ovvia proprietà di essere un *sottocampo* di R , che cos'ha di particolare l'insieme R_Q di tali numeri reali?

È intanto evidente che esso può porsi in corrispondenza biunivoca con Q , dato che ad ogni reale $\boldsymbol{r} \quad R_Q$ si può far corrispondere il razionale r , e viceversa. In secondo luogo, tale corrispondenza conserva le operazioni: ad esempio, se a $\boldsymbol{r} \quad R_Q$ corrisponde $r \quad Q$ e a $\boldsymbol{s} \quad R_Q$ corrisponde $s \quad Q$, al reale $\boldsymbol{r} + \boldsymbol{s}$ (ottenuto tramite l'addizione in R) corrisponderà il razionale $r + s$ (ottenuto tramite l'addizione in Q).

( ) Inoltre, R *è il solo campo totalmente ordinato che goda di tale proprietà*. Questa affermazione è da intendersi nel senso che ogni altro campo totalmente ordinato e completo è *ordinatamente isomorfo* ad R , vale a dire che fra R e un siffatto campo intercorre una corrispondenza biunivoca che, oltre alle operazioni, conserva anche l'ordinamento.

D15

Ma ancora: tale corrispondenza è una *similitudine*. Ciò significa che, se è $\boldsymbol{r} < \boldsymbol{s}$ (secondo la relazione d'ordine in R), allora e solo allora risulta $r < s$ (secondo la relazione d'ordine in Q). In altri termini, *la corrispondenza in esame conserva l'ordinamento*.

D16

Ora, poiché una corrispondenza biunivoca che conserva le operazioni è detta *isomorfismo*, e un isomorfismo che sia anche una similitudine si dice *ordinato*, con locuzione già adottata nell'ultima nota a piè di pagina possiamo concludere che:

P14

il sottocampo R_Q *di* R *è ordinatamente isomorfo al campo razionale* Q .

Questo risultato ci consentirà, quando il discorso coinvolga soltanto operazioni e relazioni d'ordine, di riferirci indifferentemente a elementi di R_Q o a elementi di Q ; giacché *per questi aspetti*, come si è altre volte osservato, è lecito prescindere dalla natura intrinseca degli "oggetti" con cui si opera. È per ciò che da ora in avanti, dove non sia luogo ad equivoci, chiameremo "numeri razionali" anche gli elementi del sottocampo R_Q . Vero è che, più esattamente, dovremmo chiamarli "numeri reali razionali", ma sarà cura del lettore riconoscere (qualora non sia esplicitamente detto) se si tratta di "reali razionali" o di razionali veri e proprî.

Più generalmente, abbandoneremo anche l'uso del grassetto fin qui adottato per indicare i numeri reali; e così, per esempio, scriveremo x anziché $\boldsymbol{x}$, limitandoci a specificare solo ove necessario se il numero in questione sia un reale razionale o un reale non razionale: ovvero, come si preferisce dire, *un numero irrazionale*.

Grazie a queste premesse possiamo dimostrare con un linguaggio più spedito il teorema T6 . Consideriamo dunque una qualsiasi sezione (A, B) del campo reale R e denotiamo con a un elemento di A , con b un elemento di B , con $\{a_n\}$ C un rappresentante di a e con $\{b_n\}$ C un rappresentante di b .

In virtù di P7 , esistono due razionali h_1 e k_1 tali da aversi:

(17) $$n \quad Z^+ \;, \qquad h_1 < a_n \qquad\qquad b_n < k_1 \;;$$

dunque, in base alla P11 e alla P13 , il numero reale h_1 non è maggiore di a , mentre il numero reale k_1 non è minore di b ; e ciò impone che sia $h_1 \quad A$, $k_1 \quad B$.

D'altro canto, la semisomma di h_1 e k_1 , in quanto numero reale, deve appartenere o ad A o a B : nella prima eventualità la prenderemo in considerazione unitamente a k_1 , nell'altra unitamente ad h_1 ; in ogni caso indicheremo con h_2 e k_2 rispettivamente il più piccolo e il più grande di questi due numeri razionali. Operando con questa seconda coppia come fatto con la prima, e iterando indefinitamente la procedura, perverremo alle due successioni:

(18) $$\begin{array}{l} h_1 \;,\; h_2 \;,\; h_3 \;,\; \ldots \;,\; h_n \;,\; \ldots \\[2ex] k_1 \;,\; k_2 \;,\; k_3 \;,\; \ldots \;,\; k_n \;,\; \ldots \end{array}$$

le quali, oltre ad appartenere ovviamente a Q^N , soddisfano per costruzione alle disuguaglianze:

(19) $$\begin{array}{c} h_1 \le h_2 \le h_3 \le \ldots \le k_3 \le k_2 \le k_1 \\[2ex] n \quad Z^+ \;, \quad h_n < k_n \end{array}$$

nonché all'identità:

(20) $$n \text{ ë } Z^+ \;, \qquad k_n - h_n = \frac{k_1 - h_1}{2^{n-1}} \quad .$$

Si assuma allora ad arbitrio un razionale positivo: è evidente che, per n maggiore di un opportuno indice ν , il secondo membro della (20) riuscirà minore di tale numero; d'altro canto, per ogni coppia di indici n ed m , ciascuno maggiore di ν , le (19) impongono:

$$| h_n - h_m | < k_\nu - h_\nu \;;$$

(21)
$$| k_n - k_m | < k_\nu - h_\nu \ ;$$

e pertanto le successioni in (18) sono entrambe convergenti.

Detti allora h e k i due numeri reali che esse rispettivamente individuano, dovrà risultare $h = k$: la (20), infatti, assicura che $\{h_n\}$ e $\{k_n\}$ differiscono per una zero-successione; pertanto, di qui in avanti, in luogo di h o k scriveremo ξ .

Ebbene, come ora mostreremo, il numero reale ξ non è altro che l'elemento di separazione della sezione (A , B) da noi considerata all'inizio.

Procedendo per assurdo, supponiamo dunque che vi sia in A un reale ρ che supera ξ , ossia tale che la differenza $\rho - \xi$ appartenga ad R^+ ; questo, a norma della P11 , significa che esiste un rappresentante $\{c_n\}$ di ρ e un razionale positivo r per i quali si ha:

(22)
$$\{c_n\} - \{h_n\} > r \ , \quad \textit{definitivamente} \ .$$

Ma d'altra parte, essendo ρ in A , esso deve precedere ogni elemento di B , dunque, a maggior forza, ogni reale razionale della successione $\{k_n\}$; e ciò equivale a dire che, comunque si fissi un indice $\underline{n}$, esisterà un razionale positivo $r_{\underline{n}}$ per cui dev'essere:

(23)
$$\{k_{\underline{n}}\} - \{c_n\} > r_{\underline{n}} \ , \quad \textit{definitivamente} \ ;$$

di modo che, sommando questa alla (22), si trae:

(24)
$$\{k_{\underline{n}}\} - \{h_n\} > r + r_{\underline{n}} \ , \quad \textit{definitivamente} \ .$$

Si assuma ora un indice $\underline{\mathrm{N}}$ così da avere, come consente la (20):

(25)
$$\{k_{\underline{\mathrm{N}}}\} - \{h_{\underline{\mathrm{N}}}\} < r \ ;$$

poiché le prime delle (19) implicano:

(26)
$$\{k_{\underline{\mathrm{N}}}\} - \{h_n\} \leq \{k_{\underline{\mathrm{N}}}\} - \{h_{\underline{\mathrm{N}}}\} \ , \quad \textit{definitivamente} \ ,$$

da questa e dalla (25) si deduce:

(27) $$\{k_{\underline{N}}\} - \{h_n\} < r \quad , \quad \textit{definitivamente} \quad ;$$

la quale, unitamente alla (24), fornisce:

$$r + r_{\underline{n}} < r \quad ,$$

il che è palesemente assurdo.

Se ne conclude che, per ogni ρ A, risulta $\xi \geq \rho$.

Vista la simmetria rispetto a ξ dei due sottoinsemi A e B, in modo del tutto analogo si prova che, per ogni σ B, risulta $\xi \leq \sigma$.

Così che, in effetti, ξ è l'elemento di separazione di (A, B); e il teorema T6 resta dimostrato.

6 - *La proprietà di* ARCHIMEDE*: non esiste l'irraggiungibile.*

Alla completezza del campo reale R si deve, come ben sanno gli studiosi di Analisi, una tale messe di risultati da far sì che il suddetto campo sia stato da sempre il terreno privilegiato di questa disciplina.

Non rientra fra i nostri scopi quello di illustrare in che modo, a partire da R, si venga via via erigendo l'edificio dell'Analisi; non mancheremo tuttavia di soffermarci su quello che è senz'altro uno dei più rilevanti corollarî del "teorema di completezza" or ora dimostrato: si tratta del ben noto enunciato che va sotto il nome di *proprietà di* ARCHIMEDE.

Tale proprietà, che svolge un ruolo di primaria importanza nell'ambito delle strutture matematiche che ne godono, può sembrare intuitiva, se non addirittura ovvia. E tuttavia sarebbe gravemente errato pensare che la semplicità della sua enunciazione corrisponda a qualche imprescindibile "necessità" della Matematica, o anche soltanto delle scienze sperimentali. Tutt'altro. Come bene ha osservato il matematico tedesco DAVID HILBERT, la proprietà di ARCHIMEDE è "ovvia" e "intuitiva" nella stessa misura in cui lo è il *quinto postulato di* EUCLIDE; ma, come non è pensabile escludere - e non solo dall'universo della Matematica... - i sistemi in cui questo non vale, così non vi è alcuna ragione per mettere al bando le strutture *non archimedee*, ossia quelle in cui viene meno la proprietà suaccennata.

Del resto, scopo ultimo di questo libro è proprio quello di presentare il più semplicemente possibile una fondamentale struttura non archimedea: quel *campo dei numeri iperreali* a cui appunto sono dedicati i capitoli che seguono.

T7

E dunque, ci proponiamo ora di dimostrare che *il campo reale* R *è archimedeo*. Vale a dire che, *quali che siano il reale positivo* x *e il reale* y *, vi è un intero positivo* n *tale che* $n{\cdot}x$ (ossia la somma di n addendi tutti uguali ad x) *è maggiore di* y .

Osserviamo innanzitutto che, se è $y \le 0$, non v'è nulla da dimostrare. Assumiamo perciò che anche y sia positivo e procediamo ancora una volta per assurdo: ammettiamo cioè che esistano due reali positivi x_0 e y_0 tali che, per ogni n Z^+ , risulti $n{\cdot}x_0 \le y_0$.

Sia allora A_1 la classe di tutti i reali a per cui riesce $a \le 1{\cdot}x_0$, A_2 la classe di tutti quelli per cui riesce $a \le 2{\cdot}x_0$, e così di séguito per ogni intero positivo; di modo che A_ν , con ν Z^+ , denoterà la classe di tutti i reali a per cui riesce $a \le \nu{\cdot}x_0$. Sia poi A l'unione di tutte le classi A_ν al variare di ν in Z^+ .

Il sottoinsieme A non è vuoto, né esaurisce R : il primo asserto è fin troppo evidente, il secondo segue dal fatto che il numero reale $y_0 + 1$, non appartenendo ad alcuno degli insiemi A_ν , non può certo appartenere alla loro unione A . Dunque non è vuoto neppure il suo complementare B , ossia quello dei restanti reali; mentre è ben chiaro che *la loro unione dà luogo all'intero campo* R .

Infine, *ogni elemento di* A *precede ogni elemento di* B . Se infatti vi fosse in A , e dunque in qualche classe $A_{\underline{n}}$, un reale a_0 non minore di un reale b_0 B , si avrebbe $b_0 \le \underline{n}{\cdot}x_0$, così che anche b_0 apparterrebbe ad A ; e questo è impossibile.

Riassumendo, la coppia (A , B) è una sezione del campo R , e il *teorema di completezza* garantisce l'esistenza del suo elemento di separazione ξ . Allora il numero reale $\xi - x_0$, precedendo ξ , si trova in A , dunque in qualcuna delle classi A_ν ; sicché, detta questa

$A_{\underline{m}}$, si avrà $\xi - x_0 \leq \underline{m} \cdot x_0$, e quindi $\xi \leq (\underline{m}+1) \cdot x_0$. Ma ciò contraddice alle proprietà dell'elemento di separazione, dal momento che il reale $(\underline{m}+1) \cdot x_0$ appartiene ad $A_{\underline{m}+1}$, e dunque ad A .

Resta così dimostrato che il teorema di completezza implica la proprietà di ARCHIMEDE. Ma...

ATTENZIONE !

SAREBBE UN ABBAGLIO GROSSOLANO, MA NON PER QUESTO MENO INSIDIOSO, RITENERE CHE LA PROPRIETÀ DI ARCHIMEDE IMPLICHI LA COMPLETEZZA. ESISTONO CAMPI NON COMPLETI E CIÒ NONOSTANTE ARCHIMEDEI! FORSE CHE Q NON È UNO DI QUESTI?...

Un'altra notevolissima conseguenza del teorema T6 (anzi, giusto quella che ha indotto gli analisti a chiamare *completezza* la proprietà espressa dal suddetto teorema) può così riassumersi: *ripetendo con successioni di numeri reali quanto si è fatto in questo capitolo con successioni di numeri razionali, non si esce dal campo reale*.

Che significa tutto questo, in termini più rigorosi?

Per precisarlo dovremo in primo luogo estendere all'anello R^N delle successioni di numeri reali - definito con le ovvie varianti - le nozioni di *successione convergente* e di *zero-successione*; per il che non ci occorre un grande apparato teorico: basterà riformulare la P1 (o la P2) e la P8 (o la P9) semplicemente riferendole a successioni di numeri reali; e, coerentemente, assumere ε come numero reale ( ) .

Dopo di che potrà vedersi facilmente che, quozientato l'anello di queste "nuove" *C-successioni* rispetto all'ideale delle sue *zero-successioni*, le "nuove" *classi di equivalenza* costituiscono un "nuovo" *campo* $\underline{R}$: nuovo sì, ma... fino a che punto?

( ) Quantunque tale "generalizzazione" sia solo formale. Infatti, sempre dalla proprietà di Archimede, si può dedurre (e anche qui il lettore farebbe bene a cimentarvisi...) che *fra due qualsiasi reali esistono sempre reali razionali*.

T8

La risposta è nel seguente teorema: *ogni successione convergente* $\{t_n\}$ *di numeri reali differisce per una zero-successione* $\{o_n\}$ *di numeri reali da una certa successione costante* $\{t, t, t, ..., t, ...\}$ *di numeri reali*.

D17

Al numero t si dà il nome di *limite* della successione $\{t_n\}$.

Ma il *reale* t è proprio la "vecchia" classe di equivalenza costituita da quelle successioni convergenti di *razionali* che - viste come successioni di *reali razionali* - stanno nella "nuova" classe di equivalenza cui appartiene $\{t, t, t, ..., t, ...\}$! Dunque la "nuova" classe di equivalenza (quella delle successioni di *numeri reali* che ammettono t come *limite*) è senza dubbio più ampia della "vecchia" (quella che definisce t) ; ma *il campo* $\underline{R}$ *al quale essa appartiene*, per quanto "nuovo", *è isomorfo* ad R ; anzi, *ordinatamente isomorfo*!

Ed ecco perché - come prima si è detto - in questo modo non potremo mai ampliare il campo reale.

È chiaro che tutto ciò sarà provato quando lo sia il teorema T8 , che è il punto cruciale dell'intera questione; esso si basa appunto sul *principio di* DEDEKIND e, seppure in forma un po' meno consueta, è quello che nei trattati va sotto il nome di *teorema di* CAUCHY. (*)

Tuttavia, prima di dimostrarlo, conviene premettere un lemma sopra due ulteriori nozioni che, quantunque ausiliarie, risultano della massima utilità in tutta l'Analisi Matematica: le nozioni di *estremo inferiore* ed *estremo superiore* di un insieme numerico.

A tal fine precisiamo che nel séguito ci accadrà spesso di riferirci al modello geometrico (ma sarebbe meglio dire "topologico") di R : la cosiddetta *retta reale*. Riterremo perciò che il lettore abbia una

---

( ) In effetti, il teorema T8 può enunciarsi alternativamente dicendo che *ogni successione di numeri reali che sia "di* CAUCHY*"* (si veda il "cartello d'allarme" di pg. 38) *ammette limite*. E la proprietà di ammettere limite è proprio quella che nei testi tradizionali viene chiamata "convergenza".

certa familiarità coi termini *"punto"*, *"destra"*, *"sinistra"*, *"semiretta"*, *"intervallo aperto"*, *"intervallo chiuso"*, etc. .

D18

Rammentiamo comunque che, dato un punto della retta reale, ogni intervallo aperto cui esso appartiene viene detto *"un intorno"* di tale punto.

D19

Potremo così utilizzare la seguente definizione: *se E e ζ sono rispettivamente una parte e un punto della retta reale, si dirà che ζ è un "punto d'accumulazione per E" quando in ogni intorno di ζ cadono infiniti punti di E* .

L'insieme dei punti d'accumulazione per E è detto *"l'insieme derivato"* o, brevemente, *"il derivato di E"*, e si indica con E' .

(A tale riguardo, va segnalato un frequente abuso di linguaggio: si suole infatti dire "punto d'accumulazione *di* E", con ciò intendendo "punto d'accumulazione *per* E"; ciò deve indurre il lettore a una particolare prudenza, giacché il punto in discussione potrebbe benissimo *non appartenere* ad E).

Citiamo infine una locuzione assai comoda: si dirà che una successione $\{u_n\}$ di numeri reali *diverge positivamente* [*negativamente*] quando, *per ogni reale y, è definitivamente $u_n > y$* [$u_n < y$] .

7 - *Estremi e limiti: il principio di* DEDEKIND *all'opera.*

D20

Sia E un sottoinsieme non vuoto di R . Se e_i è un reale che:

- ♠ *non segue alcun elemento di E* ;
- ♠ *segue ogni altro reale che abbia tale proprietà*;

esso sarà detto *estremo inferiore* di E .

D21

Simmetricamente, se e_s è un reale che:

- ♠ *non precede alcun elemento di* E ;
- ♠ *precede ogni altro reale che abbia tale proprietà*;

esso sarà detto *estremo superiore* di E .

L'estremo inferiore [superiore] di un insieme E si denota anche con la scrittura $inf(E)$ [$sup(E)$] .

Riguardo alla D20 [alla D21], si pongono subito due questioni:

α) numeri come e_i [e_s] esistono per ogni insieme?
β) se sì, quanti ne esistono per un assegnato insieme?

La risposta alla seconda domanda è che e_i (e_s) , quando esiste, è unico; ma poiché essa si trae quasi immediatamente dalla definizione, si lascia al lettore l'onere della prova.

Molto più complicato è, invece, rispondere alla prima domanda.

Va intanto osservato che per dar forza alla D20 [alla D21] *occorre* che esista in R almeno un elemento non maggiore [non minore] di alcun elemento di E .

D22

Questa circostanza si esprime più concisamente dicendo che il sottoinsieme E è *limitato inferiormente* [*limitato superiormente*]; o anche, che esso ammette *minoranti* [*maggioranti*].

P15

Ed è qui che si manifesta uno degli aspetti più ragguardevoli del campo reale: giacché *il fatto che un insieme* E *, non vuoto, sia limitato inferiormente* [*superiormente*] occorre sì, ma anche *basta a garantire l'esistenza in* R *del suo estremo inferiore* [*superiore*].

Poiché la dimostrazione circa l'uno degli estremi può, per simmetria, trasportarsi all'altro, la limiteremo a uno dei due casi.

Sia dunque a_1 R un *minorante* per E , ossia un numero (e con ciò intenderemo ormai un numero reale) tale che, *per ogni* w E , riesca $a_1 \leq w$; e sia b_1 R un *non minorante* per E , ossia un numero tale che, *per qualche* z E , riesca $z < b_1$.

Detto allora c il punto medio dell'intervallo chiuso $[a_1 , b_1]$, si considerino i due intervalli, pur essi chiusi, $[a_1 , c]$ e $[c , b_1]$; poiché in almeno uno di essi cade qualche elemento di E , si designi con $[a_2 , b_2]$ quello più a sinistra per cui ciò avviene. Operando su $[a_2 , b_2]$ come su $[a_1 , b_1]$ e iterando indefinitamente la procedura otterremo due successioni $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$, *la prima tutta costituita di minoranti per* E , e tali da aversi:

(28) $$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \ldots \leq b_3 \leq b_2 \leq b_1$$

nonché:

(29) $$n \text{ ë } Z^+ \quad , \qquad b_n - a_n = \frac{b_1 - a_1}{2^{n-1}} \quad .$$

Ora, detta A_ν , ν Z^+ , la totalità dei reali x per cui è $x < a_\nu$, B_ν quella dei reali y per cui è $b_\nu < y$ e rispettivamente A' e B' l'unione di tutte le famiglie A_ν e l'unione di tutti le famiglie B_ν al variare di ν in Z^+ , si osservi che *l'insieme* A' B' *può escludere al più un solo numero reale*. Se infatti ξ_1 e ξ_2 sono due punti non appartenenti a tale insieme, *e quindi appartenenti a ciascuno degli intervalli* $[a_n , b_n]$, la (29) impone che la loro distanza sia minore di ogni quantità positiva; ma questo implica $\xi_1 = \xi_2$.

Aggregato dunque ad A' (o indifferentemente a B') l'eventuale punto escluso, denotiamo con A e B le due classi così ottenute, di modo che, in ogni caso, risulti A $B = R$. E poiché la costruzione stessa garantisce che ogni elemento di A precede ogni elemento di B , le due classi suddette forniscono una sezione del campo reale.

Ebbene, *l'elemento di separazione* ξ *di tale sezione è proprio l'estremo inferiore dell'insieme* E .

Ammettiamo infatti che esista in E un numero u minore di ξ ; dato che u deve stare in A , *e quindi in qualcuna delle famiglie* A_ν , detta questa $A_{\underline{m}}$, si avrà $u < a_{\underline{m}}$; ma ciò contraddice al fatto che ogni termine della successione $\{a_n\}$ è un minorante per E .

Dunque, quale che sia u appartenente ad E , dev'essere $\xi \leq u$; onde ξ è un minorante per E .

Supponiamo ora che vi sia un numero $\eta > \xi$ pur esso minorante per E . Esistendo in ciascun intervallo $[\, a_n , b_n \,]$ qualche elemento di E , η non potrà trovarsi alla destra di alcun termine della successione $\{b_n\}$. D'altronde, se per qualche indice $\underline{m}$ fosse $\xi < a_{\underline{m}}$, allora esisterebbero punti x che precedono $a_{\underline{m}}$, *e quindi appartenenti ad* A , per i quali riesce $\xi < x$, in contrasto col fatto che ξ è l'elemento di separazione di (A , B) ; ne viene che ξ non può trovarsi alla sinistra di alcun termine della successione $\{a_n\}$. Riassumendo, dovrà aversi: $a_n \leq \xi < \eta \leq b_n$, donde $b_n - a_n > \eta - \xi > 0$; ma ciò contraddice alla (29). In conclusione, non esistono minoranti di E maggiori di ξ ; e pertanto ξ è l'estremo inferiore di E .

Il teorema T8 del paragrafo precedente può adesso dimostrarsi con notevole agilità di strumenti.

Denotata con $\{t_n\}$ un'arbitraria successione convergente di numeri reali, si tratta di far vedere che essa ammette un limite t , vale a dire che differisce per una zero-successione di R^N da un'opportuna successione costante $\{t, t, t,..., t,...\}$ di numeri reali.

Consideriamo dunque, per ogni $m \;\; Z^+$, l'insieme:

(30) $$T_m = \{\, t_m , t_{m+1} , t_{m+2} , \dots , t_{m+j} , \dots \,\} \;\; ,$$

di certo limitato, poiché tale, in quanto convergente, è la successione $\{t_n\}$; detti allora ${}^m e_i$ ed ${}^m e_s$ gli estremi inferiore e superiore di T_m , si noti che, essendo $T_1 \quad T_2 \quad \dots \quad T_m \quad \dots$, deve aversi:

(31) $${}^1e_i \leq {}^2e_i \leq {}^3e_i \leq \dots \leq {}^3e_s \leq {}^2e_s \leq {}^1e_s \;\; ,$$

mentre è senz'altro:

(32) $$m \;\; Z^+ \;\; , \quad {}^m e_i \leq t_m \leq {}^m e_s \;\; .$$

Ciò pósto, sia ε un numero positivo arbitrario e $\sigma = \varepsilon/3$. Per un indice $n(\sigma)$ e per ogni $n > n(\sigma)$, risulterà: $-\sigma < t_n - t_{n(\sigma)+1} < \sigma$; sicché, detto $c(\sigma)$ il reale $t_{n(\sigma)+1}$, si avrà definitivamente

(33) $$c(\sigma) - \sigma < t_n < c(\sigma) + \sigma \;\; ,$$

e pertanto tutti gli insiemi T_m , eccettuati al più i primi $n(\sigma)$, ammettono come minorante il reale $c(\sigma)-\sigma$ e come maggiorante il reale $c(\sigma)+\sigma$. Ne viene subito:

$$(34)\qquad \begin{aligned} c(\sigma) - \sigma \ &\le\ {}^{m}e_i \ <\ c(\sigma) + \sigma \ , \\ c(\sigma) - \sigma \ &<\ {}^{m}e_s \ \le\ c(\sigma) + \sigma \ , \end{aligned}$$

dove è sempre $m > n(\sigma)$; e queste ultime, unite alle (31), assicurano che $c(\sigma)+\sigma$ è un maggiorante per l'insieme di *tutti* gli ${}^{m}e_i$, così come $c(\sigma)-\sigma$ è un minorante per l'insieme di *tutti* gli ${}^{m}e_s$. Designando allora con η l'estremo superiore dell'insieme degli ${}^{m}e_i$ e con ξ l'estremo inferiore di quello degli ${}^{m}e_s$, dalle (34) si trae:

$$(35)\qquad \begin{aligned} c(\sigma) - \sigma \ &\le\ \eta \ \le\ c(\sigma) + \sigma \ , \\ c(\sigma) - \sigma \ &\le\ \xi \ \le\ c(\sigma) + \sigma \ ; \end{aligned}$$

e di qui, immediatamente: $|\ \eta - \xi\ | \le\ 2\ \sigma = 2\ \varepsilon/3 < \varepsilon$. In conclusione, η e ξ coincidono.

Pósto allora $t = \eta = \xi$, esistono due indici n' ed n'' per i quali si ha: $t - \varepsilon\ <\ {}^{n'}e_i\ ,\ {}^{n''}e_s\ <\ t + \varepsilon$; ma allora, di nuovo in virtù delle (31), si conclude che riesce *definitivamente*:

$$(36)\qquad \begin{aligned} t - \varepsilon \ &<\ {}^{n}e_i \ , \\ {}^{n}e_s \ &<\ t + \varepsilon \ , \end{aligned}$$

da cui, tenendo presente la (32), e sempre definitivamente:

$$(37)\qquad t - \varepsilon\ <\ t_n\ <\ t + \varepsilon\ .$$

Pertanto, come era da dimostrarsi, la successione $\{t_n\}$ differisce per una zero-successione di numeri reali dalla successione costante $\{t, t, t,..., t,...\}$; ossia, essa ammette limite, e tale limite è t .

8 - *Qualche* flash *su limiti ed estremi.*

È superfluo ribadire quale varietà di applicazioni trovi il concetto di *limite*, sia nelle scienze fisiche, sia nei diversi ambiti della stessa Matematica. Quest'ultimo aspetto è forse meno evidente; perciò, a titolo d'esempio, dimostreremo ora una proprietà delle successioni di numeri razionali strettamente correlata all'esistenza del limite.

P16

Sia $\{ p_n/q_n \}$ *, con* p_n *e* q_n *interi positivi e primi tra loro, una successione dotata di limite. Se questo non coincide con qualcuno dei suoi termini, la successione* q_n *diverge positivamente.*

Ammettiamo che, per un reale y e per infiniti valori di n , risulti $q_n < y$. In tal caso, per un intero s e per infiniti valori di n , valori che noi disporremo in una sottosuccessione $\{ m(n) \}$, dovrà essere $q_n = s$; e dunque, detta $\{ p_{m(n)}/r \}$ la corrispondente sottosuccessione di $\{ p_n/q_n \}$, per un intero r e per infiniti valori di n riuscirà $p_{m(n)} = r$. Il che è manifestamente assurdo.

