UNIVERSITETI I PRISHTINËS
FAKULTETI I SHKENCAVE MATEMATIKE-NATYRORE

PUNIM DIPLOME

Tema: Historia e trigonometrisë nga lashtësia deri në mesjetë

Mentori:
Dr.sc. Emrush GASHI, prof.

Kandidati:
Armend SHABANI

Prishtinë, dhjetor, 2003

PËRMBAJTJA

HYRJE

Është vështirë që historia e një dege të matematikës e madje edhe historia e një pjese të asaj dege të matematikës të kondensohet dhe të përfshihet në një punim diplome prej afro 35 faqesh. Kjo vështirësi na përcolli edhe gjatë punimit të kësaj diplome.

Që të tejkalohej kjo vështirësi duhej ndalur vetëm në idetë kyçe dhe personalitetet që sollën deri te zhvillimi i kësaj lëmie dhe duke minimizuar hapësirën për zhvillimet tjera të cilat i konsideruam dytësore. Në këtë rast detajet bibliografike duhej të kufizoheshin në masë, mbase disa matematicientë që kontribuan, ose u tejkaluan ose u përmendën duke u tejkaluar. Mbase tejkalimi dhe kufizimi më i madh u bë ndaj referimit të atmosferës së përgjithshme kulturore dhe shoqërore në të cilën u zhvillua matematika.

Gjatë punimit të diplomës, në të shumtën e rasteve u jemi referuar burimeve të ”*dorës së dytë*” e madje në disa raste duhej t'u referoheshim edhe burimeve më të ”*largëta*” nga origjinali. Kjo, për arsye të mungesës së literaturës origjinale.

Nga parimet bazë që u shfrytëzuan gjatë punimit të diplomës veçojmë:

- theksimi i elementeve kyçe të zhvillimit të trigonometrisë,
- përshkrimi i origjinës së disa nga nocionet kryesore,
- krahasimi i mendimeve të autorëve të ndryshëm të cilët u morën me historinë e trigonometrisë, qoftë në mënyrë direkte apo indirekte.

Gjatë prezentimit të punimit do të vërejmë se ky punim nuk ka të bëjë me elementet e trigonometrisë (si shkencë) për të cilën dijmë se ka shumë libra, por punimi nuk paraqet as histori gjithpërfshirëse të trigonometrisë, për të cilën pothuajse jo vetëm në gjuhën shqipe, por edhe në gjuhët tjera nuk ka fare ose ka vetëm në numër të vogël.

Ky ishte një element tjetër që vështirësoi punën, sepse duhej shfrytëzuar shumë punime e në disa raste vetëm në fund të veprës kuptohej se në të kishte pak ose nuk kishte fare elemente të historisë së trigonometrisë.

Pastaj mënyra se si kjo pjesë trajtohej nga autorët e ndryshëm paraqiste vështirësi në kontekst për të vendosur nëse të studiohej trigonometria në kuadër të ndonjë civilizimi dhe kulture, apo në kuadër të një periudhe apo edhe opcioni i tretë, që historia e saj të studiohej sipas vetë rezultateve të arritura në këtë lëmi. Në fund u përcaktuam për të punuar në drejtimin i cili do të përfshinte të tri elementet; pra trigonometrinë si pjesë të aktiviteteve të civilizimeve kulturore të ndryshme, sipas periudhës dhe sipas rezultateve të arritura në këtë lëmi.

Kuptohet se në këtë rast duhej të kufizoheshin vetëm në disa etapa dhe vetëm në disa rezultate.

Sa i përket kulturave, civilizimeve dhe periudhave, punimi përfshin studimin e historisë së trigonometrisë së lashtësisë, asaj greke, induse dhe trigonometrinë islame.

Sa i përket rezultateve, dihet se tri zhvillime më shumë se të tjerat kanë luajtur rol fundamental në zhvillimin e trigonometrisë.