In quanto al ruolo essenziale svolto dalla nozione di *estremo inferiore* [*superiore*] in tutta l'Analisi Matematica, soltanto uno studio approfondito di questa disciplina può darne un'idea adeguata.

Ma intanto, come utile esercizio, il lettore dimostri la seguente proposizione:

P17

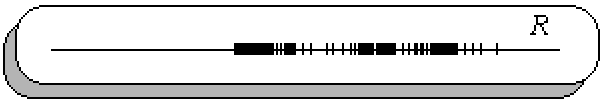
se l'estremo inferiore [superiore] di un insieme $K \quad R$ *non appartiene a* K *, allora è un punto d'accumulazione per* K .

Sulla scorta di questa proprietà, forniremo ora un esempio assai eloquente di quanto detto riguardo alla nozione di estremo inferiore [superiore]. Daremo cioè una stringata dimostrazione del risultato universalmente noto come *teorema di* BOLZANO-WEIERSTRASS:

T9

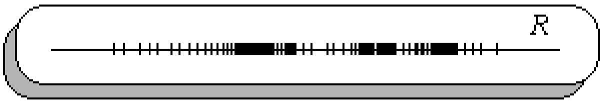
un insieme $K \quad R$ *, infinito e limitato, ammette in* R *almeno un punto d'accumulazione.*

Sia H l'insieme dei punti di K preceduti da punti di K in numero finito (eventualmente nullo). Se è $H = \phi$,



$inf(K) \quad K$. Dunque $inf(K) \quad K'$.

Sia allora $H \neq \phi$.



Se $sup(H) \quad H$, $sup(H) \quad H'$. Dunque $sup(H) \quad K'$.

Se $sup(H) \quad H$, l'insieme H è finito e $inf(K-H) \quad H$, così che $inf(K-H) \quad (K-H)'$. Dunque $inf(K-H) \quad K'$.

E il teorema è dimostrato.

9 - *Considerazioni conclusive, ma non troppo...*

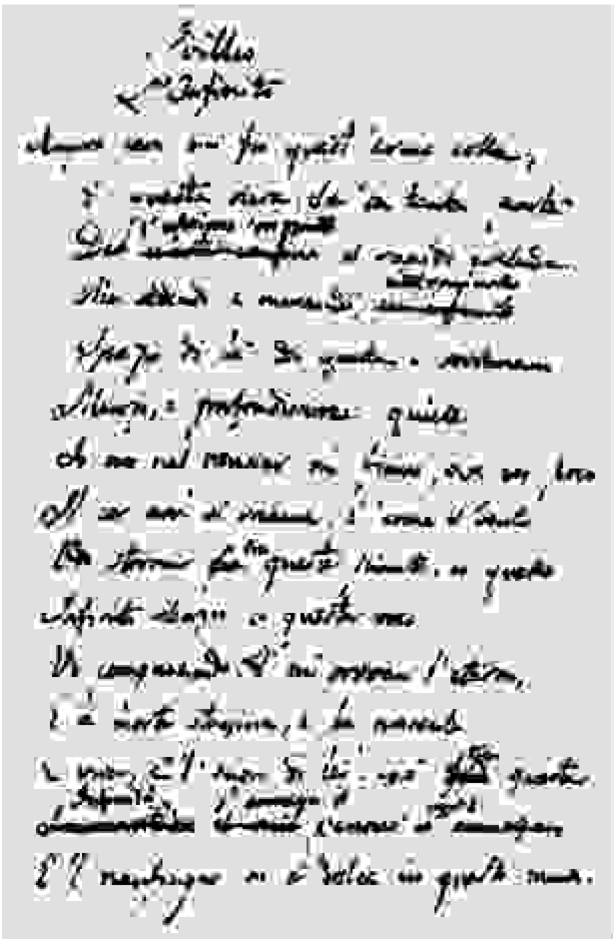
La nozione di *limite* lascerà intravedere, anche al lettore meno avvertito, un panorama dalle innumerevoli prospettive. Le eleganti quanto imponenti costruzioni dell'Analisi Matematica ne rappresentano la migliore conferma.

Tuttavia l'acquisizione di questo poderoso strumento d'indagine esaurisce il compito che ci eravamo pósti all'inizio del presente capitolo; e anzi, paradossalmente, lo scopo dei successivi sarà proprio quello di mettere al bando - ovviamente con le più solerti intenzioni costruttive - il secolare *deus ex machina* del cosiddetto "calcolo infinitesimale"; ci occuperemo infatti di dare spazio a una struttura che, se da un canto legittima l'uso di una simile locuzione, dall'altro - e soprattutto - conferisce pieno rigore alla più luminosa intuizione di LEIBNIZ: alludiamo alla sua idea di realizzare un calcolo entro il quale abbiano diritto di cittadinanza (siano cioè trattati alla stregua di tutti gli altri numeri) proprio quei labili enti ai quali, più o meno fuggevolmente, si accenna nei testi classici con l'immancabile capitoletto dedicato a "infinitesimi e infiniti".

Da sempre guardati con sospetto nella loro pretesa di accreditarsi come autentici numeri, essi si legittimano intorno agli anni '60 per opera di ABRAHAM ROBINSON: finalmente ammessi nel dominio dell'Algebra e dell'Analisi, si intercalano fra i numeri reali, ne esaltano l'efficienza e ne rendono l'uso più comodo e spedito.

È per questo che, nel provvedere a costruirli, cureremo soprattutto di mettere in luce come la loro struttura sia quella di un... rispettabilissimo *campo* numerico.

INTERMEZZO



DIALOGO
SOPRA CERTE QUESTIONI OZIOSE

UN ACCOSTAMENTO IN TERMINI “INGENUI”
AI CONCETTI DELL’ANALISI NON-STANDARD

Manoscritto autografo de *L'infinito*, di G.Leopardi.

... successivamente fu adottato spesso il sistema più semplice di aprire entrambe le portiere dei vagoni, senza avvertimenti né istruzioni ai nuovi arrivati.

PRIMO LEVI

DIALOGO SOPRA CERTE QUESTIONI OZIOSE

(Salviati e Simplicio)

Prima giornata.

SIMPLICIO - Più d'una volta, mio caro Salviati, mi è parso che voi diate peso eccessivo a talune questioni che i più considerano... ecco...

SALVIATI - Animo, Simplicio, non sarà una paroletta a farvi ombra! Di quali questioni parlate?

SIM. - È presto detto: di quel genere di questioni che molte persone di buon senso ritengono oziose...

SAL. - Tutto qui? Ebbene, tranquillizzatevi, amico mio: ciò che affermate è verissimo! E tuttavia vi prego di notare che, per quanto la cosa a taluni non piaccia, le più sorprendenti avventure del pensiero hanno avuto origine da simili questioni.

SIM. - Voi dite, signore?

SAL. - Lo sostengo nel modo più fermo! Né mi difettano le prove. Ma poiché una modesta riflessione può fornirvene in gran copia, non starò a redigere elenchi. Che direste, invece, di esaminare diffusamente un caso? Uno solo, badate, ma quanto mai affascinante: poiché ci condurrà a spaziare nei cosiddetti *universi non-standard*.

SIM. - Di che si tratta, signore?

SAL. - Della più audace architettura della Matematica, oso dire: del coronamento di quello che chiamerei "il sogno di Leibniz"...

SIM. - Un Leibniz che sogna? Davvero non riesco a figurarmelo... E quale fu mai questo suo sogno tanto ambizioso?

SAL. - A dirsi è semplice. Quello di accogliere entro la cittadella del rigore matematico un'antichissima idea dell'umanità: l'idea di *quantità infinita*. E di conseguenza, quella di *quantità infinitesima*.

SIM. - Ma non basterebbe darne una definizione?

SAL. - È proprio questo l'obiettivo! Solo che il conseguirlo non è affatto banale. Tanto che, per ora, intenderemo quelle due espressioni così alla buona: vale a dire, come ingenui sinonimi di "quantità infinitamente grande" e di "quantità infinitamente piccola".

SIM. - Nel secondo caso, diversa da zero, suppongo.

SAL. - Precisamente, caro amico.

SIM. - E sia. Ma ora ditemi; quale sarebbe la questione oziosa da cui origina un progetto così seducente?

SAL. - Non vogliatemene, signor mio, ma debbo pregarvi di pazientare. Il fatto è che per introdurre meglio il problema non guasterà un tocco di poesia. Certo! Sarà proprio una digressione poetica a farci inquadrare l'argomento.

SIM. - Quand'è così, ve ne prego.

SAL. - Bene. Notate allora che, se d'un concetto indocile al vaglio dei sensi l'uomo ha sempre avvertito la lusinga, questo è senza dubbio il concetto di *grandezza infinita*. Prima di presagire l'invadenza occulta di una o più divinità, prima di rassegnarsi ad ammettere fra gli ineluttabili il traguardo della morte, e persino prima di spiegarsi in confuso l'orrido prodigio della nascita, l'uomo fu costretto a riconoscere intorno a sé la replicante presenza dell'ambiente. Né poté altrimenti rappresentarsi quella "stanza smisurata e superba" se non come un *unicum* palesemente privo di frontiere. Di qui, con ogni probabilità, anche se per precisarsi solo molto più tardi, dovette scaturire la prima idea d'infinito; e con essa la prima disputa. C'è da presumere infatti (e il mito ne dà conto in più punti) che di fronte a un simile spettacolo alcuni siano giunti a postulare l'esistenza di territori tanto remoti da risultare *irraggiungibili anche in linea di principio*.

SIM. - In linea di principio?...

SAL. Ecco, signore, con questa clausola non alludo all'*inaccessibilità pratica*, che deriva da limiti concreti, e perciò può attribuirsi a una cima proibitiva come ai recessi di un'intricata foresta o al ciglio opposto d'un abisso. Né all'*inarrivabilità di fatto*, qual è quella che impedisce di coprire l'immane distanza che un capriccioso despota ci imponesse di percorrere; dato che prima o poi la morte ci fermerebbe. No, quando parlo di *territori irraggiungibili anche in linea di principio* voglio piuttosto significare che *l'arrivo in quei territori sarebbe negato anche a un viandante immortale che marciasse lungo una pista sgombra di vette, di boscaglie e baratri*.

SIM. - Perdonate, signor mio, ma l'assenza di frontiere per lo spazio fisico non esclude già di per sé che esistano simili territori?

SAL. - La vostra obiezione appare plausibile; e tuttavia non posso non chiedermi su quali previe certezze riposi un tale rifiuto... In breve: mi sarebbe fin troppo facile rammentarvi che nulla ancora sappiamo sull'esistenza di frontiere per lo spazio fisico, ma sarebbe ancora un appigliarsi al relativo. Così, invece, vi chiedo: a quali assoluti contraddice l'idea di *irraggiungibilità anche in linea di principio*, che d'ora in poi dirò semplicemente *irraggiungibilità*?

SIM. - Vi è forse una risposta?

SAL. - A dire il vero, con quanto più scrupolo ricerco le conferme, sia logiche, sia empiriche, di una possibile contraddizione, tanto più si rafforza in me il sospetto che il rifiuto di quell'idea derivi piuttosto da un'altrettanto mitica (e sarei tentato di dire "mistica") concezione dell'infinito. Anch'essa antica quanto l'uomo, ma ufficialmente sbocciata nell'orto aristotelico, quest'infiorescenza del pensiero arrivò a lussureggiare in quello tomistico: consacrata infatti in pieno Medioevo, essa si abbarbicava a un assunto di pura metafisica, finendo per rivelarsi non meno arbitraria dell'ipotesi avanzata dai fautori dell'*irraggiungibile*. I più ombrosi avversari della Scolastica vi lessero addirittura un disegno: quello di scardinare le conquiste della scienza dal supporto di un qualunque metodo operativo, anche inteso (e nel nostro caso non potrebbe essere altrimenti) in termini di "operazioni mentali"; operazioni, cioè, che, pur senza ignorarli, trascendono gli esperimenti di laboratorio.

SIM. - È tutto molto interessante, signor Salviati. Ma non vi nascondo che amerei sentirvi spendere due parole su questa... dogmatica concezione dell'infinito, di cui peraltro non vi vedo entusiasta.

SAL. - Senz'altro, Simplicio. Anzi, per iniettarvi una dose di sana diffidenza verso certi filosofemi, mi lascerò andare a qualche ironia sopra un celeberrimo esempio: chi di noi, fin da studente, non si è imbattuto in un corpacciuto maestro di teoretica, nemico giurato delle scienze esatte e portatore innocuo (ma non sano) di questa formidabile definizione? *“Infinito è ciò di cui niente di più grande può concepirsi”*... E così noi vediamo già le nostre contrade dell’*irraggiungibile*, povere, malinconiche ragnatele negli angoli di tanto arioso infinito, perdere non che la dignità di sostanza, persino quella di “puri, purissimi accidenti”: null’altro che una suggestione poetica, una colorita ghirlanda di parole! *“Stat rosa pristina nomine”*, sembra ammonire il nostro pingue chierico, *“nomina nuda tenemus”*.

SIM. - Una vera disfatta!

SAL. - Ahimè sì, signor mio. Ma ecco che un compagno di scuola, uno di quelli che puzzano di zolfo, e della cui genìa pare alligni un esemplare in ogni classe, se ne spunta argomentando, nel suo maccheronico scolastichese, che: “O l’infinito del filosofo è concepibile, e in tal caso deve esistere un alvo più vasto che l’abbia concepito; o non lo è, e allora la definizione vien meno, giacché non si dà definente che non produca la concepibilità del definito...”.

SIM. - Ma voi, signore, come definireste simili confutazioni?

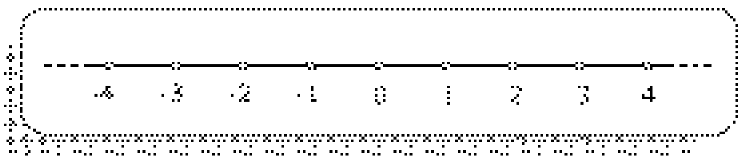
SAL. - “Difettivi sillogismi”, è chiaro. Lemuri della ragione, da cui il discorso scientifico dovrà sempre guardarsi. E più ancora quello matematico, per aperto che si voglia mantenerlo. Poiché ogni serio sforzo di conoscenza ha da imporsi dei vincoli: e il primo è di fondare ogni nozione e di svolgere ogni argomento su basi e con regole operative. Occorre cioè pretendere che i concetti siano espressi (e le proprietà desunte) sulla scorta di precise operazioni; delle quali, inutile dirlo, si esige la fattibilità e la mutua coerenza anche sul piano delle astrazioni logiche: solo così i nessi fra i concetti potranno tradursi in legami fra le proprietà. Giova tuttavia ripetere che un simile requisito non impone che le operazioni debbano tutte eseguirsi nell’ambiente esterno alla mente che le concepisce.

SIM. - Ma potrebbe essere altrimenti? In tema di infinito, poi!...

SAL. - Certo che no. Ma c’è di più: si dà il caso (ma non è davvero un caso!) che il problema delle grandezze infinite si presti, meglio di tant’altra filosofia, a una limpida esposizione in termini operativi. E in effetti, col vostro permesso, vi mostrerò come il quesito sull’esistenza dell’*irraggiungibile* si lasci formulare in uno dei più classici linguaggi della matematica: sarà infatti il lessico cartesiano a consentirci di esporlo così puntualmente.

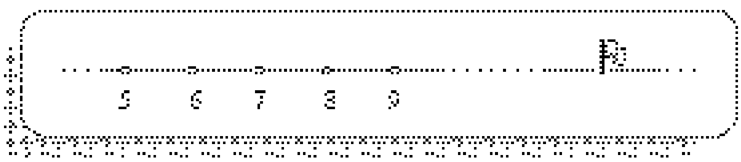
SIM. - Ammetto, signore, che quest'idea aveva lusingato anche me; ma poi mi sono chiesto se non peccassi un po' di semplicismo.

SAL. - Ascoltatemi, allora. Noi tutti (chi più, chi meno criticamente) possediamo una qualche nozione della linea retta; e parimenti sappiamo come dislocare lungo la sua bifronte estensione tutti i numeri interi: in ordine crescente, per esempio, ossia da sinistra verso destra, situandoveli a intervalli di data lunghezza. Così come le pietre miliari di una qualsiasi strada. Di modo che, pósto lo zero in un punto fissato a piacimento, gli interi negativi si perderanno alla sua sinistra, quelli positivi alla sua destra. Uno schema quanto mai semplice, è vero, ma che è ci permette di rappresentare fedelmente la pista interminabile battuta da quel viandante solitario: una pista del tutto sgombra di vette, boscaglie e baratri, ricordate?



SIM. - La strada degli immortali!

SAL. - Sicuro, amico mio. Ma adesso vorrei rivolgervi una domanda... Siate cauto, però: essa può sembrare tanto innocua quanto in realtà è insidiosa! Io, in cambio, mi sforzerò di essere conciso. Immaginate dunque un qualsiasi segnale sul tracciato di quella pista: un masso, una bandiera, un cespuglio, una pozzanghera... Bene, io vi domando: siete certo che il viandante, se già non lo ha superato, finirà comunque per farlo dopo un sufficiente numero di passi?



SIM. - Ma... signor mio! Dal momento che il nostro uomo è immortale, non vi sarà che da attendere: passo dopo passo, egli supererà senza scampo pietre, vessilli, ciuffi d'erba e pantani...

SAL. - Vi ripeto, Simplicio: *siete certo che questo avverrà, qualunque sia l'ubicazione del segnale?*

SIM. - Oh, insomma! Sbaglio o, nell'idioma cartesiano, voi mi state domandando *se al di là di ogni punto della retta vi sia sempre qualche numero intero*?

SAL. - È questo che vi sto domandando. E le vostre risposte tradiscono due discutibili certezze. La prima è quella di credere *dimostrabile sperimentalmente* (per lo meno in linea di principio) che, passo dopo passo, il nostro viandante finirà per lasciarsi alle spalle rocce, drappi, cespugli e guazzi, dovunque essi si trovino. La seconda è quella di ritenere *evidente alla ragione* un asserto quanto mai impegnativo: e cioè, che al di là di ogni punto della retta vi siano sempre numeri interi.

SIM. - Oh, bella! Forse che non è così?

SAL. - Lo è come può non esserlo, amico mio.

SIM. - Via, signor Salviati, ora vi burlate di me!

SAL. - Me ne guarderei bene, stimatissimo Simplicio! E per convincervene demolirò con estrema serietà ciascuna delle vostre due certezze. Permettete che cominci dalla seconda, visto che la abbiamo sotto mano?

SIM. - Per quello che importa...

SAL. - Grazie. E allora, quanto a questa, mi limiterò a citarvi le parole che Julius Wilhelm Richard Dedekind, a proposito di un'evenienza ritenuta altrettanto... certa, rivolse ai suoi stupefatti allievi: "Sono ben lieto", osservò, "che troviate evidente tutto ciò che vi ho detto, poiché né io né altri saremo mai in grado di dimostrarlo".

SIM. - Parlava d'un postulato, evidentemente.

SAL. - Sicuro. Ma sappiate che, allo stesso modo, *la presenza di numeri interi al di là di ogni punto della retta costituisce anch'essa un postulato*. Un postulato che porta il nome d'un siracusano...

SIM. - ... Archimede, per caso?

SAL. - Proprio lui. Vedete dunque che sta a noi accettarlo o rifiutarlo; e così facendo, scegliere se inoltrarci o no in un differente universo matematico. Ch'è poi come dire in un differente universo...

SIM. - È davvero curioso, Salviati... Anche se parlare di universo senz'altro mi pare un tantino avventato.

SAL. - Non direi, amico mio, proprio non direi. Sentite infatti come David Hilbert amava illustrare la portata pratica del *postulato di Archimede*: “La possibilità”, egli avvertiva, “di misurare tutte le dimensioni e tutte le distanze dell’universo (da quelle dei corpi celesti a quelle dei corpi che costituiscono il mondo atomico) riportando una volta dopo l’altra una data lunghezza terrestre, non è per nulla una pura conseguenza logica dei nostri teoremi sulle congruenze o della configurazione geometrica”. E passando subito dopo al lato sperimentale della questione, inevitabilmente conclude: “La validità del postulato di Archimede nel mondo della natura richiede una conferma sperimentale, né più né meno di quanto la richieda il postulato delle parallele”.

SIM. - Il che vanifica anche quella mia certezza sulle possibilità illimitate del viandante immortale...

SAL. - Temo di sì, caro Simplicio. Poiché sul postulato di Archimede, non meno che su quello delle parallele, la Natura ha deciso di mantenersi ostinatamente muta: il quesito sull’*irraggiungibile* ci viene rinviato senza un cenno di risposta. Chi vuole, sorrida del mito. Certo è che l’uomo del terzo millennio, più sguarnito dello stesso Edipo, si trova ancora una volta a fronteggiare la Sfinge dell’indecidibile. Sta a noi scommettere sulle diramanti visioni del mondo: quelle che oggi, con patetica rinuncia, usiamo chiamare *modelli*.

SIM. - In conclusione, Salviati, io potrei affermare che il nostro viandante oltrepasserà quel segnale e voi, per contro, negare che mai riuscirà a raggiungerlo!

SAL. - Direi meglio, Simplicio: voi potreste immaginarvi l’universo come un soggiorno sconfinato sì, ma in cui *niente è irraggiungibile*; e io, per contro, figurarmelo di tanto più sconfinato che in esso *esiste l’irraggiungibile*. Al di là d’ogni scioglilingua filosofico, tutta la questione si riduce a questo.

Seconda giornata.

SAL. - Che vi succede, amico mio? Vi vedo assente, stamane... Non vorrei che la vertigine di tante immensità finisse col frastornarvi.

SIM. - Che dite? Oh, no! Mi stupivo di come abbiate chiarito tutto questo senza far uso di una sola formula!

SAL. - Vedete, Simplicio, le formule sono come certe signore: finché si può, conviene starne alla larga.

SIM. - Un'ottima facezia, signor Salviati! Senza dubbio un'ottima facezia!... Ma adesso che ci ripenso, non avevate accennato anche a quantità infinitesime? O forse non è ancora il caso di cambiare argomento?

SAL. - Cambiare, dite? Niente affatto, amico mio! I due concetti di "infinito" e "infinitesimo" sono così tenacemente saldati che l'uno vacillerebbe se non vi fosse l'altro a bilanciarlo... E poi, aspettiamo ancora d'imbatterci in una certa... questione oziosa, non ricordate?

SIM. - Certo che ricordo! E la cosa non smette d'incuriosirmi.

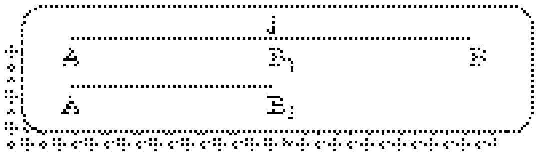
SAL. - Volete che io riprenda, insomma?

SIM. - Ve ne prego, semmai.

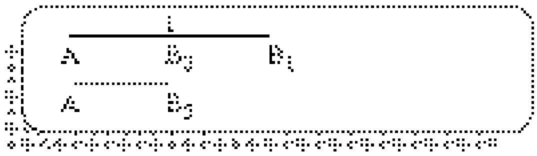
SAL. - Molto bene. Volgiamoci dunque alle piccole cose, e immaginiamo di non aver di meglio da fare che metterci a sminuzzare un certo segmento: un segmento qualunque, sia chiaro; ma che, per ragioni di mera semplicità, supporremo di lunghezza 1. Come questo, per esempio:

SIM. - Impresa quanto mai ardua, mio caro Salviati! Da domandarsi se ne verremo mai a capo...

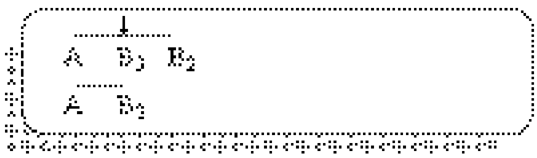
SAL. - Debbo ammettere che, se ci fermassimo qui, la vostra ironia sarebbe più che legittima. Ma supponiamo di assoggettare il nostro passatempo a una ben precisa norma. Questa: diviso AB a metà mediante un punto B_1 , si scarti il segmento B_1B e si conservi il segmento AB_1 :



diviso quindi AB_1 a metà mediante un punto B_2 , si scarti il segmento B_2B_1 e si conservi il segmento AB_2 :



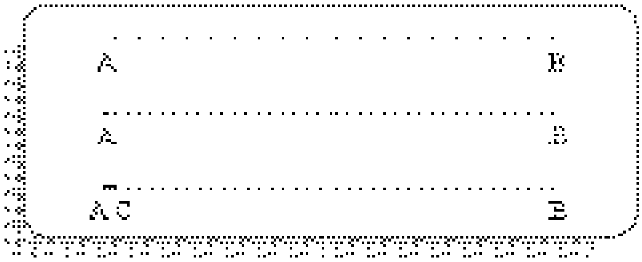
diviso ancora AB_2 a metà mediante un punto B_3, si scarti il segmento B_3B_2 e si conservi il segmento AB_3 ...



SIM. - Fermatevi pure, Salviati. La regola mi è chiara. *Si seguiterà a dimezzare il segmento e se ne scarterà ogni volta la parte destra*. Dico bene?

SAL. - Non avreste potuto dir meglio. Ed è qui che si pone, finalmente, la questione... oziosa! Eccovela: *una volta ritagliate tutte le parti destre, che cosa resterà del primitivo segmento* AB *?* Ma badate: sarà più che mai opportuno mantenersi disponibili! Esaminare, cioè, tutte le eventualità che, anche a una valutazione sommaria, appaiano in qualche modo sensate.

SIM. - Su questo concordo senz'altro. Ma vedete, così su due piedi, per quanto io mi arrovelli, non ravviso che tre ipotesi: la prima è che *non resti nulla*; la seconda, che *resti il solo punto* A ; la terza, che *resti un piccolissimo tratto* AC .



SAL. - Niente paura, Simplicio! Ve ne è più che abbastanza. Ma procediamo nell'ordine. La prima eventualità, invero piuttosto nichilista, può escludersi senza gran fatica. Fate mente, infatti, al procedimento delle suddivisioni ripetute: poiché nessuno dei segmenti via via dimezzati aveva lunghezza nulla, nessuno dei loro punti di mezzo (B_1 , B_2 , B_3 ... etc.) poteva coincidere con A ; onde *nessuno dei segmenti scartati conteneva questo punto*. Vedete dunque che l'estremo A non può essere stato rimosso.

SIM. - È vero, signor Salviati! Chi l'avrebbe detto?... Immagino che a questo punto, con analoghe considerazioni, saremo in grado di decidere fra la seconda e la terza ipotesi.

SAL. - Vi dirò, amico mio: negli ultimi tre secoli si è creduto non solo di aver portato argomentazioni ferree in favore della seconda ipotesi, ma addirittura di aver definitivamente confutato la terza.

SIM. - "Si è creduto", dite?

SAL. - Direi di più, signore. Direi che ci si è illusi. E sapete chi fu la più illustre vittima di questa illusione? Nientemeno che sir Isaac Newton. Sì, proprio lui: l'ideatore di quella Dinamica e di quel Calcolo Infinitesimale che hanno tracciato la strada della Fisica sino a questo XX secolo. Anche se, a voler parlare di vittime, sarebbe più opportuno ricordare colui che, solo contro tutti, seguitò a battersi per un'impostazione della Matematica in armonia con l'ipotesi che si dava per sconfitta: la terza, appunto. Quest'uomo si chiamava Gottfried Wilhelm von Leibniz, il filosofo che abbiamo imparato a conoscere fin da giovanissimi.

SIM. - Se non foste voi a dirmelo, vi giuro, signor Salviati, che stenterei a crederlo!

SAL. - Eppure si dovette aspettare fino alla seconda metà di questo secolo perché un logico matematico, Abraham Robinson, dimostrasse senza ombra di dubbio che Leibniz aveva ragione. E in che senso la aveva? Nel senso migliore in cui questo possa accadere: non ricacciando nel ghetto dell'errore i sostenitori della tesi opposta, bensì attraverso un formidabile potenziamento del pensiero matematico: una vittoria di tutti, insomma.

SIM. - Qui, purtroppo, non vi seguo fino in fondo.

SAL. - Mi spiego meglio, Simplicio. Questo genere di successi è ricorrente nelle vicende della Scienza. Pensate a un altro grande riformatore: Albert Einstein. Con la sua ampliata visione dei fenomeni egli non confuta, bensì potenzia la nostra conoscenza del mondo rispetto alla nozione di movimento. Pensate ai padri della Meccanica Quantistica, che realizzano un non meno grandioso progetto nell'ambito dell'universo microscopico... Ma tornando alla nostra questione: forse che Robinson afferma che è la terza *la risposta giusta*, mentre la seconda è *quella sbagliata*? Assolutamente no!

SIM. - È mai possibile tutto questo?

SAL. - Certo, amico mio. Giacché Robinson semplicemente dimostra che *solo accettando o rifiutando un certo postulato* (e più in là vedremo quale...) *potremo sostenere l'una o l'altra delle due impostazioni*.

SIM. - Sicché, se ben capisco, io potrei optare d'arbitrio per la mia seconda ipotesi (ma così immergermi in un certo universo) o assumere altrettanto liberamente la terza (ma in tal caso aggirarmi in un altro)...

SAL. - Avete inteso benissimo. Aggiungo solo che nell'un caso si parla di *modello standard*, nell'altro di *modello non-standard*. Ma voi avete pure intuìto a quale postulato alludevo, non è vero?

SIM. - A quello di Archimede, suppongo... Tuttavia, se ho chiaro che esso dirime quella disputa sull'infinitamente grande, non vedo come possa intervenire in questa faccenda dei segmenti scartati; che poi condurrebbe (così mi è parso d'intendere) a quella delle quantità infinitamente piccole.

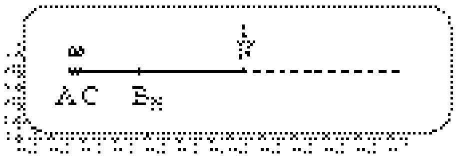
SAL. - Quanto a questo, signor mio, debbo subito avvertirvi che si tratta dell'aspetto più riposto e insieme più cruciale dell'intero edificio. Mi concederete quindi un'altra brevissima dilazione; giusto quanto basta perché io possa completare la chiamata in causa delle quantità infinitesime.

SIM. - È più che ragionevole, signor Salviati.

SAL. - Vi ringrazio. Assumiamo pertanto che, rimossi tutti i ritagli del segmento originario (quello che io ho chiamato AB e che per semplicità ho supposto di lunghezza 1) , ne avanzi un piccolissimo tratto (quello che voi stesso avete chiamato AC) . Mi chiedo e vi chiedo: se indichiamo con ω un numero che ne misuri la lunghezza, quanto sarà grande questo numero? Dovrà essere maggiore di zero, d'accordo, ma in ogni caso minore di 1/2 ; e anche di 1/3 ; e di 1/4 ; e di 1/5 ... Minore, insomma, di qualunque frazione dell'unità; o, come si dice, dell'inverso di qualunque numero intero positivo.

SIM. - E perché mai, di grazia?

SAL. - Ma è ovvio, caro Simplicio! Notate infatti che, per quanto grande si scelga un numero intero positivo, e diciamolo N , io potrò, con un sufficiente numero di divisioni a metà, far sì che la parte residua AB_N del segmento AB abbia lunghezza minore di 1/N . Ma poiché AC è più breve di ciascuna parte residua, la sua lunghezza ω sarà, *a fortiori*, minore di 1/N . Come per l'appunto dicevo.



SIM. - Ma in tal caso... Eh, sì, si direbbe proprio...

SAL. - Di che si tratta, Simplicio? Suvvia, dite pure.

SIM. - Ecco... Stando così le cose, ne debbo arguire che questo strano numero ω , benché positivo, è minore di tutti i numeri positivi con cui sinora ho avuto a che fare. Anche di quelli che non sono espressi da frazioni, intendo dire: come π , come la radice quadrata di 2 ...

SAL. - In breve: ω *è positivo, ma è minore di tutti i numeri reali positivi*.

SIM. - Proprio così, signor mio!

SAL. - Ma in tal caso non sarà lecito annoverarlo fra i numeri reali, non vi pare?

SIM. - A meno di non cadere in contraddizione, direi.

SAL. - E in effetti, noi non lo faremo. Tuttavia, a ben vedere, è solo una questione di nomi; e come tale, non significa certo che ω sia un qualcosa di avulso dalla “realtà”. Il metodo che abbiamo adottato per stanarlo ci suggerisce semmai tutto il contrario: si direbbe infatti che numeri come ω descrivano una realtà più ampia, una sorta di... iperrealtà, per così dire.

SIM. - Ma allora?...

SAL. - Allora sentite: perché non chiamarli *iperreali*?

SIM. - Sarebbe un’ottima idea!

SAL. - Mi rallegro che ne conveniate, giacché è proprio così che li si chiama. E anzi questo termine, come poi vedremo, verrà esteso anche ai numeri infiniti.

SIM. - Vada per *numeri iperreali*, dunque.

SAL. - Vada. E ora, per quanto riguarda il nostro ω, siamo proprio alle conclusioni. Non si è forse visto, infatti, che nell’universo in cui abbiamo scelto di trasferirci *esistono quantità infinitamente piccole*? Di più: abbiamo appena sperimentato un ambiente matematico nel quale, oltre ai consueti numeri reali, *trovano posto anche numeri iperreali infinitesimi*. E ω è uno di essi.

Terza giornata.

SIM. - Esistono dunque numeri infinitesimi. E ω è “uno di essi”. Così avete detto. Ma allora ve ne sono degli altri...

SAL. - Via, Simplicio! Quanto a questo, ve ne sono tanti da non lasciarci che l’imbarazzo della scelta! Dimezzate ω e chiamatelo $\omega/2$; non potrei ripetere per $\omega/2$ lo stesso ragionamento fatto per ω ? Vedete dunque che anche $\omega/2$ è un numero infinitesimo! E che dire di $\omega/3$? E di $\omega/4$, di $\omega/5$, di $\omega/6$ ... diciamo pure di ω/N , qualunque sia il numero intero positivo N ?

SIM. - Dunque ne avremmo già tanti quanti sono i numeri interi positivi. Dico bene?

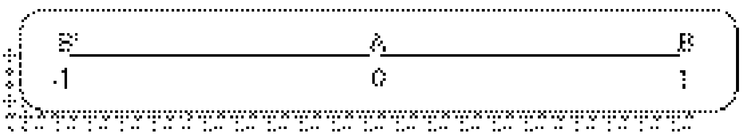
SAL. - Certo che dite bene. E soprattutto, fate bene a dire “già”, poiché ve ne sono molti altri ancora. Per non parlare delle loro immagini speculari, ossia di quelli negativi...

SIM. - Un momento, Salviati: ma non si era parlato di infinitesimi come di quantità positive?

SAL. - Simplicio, questo non è da voi! Avete accettato *numeri positivi a sinistra dell’inverso di ogni intero positivo* e vi fate specie di accettare *numeri negativi a destra dell’inverso di ogni intero negativo*? Ma se la cosa vi è tanto ostica, sono qui a dimostrarvela.

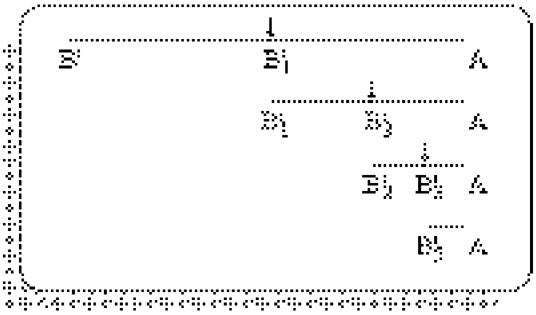
SIM. - Un lavoraccio, presumo...

SAL. - Non direi, signor mio. Voi, piuttosto, vi sentite di ridiscutere l’intera questione partendo, anziché dal segmento AB , da un segmento B’A identico a questo, ma che lo fronteggia a sinistra?



SIM. - Perché no? Anche a costo di far notte.

SAL. - Non ci vorrà tanto tempo. Ripetete infatti il gioco delle suddivisioni a metà, ma questa volta sul segmento B’A ...



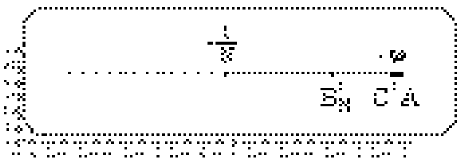
SIM. - ... e scartando a ogni suddivisione le metà sinistre, anziché quelle destre! Non è così?

SAL. - Per l'appunto. Dunque vi siete accorto di qualcosa...

SIM. - Eccome, se me ne sono accorto! Direi anzi che la dimostrazione è conclusa. Stando infatti alle leggi del nostro più ampio universo, ci avanzerà un minuscolo segmento C'A , la cui lunghezza non può che essere $-\omega$. Un infinitesimo negativo, in altre parole!

SAL. - E in altre parole ancora?...

SIM. - Un numero negativo che sta a destra dell'inverso di ogni numero intero negativo!



SAL. - Che è appunto ciò che vi turbava. Ma direi che, per ora, tanto ci basta. Mi permetterò invece di sottoporvi un'altra delle mie piccole questioni oziose...

SIM. - Vi burlate di me, signor Salviati?

SAL. - Che dite, amico mio? Volevo solo celiare. Ma poiché mi si offre l'occasione, vi prego di tenere a mente quanto ora vi dirò: nessuno, dico nessuno, può pretendere di indicarci *a priori* quali questioni siano oziose e quali non lo siano! C'è chi lo fa, lo so bene; ma si tratta o di vittime della stupidità o di predicatori dell'inganno. Escludendo i primi (che costituiscono la parte passiva e che come tali trascureremo), ecco che cosa scrive dei secondi uno dei massimi pensatori del nostro secolo: "*La scuola, la stampa, la politica, la religione, in breve tutte le grandi forze del mondo,* *stanno oggi dalla parte dell'irrazionalità: esse sono nelle mani di uomini che adulano il Popolo Sovrano per condurlo fuori dalla strada giusta".*

SIM. - Non mi pare un progressista, signor mio!

SAL. - Ahimè, vi ingannate, caro Simplicio. Si tratta di Bertrand Russell... Ma sentite, sentite come conclude: *"Il rimedio si trova non in qualcosa di eroicamente catastrofico, ma nello sforzo dei singoli verso una più sana ed equilibrata concezione dei nostri rapporti col prossimo e col mondo".*

SIM. - Un precetto morale, in fin dei conti.

SAL. - In senso lato, forse. Ma notate: *"col prossimo e col mondo"*, dice il nostro autore. Non solo, dunque, con l'umanità che ci circonda, ma anche con quell'universo di cui la nostra mente è parte ordinante non meno di quanto lo sia il nostro corpo!

SIM. - Tutto ciò mi pare in perfetto contrasto con le opinioni più diffuse.

SAL. - Un elogio, Simplicio, che va tutto a Bertrand Russell... Ma ora che ne direste se tentassimo di capire in che modo questo microcosmo dei numeri infinitesimi, gravitante intorno allo zero, si colleghi con quelle lontane nebulose fra le quali ier l'altro ci parve di intravedere l'*irraggiungibile*? Voi rammentate, spero.

SIM. - Perbacco, se rammento!

SAL. - Vengo allora a quell'altra questioncella. Visto che ω è diverso da zero, non sarà fuor di luogo indagare sul suo inverso; ossia su quel numero Ω che, moltiplicato per ω, dia come risultato 1.

SIM. - Se ben capisco, questo vostro Ω è quello che, in circostanze ordinarie, si indicherebbe con la scrittura $1/\omega$...

SAL. - Sicuro. E anche in questo caso nulla vieta di farlo. Ma il problema è un altro: su quella retta che ci è servita da sostegno per la rappresentazione dei numeri, dove collocheremo il nostro Ω ?

SIM. - Non certo fra gl'infinitesimi... Dico bene?

SAL. - Senz'altro, Simplicio. Ma da che lo deducete?

SIM. - Diamine, dal fatto che due numeri compresi fra -1 e 1 non possono avere come prodotto il numero 1 ...

SAL. - Ineccepibile. E tuttavia possiamo dire molto di più.

SIM. - Che altro, alla buon'ora?

SAL. - Che Ω non si troverà neppure fra i numeri reali.

SIM. - Oh, bella! E per quale ragione?

SAL. - Perché altrimenti, scelto un qualunque numero reale che lo superi, diciamo Ω' , il prodotto $\Omega'\omega$ sarebbe maggiore di 1 .

SIM. - Senz’altro, signor mio. Ma sarebbe poi tanto scandaloso?

SAL. - Via, Simplicio! In tal caso ω sarebbe maggiore di $1/\Omega'$, non vi pare? Maggiore, cioè, d’un numero reale positivo! La qual cosa, come ben sappiamo, non è.

SIM. - Ve ne do atto, signor Salviati. Sicché Ω , al pari di ω, ha da essere un numero... Come dicemmo ieri?... Ah, sì: un numero iperreale. Ma soprattutto mi par d’intendere che Ω dovrà essere *maggiore di qualunque numero reale*.

SAL. - Sicuro, signor Simplicio. E quindi, *maggiore di qualunque numero intero positivo*...

SIM. - Be’, questo è ovvio, direi!

SAL. - Certo che lo è. Ma io volevo soltanto richiamare un fatterello che mi pare vi sia uscito di mente.

SIM. - Vale a dire?

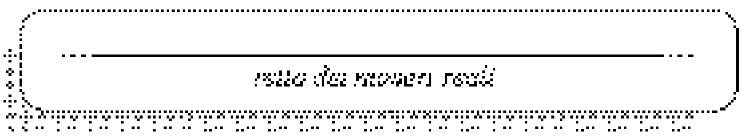
SAL. - Vale a dire che il nostro iperreale Ω dovrà giacere in quei remoti territori (ricordate, Simplicio?) che neppure il viandante immortale, per quanti passi avvicendi nel suo instancabile cammino, riuscirà mai a calcare. Quei territori che, a suo tempo, chiamammo le regioni dell’*irraggiungibile*!

SIM. - Ricordo, ricordo, signor Salviati! Anzi sentite: per provarvelo, vi dirò che quest’inafferrabile Ω ha tutta l’aria di essere uno di quei *numeri iperreali infiniti*...

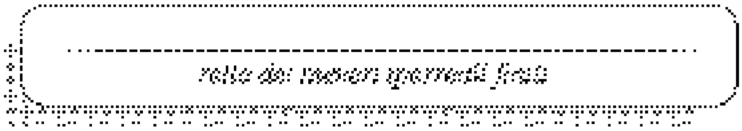
SAL. - Lo è, per l’appunto. Così come lo è (e ormai vi sarà chiaro) l’inverso d’ogni infinitesimo, positivo o negativo che sia.

SIM. - Un bel progresso rispetto alla nostra vecchia retta!

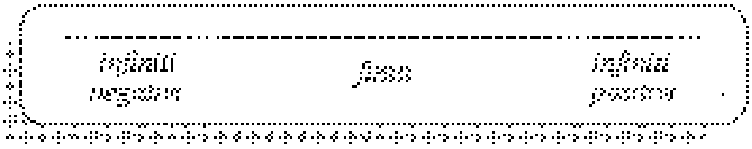
SAL. - Eh, sì, mio caro Simplicio. In effetti, se questo schema rappresenta quella che voi chiamate “la nostra vecchia retta” (la retta dei numeri reali, in breve):



e questo, invece, la rappresenta una volta... “saturata” da tutti gli iperreali non infiniti (o, come si dice più concisamente, *finiti*):



ebbene, uno schema che rappresenti, seppure alla buona, *l'intera retta iperreale* (ossia quella degli iperreali finiti e non) potrebbe essere questo:



SIM. - Non c'è che dire, caro Salviati. Anche se...

SAL. - Qualcosa ancora non vi persuade?

SIM. - Oh, una sfumatura, dopo tutto. Ma vedete, dal momento che questi bizzarri iperreali sono ben più abbondanti dei reali... insomma, visto che (per così dire) li infoltiscono, ecco... io li avrei rappresentati col tratto continuo: quello che voi, invece, avete gelosamente riservato ai nostri vecchi reali.

SAL. - Me ne duole, amico mio, ma purtroppo debbo ancora contraddirvi. Giacché, per curioso che possa apparire, gl'iperreali non meritano affatto che li si rappresenti con quel tipo di tratto!

SIM. - Intendete forse dire che *non formerebbero un allineamento continuo*?!

SAL. - A costo di deludervi, sì: intendo dire proprio questo... Ma forse sarà il caso di riparlarne a mente fresca, ne convenite?

SIM. - E come darvi torto, vista l'enormità della cosa? A domani, dunque.

SAL. - A domani, Signor Simplicio.

Quarta ed ultima giornata.

SIM. - Buondì, Salviati! Splendida mattina, non è vero? Questa lucentezza dell'aria si direbbe l'ideale per i vostri paradossi...

SAL. - Vedo che non demordete, amico mio: seguitate a parlarmi come a un incallito sofista.

SIM. - Oh, no, no davvero! Noto soltanto che il vostro conversare rende avvincente anche la contemplazione di una semplice retta.

SAL. - "Semplice", dite? Non saprei... Ma forse avete ragione: poiché vi è una gran bella differenza tra *semplice* e *rudimentale*.

SIM. - Ahimè, ricomincio a non seguirvi.

SAL. - Eppure la differenza è chiara: *rudimentale* è chiamar *semplice* ciò che sarebbe *semplice* chiamare *rudimentale*.

SIM. - Un momento... Ah, sì, capisco. Ma questo può ugualmente dirsi di *falso* e *vero*; di *male* e *bene*; di *giusto* e *ingiusto*... *Male* è chiamar *bene* ciò che sarebbe *bene* chiamare *male*. *Vero* è chiamar *falso* ciò che sarebbe *falso* chiamare *vero*. *Giusto* è...

SAL. - Vedete, appunto: per quanto spesso li si confonda, il semplice è l'opposto del rudimentale.

SIM. - Non posso non convenirne.

SAL. - Me ne rallegro, amico mio. E non per un sussulto di amor proprio, ma perché questa riflessione potrebbe avere, a suo tempo, ispirato la soluzione del problema su cui ieri ci siamo lasciati.

SIM. - Vi riferite a quel rebus sulla continuità?

SAL. - E a che altro, di grazia? Se ponete mente, ricorderete di avermi domandato (con qualche incredulità, debbo dire) se i numeri iperreali non formino per caso un allineamento discontinuo.

SIM. - È quanto mi è parso che voi suggeriste, signor Salviati.

SAL. - Infatti. Ma non sarà il caso che prima ci chiariamo le idee su ciò che debba intendersi per *allineamento continuo*?

SIM. - E non è un concetto evidente?

SAL. - Lo è a tal punto, che ci vollero più di due millenni perché la scienza ne venisse a capo.

SIM. - È quasi incredibile!

SAL. - Non so darvi torto... Eppure, fu solo alla fine del secolo scorso che qualcuno (e parlo di quel Dedekind cui ho già accennato) seppe rispondere in modo esauriente, ma soprattutto definitivo, alla domanda: *che cosa significa affermare che una retta è continua?*

SIM. - Non credo alle mie orecchie! Io, magari un po' a tentoni, avrei detto che una retta è continua perché non mostra di interrompersi, perché consiste d'un sol tratto, anche se infinitamente esteso: un magnano o un carpentiere direbbero che è fatta di un sol pezzo.

SAL. - Più che giusto, *se così è*. O meglio, *quando così è*... Ma è proprio qui che si insinuano due piccole osservazioni.

SIM. - Sentiamole, dunque.

SAL. - Vi accontento subito. La prima è questa: dicendomi che una retta non mostra di interrompersi, voi mi obbligate a chiedervi che cosa significhi "interruzione". Eh, sì: dal momento che non si tratta di un concetto primitivo della matematica, esso andrà a sua volta definito. E così ci ritroviamo al punto di partenza.

SIM. - Uhm... Lo ammetto. E la seconda osservazione?

SAL. - La seconda sta in quel *"se così è"*; o se volete, *"quando così è"*. Ciò che intendo è presto detto: ammesso di aver precisato il senso della continuità, *chi ci assicura che ogni retta vi si uniformi?*

SIM. - Di bene in meglio! Siamo nell'anarchia più sfrenata...

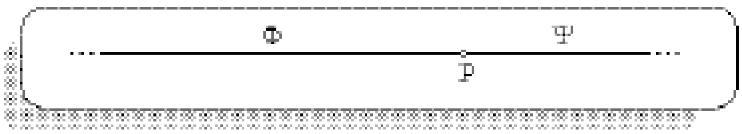
SAL. - Suvvia, Simplicio, non siate apocalittico! Cerchiamo piuttosto di procedere con ordine, e vedrete che tutto andrà a posto.

SIM. - Alle corte, allora! *Che cosa significa affermare che una retta è continua?*

SAL. - Come vi ho annunciato, precisarlo è più semplice di quanto si pensi. Semplice, dico, non certo rudimentale...

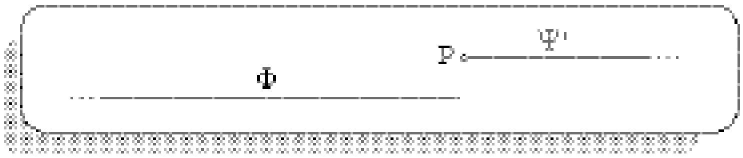
SIM. - Sono tutt'orecchi, signor mio.

SAL. - Ebbene, fissate un qualsiasi punto P sulla vostra retta e decidete (poiché è necessario, per quanto indifferente) se aggregarlo alla semiretta Φ dei punti che lo precedono o a quella Ψ dei punti che lo seguono.



SIM. - Diciamo alla Ψ ?

SAL. - Diciamo alla Ψ . A questo punto vi domando: riunendo le due parti Φ e Ψ , ricostituirei l'intera retta?



SIM. - Sì, perbacco!

SAL. - Dunque possiamo concludere che, fissato un qualunque punto P , la retta resta suddivisa in due parti Φ e Ψ che rispondono a questi palesi requisiti: primo, *ogni punto dell'una precede ogni punto dell'altra*; secondo, *la loro unione ricostituisce l'intera retta*.

SIM. - Più che palesi, li direi banali.

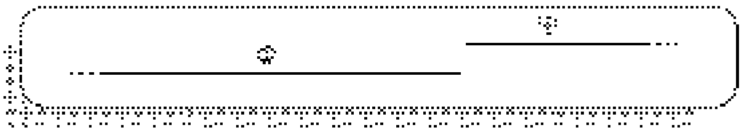
SAL. - Ebbene, signor mio, vediamo di accordarci. Che ne direste di chiamarli *semplici*?...

SIM. - Vada per *semplici*. Ma che ha a che fare tutto questo con la nozione di *continuità*?

SAL. - Ben più di quanto possiate immaginare! Ora, infatti, vi invito a ribaltare il gioco: a prender le mosse, cioè, non più dal coltello che effettua il taglio (vale a dire, il punto P) , bensì dalle due porzioni che ne risultano (vale a dire, le semirette Φ e Ψ) .

SIM. - È troppo se vi chiedo di spiegarvi meglio?

SAL. - Nient'affatto! Chiarisco subito ciò che intendo dire. Supponete che noi ora ci congedassimo, lasciando la nostra retta perfettamente integra; e immaginate che domattina, tornati qui ad incontrarci, la trovassimo spezzata in due parti Φ e Ψ del tutto rispondenti ai semplici requisiti di cui s'è detto dianzi: primo, *che ogni punto dell'una preceda ogni punto dell'altra*; secondo, *che la loro unione ricostituisca l'intera retta*. Io vi chiedo: saremmo certi di poter indicare il punto P responsabile di una tale suddivisione?



SIM. - Non so dir di voi, signor Saviati: quanto a me, non avrei il minimo dubbio. Mi pare anzi che la cosa sia evidente: quel tal punto P sarà o l'estremo sinistro della semiretta Ψ o l'estremo destro della semiretta Φ ! Ma voi sorridete... Perché mai, se è lecito?

SAL. - Non vogliatemene, caro Simplicio. Ditemi, piuttosto: ricordate le parole che Dedekind rivolse ai suoi allievi al termine di quella storica lezione cui altre volte ho accennato? "Sono ben lieto", affermò, "che troviate *evidente* tutto ciò che vi ho detto, poiché né io né altri saremo mai in grado di dimostrarlo".

SIM. - Certo che le ricordo. Voi, però, le citaste a proposito del postulato di Archimede.

SAL. - Lo rammento benissimo: lo feci per la loro particolare efficacia. E vi avvertii che in realtà egli le aveva pronunciate a tutt'altro proposito!

SIM. - Ve ne do atto, signore. Ma quale proposito?

SAL. - A proposito di quella certezza che voi avete proclamato appena un attimo fa!

SIM. - Quella certezza riposa dunque... sopra un altro postulato?

SAL. - Ahimè, sì. *L'esistenza di quel punto* P (badate: la sua esistenza *in ogni caso*, intendo, della quale peraltro neppure vi sognate di dubitare) *può accettarsi o rifiutarsi senza che ne venga la minima scalfittura all'intero* corpus *della geometria*! Accettarla non significa altro se non assumere ciò che si chiama *il postulato di Dedekind*. E non è tutto. Accettarla comporta infatti... Ma no: di questo discuteremo fra poco.

SIM. - Perché non subito, signore?

SAL. - Un'ansia encomiabile, caro Simplicio. Tuttavia, affinché poi non mi accusiate di ordire colpi di scena, ho da annunciarvi una grossa sorpresa: debbo dirvi che stiamo per tirar le fila di quel nostro divagare circa sentieri interminabili, viandanti immortali...

SIM. - ... massi, bandiere, cespugli e pozzanghere!

SAL. - Vedo che rammentate.

SIM. - Certo che rammento! Solo non colgo il nesso con questo "postulato di Dedekind"...

SAL. - Lo ammetto, coglierlo non è facilissimo; ma è altrettanto certo che tale nesso esiste. E si tratta di un nesso oltremodo tenace. Volete conoscerlo? Eccolo, dunque: *il postulato di Dedekind comporta il postulato di Archimede!*

SIM. - Ho sentito bene, signor Salviati?! Vorreste darmi ad intendere che se sul tracciato di quella mitica pista vi fosse un masso, un cespuglio, un guazzo che il viandante immortale non arriverà mai a superare... ciò implicherebbe che la pista può scindersi in due tratti che non posseggono un bordo comune?

SAL. - Ebbene, il vostro è un parlare alla buona, ma le cose stanno proprio così. Fra i matematici si preferisce dire che *se non vale il postulato di Archimede, allora vi sono sezioni della retta prive di punto separatore*.

SIM. - Un momento! Ma allora... ?

SAL. - Dite, Simplicio, dite pure. Ho idea che abbiate intravisto qualcosa di notevole.

SIM. - Forse, signor mio... Ma vorrei procedere con ordine.

SAL. - Non chiedo di meglio. Sentiamo, dunque.

SIM. - Ebbene, in primo luogo domando: non è forse vero che la retta dei numeri reali costituisce un allineamento continuo?

SAL. - Verissimo. Essa è, per antonomasia, la struttura che soddisfa al postulato di Dedekind. Proseguite, dunque.

SIM. - In secondo luogo: non è forse vero che la retta dei numeri reali è immersa in quella degli iperreali?

SAL. - Lo abbiamo visto non più tardi di ieri.

SIM. - E d'altro canto quest'ultima, così come accoglie le quantità infinitesime, non disdegna le quantità infinite. Insomma, se non ho preso lucciole per lanterne, vi sono numeri iperreali che nessun numero intero, e neppure reale, potrà mai superare!

SAL. - Occorre dunque che ve lo confermi? La retta iperreale è la struttura che più clamorosamente di ogni altra infrange il postulato di Archimede!

SIM. - Diamine! In tal caso, essa non potrà mai costituire un allineamento continuo!

SAL. - E come potrebbe? Ma è proprio quello che vi preannunciavo ieri, poco prima che ci salutassimo.

SIM. - Sicuro, ora ricordo! E tuttavia c'è qualcosa che... Ancora un istante, vi prego.