- *tabela e kordave e Ptolemeut*,
- *teorema e Moivrit* dhe *formula e Eulerit*

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

ku trigonometria bashkohet me algjebrën dhe analizën,

- *teorema Fourie.*

Në këtë punim do të analizojmë *Tabelën e Kordave të Ptolemeut* dhe rezultatet që lidhen me të.

Megjithqë punimi në një mënyrë plotëson një boshllëk në këtë lëmi, konsiderojmë që ende mbetet shumë për t'u bërë në mënyrë që të ndriçohet zhvillimi historik i trigonometrisë.

Në fund, në radhë të parë falënderojë Zotin që më ka mundësuar të punoj këtë punim. Po ashtu falënderoj familjen për të gjitha llojet e përkrahjës që më ofruan gjatë tërë kohës së studimeve. Me këtë rast profesorëve të nderuar Dr.sc. Emrush Gashi, Dr.sc.Ramadan Zejnullahu dhe Ramadan Limani, të cilët me sugjerimet e tyre kanë ndihmuar në ngritjen e kualitetit të punimit, i shpreh falënderimet më të sinqerta dhe mirënjohjet më të thella.

Mbetemi me shpresë se përkundër të gjitha kufizimeve dhe vështirësive të sipërpërmendura, kemi arritur të japim një përshkrim modest të trendeve kryesore në zhvillimin e trigonometrisë.

PARATHËNIE

Trigonometria është degë e matematikës që merret me zgjidhjen e trekëndëshave duke përdorur funksionet trigonometrike. Ka zbatim jashtëzakonisht të madh në inxhinieri, arkitekturë, navigim dhe astronomi. Ndahet në trigonometrinë plane (që merret me trekëndëshat në plan) dhe atë sferike (që merret me trekëndëshat sferikë). Funksionet trigonometrike gjithashtu luajnë rol në analizë dhe përdoren për të paraqitur valët dhe fenomenet e tjera periodike.

Fjala *trigonometri* rrjedh nga fjala greke *Tri-gono-metry* që do të thotë matje e trekëndëshit. Megjithatë kjo nuk do të thotë se fillimet e trigonometrisë paraqiten në Greqi. Ato së pari paraqiten në Egjipt dhe Mesopotami (Iraku i sotshëm, vendi mes lumenjëve Tigri dhe Eufrati, ndërsa Babiloni ishte qytet në Mesopotami, afro 100 km në jug të Bagdadit të sotshëm). Një nga faktet që dëshmon këtë është tabela e gurit nga Babilonia (v.1800 – 1600 p.e.s.), në të cilën janë dhënë raportet që janë ekuivalente me $\operatorname{cosec}^2\alpha$.

Papirusi Egjiptas i Rhind-it nga (v. 1650 p.e.s.) është një dëshmi tjetër për këtë. Ai përmban probleme në të cilat raportet e brinjëve të trekëndëshit aplikohen tek piramida. Ajo që vlen të theksohet është se as Egjiptasit e as Babilonasit nuk kishin konceptet e tanishme për matjen e këndeve dhe raportet e sipërpërmendura konsideroheshin si veti të trekëndëshit e jo të këndeve.

Deri në paraqitjen e matematikës greke, nuk pati punime nga lëmi i trigonometrisë.

. . .

Gjeometria greke paraqet një ndër të arriturat më të madhe të intelektit njerëzor si nga aspekti matematik, poashtu edhe nga ai historik, si nga ana praktike ashtu edhe nga ajo estetike. "*Koha e saj e artë*" shtrihet nga Talesi i Miletës[1] afro 600 vite p.e.s. deri në shekullin e dytë p.e.s. me punimet e *Eratostenit*, *Apolonit* dhe *Arkimedit* të pakrahasueshëm.

Matematika e hershme greke, (e poashtu edhe trigonometria greke), si qëllim kryesor kishte të kuptuarit e pozitës së njeriut në univers sipas një sistemi racional. Përmes matematikës ata u munduan që në kaos të vendosnin rregulla dhe që idetë t'i rregullonin sipas një zinxhiri logjik.