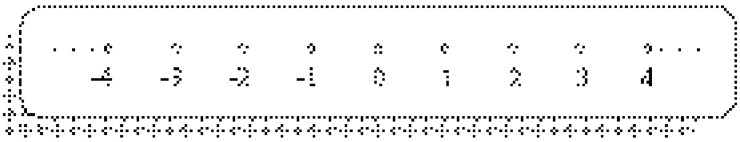
SAL. - Non vi faccio premura.

SIM. - Che intendevo dire?... Ah, sì: come può un allineamento continuo essere immerso in uno discontinuo? A meno che la discontinuità non riguardi soltanto le ali estreme dello schieramento; quelle che non hanno nulla a che spartire col finito, intendo!

SAL. - Eh, no, signor mio! Qui devo proprio contraddirvi. C'è tanto poco di strano in questo fatto che, a ben rifletterci, vi accorgerete d'avere già incontrato una simile situazione.

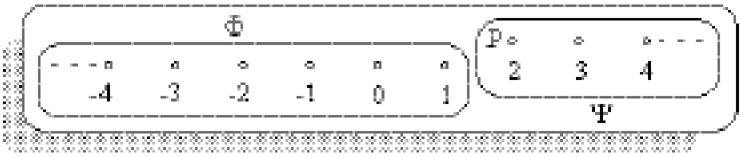
SIM. - O bella! E quando?

SAL. - Ve lo rammento subito. Riesaminiamo per un attimo la retta dei numeri interi, e proviamo a spezzarla con lo stesso criterio con cui prima abbiamo scisso nelle due parti Φ e Ψ quella retta non meglio precisata.



SIM. - Non mi pare una grande impresa, signore.

SAL. - Non lo è, in verità. Così come non lo è trovare un punto P che faccia da confine per una tale suddivisione...



SIM. - In effetti, nell'esempio che mi portate, il punto P potrebbe corrispondere al numero 2 .

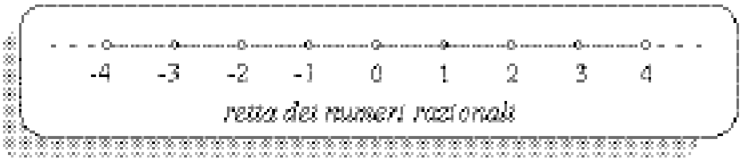
SAL. - Se volete... E questo vostro possibilismo mi assicura che avete intuìto a che cosa alludo dicendo "se volete".

SIM. - Be', senz'altro al fatto che anche il numero 1 può assolvere a un tale compito.

SAL. - Esatto, benché il fatto sia inessenziale: giacché a noi interessa l'*esistenza* d'un simile punto, non certo la sua *unicità*.

SIM. - Ne convengo. Ma per tornare al mio dubbio, in quale allineamento *non continuo* immergereste questa... diradata retta?

SAL. - Mio caro Simplicio, dite davvero?! Nella retta dei numeri razionali, perbacco! La quale avrà tanti pregi, ma non certo quello di essere continua.

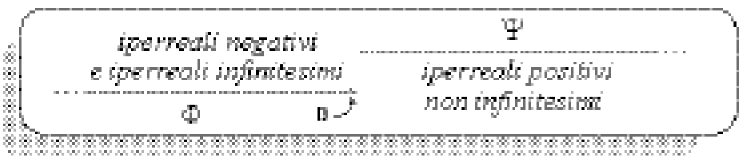


SIM. - Perbacco, è vero!... Signor mio, mi arrendo con una punta di rossore: quanto dite è assolutamente ineccepibile. Mi domando piuttosto come possa essermi sfuggita una circostanza così risaputa e trasparente.

SAL. - Càpita, Simplicio; càpita molto più spesso di quanto non immaginiate. A questo proposito, anzi, mi azzardo a darvi un consiglio: diffidate di quel matematico che taccia di banalità una scoperta altrui. Il più delle volte egli non fa che imitare il mercante: disprezza la merce che non si trova sul suo banco.

SIM. - È un consiglio che accetto di buon grado, signore; se non altro come attenuante per la mia sbadataggine... Mi concederete tuttavia che, in quanto alla non continuità dell'allineamento iperreale, sarebbe assai più convincente verificarla direttamente, anziché desumerla da un conflitto di postulati.

SAL. - Più convincente, voi dite? Non ci giurerei. Caso mai più suggestivo... Ma in ogni caso, eccomi pronto ad accontentarvi; e come esempio (*giacché, a confutare un asserto generale, il singolo esempio è del tutto probante*) vi propongo questa semplicissima sezione della retta iperreale:



SIM. - Semplicissima, non lo nego. Ebbene?

SAL. - Ebbene, se vi è l'elemento separatore σ, esso è senz'altro positivo. Due sono allora i casi: che σ sia infinitesimo o che non lo sia. Nel primo, anche 2σ è infinitesimo, e perciò deve appartenere alla semiretta Φ. Ma 2σ è maggiore di σ, il che, essendo σ l'elemento separatore, è evidentemente assurdo.

SIM. - Dunque σ non è infinitesimo...

SAL. - E sia. Ma in tal caso non lo è neppure $\sigma/2$; il quale pertanto, sebbene minore di σ, deve appartenere alla semiretta Ψ: di nuovo in contrasto col fatto che σ è l'elemento di separazione.

SIM. - Incredibile!...

SAL. - Alludete a questo piccolo teorema?

SIM. - Alludo al lindore della sua dimostrazione, signore.

SAL. - Via, Simplicio, non è il caso di strabiliare! La storia del pensiero è costellata di repentini chiarori su panorami rimasti oscuri per millenni. Forse che l'universo che abbiamo appena visitato non ci spalanca appunto uno di questi panorami?

SIM. - Direi proprio di sì... E immagino se ne tragga una qualche morale.

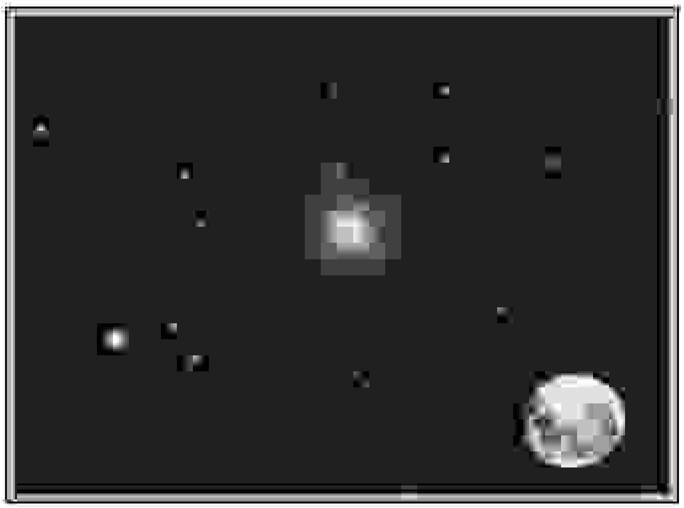
SAL. - Di morali non so dirvi gran che, amico mio. Io spero solo che non riteniate di aver sprecato le vostre mattinate.

SIM. - Tutto men che questo, caro Salviati! Ma in tal caso sarò io a trarre la morale.

SAL. - Davvero? E quale sarebbe?

SIM. - Che tutto è bene quel che finisce bene.

CAPITOLO TERZO



LA RIVINCITA DI LEIBNIZ: INFINITESIMI E INFINITI

La galassia a spirale NGC 7217 e il nostro satellite. Assurti a emblemi dell'infinito nell'iconografia dei *media*, in realtà simili scorci non fanno che accostare regioni dell'Universo entrambe trascurabili...

"... il fatto di poter misurare tutte le dimensioni e le distanze dell'Universo (da quelle dei corpi celesti a quelle dei corpi che costituiscono il mondo atomico) riportando una volta dopo l'altra una data lunghezza terrestre, non è per niente una pura conseguenza logica dei nostri teoremi sulle congruenze o della configurazione geometrica, ma è piuttosto un dato dell'esperienza. La validità dell'assioma di Archimede nel mondo della natura richiede una conferma sperimentale, esattamente come la richiede il postulato delle parallele".

DAVID HILBERT

1 - *Un concorrente dell'ideale massimale: l'ultrafiltro libero.*

La nozione di *successione convergente* consente di rappresentare il campo reale R *senza fare sostanziale distinzione fra un numero reale* ρ *e una qualunque successione* $\{r_n\}$ *di cui* ρ *sia il limite*. Ritenendo ormai superfluo illustrare i vantaggi che - sul piano teorico non meno che su quello pratico - derivano da una tale rappresentazione, rileviamo invece che, come si è visto nel secondo capitolo, da essa rimangono escluse sia *le successioni limitate prive di limite*, sia *le successioni non limitate*.

Non è dunque fuori luogo domandarsi se, ed eventualmente fino a che punto, si possa ampliare la famiglia delle *successioni di numeri reali* alle quali attribuire il significato di "numeri" nell'accezione ormai concordata del termine, e cioè quella di "elementi di un *campo ordinato*". Anzi, per quanto ambizioso, il progetto più esauriente sarebbe quello di realizzare una simile struttura in modo tale che *ogni* successione di numeri reali fosse idonea a *rappresentare* (nel senso delle classi di equivalenza) un qualche *numero* del campo in questione, *risultandovi incluso, come sottocampo ordinato, il campo* R *dei numeri reali*.

L'idea più spontanea è quella di ripercorrere tutte le tappe che conducono alla costruzione d'un campo come anello quoziente d'un dato anello; anche perché (come si è già detto, e come è facile verificare) *l'insieme* R^N *di tutte le successioni di numeri reali, munito delle operazioni cosiddette "naturali", risulta effettivamente un anello commutativo con unità*. Di modo che, quando se ne individuasse un opportuno ideale massimale, lo scopo sarebbe sostanzialmente raggiunto. Senonché, alla ricerca di un siffatto ideale si frappone, qui più drammaticamente che mai, un ostacolo tutt'altro che tecnico: la ricerca, infatti, al di là delle inevitabili difficoltà operative, si scontra con una questione inerente ai princìpî stessi della Matematica. Perciò, pur non rinunciando a battere questa via solo perché irta di nuove asperità, preferiamo rinviarne il percorso alla seconda parte del capitolo: a quel punto, sulla scorta di quanto acquisito nella prima, la comprensione risulterà notevolmente facilitata.

Inizieremo dunque coll'impadronirci di un metodo che, sebbene equivalente a quello per ora accantonato, presenta una fisionomia a suo modo più intuitiva: il che, se "filosoficamente" è un mero accessorio, offre al lettore indiscutibili vantaggi.

Il metodo cui alludiamo è quello detto "*dell'ultrafiltro libero*": esso consente di procedere al richiesto ampliamento di R seguendo un itinerario che sostanzialmente è quello percorso da ABRAHAM ROBINSON, il fondatore dell'*Analisi Non-Standard*, per dimostrare la fondatezza logica (che, in Matematica, è come dire l'esistenza) di quel campo ordinato che egli stesso chiamò "dei *numeri iperreali*".

Naturalmente, una volta pervenuti al risultato di ROBINSON e dopo averne illustrato gli aspetti salienti, mostreremo come alle medesime conclusioni si giunge effettuando il "quoziente" di R^N rispetto a un suo opportuno ideale massimale.

Di modo che, riconosciuta l'equivalenza dei due metodi, potremo intendere più a fondo la natura delle difficoltà collegate alla ricerca d'un siffatto ideale.

2 - *Insiemi "rilevanti": interviene il lemma di* ZORN.

Inizieremo col richiamare un enunciato che sta a fondamento dell'intera Matematica, e su cui poggia anche la struttura che vogliamo introdurre: si tratta del *lemma di* ZORN A formularlo nel modo più sintetico ed espressivo giovano le seguenti definizioni:

una collezione di famiglie si dirà una *catena* se, per ogni coppia (A, B) di famiglie di , risulta: $A \quad B \quad B \quad A$;

una collezione di famiglie si dirà *chiusa* se, per ogni catena , l'unione delle famiglie di appartiene a .

Ciò pósto, il *lemma di* ZORN stabilisce che:

in ogni collezione chiusa di famiglie ve n'è almeno una che non è contenuta in alcun'altra famiglia della collezione.

E qui un'avvertenza: non ci si lasci ingannare dall'aspetto così... dimesso di quest'enunciato! Al pari dell'*assioma di* ZERMELO (cui si è accennato nel primo capitolo, e che gli è equivalente), esso dà luogo a una tale varietà di conseguenze che - come è ormai universalmente riconosciuto - ben poca parte dell'edificio della Matematica si potrebbe erigere senza il suo apporto.

Anche noi, del resto, vedremo fra non molto come il *lemma di* ZORN permetta di superare un ostacolo che altrimenti comprometterebbe lo sviluppo di quest'intero capitolo.

(In proposito, non sarà affatto fuori luogo un'attenta lettura dell'*Appendice II*).

Orbene, se N denota *l'insieme dei numeri naturali* (si veda nel merito l'*Appendice I*) e $P(N)$ la famiglia delle sue parti, sia $O(N)$ una sottofamiglia di $P(N)$ soddisfacente ai seguenti requisiti:

① l'insieme vuoto ϕ appartiene a $O(N)$;

② l'insieme N non appartiene a $O(N)$;

③ se Y è un insieme di $O(N)$ e X è un insieme contenuto in Y , anche X è un insieme di $O(N)$;

④ se X e Y sono due insiemi di $P(N)$ e la loro intersezione è un insieme di $O(N)$, uno almeno fra X e Y è un insieme di $O(N)$;

⑤ se X e Y sono due insiemi di $O(N)$, anche la loro unione è un insieme di $O(N)$;

chiameremo gli insiemi di $O(N)$ *insiemi irrilevanti*.

Che esistano famiglie d'insiemi irrilevanti è garantito da un esempio elementarissimo: detta infatti O_ν *la totalità delle parti di*

N *a nessuna delle quali appartiene un assegnato naturale* ν , si verifica subito che O_ν soddisfa ai requisiti ① , ② , ③ , ④ e ⑤.

Sia ora $S(N)$ la sottofamiglia $P(N) - O(N)$, ossia la sottofamiglia complementare di $O(N)$ rispetto a $P(N)$; agli insiemi che la costituiscono riserveremo coerentemente la denominazione di *insiemi rilevanti*. Ed è facile vedere che $S(N)$ gode delle proprietà:

❶ l'insieme vuoto ϕ non appartiene a $S(N)$;

❷ l'insieme N appartiene a $S(N)$;

❸ se A è un insieme di $S(N)$ e B è un insieme di $P(N)$ contenente A , anche B è un insieme di $S(N)$;

❹ se A e B sono due insiemi di $S(N)$, anche la loro intersezione è un insieme di $S(N)$;

❺ se A e B sono due insiemi di $P(N)$ e la loro unione è un insieme di $S(N)$, uno almeno fra A e B è un insieme di $S(N)$;

Tornando per un momento all'esempio sopra riportato, riesce fin troppo evidente che il complementare ${}^{C}O_\nu$ della sottofamiglia O_ν gode delle proprietà ❶ , ❷ , ❸ , ❹ e ❺ ; così com'è ovvio che esso è costituito da *tutte le parti di* N *a ciascuna delle quali appartiene un assegnato naturale* ν . Ma quest'ultima osservazione mette in luce una circostanza di notevole interesse: vale a dire che *il complementare di* O_ν *rispetto a* $P(N)$ *ha come elementi i complementari rispetto a* N *degli insiemi che costituiscono* O_ν .

Non si tratta di una coincidenza insignificante: vedremo anzi che questa simmetria formale adombra una proprietà caratteristica della struttura in esame. Tuttavia, prima di approfondire quest'aspetto, illustreremo un itinerario teorico che consente di pervenire a famiglie d'insiemi rilevanti di gran lunga più notevoli.

Consideriamo dapprima le classi di numeri naturali prive al più di un insieme finito di tali numeri (così che N stesso rientra fra queste classi). Esse sono dette *insiemi cofiniti*, ossia "complementari di insiemi finiti" (ed è ovvio che l'insieme vuoto ϕ non è fra questi).

Si verifica facilmente che la famiglia F degl'insiemi cofiniti soddisfa alle condizioni ❶ , ❷ , ❸ e ❹ , ma *non* alla ❺ : se infatti ν è un assegnato naturale, e ${}^{\nu}N_d$ (${}^{\nu}N_p$) denota l'insieme dei numeri dispari (dei numeri pari) maggiori di ν , è chiaro che ${}^{\nu}N_d$ ${}^{\nu}N_p$, consistendo di tutti i naturali maggiori di ν , è un insieme cofinito; e tuttavia non lo sono né ${}^{\nu}N_d$ né ${}^{\nu}N_p$. È dunque sensato ritenere che ogni ampliamento della famiglia F , se ha da essere costituito di insiemi rilevanti, debba annoverare anche tutti quelli del tipo di ${}^{\nu}N_d$ e di ${}^{\nu}N_p$, al variare di ν in N .

Nondimeno (e il lettore se convincerà senza sforzo), per quanto si proceda con simili ampliamenti, si perviene sempre a una famiglia di sottoinsiemi cui appartiene *qualche parte di N risultante dall'unione di altre due che sono estranee alla famiglia stessa*.

Nasce così il sospetto che per questa via non sia ottenibile alcuna famiglia d'insiemi rilevanti che includa F . E tuttavia, neanche questo può dirsi: ciò che a tutt'oggi sappiamo di certo è che non si conosce un *procedimento costruttivo* atto a fornire una famiglia siffatta.

Niente di strano se, a questo punto, un lettore pessimista fosse indotto a concludere che non vi è alcun traguardo per quel rincorrersi di ampliamenti successivi... In effetti non è così: è qui, appunto, che interviene il *lemma di* ZORN. Vediamo in che modo.

Si consideri, in primo luogo, la collezione di tutte quelle famiglie $S(N)$ ciascuna delle quali:

- ♦ contiene la famiglia F degli insiemi cofiniti;
- ♦ gode delle proprietà ❶ , ❷ , ❸ e ❹ ;

proveremo che *l'unione $U(N)$ delle famiglie di qualsiasi catena* *è ancora una famiglia di* .

È ovvio, intanto, che $U(N)$, oltre a includere la famiglia F degli insiemi cofiniti, gode delle proprietà ❶ e ❷ .

Inoltre, se A è un insieme appartenente a detta unione, esso starà in qualche famiglia $\_(N)$ della catena ; ma allora, ogni insieme B che lo contiene deve appartenere a $\_(N)$, e quindi a $U(N)$; pertanto $U(N)$ gode della proprietà ❸ .

Infine, detti A e B due insiemi di $U(N)$, essi staranno rispettivamente in una famiglia $\_{A}(N)$ e in una $\_{B}(N)$ entrambe di , e perciò soggette al vincolo:

(1) $\_{A}(N) \quad \_{B}(N) \qquad \_{B}(N) \quad \_{A}(N)$;

così che gl'insiemi A e B, appartenendo a una stessa famiglia di , vi avranno anche la loro intersezione, che di conseguenza deve appartenere a $U(N)$; pertanto tale unione gode della proprietà ❹ .

Se ne conclude che *la collezione* *è chiusa*. E dunque, grazie al *lemma di* ZORN, vi è in almeno una famiglia che non è contenuta in alcun'altra famiglia della collezione .

Traducendo più verbosamente questa concisa asserzione, si desume *l'esistenza di almeno una famiglia* $P(N)$ *la quale:*

♦ *ammette come effettiva sottofamiglia la famiglia F degli* ***insiemi cofiniti****;*
♦ *gode delle* ***prime quattro proprietà*** *di qualsiasi famiglia di insiemi rilevanti;*
♦ ***non può ulteriormente ampliarsi*** *senza rinunciare ai due precedenti requisiti.*

Non è ancora quel traguardo che andavamo cercando (e che già qualcuno sospettava inesistente), ma il fatto di aver potuto aggiungere alle prime due una terza... carta di quadri ci incoraggia a non deporre le armi. Ed è per questo motivo che, a costo di interrompere ancora una volta l'andamento colloquiale della nostra esposizione, apriremo una parentesi di carattere più formale, intesa ad illustrare una nuova, indispensabile struttura algebrica.

Ma tutto sarà contenuto nell'ambito di un modesto paragrafo.

3 - *Scende in campo l'ultrafiltro libero...*

In effetti, il risultato che abbiamo appena ottenuto riguarda gl'*insiemi rilevanti* molto più di quanto si potrebbe credere: poiché esso ci permette di dedurre che, a differenza della sua sottofamiglia F, *la famiglia soddisfa anche al requisito* ❺ .

La questione s'inserisce in un ambito del tutto generale, svincolato cioè dal tipo d'insiemi con cui si tratta. E dato che la generalità del contesto sarà tutt'altro che d'intralcio, premettiamo la seguente

Definizione - *Sia* $P(E)$ *la famiglia delle parti di un insieme* E . *Se* $S(E)$ *è una sottofamiglia di* $P(E)$ *e sussistono gli assiomi:*

❶ $\phi \quad S(E)$;

❷ $E \quad S(E)$;

❸ $[\, J \quad S(E) \quad K \quad J \,] \quad K \quad S(E)$;

❹ $[\, J \quad S(E) \quad K \quad S(E) \,] \quad J \cap K \quad S(E)$;

si dirà che $S(E)$ *è un* ***filtro*** *su* E . [Il lettore avrà senz'altro notato che i suddetti assiomi, numerati ancora coi simboli ❶ , ❷ , ❸ e ❹ , non fanno altro che riformulare per un qualsiasi insieme E le prime quattro proprietà di una famiglia $S(N)$ d'insiemi rilevanti].

A questo punto, sarà naturale dire che un filtro $S(E)$ è *ampliabile* se ve n'è un altro $T(E)$ che lo contiene propriamente; e il filtro $T(E)$ sarà detto un *ampliamento* di (E) . Ciò pósto, sussiste il

Teorema - *Se a un filtro* Σ *appartiene l'unione di due insiemi* J *e* K *che non gli appartengono, allora tale filtro è ampliabile.*

La dimostrazione si basa su questo semplice

Lemma - *Se uno dei due insiemi di cui al precedente enunciato è disgiunto da qualche insieme del filtro, l'altro li interseca tutti.*

Poniamo infatti che per due insiemi di Σ, e diciamoli Y e Z, riesca $J \cap Y = K \cap Z = \phi$. Risulterebbe in tal caso:

$$
\begin{aligned}
&(J \quad K) \cap (Y \quad Z) = \\
(2) \qquad &= [J \cap (Y \quad Z)] \quad [K \cap (Y \quad Z)] \\
&(J \cap Y) \quad (K \cap Z) = \phi \ ,
\end{aligned}
$$

di modo che altri due insiemi di Σ, e cioè $J \quad K$ e $Y \quad Z$, avrebbero intersezione vuota, dunque non appartenente a Σ; ma poiché questo contraddice all'assioma ❹, il lemma è provato.

Visto dunque che uno dei due insiemi J e K interseca tutti gli insiemi di Σ, si consideri la famiglia di quelle parti di E che contengono - propriamente o non - tali intersezioni; aggregata poi questa a Σ, si chiami Σ' la famiglia così ottenuta: Σ' è appunto un ampliamento di Σ. Il che equivale a dire che la famiglia Σ', oltre a contenere propriamente Σ, è essa stessa un filtro.

Dedurre che il contenimento sia proprio è quasi immediato, dato che né J né K appartengono a Σ, mentre uno almeno fra $J \equiv J \cap E$ e $K \equiv K \cap E$ appartiene a Σ'; resta perciò da provare che Σ' soddisfa agli assiomi ❶, ❷, ❸ e ❹. In effetti, quanto ai primi tre, è la stessa costruzione di Σ' a garantirne la validità. Detti allora U' e V' due insiemi di Σ' ed L quello fra J e K che è servito ad ottenere Σ', siano U e V due insiemi di Σ per cui riesce:

$$(3) \qquad L \cap U \quad U' \qquad L \cap V \quad V' \ ;$$

grazie a questa si ha:

$$
\begin{aligned}
&L \cap (U \cap V) = (L \cap U) \cap V = [(L \cap U) \cap L] \cap V = \\
(4) \qquad &= (L \cap U) \cap (L \cap V) \quad U' \cap V' \ ;
\end{aligned}
$$

ossia, l'intersezione di U' e V' contiene $L \cap (U \cap V)$.

Ma poiché quest'insieme appartiene per costruzione a Σ' , anche $U' \cap V'$, in virtù dell'assioma ❸ , apparterrà a tale famiglia.

Se ne conclude che Σ' soddisfa all'assioma ❹ .

E ora un po' di logica formale: dire che a un filtro Σ appartiene l'unione di due insiemi J e K estranei a Σ *equivale* a dire che Σ *non gode* della proprietà ❺ [si veda il paragrafo precedente, in ordine alla famiglia $S(N)$]. D'altronde, grazie al teorema sopra dimostrato, l'esistenza di due insiemi del tipo di J e K *implica* che il filtro Σ *è ampliabile*. Tutto ciò autorizza ad affermare che, se un filtro *non è ampliabile*, allora *non esiste* alcuna coppia d'insiemi come J e K ; il che è come dire che il filtro in discorso *gode* della proprietà ❺ .

Dunque *la famiglia di cui al precedente paragrafo*, essendo un filtro non ampliabile, *dovrà soddisfare all'assioma:*

❺ se A e B sono due insiemi di $P(N)$ e la loro unione è un insieme di , uno almeno fra A e B è un insieme di ;

e questo, come il lettore non mancherà di osservare, è quanto avevamo anticipato all'inizio del paragrafo.

Dunque, *la famiglia delle parti di N contiene almeno un ultrafiltro che include la famiglia F degl'insiemi cofiniti.*

Accogliendo l'espressiva terminologia adottata in proposito, riserveremo a ogni filtro cosiffatto la denominazione di ***ultrafiltro libero*** (in inglese, *"free ultrafilter"*).

4 - *La $\mathfrak{R}$-equivalenza: altre vie per costruire nuovi numeri*

Va ribadito che *la famiglia non è unica*. Perciò, sin da ora, ci riferiremo, nell'insieme delle parti di N , a una prefissata famiglia S d'insiemi rilevanti *che includa la famiglia F degl'insiemi cofiniti*.

Quanto alla portata di questa scelta arbitraria, vi sarà modo di discuterne a proposito di certe questioni relative all'ordinamento.

Sia R^N la classe di *tutte* le successioni di numeri reali. Mentre, com'è noto, R costituisce un campo, R^N non è finora che un puro e semplice insieme; nondimeno, come già fatto a suo tempo a partire dai razionali, lo si può dotare di una coppia di operazioni (l'una di *addizione*, l'altra di *moltiplicazione*) utilizzando le due che operano in R . Così, si dirà *somma* di due assegnate successioni di reali $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ la successione $\{a_n + b_n\}$: quella, cioè, in cui ogni termine è somma dei termini di uguale indice nelle successioni date. In modo analogo, si dirà *prodotto* di $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ la successione $\{a_n \quad b_n\}$.

Si vede pressoché immediatamente che:

- ♣ l'addizione così definita è *associativa* e *commutativa*, ammette come *elemento neutro* la successione $\{0\} \equiv 0 , 0 , ... , 0 , ...$ e, rispetto ad essa, ogni elemento ha un *opposto* (la successione ottenuta cambiando di segno tutti i termini di quella data);
- ♣ la moltiplicazione, del pari *associativa* e *commutativa*, ammette come *elemento neutro* la successione $\{1\} \equiv 1 , 1 , ..., 1 , ...$ e risulta distributiva rispetto all'addizione.

Si noti però che, a differenza di quanto accade in un campo, R^N (come già Q^N) ammette elementi diversi da $\{0\}$ e privi d'inverso, e cioè successioni $\{z_n\} \neq \{0\}$ tali che, per ogni $\{x_n\} \quad R^N$, si ha $\{x_n\}\{z_n\} \neq \{1\}$; sono quelle dotate di almeno un termine nullo. Di modo che R^N , pur con le due suddette operazioni, è solo un anello commutativo con unità... Ma ancora una volta, un'opportuna partizione in classi di equivalenza ci consentirà di superare l'ostacolo.

Associata ad R^N una famiglia S d'insiemi rilevanti che includa la sottofamiglia F degl'insiemi cofiniti, diamo la seguente definizione:

due successioni di numeri reali $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ si diranno "R-equivalenti" (ovvero, "equivalenti secondo ROBINSON*") quando esse hanno termini uguali in corrispondenza a un insieme I di indici appartenente alla famiglia S , ossia in corrispondenza a un insieme di indici rilevante.*

Che questa relazione sia *riflessiva* e *simmetrica* si deduce subito dalla definizione. Resta solo da dimostrare che essa è *transitiva*.

Dette dunque $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ e $\{c_n\}$ tre successioni di R^N , si assuma la prima R-equivalente alla seconda, e questa alla terza: esista cioè un insieme rilevante A per cui, quando n è un suo indice, risulta $a_n = b_n$, e un insieme rilevante B per cui, quando n è un suo indice, risulta $b_n = c_n$. Poiché l'intersezione fra A e B (e sia essa C) è contenuta in entrambi questi insiemi, quando n è un suo indice si avrà: $a_n = b_n$ e $b_n = c_n$; onde $a_n = c_n$. Ma, per la proprietà ❹ della famiglia S , anche C è un insieme rilevante, e pertanto le successioni $\{a_n\}$ e $\{c_n\}$ sono fra loro R-equivalenti. C.V.D.

Riassumendo, una famiglia S d'insiemi rilevanti induce nell'anello R^N una relazione (quella, appunto, sopra definita) che ripartisce R^N in classi d'equivalenza. Per indicare che due successioni $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ sono fra loro R-equivalenti scriveremo: $\{a_n\}\ ^{R}$ $\{b_n\}$; e denoteremo con **a** la classe di tutte le successioni di reali R-equivalenti a un'assegnata successione $\{a_n\}$.

5 - *Il campo iperreale: esiste l'irraggiungibile.*

Sia R^* l'insieme delle classi di equivalenza in cui la relazione ^{R} (indotta dalla famiglia S d'insiemi rilevanti) ripartisce R^N . Precisato poi che il *supporto* di una successione $\{u_n\}$ è l'insieme d'indici per cui riesce $u_n \neq 0$, siano **a** e **b** due qualunque elementi di R^* , $\{a_n\}$ un rappresentante di **a** e $\{b_n\}$ un rappresentante di **b** .

Ciò pósto, stabiliamo:

① di dire *somma* di **a** e **b** quella classe **c** di R^* che ammette per rappresentante la successione $\{a_n + b_n\}$;

② di dire *prodotto* di **a** per **b** quella classe **d** di R^* che ammette per rappresentante la successione $\{a_n \ \ b_n\}$.

Le due definizioni sono *ben póste*: non dipendono, cioè, dalla scelta dei rappresentanti $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$. Come ora infatti dimostreremo, se $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ sono altri due rappresentanti rispettivamente di **a** e di **b** , la classe **z** cui essi danno luogo tramite la ① coincide con la classe **c** . Il lettore lo faccia per quanto riguarda la ② .

Siano allora A e B due insiemi rilevanti di indici per cui *rispettivamente* risulta $a_n = x_n$ e $b_n = y_n$. Per tutti gl'indici appartenenti all'intersezione C fra i due insiemi, si dovrà avere *simultaneamente* $a_n = x_n$ e $b_n = y_n$, donde $a_n + b_n = x_n + y_n$. Ma, sempre per la proprietà ❹ della famiglia S , anche C è un insieme d'indici rilevante, sicché, per definizione, sarà: $\{ a_n + b_n \} \;^{R}\, \{ x_n + y_n \}$; e pertanto la classe **z** cui appartiene la successione $\{ x_n + y_n \}$ coincide con la classe **c** cui appartiene la successione $\{ a_n + b_n \}$.

Le definizioni ① e ② instaurano dunque in R^* una struttura algebrica che, come si vede, risulta quanto meno di *anello commutativo con unità*. (Sarà cura del lettore convincersi che la classe **1** , di cui un rappresentante è la successione $\{1\} \equiv 1 , 1 , ... , 1 , ...$, fornisce appunto l'elemento neutro rispetto al prodotto).

Ma in realtà noi possiamo dimostrare che R^* è addirittura un *campo*; per il che occorre e basta far vedere che ogni elemento di R^* , ad eccezione dell'elemento neutro rispetto alla somma, che coerentemente si indicherà con **0** , ammette un inverso.

Iniziamo col notare che lo **0** non è altro che la classe d'equivalenza costituita dalle successioni che si annullano in corrispondenza agl'indici di un insieme rilevante; se infatti così non fosse, la successione $\{0\} \equiv 0 , ... , 0 , ... 0 , ...$ non sarebbe un suo rappresentante. Dunque, gli altri elementi di R^* saranno rappresentati da successioni non nulle in corrispondenza agl'indici di un insieme rilevante; vale a dire che le successioni rappresentanti dello **0** avranno supporto irrilevante, tutte le altre supporto rilevante. Sia allora **a** un elemento di R^* diverso da **0** e $\{a_n\}$ un rappresentante di **a** ; detto poi A il supporto di $\{a_n\}$, sia $\{\underline{a}_n\}$ la successione che coincide con $\{a_n\}$ per n appartenente ad A , con {l} in caso contrario; infine, si ponga $\{b_n\} = \{l/\underline{a}_n\}$, così che, per ogni n , riesca: $\underline{a}_n \;\; b_n = 1$. Ora, essendo $\{\underline{a}_n\} \;^{R}\, \{a_n\}$, anche $\{\underline{a}_n\}$ è un rappresentante di **a** ; ma allora, se **b** è la classe di equivalenza di $\{b_n\}$, dovrà risultare: $\mathbf{a\ b = 1}$. Dunque, R^* è un campo. C.V.D.

Di più: R^* è un *campo ordinato*; ammette cioè un *ordinamento totale* compatibile con le operazioni. Dato infatti un qualsiasi elemento **a** e un suo rappresentante $\{a_n\}$, cominceremo col dire che **a** è *positivo* (ovvero *maggiore di* **0**) se risulta $a_n > 0$ per ogni n di un insieme d'indici rilevante. E anche qui si può dimostrare, con argomenti ormai di *routine*, che tale nozione non dipende dalla scelta del rappresentante a cui essa fa ricorso. Dopo di che, detto R^*_+ il sottoinsieme di R^* costituito da tutti i suoi elementi positivi, la relazione d'ordine totale si stabilisce come segue:

dati due elementi **a** *e* **b** *di* R^* *, diremo che* **a** è maggiore di **b** *(e seguiteremo a scrivere* $\mathbf{a > b}$ *) se la differenza* $\mathbf{a - b}$ *appartiene a* R^*_+ .

È ben chiaro che, per ogni coppia di elementi **a** , **b** di R^* , si dà uno e uno solo dei seguenti casi:

♠ $\mathbf{a > b}$;
♠ $\mathbf{b > a}$;
♠ $\mathbf{a = b}$.

Quanto alla verifica della compatibilità di tale ordinamento con le operazioni del campo, essa costituisce un semplice esercizio. Si tratta infatti di provare che, per ogni terna **a** , **b** , **c** di elementi di R^* , hanno luogo le due implicazioni:

♣ se è $\mathbf{a > b}$, allora è anche $\mathbf{a + c > b + c}$;
♣ se è $\mathbf{a > b}$ e $\mathbf{c > 0}$, allora è anche $\mathbf{a\ c > b\ c}$.

Infine, come di consueto, per intendere che è $\mathbf{a > b}$ si scriverà anche $\mathbf{b < a}$; e si dirà che **b** è *minore* di **a** .

A commento di tutto ciò occorre segnalare che (come si è dianzi provato) la scelta di una particolare famiglia S d'insiemi rilevanti fra tutte quelle che contengono la sottofamiglia F degli insiemi cofiniti risulta, ai fini dell'ordinamento, una scelta cruciale. Infatti, se la struttura algebrica dei vari campi del tipo di R^* non dipende dalla famiglia S , strettamente influenzato ne risulta invece il "tipo d'ordine". E così può succedere che un'altra famiglia d'insiemi rilevanti S_1 , pur essa contenente F , dia origine a un campo R^*_1 *isomorfo* sì ad R^* , ma non legato a questo *da alcuna corrispondenza biunivoca che salvaguardi l'ordinamento.*

Un primo, fondamentale risultato riguardo al campo ordinato R^* è rappresentato dalla seguente circostanza: *esiste un sottocampo* $\underline{\underline{R}}$ *di* R^* *isomorfo al campo* R *dei numeri reali.*

Per quanto notevolissima, questa proprietà è di verifica poco meno che banale. Si considerino infatti, in R^* , tutte le classi di equivalenza **r** rappresentate da una successione costante di numeri reali $\{r_n\} \equiv r , r , ... , r , ...$, con r in R . È ovvio, per quanto fin qui detto, che l'insieme $\underline{\underline{R}}$ di tali classi costituisce un sottocampo; e che questo, in virtù della sua stessa definizione, risulta isomorfo al campo reale R . È inoltre evidente che l'ordinamento di $\underline{\underline{R}}$ è quello indotto dall'ordinamento di R^*, e che pertanto la corrispondenza biunivoca fra $\underline{\underline{R}}$ ed R conserva l'ordinamento. Dunque, con un abuso di linguaggio, peraltro frequente e non pericoloso, parleremo del campo reale R come di un sottocampo di R^* .

Inoltre, si tratta di un sottocampo *proprio*: ossia, $\underline{\underline{R}}$ non coincide con R^* . Per questo occorre e basta far vedere che vi è in R^* almeno un elemento **i** che non compare in $\underline{\underline{R}}$.

Sia dunque **i** la classe di R-equivalenza cui appartiene la successione $\{i_n\} \equiv 1 , 1/2 , 1/3 , ... 1/n , ...$, con n in $N - \{0\}$. Questo insieme d'indici è cofinito, quindi rilevante, di modo che **i** risulta positivo. D'altro canto, qualunque sia r in R , purché positivo, da qualche naturale n_0 in poi (e cioè su di un insieme d'indici N' , rilevante perché anch'esso cofinito), dovrà aversi $1/n < r$; ma allora, denotando sempre con $\{r_n\} \equiv r , r , r , ... r , ...$ la successione che rappresenta **r** , su N' si avrà: $r_n - i_n > 0$. Riassumendo: l'elemento **i** di R^* è positivo, ma contemporaneamente la differenza **r − i** in R^* è positiva quale che sia in $\underline{\underline{R}}$ l'elemento positivo **r** . Ne segue che **i** non può appartenere a $\underline{\underline{R}}$, e perciò $\underline{\underline{R}}$ è effettivamente un sottocampo proprio di R^* . C.V.D.

In forza di tutto questo, gli elementi del campo R^* sono chiamati *numeri iperreali*; e, con l'avvertenza fatta circa la terminologia, si dice che R^* *contiene propriamente i numeri reali*.

Lo $\mathbf{0}$, così come agli elementi di R^* che, pur risultando positivi, sono minori di ogni numero reale positivo, o che, pur risultando negativi, sono maggiori di ogni numero reale negativo, sono detti *numeri infinitesimi* o, semplicemente, *infinitesimi*. (Uno di essi è, per l'appunto, il numero $\mathbf{i}$). Gli inversi degli infinitesimi diversi da $\mathbf{0}$ sono detti *numeri infiniti* o, semplicemente, *infiniti*.

Quando poi si vuole espressamente significare che un iperreale *non è infinito* (infinitesimo o no che sia), lo si dice *finito*.

6 - *Parti standard: il "principio" di* DEDEKIND *resiste...*

L'insieme degli iperreali finiti, che chiameremo R^o, è un *anello commutativo con unità privo di divisori dello zero*. Se questa proprietà si verifica facilmente, non è così per quella che segue, strettamente legata al "principio" di DEDEKIND. Essa stabilisce che per ciascun iperreale finito $\mathbf{x}$ esiste un reale s che ne differisce per un infinitesimo; o, come si dice, che gli è *infinitamente vicino*.

La dimostrazione - è ovvio - può limitarsi agli iperreali non reali. Detto allora $\mathbf{x}$ uno di essi, siano R_- ed R_+ le classi dei reali che rispettivamente precedono e seguono $\mathbf{x}$. Per il principio di DEDEKIND vi è un reale s che non precede alcun elemento di R_- e non segue alcun elemento di R_+. Sia s maggiore di $\mathbf{x}$: se $s-\mathbf{x}$ non fosse infinitesimo, lo precederebbe qualche reale positivo y; onde il reale $s-y$, seguendo $\mathbf{x}$, starebbe in R_+; il che è assurdo. Sia allora s minore di $\mathbf{x}$: per ogni reale positivo z, $s+z$ appartiene a R_+, onde $\mathbf{x}-s$ precederà z; e ciò, dato che z è arbitrario, equivale a dire che $\mathbf{x}-s$ è infinitesimo. C.V.D.

È facile vedere che s è il solo reale a godere di tale proprietà.

Di qui scaturisce una vantaggiosa rappresentazione degli iperreali finiti. Infatti, se $st(\mathbf{x})$ denota il reale s (detto *parte standard* di $\mathbf{x}$) e $o(\mathbf{x})$ l'infinitesimo $\mathbf{x}-s$ (detto *parte infinitesima* di $\mathbf{x}$), allora, per ogni $\mathbf{x}$ di R^*, ha luogo la seguente decomposizione:

(5) $$\mathbf{x} = st(\mathbf{x}) + o(\mathbf{x}) \ .$$

Sarà poi un utile esercizio verificare che l'insieme R_o degl'infinitesimi (*fra i quali* **0** *è il solo reale*) è un *anello commutativo privo di divisori dello zero, ma anche di unità*; in più, R_o è un *ideale massimale* dell'anello R^o degli iperreali finiti. Chi volesse approfondire quest'aspetto scoprirebbe alcuni eleganti risvolti della teoria.

Rammentiamo infine una spedita terminologia dovuta allo stesso ROBINSON: precisamente, si dirà *monade* ogni sottoinsieme di R^* i cui elementi siano fra loro *infinitamente vicini*; si dirà *galassia*, ogni sottoinsieme di R^* i cui elementi siano fra loro *a distanza finita*.

L'aver usato, come sopra, il principio di DEDEKIND non vuol dire affatto ch'esso sussista per la retta iperreale! Ma naturalmente, esso si mantiene valido nel sottocampo reale.

Per convincersi di questa... validità limitata, basta argomentare su di una sezione quanto mai semplice. Precisamente, indicato con R^*_2 l'insieme degli iperreali positivi non infinitesimi e con R^*_1 quello dei restanti, ammettiamo che esista l'elemento di separazione ξ . Se esso non è infinitesimo, allora è senz'altro il più piccolo fra i numeri positivi non infinitesimi; ma ciò è impossibile, in quanto anche $\xi/2$ (che precede ξ) è positivo non infinitesimo. Se invece ξ è infinitesimo, allora è senz'altro il più grande di tali numeri; ma anche ciò è impossibile, in quanto 2ξ (che segue ξ) è pur esso infinitesimo.

Dunque, l'elemento di separazione ξ non esiste.

Del resto, come ben sappiamo, il principio di DEDEKIND implica la proprietà di Archimede; la quale, ovviamente, non può aver luogo fra gli iperreali. Si consideri infatti il numero **i** introdotto nel paragrafo precedente; esso è positivo, ma minore di ogni reale positivo: dunque di ogni elemento dell'insieme $\{1/n\}$ ottenuto al variare di n fra i naturali positivi. Pertanto, quale che sia n , risulta $n\,\mathbf{i} < \mathbf{1}$, in palese contrasto con la proprietà di Archimede. Proprietà che, peraltro, séguita a sussistere nel sottocampo $\underline{\underline{R}}$.

Per tutte queste ragioni si suole anche dire che R^* è un *campo* *totalmente ordinato, non archimedeo e contenente* R .

7 - *Le estensioni canoniche: verso l'Analisi iperreale.*

Sia ora $f(x)$ una funzione reale di variabile reale, e $\mathbf{x}_0$ un iperreale rappresentato dalla successione $\{x_{0n}\}$. Assumiamo che $f(x)$ sia definita per ogni termine di tale successione, così da dar luogo all'altra successione $\{f(x_{0n})\}$, e sia $\mathbf{y}_0$ l'iperreale che essa rappresenta. Se $\{z_{0n}\}$, R-equivalente a $\{x_{0n}\}$, è una seconda successione nel dominio di f e X è un insieme d'indici rilevante per cui riesce $x_{0n} = z_{0n}$, su X riuscirà ovviamente $f(x_{0n}) = f(z_{0n})$.

Se ne conclude che, indipendentemente dalla scelta del rappresentante di $\mathbf{x}_0$, la funzione $f(x)$ associa a questo iperreale un altro iperreale $\mathbf{y}_0$; sarà quindi naturale porre $\mathbf{y}_0 = \mathrm{f}(\mathbf{x}_0)$.

È chiaro che, ripetendo la procedura per tutti gli iperreali per cui essa è possibile, si perverrà ad una funzione coincidente con quella data quando la variabile indipendente appartenga al dominio iniziale, ma tale anche da ammettere fra i suoi valori numeri iperreali *non reali*. Ad essa si dà il nome di *estensione canonica* della $f(x)$ al campo iperreale: e, quando si voglia dar enfasi a questo fatto, la si denota con la scrittura $f^*(\mathbf{x})$.

In modo analogo, si designerà con $\{u^*_{\mathbf{K}}\}$ l'estensione canonica agli *ipernaturali* della successione reale $\{u_n\}$, intendendo per ipernaturale ogni iperreale rappresentato da una successione di naturali. All'insieme di tali numeri, indicato con N^* , appartengono i *naturali infiniti*, ossia gli elementi dell'insieme $N^* - N$.

Così, ad esempio, l'estensione canonica all'iperreale della funzione $sin(x)$ nel punto $\pi/2 + \mathbf{i}$ è l'iperreale rappresentato dalla successione $\{sin(\pi/2 + 1/n)\} = \{cos(1/n)\}$; ed è facile vedere che, se $\mathbf{j}$ è un opportuno infinitesimo positivo, risulta: $sin(\pi/2 + \mathbf{i}) = \mathbf{1} - \mathbf{j}$.

Analogamente, l'estensione canonica della successione $\{1+1/n\}$ al naturale infinito rappresentato dalla successione $1, 4, 9, \ldots, n^2, \ldots$ è l'iperreale finito $\mathbf{1} + \mathbf{i}^2$.

Il lettore è invitato a verificarlo.

Sussiste al riguardo un notevolissimo

Lemma - *Sia* $f(x)$ *una funzione crescente su* R *, e siano* $\mathbf{x}'$ *e* $\mathbf{x}''$ *due iperreali positivi di cui il primo infinito. Allora, se* $f^*(\mathbf{x}')$ *è finito, tale è anche* $f^*(\mathbf{x}'')$.

Per dimostrarlo, chiamiamo $\{x'_n\}$ e $\{x''_n\}$ due successioni rappresentanti di $\mathbf{x}'$ e $\mathbf{x}''$ rispettivamente , e ammettiamo che $f^*(\mathbf{x}'')$ sia infinito. Esisterà in tal caso un insieme d'indici rilevante A'' con la seguente proprietà: *comunque si scelga il reale* r *, vi è in* A'' *un indice* $n[r]$ *per cui si ha* $f(x''_{n[r]}) > r$; il che già esclude che $f^*(\mathbf{x}'')$ sia infinito negativo. Sicché, pósto $r = st[f^*(\mathbf{x}')] + 1$, diciamo ancora $n[r]$ un indice per cui si ha $f^*(x''_{n[r]}) > st[f^*(\mathbf{x}')] + 1$, e osserviamo che, essendo f crescente, per ogni reale $x > x''n[r]$ si avrà pure $f(x) > st[f^*(\mathbf{x}')] + 1$.

D'altra parte, essendo $\mathbf{x}'$ un iperreale infinito positivo, non solo esistono termini di $\{x'_n\}$ maggiori di $x''_{n[r]}$, ma i loro indici formano un insieme rilevante A' ; insieme su cui risulta necessariamente $f(x'_n) > st[f^*(\mathbf{x}')] + 1$. E ciò è un evidente assurdo.

Si sarà notato che quest'ultimo lemma, il cui enunciato è senz'altro intuitivo quando $\mathbf{x}''$ è un numero finito, non lo è altrettanto in caso contrario; ma è proprio in tale eventualità che esso presenta il maggiore interesse, poiché interviene decisivamente nelle questioni collegate all'estensione canonica delle successioni reali.

Per suo tramite, ad esempio, si può provare agevolmente che *se una successione reale* $\{u_n\}$ *è crescente e, per qualche naturale infinito* $\mathbf{K}$ *, l'iperreale* $u^*_{\mathbf{K}}$ *è finito, allora, per ogni altro naturale infinito* $\mathbf{H}$ *, anche l'iperreale* $u^*_{\mathbf{H}}$ *è finito, e anzi è infinitamente vicino ad* $u^*_{\mathbf{K}}$. Ed ecco la dimostrazione.

Dal momento che la parte standard di $u_{\mathbf{K}}$ esiste per ipotesi e quella di u_{H} in virtù dell'ultimo lemma, diciamole rispettivamente s_{K} ed s_{H} e ammettiamo che possano essere diverse; dopo di che, indichiamo con $\{k_n\}$ una successione di naturali che rappresenti $\mathbf{K}$ e con $\{h_n\}$ un'altra che rappresenti $\mathbf{H}$. Orbene, se _ è la semisomma di s_{K} ed s_{H} , si potrà verificare uno dei due casi: s_{K} < _ < s_{H} o s_{H} < _ < s_{K} . Nel primo, si denoti con h^ un naturale della successione $\{h_n\}$ per cui riesca $u_{h^\wedge}$ > _ ; considerato che $\{u_n\}$ è crescente, per ogni indice p seguente ad $h^\wedge$, vale a dire su di un insieme cofinito $A^\wedge$, si avrà: $u_p > \_$. Se allora A è un insieme rilevante di indici q tali che anche k_q sia seguente ad $h^\wedge$, per ogni elemento t dell'intersezione di A con $A^\wedge$ (la quale è ancora un insieme rilevante) sarà $u_t > \_$; se ne trae $u^*_{\mathbf{K}} > \_$, ossia $u^*_{\mathbf{K}} - s_{\mathrm{K}} > (\_ - s_{\mathrm{K}})$. Ma di qui, passando alle parti standard, segue: $0 > \_ - s_{\mathrm{K}} > 0$. E ciò è manifestamente assurdo.

Potendosi ragionare in maniera del tutto analoga qualora risulti $s_{\mathrm{H}} < \_ < s_{\mathrm{K}}$, la proposizione è dimostrata.

Come si vedrà alla fine del capitolo, sono proprio questi gli strumenti che consentono di definire, in termini non-standard, le nozioni fondamentali dell'Analisi Matematica; e quindi, ad esempio, di sviluppare la teoria delle successioni e delle funzioni reali. Giacché (e il lettore lo avrà intuìto) i risultati di cui sopra si estendono immediatamente, con le ovvie varianti di simmetria, al caso delle successioni e delle funzioni più in generale monotòne.

8 - *Il "nostro" metodo: interviene il lemma di* KRULL.

Secondo quanto annunciato all'inizio di questo capitolo, esporremo adesso la procedura che permette di ottenere un campo iperreale applicando il metodo del "quoziente". La struttura "dividendo" sarà ancora l'anello R^N di tutte le successioni di numeri reali, la struttura "divisore" un suo *opportuno* ideale massimale M : un ideale, cioè, tale che il campo $R^N{}_{/M}$ coincida (a meno d'isomorfismi e secondo la nomenclatura finora adottata) col campo R^* delle classi di R-equivalenza delle successioni di R^N .

L'esperienza acquisita nel secondo capitolo, riguardo alla costruzione del campo reale R , ci ha insegnato che per individuare - sia pure in modo euristico - un ideale del tipo di M giova prendere le mosse dal sottoanello di quelle successioni *che più si apparentano con l'elemento neutro di* R^N *rispetto all'operazione di somma*: vale a dire con la successione $\{0\} \equiv 0 , 0 , ..., 0 , ...$. E noi sappiamo come un tale sottoanello, che denoteremo con H , sia costituito dalla famiglia di *tutte le successioni a supporto finito*, ovvero, come si dice, *definitivamente nulle*.

È però facile vedere che il sottoinsieme H, benché sia un ideale di R^N, non è certo massimale: ve n'è degli altri infatti, anch'essi proprî, che lo contengono propriamente. Si pensi, per esempio, alla famiglia H' di tutte le successioni di numeri reali che si annullano definitivamente *nei posti pari* (ma non necessariamente soltanto in questi): è evidente che H', sottoanello proprio di R^N, contiene propriamente l'ideale H. Ma, in più:

- comunque scelti due elementi di H', essi differiscono per un elemento di H';
- comunque scelti un elemento di R^N e un elemento di H', il loro prodotto è un elemento di H';

il che significa, appunto, che H non è massimale.

È chiaro che un primo insuccesso non giustifica la resa. E così ci si chiederà: perché non ripetere il tentativo a partire da H'? Sfortunatamente un semplice controesempio, del tutto analogo al precedente, mostra che quanto visto per H si ripropone per H'.

Si consideri infatti la famiglia H'' di tutte le successioni di numeri reali che si annullano definitivamente *sia per gli indici pari sia per quelli multipli di* 3 (ma non necessariamente solo per essi): si vedrà che la situazione si ripresenta immutata! E così via, come il lettore avrà già immaginato. Dunque?...

Il fatto (e ci è già occorso di rilevarlo nella costruzione di R^* a partire dal *filtro* F introdotto nel paragrafo **2**) è che, per quanto si amplî la struttura di partenza (in questo caso *l'ideale* H), si perviene sempre a una famiglia ulteriormente ampliabile! Così, ancora una volta, si è portati a presumere che nessuna tecnica iterativa consenta di ottenere un ideale massimale M che includa H ... E tuttavia, sino ad oggi, non si è dimostrata neppure questa impossibilità; ciò di cui si è certi è che non si conosce alcuna *procedura costruttiva* capace di fornire una simile ideale!

Nondimeno (così come nella costruzione tramite un ultrafiltro libero interveniva a sbloccare la situazione il *lemma di* ZORN) qui interviene il *lemma di* KRULL: quella proposizione sugli ideali massimali che è stata ampiamente illustrata nel primo capitolo. *Grazie a questo risultato possiamo contare sull'esistenza di* (almeno) *un ideale massimale* M *di* R^N *che contenga a sua volta l'ideale* H *costituito dalle successioni definitivamente nulle.*

Ed è appunto al. campo quoziente $R^N{}_{/M}$ che noi daremo il nome di *campo iperreale* R^* .

Inutile dire che una simile "identificazione" richiede qualche riga di commento. Ma in effetti, se teniamo conto di come a suo tempo è stata introdotta la famiglia S degli insiemi rilevanti (famiglia tramite la quale, nella prima parte di questo capitolo, si è stabilita la R-equivalenza) ricorderemo anche che la sua famiglia complementare (ossia quella degli *insiemi irrilevanti*) annoverava fra i suoi elementi le parti finite di N ; di modo che, in quella formulazione, comparivano fra i rappresentanti dello $\mathbf{0}$ di R^* proprio le successioni definitivamente nulle (oltreché, com'è ovvio, molte altre ben più variamente strutturate).

Ma la sostanziale equivalenza dei due metodi da noi esposti risiede in una circostanza assai più stringente: vale a dire nel fatto che, come ora mostreremo, *la totalità dei supporti delle successioni che costituiscono l'ideale massimale* M *è una famiglia* $O_M(N)$ *di insiemi irrilevanti*. (Si rammenti che il *supporto* di una successione è l'insieme degl'indici per i quali essa *non* si annulla).

In effetti - richiamando ove occorra che *due successioni con lo stesso supporto o appartengono entrambe a* M *o gli sono entrambe estranee* - si ricava senza difficoltà che:

① l'insieme vuoto ϕ appartiene a $O_M(N)$;

(segue dal fatto che la successione $\{\mathbf{0}\} \equiv \mathbf{0}, \mathbf{0}, ..., \mathbf{0}, ...$ ***sta in*** M ***);***

② l'insieme N non appartiene a $O_M(N)$;

(segue dal fatto che in M ***non vi è alcuna successione priva di zeri);***

Suggerimento: *se così non fosse, dovendo il prodotto di una tale successione per la sua inversa stare anch'esso in* M *, a* M *apparterrebbe anche la successione* $\{1\} \equiv 1, 1, ..., 1, ...$ *; il che, come sappiamo, porta ogni ideale a coincidere con l'intero anello...*

③ se Y è un insieme di $O_M(N)$ e X è un insieme contenuto in Y , anche X è un insieme di $O_M(N)$;

(segue dal fatto che, se una successione sta in M, ogni altra che si annulli almeno dove si annulla la prima sta pure in M);

Suggerimento: *il prodotto di una successione che appartiene a M per una qualsiasi altra che si annulli almeno dove si annulla la prima è nullo esattamente dove lo è la seconda; ma tale prodotto, per la proprietà di assorbimento dell'ideale, deve appartenere a M ...*

> ④ se X e Y sono due insiemi di $P(N)$ e la loro intersezione è un insieme di $O_M(N)$, uno almeno fra X e Y è un insieme di $O_M(N)$;

(segue dal fatto che una successione appartenente a M non può essere il prodotto di altre due che non gli appartengono);

Suggerimento: *una successione-prodotto ha termini non nulli soltanto per quegli indici per cui nessuno dei fattori si annulla...*

> ⑤ se X e Y sono due insiemi di $O_M(N)$, anche la loro unione è un insieme di $O_M(N)$;

(segue dal fatto che la somma di successioni di M sta sempre in M);

Suggerimento: *la successione-somma di due successioni a termini non negativi si annulla soltanto per quegli indici per cui entrambi i fattori si annullano...*

A questo punto è ben chiaro che il metodo del quoziente, così come da noi applicato, non può che condurre allo stesso esito cui si perviene col metodo di ROBINSON, o *"dell'ultrafiltro libero"*.

È per ciò che da ora in poi, salvo eventuali varianti di linguaggio, si procederà su linee del tutto analoghe a quelle seguite nel contesto della R-equivalenza. Così, per esempio, dire nell'attuale formulazione che *due successioni* $\{a_n\}$ *e* $\{b_n\}$ *rappresentano lo stesso iperreale* significherà dire che *la loro differenza è un elemento dell'ideale* M; dire che *un iperreale* $\mathbf{x}$ *è positivo* significherà dire che *una successione rappresentante di* $\mathbf{x}$ *ha termini nulli o negativi solo sul supporto di una successione di* M; e via seguitando.

Chi tuttavia avesse lètto tenendo d'occhio l'aspetto relativo ai fondamenti, avrebbe notato che, nell'introdurre le ultime considerazioni, abbiamo parlato di "sostanziale" equivalenza dei due metodi. Dunque il termine "equivalenza" non va inteso alla lettera?

Ebbene, anche se per una sfumatura che sul piano "pratico" non ha alcun effetto, le cose stanno proprio così: *il metodo del quoziente*, benché dipenda anch'esso dall'assioma della scelta, *è un po' meno esigente di quello dell'ultrafiltro libero*. Si è infatti dimostrato che il lemma di KRULL, pur fondandosi su quello di ZORN, tuttavia non lo implica; e dunque *non equivale* all'assioma della scelta.

Infine - sia pure per inciso - gioverà mettere in luce quella che è forse la più elegante, ma senz'altro la più notevole proprietà delle famiglie $O(N)$ [e quindi anche della $O_M(N)$] . Essa si desume dalla seguente circostanza: *considerare il complementare della famiglia d'insiemi* $O(N)$ *rispetto a* $P(N)$ *equivale a considerare la famiglia dei complementari degli insiemi di* $O(N)$ *rispetto a* N .

Rinviando per la parte dimostrativa all'*Appendice III*, non possiamo non segnalare come tutto ciò semplifichi enormemente le più svariate argomentazioni in tema di ultrafiltri: non ultime, appunto, quelle che conducono alle proprietà ❶ , ❷ , ❸ , ❹ e ❺ della famiglia $S(N)$.

Ma da tale circostanza traggono vantaggio soprattutto le dimostrazioni di quelle proprietà degli iperreali che sono immediatamente riconducibili alle successioni che li rappresentano. Per averne una conferma di particolare rilievo, il lettore verifichi quanto segue: *ogni successione* $\{a_n\}$ *la quale assuma i suoi valori nell'insieme* $\{0,1\}$ *è R-equivalente o (aut) alla successione* $\{0\} \equiv 0 , 0 , ... , 0 , ...$ *o (aut) alla successione* $\{1\} \equiv 1 , 1 , ... , 1 , ...$.

9 - *Algebra spicciola con gli iperreali*

Le regole del calcolo algebrico coi numeri iperreali si desumono piuttosto agevolmente dal fatto che l'insieme R^o degli iperreali finiti è un anello commutativo con unità privo di divisori dello zero; e che il sottoinsieme R_o degli infinitesimi ne è un ideale massimale.

Quanto alle radici n-esime, le si ottiene - ove esistano - mediante estensione canonica.

Tuttavia - avvertendo che d'ora in poi si rinuncerà a ogni distinzione tipografica fra elementi reali ed elementi non reali del campo iperreale - riportiamo, a vantaggio del lettore, un sommario elenco delle proprietà operative che dovrebbero diventare di uso pressoché automatico nella pratica del calcolo:

a) *la somma di due numeri infinitesimi è un numero infinitesimo;*

b) *la somma di un numero finito non infinitesimo e di un numero infinitesimo è un numero finito non infinitesimo;*

c) *la somma di due numeri finiti è un numero finito, eventualmente infinitesimo se quelli sono discordi;*

d) *la somma di un numero finito e di un numero infinito è un numero infinito;*

e) *la somma di due numeri infiniti concordi è un numero infinito, ma nulla può dirsi in caso contrario;*

f) *il prodotto di un numero finito per un numero infinitesimo è un numero infinitesimo;*

g) *il prodotto di due numeri finiti non infinitesimi è un numero finito non infinitesimo;*

h) *il prodotto di un numero finito non infinitesimo per un numero infinito, ovvero di un numero infinito per un numero infinito, è un numero infinito;*

i) *nulla può dirsi del prodotto di un numero infinito per un numero infinitesimo.*

È chiaro che la locuzione “nulla può dirsi” significa che il risultato della rispettiva operazione può essere un infinitesimo così come un numero finito non infinitesimo oppure un infinito, dovendosi decidere caso per caso.

Quanto sopra può esprimersi mediante due comode tavole: l'una di addizione, l'altra di moltiplicazione.

Convenendo infatti di denotare:

con **i** il generico numero *infinitesimo*;

con **f** il generico numero *finito*;

con **fn** il generico numero *finito non infinitesimo*;

con $\mathbf{I}^+$ il generico numero *infinito positivo*;

con $\mathbf{I}^-$ il generico numero *infinito negativo*;

con **?** la locuzione "*nulla può dirsi*";

le regole di addizione si compendiano nella tavola seguente:

+	i	f	fn	I^+	I^-
i	i	f	fn	I^+	I^-
f	f	f	f	I^+	I^-
fn	fn	f	f	I^+	I^-
$\mathbf{I}^+$	I^+	I^+	I^+	I^+	?
$\mathbf{I}^-$	I^-	I^-	I^-	?	I^-

Analogamente, le regole di moltiplicazione si compendiano nella tavola seguente:

×	i	f	fn	I
i	i	i	i	?
f	i	f	f	?
fn	i	f	fn	I
I	?	?	I	I

Quanto alla "parte standard" (definita nel paragrafo **6** unitamente alla "parte infinitesima"), eccone le proprietà di uso più frequente:

α) *la funzione* $st(x)$ *è definita su di una e una sola galassia, e precisamente su* R^o *;*

β) *la funzione* $st(x)$ *è monotòna non decrescente;*

γ) *la funzione* $st(x)$ *è costante su ciascuna monade di* R^o *, e soltanto su ciascuna di queste;*

δ) *la parte standard di una somma è la somma delle parti standard dei singoli addendi;*

ε) *la parte standard di un prodotto è il prodotto delle parti standard, quando esse esistano, dei singoli fattori;*

ζ) *se esiste la radice n-esima di* x *, esiste la radice n-esima di* $st(x)$ *, ma non sempre viceversa;*

η) *se esiste la radice n-esima di* x *, la parte standard di tale radice è la radice n-esima di* $st(x)$ *.*

Circa la ζ) , sia j infinitesimo positivo. Essendo $st(-j) = 0$, la radice n-esima di $st(-j)$ esiste per ogni n intero positivo; ma poiché, per n pari, $-j$ non ammette tale radice, per n pari non vale l'identità $st(\sqrt[n]{x}) = \sqrt[n]{st(x)}$.

(Si domanda: esistono iperreali non infinitesimi o iperreali non negativi per cui sussista analoga eccezione?).

Dalle proprietà elencate si traggono le norme più elementari per l'uso della funzione "parte standard". Si voglia provare, ad esempio, che *la parte standard dell'inverso di un numero iperreale non infinitesimo è uguale all'inverso della sua parte standard*. Allora, se a è l'iperreale in questione, la proprietà ε) del prodotto fornisce:

$$1 = st\,(1) = st\left(a\,\frac{1}{a}\right) = st\,(a)\ ?st\left(\frac{1}{a}\right)\ ;$$

e poiché è per ipotesi $st(a) \neq 0$, l'asserto è provato.

10 - *Gli iperreali servono: impariamo ad usarli.*

Vediamo ora alcuni esempi di calcolo, semplici ma espressivi, nell'ambito del campo iperreale. Essi varranno, meglio di ogni precettistica, a illustrare le tecniche basilari di quella che è ormai universalmente nota come *Analisi Non-Standard*.

1° *- Quale che sia l'infinitesimo* $i \neq 0$ *, il numero iperreale non reale* $\dfrac{sin(i)}{i}$ *è finito e la sua parte standard è* 1 .

Dimostrazione. Per $i > 0$ si ha: $sin(i) < i < tg(i)$, da cui, invertendo: $cos(i) < \dfrac{sin(i)}{i} < 1$; d'altro canto risulta:

$$cos^2(i) = 1-sin^2(i) > 1-i^2 > (1-i)^2 = 1-i \;;$$

da cui: $1-i < \dfrac{sin(i)}{i} < 1$; esiste dunque un infinitesimo $j > 0$ per cui riesce $\dfrac{sin(i)}{i} = 1-j$. Per $i < 0$, si osservi che è: $\dfrac{sin(-i)}{-i} = \dfrac{sin(i)}{i}$; da cui, in ogni caso, l'asserto.

Ed ecco una notevole applicazione del precedente risultato: *detto* x *un iperreale reale, si valuti la parte standard del rapporto:*

$$\frac{cos(x+i)-cos(x)}{i} \;.$$

Detti j e j' due opportuni infinitesimi, si ha di séguito:

$$\frac{cos(x+i)-cos(x)}{i} = \frac{cos(x)\,cos(i)-sin(x)\,sin(i)-cos(x)}{i} =$$

$$= cos(x)\frac{cos(i)-1}{i} - sin(x)\frac{sin(i)}{i} = j\;cos(x)-(1-j')\;sin(x) \;\;;$$

di conseguenza dovrà risultare (e il lettore non manchi di riconoscere le varie regole sulla “parte standard” via via utilizzate):

$$st\left[\frac{cos(x+i)-cos(x)}{i}\right] = -sin(x) \quad ,$$

identità grazie alla quale, come precisato al successivo punto ***9°*** , potremo individuare nella funzione $y = - sin(x)$ la *derivata* della funzione $y = cos(x)$.

2° *- Se K è un naturale infinito e a è un reale positivo minore di* 1 *, l’iperreale a^K è infinitesimo positivo.*

(Attenzione! Per strano che possa apparire, tale proposizione non sussiste se non si suppone a reale... Lo si potrà verificare non appena conseguito il risultato ***7°***).

Dimostrazione. Pósto $b = \frac{1}{a}$, esiste un reale $c > 0$ per cui si ha $b = 1 + c$; dunque, per ogni naturale n , la diseguaglianza di BERNOULLI (vedi *Appendice I* , paragrafo **1.2**) impone: $b^n > 1 + nc$. Allora, anche per ogni naturale infinito K , sarà $b^K > 1 + Kc$; da cui $0 < a^K = \frac{1}{b^K} < \frac{1}{1+Kc} < \frac{1}{Kc}$, e quindi l’asserto.

3° *- Se $H > 0$ è un numero infinito, la differenza $\sqrt{H+1} - \sqrt{H}$ è un numero infinitesimo (ovviamente positivo).*

Dimostrazione. Si ha infatti:

$$0 < \sqrt{H+1} - \sqrt{H} = \frac{H+1-H}{\sqrt{H+1}+\sqrt{H}} < \frac{1}{2\sqrt{H}} \quad .$$

4° *- Se H è infinito, la differenza $\sqrt{H^2+H} - \sqrt{H^2-H}$ è finita non infinitesima.*

Dimostrazione. Si ha infatti:

$$\sqrt{H^2+H}-\sqrt{H^2-H}=\frac{2H}{\sqrt{H^2+H}+\sqrt{H^2-H}}=\frac{\pm 2}{\sqrt{1+\frac{1}{H}}+\sqrt{1-\frac{1}{H}}} \quad ;$$

dunque, a seconda del segno di H , la differenza in esame avrà parte standard uguale a $+1$ o a -1 . E l'asserto è provato.

5° - *Se* H *è infinito positivo, la differenza* $\sqrt{(H+1)^3}-\sqrt{H^3}$ *è infinita (ovviamente positiva).*

Dimostrazione. Si ha infatti:

$$\sqrt{(H+1)^3}-\sqrt{H^3} = (H+1)\sqrt{H+1}-H\sqrt{H} >$$

$$> H\sqrt{H+1}-H\sqrt{H} = H\left(\sqrt{H+1}-\sqrt{H}\right) =$$

$$= \frac{H}{\sqrt{H+1}+\sqrt{H}} > \frac{H}{2\sqrt{H+1}} = \frac{H+1}{2\sqrt{H+1}}-\frac{1}{2\sqrt{H+1}} \quad ;$$

ed essendo l'ultimo membro un numero infinito, manifestamente positivo, l'asserto è provato.

6° - *Se* H *è infinito positivo, il rapporto* $\dfrac{\sqrt{H+1}}{\sqrt{2H}+\sqrt{H-1}}$ *è finito e la sua parte standard vale* $\sqrt{2}-1$.

Dimostrazione. Anziché procedere ancora per razionalizzazione, faremo uso del risultato *3°* . Detti dunque i , j , i', j' e k cinque opportuni infinitesimi, si avrà di séguito:

$$\frac{\sqrt{H+1}}{\sqrt{2H}+\sqrt{H-1}} = \frac{\sqrt{H}+i}{\sqrt{2}\sqrt{H}+\sqrt{H}-j} = \frac{(1+\frac{i}{\sqrt{H}})\sqrt{H}}{(\sqrt{2}+1+\frac{j}{\sqrt{H}})\sqrt{H}} = \frac{1+i'}{\sqrt{2}+1-j'} =$$

$$= \left(\sqrt{2}-1\right)\frac{1+i'}{\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}+1-j'\right)} = \left(\sqrt{2}-1\right)\frac{1+i'}{1-j'\left(\sqrt{2}-1\right)} =$$

$$= \left(\sqrt{2}-1\right)\frac{1+i'}{1-k} = \left(\sqrt{2}-1\right)\frac{(1-k)+(k+i')}{1-k} = \left(\sqrt{2}-1\right)\left[1+\frac{(k+i')}{1-k}\right] \;,$$

il che equivale all'asserto.

Il risultato che segue, in apparenza piuttosto tecnico, fornisce in realtà uno dei cardini dell'Analisi. Il lettore lo esamini con cura, verificando anche i passaggi e le asserzioni che si dànno per scontati.

***7° - Se** K è un naturale infinito, il numero iperreale* $\left(1+\frac{1}{K}\right)^K$ *è finito non infinitesimo e la sua parte standard è indipendente dalla scelta di* K.

Dimostrazione. Data la successione di razionali $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$, con $n>1$, osserviamo che si ha:

$$\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n}} = \frac{1+\frac{1}{n}}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n}\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n}} = \frac{1+\frac{1}{n}}{\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^{n}} =$$

$$= \frac{1+\frac{1}{n}}{\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^{n}} < \frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{n}{n^2-1}} < \frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{n}{n^2}} = 1$$

dove, nel passaggio dal quarto al quinto membro, si è fatto uso della diseguaglianza di BERNOULLI.

Dunque la successione $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ è decrescente, così che il numero $\left(1+\frac{1}{K}\right)^{K+1}$ è finito: tale, allora, è anche $\left(1+\frac{1}{K}\right)^{K}$, che si ottiene dividendo il precedente per un iperreale di parte standard 1 .

Inoltre, sempre per la diseguaglianza di BERNOULLI, quale che sia $n > 1$, è $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} > 2$, il che assicura che l'iperreale in esame non è infinitesimo: pósto dunque $a = 1+\frac{1}{K}$, dev'essere $st(a^K) \neq 0$.

Ricordando ora (si veda alla fine del paragrafo **7**) che *se una successione crescente (decrescente) rappresenta un iperreale finito* a^K *, allora ogni sua estensione canonica a* $N^*- N$ *rappresenta un iperreale infinitamente vicino ad* a^K , si può concludere che, per ogni naturale infinito K' , è senz'altro:

$$st(a^K) = st\ \ (1+\frac{1}{K'})^{K'} \qquad ;$$

col che, appunto, l'asserto è provato.

Il numero reale $st(a^K)$ si denota universalmente col simbolo e .

Infine, un'incursione nella teoria: formuleremo, cioè, in termini iperreali, due dei concetti più rilevanti dell'Analisi Matematica.

8° - La continuità. Sia $f(x)$ una funzione reale di variabile reale, e seguitiamo a denotare con $f(x)$ la sua estensione canonica all'iperreale; sia poi x_0 un assegnato valore della x .

Diremo che la funzione $f(x)$ *è continua nel punto* x_0 *se, qualunque sia l'infinitesimo* j *, risulta:* $st[f(x_0+j)] = f(x_0)$.

Chi conosca la definizione di *continuità* in termini standard, e la confronti con quella ora proposta, noterà senza dubbio la brevità e la chiarezza garantite anche in quest'ambito dall'uso degl'iperreali.

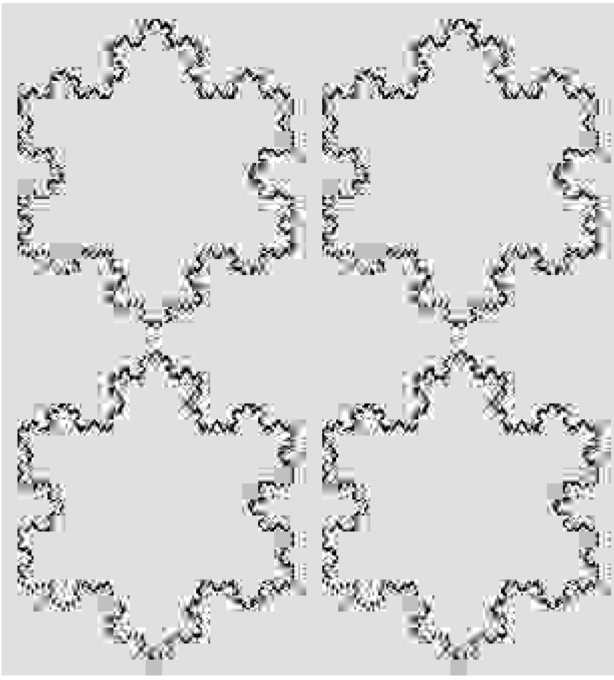
Quanto al lessico, giova notare che la definizione data si traduce subito in quest'altra: *la funzione* $f(x)$ *si dirà continua nel punto* x_0 *se, quale che sia l'infinitesimo* j *, l'iperreale* $f(x_0+j)$ *risulta infinitamente vicino al reale* $f(x_0)$.

9° - La derivabilità. *Diremo poi che* $f(x)$ *è derivabile nel punto* x_0 *se esiste un reale* m_0 *infinitamente vicino al rapporto*

$$\frac{f(x_0+j) - f(x_0)}{j} \quad ,$$

quale che sia l'infinitesimo $j \neq 0$; ovvero, *se tale rapporto ha parte standard e questa non dipende da* j . Il reale m_0 è detto *derivata di* $f(x)$ *nel punto* x_0 , e si denota di solito col simbolo $f'(x_0)$.

Anche qui il lettore più esperto potrà confrontare la definizione data con quella standard. Noi ci limiteremo a metterne in luce la significativa interpretazione geometrica: m_0 *misura, a meno d'infinitesimi, la pendenza di ciascun tratto infinitesimo del grafico di* $f(x)$ *su cui giaccia il punto di coordinate* $[x_0 , f(x_0)]$. Né occorrerà dilungarsi sulla locuzione "*tratto infinitesimo del grafico di* $f(x)$ ", facilmente riconducibile alle altre due: "*tratto infinitesimo dell'asse delle* x " e "*tratto infinitesimo dell'asse delle* y ".



APPENDICI

Quattro cristalli di neve? No, quattro “copie” della *stella di von Koch*, il primo esempio di curva continua, dovunque priva di tangente, dotata di lunghezza infinita e racchiudente una superficie di area finita.

“Mais à quoi servent les ballons?”.
“Ecoutez, illustres critiques! C’est parce que nous ne le savons pas que nous faisons des ballons pour l’apprendre”.

XAVIER DE MAISTRE

Appendice 0

Tutte le considerazioni che saranno svolte in quest'appendice si fondano sul presupposto che al lettore siano quanto meno familiari i concetti (cosiddetti "primitivi") che rispondono alle locuzioni:

a) *insieme*;
b) *elemento* di un insieme;

0.1 - ***Insiemi e sottoinsiemi.***

Sinonimi di *insieme* saranno per noi le parole: *classe*, *famiglia*, *aggregato*, *totalità*, *collezione*. Talvolta gli elementi di un insieme saranno detti *punti* e la proposizione: " x *è elemento dell'insieme* A " si enuncerà nella forma equivalente: " x *è un punto di* A ", ovvero: " x *appartiene ad* A "; in simboli , ciò si esprimerà con la scrittura:

(0.1) $$x \quad A \ ,$$

mentre lo si negherà interponendo il simbolo   fra X ed A .

Dati poi due insiemi A e B , diremo che l'insieme B *è contenuto* o *incluso* nell'insieme A (ovvero che l'insieme A *contiene* o *include* l'insieme B) per significare che ogni elemento di B appartiene ad A . In tal caso potremo anche dire, equivalentemente, che B è una *parte* di A ; e sinonimi di *parte* saranno le parole *sottoinsieme*, *sottoclasse*, *sottofamiglia* e, talora, *porzione*.

La circostanza che B sia una parte di A si esprimerà indifferentemente con una delle due scritture:

(0.2) $B \quad A$ *ovvero* $A \quad B$;

si converrà inoltre di non attribuire alcun significato matematico alle proposizioni: " B *appartiene ad* A " e “ B *non appartiene ad* A ”.

Se infine vorremo dire che una proposizione riguardante elementi dell’insieme A è vera *per almeno un* elemento x di A , scriveremo

(0.3) $x \quad A \quad : \quad (x)$;

mentre se vorremo dire che è vera *per tutti* gli elementi di detto insieme, scriveremo:

(0.4) $x \quad A \quad : \quad (x)$;

nel primo caso diremo anche che "*qualche elemento di* A *gode della proprietà* ", nel secondo che "*ogni elemento di* A *gode della proprietà* ”.

Al simbolo si suole dare il nome di *quantificatore esistenziale* (e si legge: “*esiste qualche*”), al simbolo quello di *quantificatore universale* (e si legge: "*qualunque sia*"). Quando poi si voglia dare al quantificatore esistenziale il significato di "*esiste un solo*", si scrive ! . Infine, il simbolo “ : ” che compare nella (0.3), talvolta sostituito da una sbarretta obliqua “ / ” o verticale “ | ”, si legge: "*tale* (o *tali*) *che*", mentre (x) si legge: x *gode della proprietà* " , ovvero : "per x *è vera la proposizione* .

Osservazione 0.1 - In questo paragrafo sono ricorse le congiunzioni "*o*" ed "*ovvero*”, usate equivalentemente. Va tuttavia sottolineato che, nella nostra lingua, tali congiunzioni posseggono due accezioni distinte. Talvolta, infatti, esse vengono usate, come sopra, per significare che le due eventualità in esame non si escludono a vicenda (in latino "*vel*"); tal altra con significato opposto, come nella frase, come nella frase: "*o Cesare o nessuno*" (in latino "*aut*"). Pertanto, ove sussista il rischio di equivocare, useremo il corrispondente latino.

Quanto alla scrittura, mentre il *vel* si rappresenta col simbolo “ ” , l'*aut* non possiede un suo simbolo specifico, poiché lo si denota con una semplice combinazione fra il simbolo "   " e il simbolo "   " , che rappresenta la congiunzione "*e*" ovvero "*ed*" (in latino "*et*").

0.2 - *Eguaglianza fra insiemi. Insieme vuoto.*

In accordo con l'idea intuitiva secondo la quale a distinguere due insiemi è l'esistenza di almeno un elemento che non appartenga a entrambi, diremo che l'insieme A *è uguale* all'insieme B (ovvero che *coincide* con esso) per significare che

(0.5) $\quad A \quad B$ *e simultaneamente* $B \quad A$;

scriveremo in tal caso:

(0.6) $\quad A = B$,

mentre, se così non è, interporremo il simbolo $\neq$ fra A e B . È immediato verificare che hanno luogo le seguenti proposizioni:

(I) *se* A *è un insieme, risulta* $A = A$;

(II) *se* A *e* B *sono insiemi e se risulta* $A = B$ *, allora risulta anche* $B = A$;

(III) *se* A , B *e* C *sono insiemi e se simultaneamente risulta* $A = B$ *e* $B = C$ *, allora risulta anche* $A = C$.

Ciò si esprime dicendo che *l'uguaglianza fra insiemi gode delle proprietà: riflessiva* (I) *, simmetrica* (II) *e transitiva* (III) .

Quando si sappia che il simbolo   , interposto fra due proposizioni   e   ' , sta a significare che la seconda è conseguenza della prima, le (I) , (II) e (III) possono scriversi come segue:

(I) $A = A$;

(II) $A = B \qquad B = A$;

(II) $(A = B \ e \ B = C) \qquad A = C$.

Il simbolo si legge : "*implica*", sicché, quando avviene che la proposizione implichi la proposizione ‘ e che *simultanea-mente* ‘ implichi , si usa la scrittura

(0.7) $\qquad \Leftrightarrow$ ‘ ,

da leggersi: “ *equivale a* ‘ ”. In tal caso si suole anche dire che la proprietà ‘ sussiste *se e solo se* sussiste la proprietà , ovvero che la ‘ *è condizione necessaria e sufficiente* perché abbia luogo la .

Notiamo che se risulta $B \quad A$, non è escluso che sia $A = B$; allora , fra tutte le parti di A , distingueremo quelle per cui ciò *non* avviene denominandole *parti proprie* (ovvero *sottoinsiemi proprî*, *sottoclassi proprie*, etc.) dell’insieme A . Talvolta, per dare enfasi alla possibilità che B , contenuto in A , possa anche coincidere con A , si scrive:

(0.8) $\qquad B \quad A$

e si dice che B è contenuto *propriamente o non* in A .

Sovente, per indicare quel sottoinsieme B di A costituito dagli elementi x di A che godono di un’assegnata proprietà, si fa uso della scrittura

(0.9) $\qquad B \equiv \{ x \quad A : \quad (x) \}$;

va osservato tuttavia che non sempre tale formula è idonea a definire un sottoinsieme di A : se infatti la proprietà non compete ad alcun elemento di A , detta formula perde di significato, a meno che non si accetti il concetto di "*sottoinsieme privo di elementi*”.

Ebbene, per quanto un simile concetto si sottragga all’intuizione, nondimeno è conveniente accettarlo, e quindi dar senso in ogni caso alla formula (0.9). Alla resa dei conti, tutto ciò non è che una pura e semplice convenzione, la quale tuttavia - come vedremo fra poco, e nel séguito sempre meglio - conferisce alla scrittura matematica una notevole versatilità, permettendole di formulare assiomi, definizioni e teoremi nella maniera più generale possibile, vale a dire senza un ricorrente antifonario di fastidiose eccezioni.

È precisamente a questo scopo che si introduce la nozione di *insieme vuoto*. Tale insieme, che si denota col simbolo ϕ, può definirsi per mezzo della stessa (0.9), sostituendovi la proposizione (x) con la proposizione: $x \quad A$.

L'insieme vuoto va dunque annoverato fra i sottoinsiemi di A, quantunque sia ragionevole definirlo un *sottoinsieme improprio*. Ma poiché anche ad A, se riguardato come sottoinsieme, è naturale attribuire una siffatta denominazione, ne viene che *in un insieme non vuoto esistono due sottoinsiemi improprî distinti: l'insieme stesso e l'insieme vuoto*.

Vi è tuttavia una circostanza assai più rilevante che scaturisce dalla definizione di insieme vuoto: e cioè che, *quali che siano i due insiemi A e B*, se ϕ_A è l'insieme vuoto in A e ϕ_B è l'insieme vuoto in B, ϕ_A coincide con ϕ_B; ovvero, come si dice in termini più espressivi, *esiste uno ed un solo insieme vuoto*. Infatti, se fosse $\phi_A \neq \phi_B$, dovrebbe esistere o un elemento di ϕ_A che non appartiene a ϕ_B o un elemento di ϕ_B che non appartiene a ϕ_A; detto x un tale elemento, per la definizione di sottoinsieme vuoto dovrebbe aversi: o $x \quad A$ e simultaneamente $x \quad A$, o $x \quad B$ e simultaneamente $X \quad B$, il che è assurdo in entrambi i casi.

È per questa ragione che l'insieme vuoto, *in qualunque insieme lo si consideri*, viene sempre indicato col simbolo ϕ.

Facciamo ancora presente che, se un sottoinsieme B di A è costituito dal solo elemento h, invece di scrivere, in accordo con la (0.9), la formula

$$B \equiv \{ x \quad A : x = h \} \quad , \tag{0.10}$$

(intendendo con $x = h$ che x ed h sono lo stesso elemento), si preferisce abbreviare come segue:

(0.11) $$B \equiv \{ h \} \ ;$$

ma, in ogni caso, si deve ben distinguere la nozione di *insieme* $\{ h \}$ da quella di *elemento* h *che da solo lo costituisce*.

Più generalmente, se gli elementi di B si vogliono (quando ciò è possibile) elencare individualmente, allora, chiamatili $x , y , \ldots , z$, si riserva per B la scrittura

(0.12) $$B = \{ x , y , \ldots , z \} \ .$$

0.3 - *Unione, intersezione e nozioni collegate.*

Da questo momento, a evitare inutili complicazioni *non soltanto formali*, supporremo che tutti gli insiemi o gli elementi in discorso siano rispettivamente sottoinsiemi o elementi di un prefissato insieme A , non vuoto. Tale insieme verrà detto “*l’ambiente*”, ovvero "*l’intero spazio*" o, ancora più semplicemente, "*lo spazio*".

Ciò premesso, se X ed Y sono due insiemi (dunque due sottoinsiemi di A), si denomina “*unione di* X *ed* Y ”, e si denota col simbolo $X \quad Y$, l’insieme degli elementi di A che appartengono *ad almeno uno* dei due insiemi dati. In formula:

(0.13) $$X \quad Y \equiv \{ x \quad A : \ x \quad X \ \mathit{vel} \ x \quad Y \} \ .$$

Si chiama invece "*intersezione di* X *ed* Y ", e si denota col simbolo $X \cap Y$, l’insieme degli elementi di A che appartengono *a entrambi* gli insiemi dati. In formula:

(0.14) $$X \cap Y \equiv \{ x \quad A : \ x \quad X \ \mathit{ed} \ x \quad Y \} \ ;$$

e noteremo che, in virtù della definizione di insieme vuoto, la (0.14) ha significato in ogni caso, ossia anche se *nessun* elemento di X appartiene a Y . In tale evenienza, cioè se risulta

(0.15) $$X \cap Y \equiv \phi \ ,$$

si dirà che gli insiemi X ed Y sono *disgiunti*.

Le nozioni di *unione* e *intersezione* possono estendersi in modo da definire l'unione e l'intersezione di *quanti si vogliano* insiemi. Più precisamente, se è una famiglia di insiemi (quindi di parti X di A), si dice "*unione degli insiemi della famiglia* ", e si denota col simbolo $_X \; X$, l'insieme degli elementi di A che appartengono *ad almeno uno* degli insiemi X . In formula:

(0.16) $\qquad _X \; X \equiv \{ x \quad A : \; x \quad X \;$ *per qualche* $\; X \qquad \}$.

Analogamente, si dirà "*intersezione degli insiemi della famiglia* ", e la si denoterà col simbolo $\cap_X \; X$, l'insieme degli elementi di A che appartengono *a tutti* quegli insiemi. In formula:

(0.17) $\qquad \cap_X \; X \equiv \{ x \quad A : \; x \quad X \;$ *per ogni* $\; X \qquad \}$.

Se ora diciamo _(A) la famiglia delle parti di A , proprie o improprie che siano, vediamo che per ogni X _(A) risulta definito uno ed un solo sottoinsieme ^{C}X _(A) costituito da tutti gli elementi di A che *non* appartengono a X . Tale sottoinsieme si dice "*il complementare di* X " ed è individuato dalla formula:

(0.18) $\qquad {}^{C}X \equiv \{ x \quad A : \; x \quad X \}$;

per un tale insieme si riserva talvolta la notazione $A{-}X$, che si legge " A *meno* X " o, meglio ancora, " A *sottratto* X " (ma che ovviamente va ben distinta dall'ordinaria sottrazione dell'Aritmetica!).

Quando poi si voglia assumere come ambiente una parte B di A e riferirsi all'insieme degli elementi di B che *non* appartengono a una parte Z di B , sarà bene specificare che tale insieme è "*il complementare di* Z *rispetto a* B ". Si farà rilevare tale circostanza anche nella notazione, scrivendo:

(0.19) $\qquad {}^{C(B)}Z \equiv \{ x \quad A : \; x \quad B \;$ *ed* $\; x \quad Z \}$,

ma, anche in questo caso, la scrittura potrà alleggerirsi adottando la notazione più concisa, vale a dire $B{-}Z$.

È però opportuno notare che, anche qualora *non* sia $Z \quad B$, la locuzione: "*l'insieme degli elementi di B che non appartengono a Z* " conserva significato, ossia può adibirsi per designare un nuovo insieme ottenuto a partire da X e da B . Per questo insieme non si accetterà la notazione introdotta nella (0.19) , ma si manterrà l'altra $B-Z$. Perciò si porrà in ogni caso (cioè, sia o non sia $Z \quad B$) :

(0.20) $$B-Z \equiv \{ x \quad A : \ x \quad B \ \ ed \ \ x \quad Z \} \ ;$$

la denominazione che generalmente si riserva a questo insieme è quella di "*differenza fra B e Z* " (nell'ordine !) .

Abbiamo così introdotto le più semplici operazioni fra insiemi. Per quanto riguarda le loro proprietà mutue, cioè la corretta maniera di combinarle l'una con l'altra, si rimanda il lettore alla fine del presente capitolo.

0.4 - *Coppie ordinate e prodotto cartesiano. Relazioni.*

Assai di frequente si presenta (e non solo in matematica) l'esigenza di distinguere una coppia di elementi rispettivamente appartenenti ai sottoinsiemi $X \quad A$, $Y \quad A$, da quella che si ottiene invertendo l'ordine degli elementi stessi. Dato che ancora non si è parlato della nozione di "*ordinamento*" , ciò va inteso in senso intuitivo; ma è pur vero che non può essere l'ordine secondo il quale si scrivono i simboli rappresentativi degli elementi considerati a consentirci di definire la nozione di "*coppia ordinata*".

Come fare, allora, per precisare *intrinsecamente* le nozioni di "*primo elemento*" e di "*secondo elemento*" di una coppia? La risposta è assai più semplice (e con ciò non s'intende dire "facile") di quanto non sembri a prima vista: basterà infatti distinguere in qualche modo, *purché in termini insiemistici*, il ruolo svolto dal cosiddetto "*primo*" elemento della coppia da quello svolto dal "*secondo*". Una maniera di procedere assolutamente ineccepibile è quella di *costruire coi suddetti elementi*, e diciamoli x ed y , *due sottoinsiemi fra loro distinti in tanto in quanto lo siano gli elementi stessi*.

Diremo perciò *coppia ordinata* costituita dagli elementi x X ed y Y, e la denoteremo col simbolo (x,y), la seguente famiglia di parti di X Y:

(0.21) $$\Big\{ \{x\} , \{x,y\} \Big\} ,$$

È chiaro a questo punto che il ruolo svolto dall'elemento x riesce inequivocabilmente distinto da quello svolto dall'elemento y, e non certo per via dell'ordine in cui compaiono le due lettere scelte.

Ciò riuscirà ancor più evidente ove si osservi che risulta:

(0.22) $$\begin{aligned} &\Big\{ \{x\} , \{x,y\} \Big\} = \Big\{ \{x\} , \{y,x\} \Big\} = \\ &= \Big\{ \{x,y\} , \{x\} \Big\} = \Big\{ \{y,x\} , \{x\} \Big\} , \end{aligned}$$

di modo che *ciascuna di queste espressioni definisce la stessa coppia ordinata* (x,y).

Di qui in avanti, x ed y si potranno ancora chiamare rispettivamente "*primo elemento*" e "*secondo elemento*" della *coppia ordinata* (x,y), sapendo esattamente che cosa con ciò debba intendersi.

La definizione di cui sopra è dovuta a KAZIMIERZ KURATOWSKI, che la formulò per la prima volta nel 1921. Una definizione che nella sostanza le equivale fu proposta da NORBERT WIENER nel 1914.

Se ora X ed Y sono due sottoinsiemi dello spazio A, si chiama "*prodotto cartesiano di* X *per* Y" (nell'ordine!), e si denota con $X{\times}Y$, l'insieme delle coppie ordinate (x,y), con x X ed y Y. In formula:

(0.23) $$X{\times}Y \equiv \{ (x,y) : \; x \quad X \;\; \textit{ed} \;\; y \quad Y \} ;$$

e qui già si vede come la nozione di *insieme vuoto* ci risparmi un elenco di fastidiose eccezioni per i sottoinsiemi X ed Y, potendosi senz'altro assumere $X{\times}Y = \phi$ qualora uno dei sottoinsiemi in questione sia vuoto.

È del pari immediato constatare che, in generale , risulta:

(0.24) $$X{\times}Y \neq Y{\times}X \;;$$

ossia, come suoi dirsi: *il prodotto cartesiano di due insiemi non gode della proprietà commutativa*.

La nozione di prodotto cartesiano consente, fra l'altro, di dare un preciso significato al termine "*relazione*", termine rispondente a un concetto d'importanza fondamentale in Matematica. Precisamente, *diremo che nell'insieme* X A *è data una* "*relazione*" *ogni qualvolta si assegni un sottoinsieme del prodotto cartesiano* $X{\times}X$.

Ciò potrebbe apparire piuttosto distante dal concetto "ingenuo" di "*relazione fra un ente ed un altro*"; ma ove si pensi che *una relazione è completamente determinata quando si conoscano tutte le coppie di elementi che stanno, appunto, in quella relazione,* sarà naturale convenire che la definizione ora data astrae l'essenziale di questo concetto, ignorandone (giustamente) gli aspetti accessorî.

Si pensi, per esempio, alla relazione "*padre-figlio*" nell'insieme di tutti gli uomini viventi in un dato istante: una breve riflessione porterà a riconoscere che, (prescindendo dagli aspetti fisiologici, morali o comunque non insiemistici che la suddetta relazione riveste), essa è perfettamente nota quando si assegnino *tutte* le coppie (ordinate!) *e solo quelle* per le quali il primo elemento ("padre") sta nella relazione considerata col secondo ("figlio").

Esamineremo adesso due particolari relazioni che intervengono, fra l'altro, nelle più disparate questioni di Analisi Matematica.

Sia X un sottoinsieme non vuoto dello spazio A e sia $X{\times}X$ un sottoinsieme del prodotto cartesiano di X per se stesso. Si dirà che è una "*relazione di equivalenza*" in X se per sussistono le seguenti proprietà:

(I - *riflessività*) $x \quad X$, (x,x) ;

(II - *simmetria*) $x \quad X$ *e* $y \quad X$,
se (x,y) *allora* (y,x) ;

(III - *transitività*) $x \quad X$, $y \quad X$ *e* $z \quad X$,
se (x,y) *e* (y,z) , *allora* (x,z) .

Si vede subito che, qualora si convenga di denotare la proposizione (x,y) col simbolo $x \approx y$ (da leggersi " x *è equivalente a* y "), allora le proprietà sopra elencate (assiomi) si riassumono come segue:

$x \quad X$, $y \quad X$ *e* $z \quad X$,

(I) $x \approx x$;
(II) $x \approx y \qquad y \approx x$;
(III) $x \approx y$ *e* $y \approx z \qquad x \approx z$.

Per esprimere la *riflessività*, o *proprietà riflessiva*, si dice talvolta, con linguaggio suggerito dalla geometria che "*la diagonale di* $X \times X$ *è contenuta in* ".

Il lettore che volesse un esempio non troppo banale di relazione di equivalenza, osserverà come la relazione di *eguaglianza fra insiemi* (introdotta nel paragrafo 0.2) sia una relazione di equivalenza nella famiglia _(A) delle parti di A .

Osservazione 0.2 - Se si fissa un elemento $u \quad X$ e si conviene di denotare con X_u il sottoinsieme di X così definito :

$$X_u \equiv \{ x \quad X : x \approx u \} ; \tag{0.25}$$

risulta ben chiaro che nessun elemento di $X - X_u$ potrà essere equivalente ad alcun elemento di X_u . Sicché, qualunque sia $v \quad X$, il sottoinsieme X_u e quello X_v che si ottiene dalla (0.25) sostituendo v con u , verificheranno la condizione

$$X_u \cap X_v = \phi \quad aut \quad u \approx v ; \tag{0.26}$$

ma poiché $u \approx v$ è condizione necessaria e sufficiente perché sia $X_u = X_v$, scrivere la (0.26) è come scrivere

$$X_u \cap X_v = \phi \quad aut \quad X_u = X_v . \tag{0.27}$$

D’altronde, ogni elemento w di X dovrà stare in qualche sottoinsieme ottenibile mediante la (0.25) : e precisamente in X_w .

Riassumendo: *la sottofamiglia (non vuota)* $\_(X,\ )$ *di parti di* X *che si ottiene tramite la* (0.25) *al variare di* u *in* X *gode delle due seguenti proprietà:*

1) U $\_(X,\ )$ *e* V $\_(X,\ )$ *ha luogo una ed una sola delle circostanze:* $U \cap V = \phi$, $U = V$.
2) $_{V\ \_(X,\ )} V = X$.

Tutto ciò può esprimersi in termini più concisi. Infatti, poiché *ogni* famiglia di parti di X soddisfacente a 1) e 2) si chiama “*partizione dell’insieme* X ”, quanto sopra si enuncia anche come segue: *una relazione di equivalenza induce una partizione dell’insieme* X *in sottoinsiemi, ciascuno del tipo dato dalla* (0.25) .
A ciascun elemento di siffatta partizione si dà il nome di “*classe di equivalenza modulo* ”, mentre la partizione stessa si suole chiamare “*insieme quoziente dell’insieme* X *modulo* ”; per essa si preferisce adottare la notazione $X_/$, anziché l’altra $\_(X,\ )$.

Infine, a ogni elemento x della classe di equivalenza X_u (e quindi anche a u) si dà il nome di “*rappresentante*” della classe stessa.
Non si mancherà di notare che può benissimo esistere una partizione in classi di equivalenza ciascuna delle quali costituita da un solo elemento: l’esempio sopra riportato, relativo al caso dell’eguaglianza fra insiemi, ne è una prova. In tal caso, infatti, $X_/$ altro non è se non la stessa famiglia $\_(A)$ delle parti di A , e ciascuna parte di A è il solo rappresentante della classe di equivalenza, che a detta parte si riduce. (Si tenga presente, a questo proposito, che la classe costituita dal solo insieme vuoto *non* è l’insieme vuoto!).

Si supponga ora che nell’insieme X A sia data una relazione Θ $X{\times}X$ per cui valga, anziché l’assioma (II) (*simmetria*), l’altro così enunciato:

(<u>II</u> - *antisimmetria*) x X *e* y X ,
se (x,y) Θ *e* (y,x) Θ , *allora* $x = y$,

fermi restando gli altri due assiomi (I) (III) . Si dirà in tal caso che Θ è una “*relazione d’ordine (parziale) in* X ”, o, brevemente, “*un ordinamento (parziale) in* X ”. Talvolta, all’assioma (II) si fa riferimento chiamandolo “*proprietà antisimmetrica*”.

Anche in questo contesto si preferisce adottare una diversa simboleggiatura; precisamente, si conviene di denotare la proposizione (x,y) Θ con la scrittura $x \le y$ (da leggersi: “ x *non segue* y ”, o anche: “ x *è minore o uguale a* y ”), Ciò pósto, l’ordinamento (parziale) Θ in X può assegnarsi con la seguente assiomatica:

$$x \quad X \ , \quad y \quad X \ e \quad z \quad X \ ,$$

(I) $x \le x$;
(II) $x \le y \ e \ y \le x \qquad x = y$;
(III) $x \le y \ e \ x \le z \qquad x = z$.

Lo studioso potrà verificare, come utile esempio, che la relazione “ ” di contenimento (o inclusione) fra insiemi, introdotta nel paragrafo 0.1 , è un ordinamento (parziale) nella famiglia _(A) delle parti di A .

Va sottolineato il fatto che gli assiomi (I) , (II) e (III) non escludono affatto che possano trovarsi in $X{\times}X$ coppie (ξ,η) per le quali non risulti né $\xi \le \eta$, né $\eta \le \xi$; in altri termini, può ben avvenire che né la coppia (ξ,η) , né l’altra (η,ξ) appartengano a Θ . Del resto, Θ è un *sottoinsieme* di $X{\times}X$, ossia generalmente una parte *propria*. È questa la ragione per cui si specifica che un siffatto ordinamento è “*parziale*”. (Nel caso dell’esempio sopra citato, è ben evidente come possa darsi che due parti di A non stiano in relazione di inclusione, in qualsiasi ordine le si consideri).

Ove però si abbia l’ulteriore assioma:

(IV) $\quad x \quad X \ e \quad y \quad X \ , \ x \le y \ vel \ y \le x$,

allora la relazione d’ordine (l’ordinamento) si dirà “*totale*”.

Osservazione 0.3 - Dato un *ordinamento totale* Θ in X ossia, come si dice, dato un insieme X "*totalmente ordinato*" (da Θ) , sia Y un sottoinsieme *non vuoto* di X . Possono allora aver luogo, indipendentemente, le seguenti eventualità:

a) $\quad x_0 \quad X : \quad y \quad X \ , \ x_0 \le y$;

b) $\quad x_1 \quad X : \quad y \quad X \ , \ y \le x_1$;

Nel primo caso si dirà che Y "*è minorato in* X *da* x_0 ", nel secondo caso che Y "*è maggiorato in* X *da* x_1 ". Ogni elemento $x_0 \quad X$ soddisfacente ad a) si dirà "*un minorante per* Y " (o "*di* Y ") " *in* X "; ogni elemento $x_1 \quad X$ soddisfacente a b) si dirà "*un maggiorante per* Y " (o "*di* Y ") "*in* X ".

Ora, è ben evidente che se X_0 ed X_1 designano rispettivamente l'insieme dei minoranti e quello dei maggioranti per Y in X , deve essere:

(0.28) $\qquad X_0$ *è maggiorato in* X $\quad$ *aut* $\quad X_0 = \phi$;

e analogamente:

(0.29) $\qquad X_1$ *è minorato in* X $\quad$ *aut* $\quad X_0 = \phi$.

Se avviene che X_0 *è maggiorato in* X *da qualche suo elemento* $\underline{x}_0$ *, allora* $\underline{x}_0$ *è l'unico maggiorante per* X_0 *in* X_0 *stesso.* Analogamente, *se avviene che* X_1 *è minorato in* X *da qualche suo elemento* $\underline{x}_1$ *, allora* $\underline{x}_1$ *è l'unico minorante per* X_1 *in* X_1 *stesso.*

Infatti, detto $\underline{\underline{x}}_0$ [$\underline{\underline{x}}_1$] un secondo maggiorante [minorante] per X_0 in X_0 [per X_1 in X_1] , dovrà aversi:

(0.30) $\qquad \underline{x}_0 \le \underline{\underline{x}}_0 \quad e \quad \underline{\underline{x}}_0 \le \underline{x}_0 \qquad [\ \underline{\underline{x}}_1 \le \underline{x}_1 \quad e \quad \underline{x}_1 \le \underline{\underline{x}}_1\ ]$;

ma ciò, per l'assioma (II) , comporta:

(0.31) $\qquad \underline{x}_0 = \underline{\underline{x}}_0 \qquad [\ \underline{\underline{x}}_1 = \underline{x}_1\ ]$;

ossia, effettivamente, $\underline{x}_0$ [$\underline{x}_1$] è l'unico elemento di X_0 [di X_1] che sia maggiorante [minorante] per X_0 [per X_1] .

L'elemento $\underline{x}_0$, quando esiste, si dice "*l'estremo inferiore di* Y in X " e si indica col simbolo " $inf_X\ Y$ "; l'elemento x , quando esiste, si dice "*l'estremo superiore di* Y *in* X " e si indica col simbolo " $sup_X\ Y$ ".

Qualora non vi sia rischio di ambiguità, si scriverà semplicemente:

(0.32) $$\underline{x}_0 = inf\ \ Y \qquad , \qquad \underline{x}_1 = inf\ \ Y \ .$$

Ove l'eventuale maggiorante [l'eventuale minorante] di un generico insieme $X_0 \quad X$ [$X_0 \quad X$] appartenga allo stesso X_0 [allo stesso X_1] , a esso si dà il nome di "*massimo di* X_0 " ["*minimo di* X_1 "] .

Pertanto potremo anche dire che *l'estremo inferiore di* Y *, quando esso esiste, è il massimo dei minoranti di* Y *in* X ; [*l'estremo superiore di* Y *, quando esso esiste, è il minimo dei maggioranti di* Y *in* X] .

0.5 - *Funzioni. Proprietà elementari.*

In tutte le discipline matematiche, ma soprattutto in Analisi, sono di primaria importanza le relazioni *univoche*: quelle, cioè, *in cui non esistono coppie distinte che abbiano in comune il primo elemento.*

Accogliendo la proposta del matematico italiano GIUSEPPE PEANO, si conviene di riservare a tali relazioni il nome di *funzioni*. Sinonimo di *funzione* è il termine *applicazione*, prevalentemente adottato in Algebra. Molto spesso, adottando un linguaggio formalmente meno esigente ma senza dubbio espressivo (e a patto che per "corrispondenza" si intenda "relazione in $X \times Y$ "), il concetto di *funzione* viene introdotto come segue: *se* X *ed* Y *sono due sottoinsiemi non vuoti dell'ambiente* A *, ogni corrispondenza* f *che associ a ciascun elemento* x *di* X *uno e un solo elemento* y *di* Y *sarà detta* funzione *da* X *in* Y ; e si scriverà:

(0.33) $$f \ : \ X \rightarrow Y \ .$$

Più in esteso, questa scrittura equivale all'altra:

(0.34) $$x \quad X \qquad !\,y \quad Y \quad : \quad y = f\,(x) \ ,$$

dove il simbolo $f\,(x)$, da leggersi: " f di x ", designa il corrispondente (ovvero, come si dice, il *trasformato*, o ancora *l'immagine*) di x tramite f.

Con significato ancora equivalente, si usa scrivere:

(0.35) $$y = f(x) \,, \qquad x \quad X \,, \qquad y \quad Y \,,$$

formula che, quando non vi sia luogo ad equivoci circa gli insiemi X ed Y, diviene più semplicemente:

(0.36) $$y = f(x) \ .$$

Con riferimento alla f, l'insieme X viene detto "*dominio*" (o anche "*insieme di definizione*" o "*di esistenza*" o "*di partenza*"), mentre l'insieme Y è chiamato "*codominio*" (o anche "*insieme dei valori*" o "*di variabilità*" o "*di arrivo*").

Il fatto che, per definizione, due elementi distinti di Y non possano essere i corrispondenti di uno stesso elemento di X non esclude che, viceversa, a elementi distinti di X possa corrispondere lo stesso elemento di Y.

Può addirittura accadere che *a ogni* elemento di X la f associ lo stesso elemento c di Y; circostanza che, in formule, può esprimersi come segue:

(0.37) $$c \quad Y \ : \qquad x \quad X \ , \quad f(x) = c \ ;$$

in tal caso si dice che la f è "*costante*" (in X).

Se però a elementi distinti di X corrispondono elementi distinti di Y, allora si dice che la f è "*iniettiva*". Pertanto, in formule, il fatto che la f sia "*iniettiva*" si traduce come segue:

(0.38) $$x_1 \quad X \ \ e \qquad x_2 \quad X \ , \ \ x_1 \neq x_2 \qquad f(x_1) \neq f(x_2) \ .$$

Risulta ancora, sempre a partire dalla definizione di *funzione*, che non necessariamente ogni elemento di Y è il trasformato di qualche elemento di X. Ma se in più accade che, considerato un qualsiasi elemento di Y, esso è il corrispondente di qualche elemento di X, allora si dice che la f è "*suriettiva*".

In formule, dunque, dire che una funzione f è “*suriettiva*” significa dire che:

$$(0.39) \qquad y \quad Y \qquad x \quad X \quad : \quad y = f(x) \; .$$

Infine, una funzione $f : X \to Y$ che sia *iniettiva* e simultaneamente *suriettiva*, viene detta “*biiettiva*”. In formule, tale evenienza si esprime come segue:

$$(0.40) \qquad y \quad Y \qquad ! \, x \quad X \quad : \quad y = f(x) \; .$$

Dal confronto fra questa e la (0.34), emerge una circostanza particolarmente notevole.

Si osserverà infatti che, quando la f è biiettiva, tramite la (0.40) viene a stabilirsi una nuova corrispondenza, denotata usualmente col simbolo f^{-1}, la quale associa a ciascun elemento y di Y un ben determinato elemento x di X: precisamente quello cui la f associa y. E ciò equivale a dire che f^{-1} è una funzione, di cui Y è il dominio e X è il codominio.

Quanto detto ci consente di definire quella che si chiama “*la funzione inversa*” della funzione f assegnata. Detto in formule:

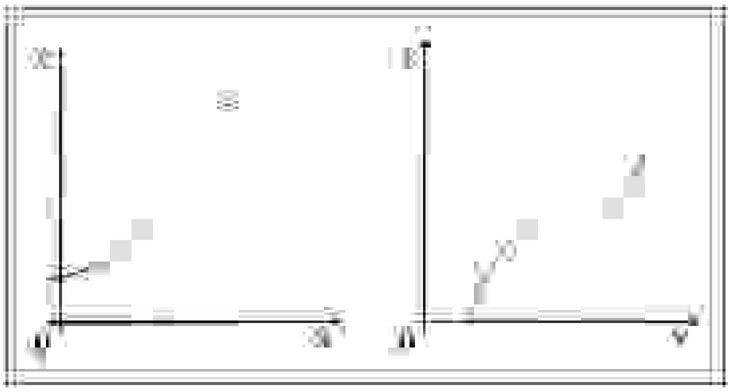
$$(0.41) \qquad y \quad Y \qquad ! \, x \quad X \quad : \quad x = f^{-1}(x) \; ,$$

dove il simbolo f^{-1} si legge : “ f *alla meno uno*”.

Riguardo alla (0.41), si noti che, se la f non fosse stata iniettiva, sarebbe venuta meno, per x, la garanzia dell’unicità; mentre, se la f non fosse stata suriettiva, si sarebbe perduta quella dell’esistenza.

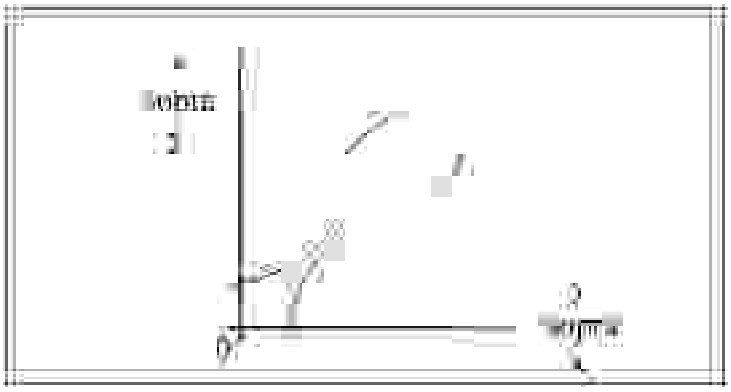
Dunque: *condizione necessaria e sufficiente perché una funzione* f *ammetta l’inversa è che tale funzione* f *sia biiettiva*.

Nella figura che segue sono rappresentate di séguito, per mezzo dei rispettivi diagrammi cartesiani, un’assegnata funzione invertibile e la sua inversa:



si noterà come detti grafici ammettano come asse di simmetria la bisettice del primo e terzo quadrante.

Tale circostanza è del tutto generale: ossia, come mostra la figura successiva (e come il lettore farà bene a dimostrare), essa ha luogo per ogni coppia di grafici di funzioni inverse l'una dell'altra:



Supponiamo adesso che tanto il dominio X quanto il codominio Y di una certa funzione f siano totalmente ordinati dalle relazioni d'ordine Θ_X e Θ_Y rispettivamente. Supponiamo inoltre che, per ogni coppia (x', x'') di elementi di X, si possa affermare che:

$$(0.42) \qquad se \quad (x', x'') \quad \Theta_X \quad allora \quad (\; f(x'), f(x'') \;) \quad \Theta_Y \;;$$

si dirà in tal caso che la funzione f è "*non-decrescente*" in X. Con notazione meno rigorosa ma più espressiva, potremo scrivere la (0.42) nella forma:

(0.43) $\qquad x' \leq x'' \qquad f(x') \leq f(x'')$;

ed è ben chiaro che la minore precisione di questa scrittura consiste nell'avere associato lo stesso simbolo $\leq$ sia alla relazione d'ordine Θ_X , sia all'altra Θ_X .

In maniera analoga a quanto visto sopra, si dirà che la f è "*non-crescente*" in X qualora si possa affermare che:

(0.44) $\qquad$ *se* $(x', x'') \quad \Theta_X \quad$ *allora* $\left(f(x''), f(x') \right) \quad \Theta_Y$;

e ancora, con notazione assai efficace, la (0.44) si potrà scrivere nella forma alternativa:

(0.45) $\qquad x' \leq x'' \qquad f(x'') \leq f(x')$.

Appendice I

1.1 - *Gli assiomi di* PEANO *per i numeri naturali.*

L'insieme numerico che abbiamo indicato con N, correntemente detto "dei numeri naturali", è quello che più di ogni altro ci riesce familiare. Le ragioni sono varie, e alcune facilmente intuibili; ciò nonostante, questo strumento fondamentale richiede, nel discorso matematico, una definizione rigorosa: definizione che va tradotta in un inquadramento assiomatico di N, piuttosto che in un'improbabile risposta alla domanda su *che cosa* siano questi numeri.

Il merito di aver fornito le proposizioni *primitive* (ossia non soggette a dimostrazione) che definiscono i *numeri naturali* (o, come si dice brevemente, i *naturali*) spetta a PEANO, che le compendiò nei seguenti assiomi:

I ***esiste un naturale detto "lo zero";***

II ***di ogni naturale esiste il successivo;***

III ***lo zero non è successivo di alcun naturale;***

IV ***naturali diversi hanno successivi diversi;***

V ***di una proprietà dello zero, la quale sia ereditaria, godono tutti i naturali.***

Quest'ultimo enunciato richiede senz'altro qualche commento.

In primo luogo va precisato il concetto di *proposizione ereditaria*: ebbene, in perfetta analogia col linguaggio ordinario, ciò significa che *se la proposizione vale per un generico numero naturale, allora essa vale anche per il successivo*. Pertanto, il quinto assioma di PEANO, usualmente detto *principio d'induzione*, fornisce un vero e proprio meccanismo per condurre le dimostrazioni: grazie a detto assioma, infatti, noi potremo affermare che un asserto vale per tutti i numeri naturali una volta effettuati i seguenti passi:

1° - *verifica dell'asserto per $n = 0$;*

2° - *deduzione dell'asserto per* $n = k+1$ *dall'assunzione dello stesso asserto per* $n = \mathrm{k}$.

Si noterà, al riguardo, come spesso una proposizione matematica riesca ben poco intuitiva in una certa enunciazione, mentre può apparire addirittura banale se la si formula diversamente.

A questo destino non si sottrae neanche il principio d'induzione. Esso infatti, come è facile dimostrare, equivale al cosiddetto *principio di minimo*, il quale asserisce che *in ogni sottoinsieme non vuoto di N vi è un elemento n_0 (e ovviamente uno soltanto) minore di ogni altro elemento del sottoinsieme*. Un fatto ovvio, si direbbe; ma ormai abbiamo imparato a diffidare di certe ovvietà...

E tuttavia, la maniera migliore per apprezzare il principio d'induzione è quella di metterlo alla prova. Inizieremo perciò col mostrare due semplici applicazioni (la prima delle quali ci è già riuscita utile in altro contesto), per poi rivolgerci a una questione assai più ardua, che mette in luce una riposta proprietà dei numeri naturali.

1.2 - *La diseguaglianza di* BERNOULLI.

Se a è un qualunque numero reale positivo, per ogni naturale n ha luogo la diseguaglianza (detta "di BERNOULLI*"):*

$$(1.1) \qquad (1 + a)^n \geq 1 + n\,a \ .$$

Dimostrazione. Pósto $n = 0$, si ha: $(1 + a)^0 = 1 = 1 + 0\,a$.

Dopo di che, se la relazione ha luogo per $n = k$, risulta:

$$(1+a)^{k+1} = (1+a)^k (1+a) > (1+k\,a)(1+a) =$$

$$= 1 + a + k\,a + k\,a^2 = 1 + (k+1)\,a + k\,a^2 \geq 1 + (k+1)\,a \quad ,$$

e dunque la relazione ha luogo anche per $n = k + 1$.

Pertanto, grazie all’assioma **V** , la (1.1) vale per tutti i naturali.

1.3 - *Un* test *sul procedimento diagonale.*

Il metodo di dimostrazione fornito dal quinto assioma di PEANO può applicarsi, com’è ovvio, a proprietà che chiamino in causa più di una variabile naturale.

A questo scopo si consideri il seguente schema, che offre un’utile traccia per sviluppare il procedimento diagonale di Cantor:

n / **m**	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	...
3	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...
4	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	...
5	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	...
6	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	...
7	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	...
8	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	...
9	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

e lo si utilizzi per desumere, e poi dimostrare mediante il principio di induzione, che *alla frazione di numeratore* n *e di denominatore* m *quel procedimento associa il numero naturale:*

$$p = m + \frac{(m+n)\,(m+n-1)}{2} \quad .$$

1.4 - *Un'interessante proprietà funzionale.*

Sussiste la seguente, notevolissima proposizione:

Se un'applicazione f *di* $N-\{0\}$ *in* $N-\{0\}$ *è tale che*

$$(1.2) \qquad n \quad N \quad f(n+1) > f\,[f(n)] \ ,$$

allora si ha:

$$(1.3) \qquad n \quad N \quad f(n) = n \ .$$

Invitiamo il lettore a tentarne una dimostrazione che non faccia esplicito ricorso all'assioma **V** . Ciò gli consentirebbe di intuire quali difficoltà possano nascondersi in un problema che ci si propone di risolvere tecnicamente, ossia con gli ordinarî strumenti algebrici.

Detto ciò, e avvertendo che in quanto segue ci si riferirà sempre a elementi di N , dimostriamo il seguente lemma: *fissato ad arbitrio un numero* $p > 0$ *, per ogni numero* m *si ha:* $f(m+p) > m$.

Sia dunque $p > 0$. Acquisito che è banalmente $f(0+p)) > 0$, si assuma, per qualche k , $f(k+p) > k$, e sia $q_p = f(k+p) - k$. La (1.2) e l'essere $q_p > 0$ comportano: $f(k+p+1) > f\,[f(k+p) = f(k+ q_p) > k$; e dunque sarà anche $f(k+p+1) > k+1$. Il lemma è così provato.

In particolare, per $p = 1$ e quale che sia m , potremo senz'altro scrivere: $f(m+1) > m$. Sicché, per ogni $n > 0$, dev'essere

$$(1.4) \qquad f(n) > n - 1 \ .$$

Di qui, sempre per ogni $n > 0$, segue: $f\,[f(n)] > f(n) - 1$, onde, ancora in virtù della (1.2) , sarà $f(n+1) > f(n)$; e pertanto f è crescente. Di conseguenza, la (1.2) impone, per ogni $n > 0$:

$$n+1 > f(n) \ .$$

Questa e la (1.4) portano subito alla (1.3), ossia alla tesi.

1.5 - *Un po' di critica.*

La più poderosa realizzazione matematica da ascriversi al **V** assioma di PEANO è senza dubbio l'aritmetica elementare, la quale si fonda appunto sulla costruzione dell'anello Z dei *numeri interi*. Le proprietà di questa essenziale struttura (che nel volume abbiamo assunto nota al lettore) derivano in realtà da un procedimento quanto mai rigoroso, fondato sul sistema N e segnatamente - come si è già detto - sul principio d'induzione. Tale procedimento, detto *simmetrizzazione*, definisce l'*opposto* di ciascun numero naturale, rendendo così sempre possibile l'operazione inversa dell'*addizione*, ossia la *sottrazione*. Dopo di che, tutto procede secondo le abituali regole del calcolo: quelle, cioè, a cui ricorre la pratica comune nell'operare coll'anello degli interi. Ad essi, anche se con una certa improprietà, ci si riferisce usualmente chiamandoli "numeri relativi".

Non si può comunque negare che l'assiomatica fornita da PEANO soffre di un'effettiva indeterminazione. THORALF SKOLEM, ad esempio, ne ha dimostrato la *non-categoricità*, e per giunta nel senso più severo: essa infatti non è aggirabile (come dapprima aveva ritenuto lo stesso BERTRAND RUSSELL) tramite pure e semplici considerazioni di isomorfismo tra i varî sistemi che obbediscono a quegli assiomi.

Per fortuna, la critica di SKOLEM incide a livelli d'indagine molto elevati, così da non interdire l'uso che ordinariamente si fa in Matematica del sistema dei numeri naturali come proposto da PEANO.

Appendice II

2.1 - *L'assioma della scelta.*

Più di una volta, nel testo, si fa riferimento a un asserto generale della Matematica: l'assioma detto *di* ZERMELO o *della scelta*. Discuterne a fondo - sebbene d'interesse primario per i fondamenti di ogni teoria - non rientra, né può rientrare, nell'ambito di una trattazione elementare. È tuttavia essenziale che il. lettore se ne formi un'idea precisa, non foss'altro perché l'assioma comporta, fra le sue svariate conseguenze, il *lemma di* ZORN e quello *di* KRULL; investendo così la fondazione dei due modelli di campo iperreale presi in esame.

Ecco dunque una possibile enunciazione:

Assioma di ZERMELO *(o della scelta) - Se* Ξ *è una famiglia di insiemi non-vuoti, esiste una funzione* ϕ *la quale associa a ciascun insieme* X *di* Ξ *un elemento* $x = \phi(X)$ *dell'insieme stesso.*

In altri termini, l'assioma stabilisce che *è sempre matematicamente legittimo operare una pluralità di scelte*; e cioè, comunque sia data una famiglia d'insiemi, estrarre un elemento da ciascuno di essi senza per questo dover indicare una precisa norma atta a individuare l'elemento in questione.

Tutto ciò, sottoposto al solo vaglio dell'intuizione o riferito a casi di particolare semplicità, può apparire tanto ovvio da non giustificare lo... spreco d'un assioma. Ma una serie di studi molto profondi, condotti per varî decenni, ha evidenziato a tal punto il ruolo cruciale dell'assioma della scelta da indurre gli specialisti a parlare addirittura di "due Matematiche": una *zermeliana* e una *non zermeliana*.

Pertanto, pur senza addentrarci in una problematica così vasta, dedicheremo i due paragrafi che seguono a chiarire alcuni aspetti di tale assioma, anche in riferimento all'uso che se ne fa nel testo.

2.2 - *Un'applicazione elementare.*

Ricordiamo che un insieme si dice *numerabile* quando può porsi in corrispondenza biunivoca coll'insieme N dei naturali.

Ora, mentre si dimostra elementarmente - vale a dire, sulla base della teoria "ingenua" degli insiemi - che *ogni insieme E dotato di un sottoinsieme X numerabile è infinito*, si può sulla stessa base dimostrare il teorema inverso? In termini più precisi: consente la teoria "ingenua" degli insiemi di dimostrare che *ogni insieme infinito E ammette un sottoinsieme X numerabile*?

Per farlo, un bravo principiante ragionerebbe più o meno così:

"Sia E_0 un insieme costituito dal solo elemento elemento di E pósto in corrispondenza con lo 0 ".

"Ammesso poi che esista un sottoinsieme E_k di elementi di E pósto in corrispondenza biunivoca col sottoinsieme finito di naturali $0 , 1 , 2 , ... , k$, si consideri un elemento del sottoinsieme residuo $E - E_k$ e lo si ponga in corrispondenza col naturale $k+1$; si otterrà così un sottoinsieme E_{k+1} di elementi di E pósto in corrispondenza biunivoca col sottoinsieme finito di naturali $0 , 1 , 2 , ... , k+1$ ".

"Di modo che, grazie al principio d'induzione, per ogni naturale n esisterà un sottoinsieme E_n pósto in corrispondenza biunivoca col sottoinieme finito di naturali $0 , 1 , 2 , ... , n$ ".

"A questo punto, il richiesto sottoinsieme numerabile X di E si otterrà facilmente effettuando l'unione di tutti gli insiemi della famiglia $\{E_n\}$ al variare di n in N ".

Sfortunatamente si pone una fastidiosa domanda: con *quale criterio il nostro pur bravo principiante ha "estratto" quell'indispensabile elemento dal generico insieme residuo $E - E_k$?*

È vero che in molti casi, sempre che sia specificato l'insieme E

di partenza, può assegnarsi una precisa norma che consente di determinare quell'elemento; ma noi abbiamo chiesto di dimostrare che in un *qualunque* insieme E infinito esiste un sottoinsieme numerabile! E allora? Allora non vi è risposta, a meno che non si invochi, appunto, l'assioma di ZERMELO. Pertanto i1 teorema or ora dimostrato è un teorema *zermeliano*.

2.3 - *Conseguenze di portata più vasta.*

È inevitabile che a questo punto la Matematica si interroghi su se stessa, quanto meno per valutare le conseguenze di un'assunzione o di un rifiuto dell'assioma della scelta. Ma noi, con... sospetta umiltà, ci fermiamo proprio qui, ribadendo che l'esplorazione di un territorio così insidioso non è prevista né prevedibile in un testo rivolto a non specialisti. Richiameremo tuttavia, ancora una volta, due fra le più importanti conseguenze dell'assioma della scelta, peraltro ripetutamente incontrate:

il *lemma di* KRULL (sugli ideali massimali di un anello unitario); di esso abbiamo già detto che, pur discendendo dall'assioma di ZERMELO, tuttavia non lo implica, e dunque *non gli equivale*;

il *lemma di* ZORN (sugli elementi massimali di un insieme ordinato), che invece *equivale* all'assioma di ZERMELO. Un particolare curioso è che questo lemma, ormai inscindibilmente legato al nome di ZORN, in realtà è dovuto allo stesso ERNST ZERMELO.

Per concludere, avvertiamo che l'*assioma della scelta* interviene nelle teorie matematiche molto più spesso di quanto non ci si renda conto, o almeno di quanto non si dichiari esplicitamente. Ma è anche vero che i risultati delle complesse ricerche, prima di KURT GÖDEL, poi di PAUL COHEN ed altri, hanno stabilito che l'accettarlo o il rifiutarlo non ha alcuna implicazione nei confronti della non-contraddittorietà (*qualora essa sussista*) dei fondamenti della Matematica.

Appendice III

3.1 - *Ultrafiltri e iperreali: un approfondimento.*

Svolgeremo ora alcune succinte considerazioni vòlte a mettere in luce una delle più rimarchevoli (e senza dubbio la più elegante) proprietà della famiglia $O(N)$ [e quindi anche della $O_M(N)$] .

Ecco di che si tratta: nel terzo capitolo abbiamo preso lo spunto dalla famiglia $O(N)$ degli insiemi irrilevanti per introdurre la $S(N)$, *definendo quest'ultima come la sua complementare* ${}^{C}O(N)$ *rispetto all'insieme* $P(N)$ *delle parti del naturale*. Orbene, se denotiamo con X il generico insieme di $O(N)$ e con ${}^{C}X$ il suo complementare rispetto a N , che cosa siamo in grado di dire circa la famiglia di tali complementari?

Più precisamente, pósto

$$Q(N) = \{ \ Y \quad P(N) : {}^{C}Y \quad O(N) \ \} \ ,$$

quale relazione intercorre fra $Q(N)$ e $O(N)$? In effetti, come ora dimostreremo, risulta: $Q(N) = {}^{C}O(N)$, e dunque ${}^{C}O(N) = S(N)$.

A questo scopo occorre e basta far vedere che *condizione necessaria e sufficiente perché riesca* $X \quad {}^{C}O(N)$ *è che sia* ${}^{C}X \quad O(N)$.

E infatti, poiché è $X \cap {}^{C}X = \quad$, se X appartiene a ${}^{C}O(N)$ le proprietà ① e ④ impongono che ${}^{C}X$ appartenga a $O(N)$. Viceversa, assunto ${}^{C}X \quad O(N)$, se fosse $X \quad O(N)$ seguirebbe, per la ⑤ , $N \quad O(N)$, in contrasto con la ② . E ciò prova l'asserto.

Pertanto, *considerare il complementare della famiglia d'insiemi* $O(N)$ *rispetto a* $P(N)$, *o la famiglia dei complementari degli insiemi di* $O(N)$ *rispetto a* N *, è del tutto indifferente.*

È facile rendersi conto che questo fatto, al di là del notevole interesse teorico, fornisce un prezioso strumento per tutta una silloge di dimostrazioni intorno agli ultrafiltri: basti rammentare quelle riguardanti le proprietà ❶ , ❷ , ❸ , ❹ e ❺ della famiglia $S(N)$, delle quali si è ampiamente discusso nel terzo capitolo. Inoltre, come si è detto sempre in quel capitolo, tale strumento si rivela di particolare efficacia nello studio di alcune proprietà degli iperreali direttamente riferibili alle successioni rappresentanti.

Appendice IV

4.1 - *Un accostamento assiomatico al campo iperreale.*

Scopo di questa appendice è di esporre concisamente un modello assiomatico del campo iperreale ispirato alla teoria della misura.

2.1. Sia E un insieme non vuoto, _(E) la famiglia delle parti di E ed m^* una misura esterna su _(E) .

Sotto ovvie e non restrittive assunzioni su m^* la famiglia $O(E)$ dei sottoinsiemi di misura nulla gode delle seguenti proprietà:

a) $m^*(\phi) = 0$;

b) $m^*(E) \neq 0$;

c) F _(E) , G _(E) , $[m^*(F) = 0 \quad G \quad F]$ $\quad m^*(G) = 0$;

d) F _(E) , G _(E) , $m^*(F) = m^*(G) = 0 \quad m^*(F \quad G) = 0$.

In genere, tuttavia, *non* è vero che

e) F _(E) , G _(E) , $m^*(F \cap G) = 0 \quad m^*(F) \quad m^*(G) = 0$.

Se la famiglia $O(E)$ soddisfa anche ad *e)* , essa viene detta "una famiglia di sotto insiemi irrilevanti".

2.2. Il riferimento a una misura esterna aiuta a fornire una giustificazione intuitiva per la definizione introdotta. È chiaro, tuttavia, che noi possiamo considerare le proposizioni *a)* ÷ *e)* in forma assiomatica, postulando che a una generica famiglia $O(E)$ appartenga qualche sottoinsieme di E . Ciò pòrta a considerare una famiglia

$O(E)$ che risponda ai seguenti requisiti:

a') $\phi \quad O(E)$;
b') $E \quad O(E)$;
c') $\quad F \quad E, \quad G \quad E, [F \quad O(E) \quad G \quad F] \quad G \quad O(E)$;
d') $\quad F \quad E, \quad G \quad E, [F \quad O(E) \quad G \quad O(E)] \quad F \quad G \quad O(E)$.

Analogamente, la proprietà *e)* sarà formulata come segue:

e') $\quad F \quad E, \quad G \quad E, [F \quad O(E) \quad G \quad O(E)] \quad F \cap G \quad O(E)$.

Il che equivale alla

e") $\quad F \quad E, \quad G \quad E, F \cap G \quad O(E) \quad [F \quad O(E) \quad G \quad O(E)]$.

Una volta svincolata la nostra trattazione dal concetto di misura esterna, consideriamo la seguente

Definizione. Dato un insieme non vuoto E e una famiglia $O(E)$ di parti di E, diremo che $O(E)$ è "di sottoinsiemi irrilevanti" se essa soddisfa alle seguenti condizioni:

i) $\phi \quad O(E)$;
ii) $E \quad O(E)$;
iii) $[F \quad O(E) \quad G \quad F] \quad G \quad O(E)$;
iv) $[F \quad O(E) \quad G \quad O(E)] \quad F \quad G \quad O(E)$.
v) $F \cap G \quad O(E) \quad [F \quad O(E) \quad G \quad O(E)]$.

In accordo con questa definizione, diremo "rilevanti" tutti i sottoinsiemi di E che *non* appartengono a $O(E)$.

Ora, dato un generico sottoinsieme F di E e detto $E - F$ il suo complementare rispetto ad E, sussiste il seguente

Lemma. F appartiene a $O(E)$ se e soltanto se $E - F$ non appartiene a $O(E)$.

Che è come dire:

$$O(E) = \{ F \quad \_(E) : E - F \quad \_(E) - O(E) \} \ .$$

Dimostrazione. Sia $F \quad O(E)$ e si assuma, per contro, $E - F \quad O(E)$; dato che $E = F \quad (E{-}F)$, la proprietà *iv)* non può che comportare $E \quad O(E)$, in contraddizione con la *ii)* . D'altra parte, sia $E - F \quad \_(E) - O(E)$; visto che, in virtù della *i)* , $(E{-}F) \cap F \quad O(E)$, la proprietà *v)* implica che uno almeno fra $E{-}F$ ed F appartiene a $O(E)$, e questo non può essere che F .

Ciò prova il lemma, che può ora enunciarsi come segue: *un sottoinsieme di* E *è irrilevante se e soltanto se il suo complementare è rilevante*.

Quanto sopra ci permette di desumere il seguente fondamentale risultato:

Teorema. La famiglia $S(E) = \_(E) - O(E)$ di sottoinsiemi rilevanti soddisfa alle seguenti condizioni:

I) $\phi \quad S(E)$;
II) $E \quad S(E)$;
III) $[F \quad S(E) \quad F \quad G] \quad G \quad S(E)$;
IV) $[F \quad S(E) \quad G \quad S(E)] \quad F \cap G \quad S(E)$;
V) $F \quad G \quad S(E) \quad [F \quad S(E) \quad G \quad S(E)]$.

Si omette la dimostrazione, facilmente riconducibile al lemma precedente.
÷
Le proprietà *I)* ÷ *V)* caratterizzano un'importantissima struttura matematica: l'"ultrafiltro".

4.2 - Per costruire il nostro modello, identificheremo ora l'insieme E con quello N dei numeri naturali: e in primo luogo, prenderemo in considerazione un suo generico sottoinsieme finito G . Il complementare $N - G$ d'un siffatto insieme sarà detto "un insieme cofinito". Denoteremo con $F(N)$ la famiglia di tutti i sottoinsiemi di N che siano insiemi cofiniti.

Si verifica facilmente che $F(N)$ soddisfa ai requisiti *I) ÷ IV)* del paragrafo precedente, ma non al requisito *V)* .

Ciò nonostante, è possibile immergere la famiglia $F(N)$ in un'altra $S(N)$, ancora costituita da sottoinsiemi di N e soddisfacente a tutti i requisiti *I) ÷ V)* .

Si tratta di un'interessantissima circostanza, in quanto garantisce, con riferimento a N , l'esistenza di (almeno) un ultrafiltro contenente le parti cofinite di N stesso. Questo risultato, che qui non ci attarderemo a dimostrare, fornisce la chiave d'accesso a un modello assai trasparente del campo iperreale: quello che, appunto, ora illustreremo.

Sia R il campo reale, $R(N)$ la classe di tutte le successioni di numeri reali e $S(N)$ una famiglia di sottoinsiemi rilevanti di N cui appartengano tutti i sottoinsiemi cofiniti. Diamo inoltre la seguente

Definizione. Due successioni di numeri reali $\{ a_n \}$ e $\{ b_n \}$ si diranno "equivalenti secondo ROBINSON" (o anche "R-equivalenti") se i loro termini coincidono in corrispondenza ai naturali di un sottoinsieme appartenente a $S(N)$ (vale a dire, per una famiglia di indici che costituisce un insieme rilevante).

È facile dimostrare che quella così definita è effettivamente una relazione di equivalenza.

Detto R^* l'insieme delle classi in cui la famiglia $R(N)$ (ossia quella di tutte le successioni di numeri reali) viene ripartita facendo ricorso a $S(N)$, si può dimostrare che: l'insieme R^* di dette classi di equivalenza, rispetto alle operazioni naturali di somma e prodotto, costituisce un campo.

Consideriamo la seguente

Definizione. Sia $\underline{a}$ un elemento di R^* e $\{ a_n \}$ una successione rappresentativa di $\underline{a}$, tale che riesca $a_n > 0$ per ogni n di un insieme rilevante di indici. Diremo allora che l'elemento $\underline{a}$ del campo R^* è "positivo", o anche "maggiore di $\underline{0}$ " (con ciò intendendo lo zero di R^*).

Da momento che questa definizione è indipendente dalla scelta del rappresentante $\{ a_n \}$, ne segue che: l'insieme R^* può essere dotato di un ordinamento totale, compatibile con le sue operazioni di campo.

Il campo ordinato R^* cui così si perviene è detto "un campo di numeri iperreali".

Ovviamente R^* contiene un sottocampo R [ ] isomorfo al campo R dei numeri reali. I suoi elementi sono detti "numeri iperreali reali" o, quando non vi sia rischio di ambiguità, semplicemente "reali".

Possiamo anche dimostrare che in R^* vi sono:

1. numeri positivi minori di ogni reale positivo;
2. numeri negativi maggiori di ogni reale negativo;
3. numeri positivi maggiori di ogni reale positivo;
4. numeri negativi minori di ogni reale negativo.

Dimostrazione. Dimostreremo solo il primo enunciato, e cioè quello che garantisce l'esistenza in R^* di "numeri infinitesimi positivi". Sia $\underline{i}$ l'elemento di R^* rappresentato, per esempio, dalla successione $\{ i_n \} = 1 , 1/2 , 1/3 , \dots , 1/n , \dots$, con n crescente in $N-\{0\}$. L'insieme di indici $N-\{0\}$, in quanto cofinito, è rilevante; e pertanto $\underline{i}$ è un iperreale positivo.

D'altro canto, quale che sia il reale positivo x , riesce $1/n < x$ per ogni n maggiore di un fissato n_x dipendente da x , di modo che ciascun termine della successione $\{ x-1/n \}$ è maggiore di 0 su di un insieme d'indici cofinito, e pertanto rilevante.

Dunque l'iperreale $x - \underline{i}$, di cui tale successione è un rappresentante, non può che essere positivo. Ma x è arbitrario, e pertanto l'asserto è provato.

Questo legittima le nozioni di "numero infinitesimo", "numero finito" e "numero infinito". Inoltre, per ogni iperreale finito a' , esiste uno e un solo iperreale reale $\underline{a}$ infinitamente vicino a quello, cosicché la differenza $a'-\underline{a}$ è infinitesima. È su questo che si basa la seguente:

Definizione. Sia $\underline{a}'$ un numero iperreale finito. Chiameremo "parte standard" di $\underline{a}'$, e la denoteremo con la scrittura $\mathrm{st}(\underline{a}')$, l'iperreale reale $\underline{a}$ infinitamente vicino ad $\underline{a}'$.

La differenza $\underline{a}'-\mathrm{st}(\underline{a}')$ è detta "parte infinitesima" di $\underline{a}'$.