Më pastaj vazhdoi ajo që quhet "*periudha e argjendtë*" e cila vazhdoi gjer në vitet 300 të erës sonë.

Ajo çka e bëri gjeometrinë greke të artë dhe argjendtë sipas historianit të matematikës greke *Irol Thomas* janë:

---

[1] Talesi që konsiderohet "*baba*" i matematikës tradicionale greke, gjatë pjesës së parë të shekullit VI para erës sonë vizitoi Babiloninë dhe Egjiptin. Mbase atje do të ketë parë zhvillimin e matematikës të cilën do ta sjell në Greqi.

- rigoroziteti logjik impresionues që grekët e zbatuan gjatë vërtetimit të teoremave,
- natyra e "*pastër*" gjeometrike e matematikës së tyre për dallim prej asaj numerike si dhe,
- organizmi i shkathtë i tyre në paraqitjen dhe zhvillimin e pohimeve matematike[2].

Gjersa civilizimet e Egjiptit dhe Mesopotamisë, shfrytëzonin gjeometrinë në ndarjen e tokës dhe ndërtimit të piramidave, grekët ishin të parët që u morën me *teorema gjeometrike* dhe që të parët vërtetuan *pohimet* me rigorizitet logjik.

Sukseset dhe rezultatet vazhduan me Hiparkusin (Hipparkus-140 p.e.s.) i cili punoi një tabelë të kordave. Këtë tabelë ai e shfrytëzonte për zgjidhjen e trekëndëshit. Kjo është një nga tabelat pararendëse të tabelave moderne të sinusëve.

Me kalimin e kohës, në Greqi paraqiten edhe shkencëtar të tjerë të cilët me punimet e tyre arritën rezultate nga lëmi i trigonometrisë dhe me këtë krijuan emër në shkencën e matematikës.

Ndër ta ishin: *Menelausi i Aleksandrisë* (*Sphaerics*, v. 100 e.s.) i cili i pari përdori trekëndëshat sferik dhe paraqiti elemente të *trigonometrisë sferike* dhe *Ptolemeu* (*Almagest* v. 140 e.s.) njehsoi kordat e këndeve në mes të $\left(\frac{1}{2}\right)^{\circ}$ dhe 180° në intervalet $\left(\frac{1}{2}\right)^{\circ}$. *Ptolemeu* poashtu "*hulumtoi*" identitetet trigonometrike.

Trigonometria greke më vonë u zhvillua nga matematikanët hindus, të cilët kryen përparime duke zëvendësuar kordat e përdorura nga grekët me gjysmë korda të rrathëve me rrezen e dhënë, ekuivalente me sinusin e sotëm. Tabelat më të hershme të tilla gjenden në *Siddhantas* (*Sistemet e astronomisë*) të shekujve 4 dhe 5 të e.sonë.

Përveç rezultateve në lëmin e trigonometrisë që u arritën në Greqi, edhe shkencëtarët në Indi arritën rezultate që ndikuan në zhvillimin e matematikës në përgjithësi dhe të trigonometrisë në veçanti.

Më vonë në shekullin VIII, astronomët musliman shfrytëzuan rezultatet e arritura në Greqi dhe në Indi dhe deri në shekullin X kompletuan rezultatet për vlerat e funksionit *sinus* dhe të pesë funksioneve të tjera, pastaj vërtetuan disa teorema themelore të trigonometrisë si për rastin e trekëndëshit në rrafsh ashtu edhe të atij sferik. Shkencëtarët musliman për herë të parë përdorën *trekëndëshin polar* për *trekëndëshin sferik*. Vlen të ceket se tabelat e tyre ishin të një saktësie të madhe. Po përmendim këtu astronomin e madh *Nasir ad Dīn al Tūsī* i cili shkroi librin *Studim i figurave transverzale* i cili paraqet trajtimin e parë të trigonometrisë në rrafsh dhe të asaj sferike si shkencë të pavarur matematike.

Nëpërmjet kulturës islame, perëndimi u njoh me thesarët e matematikës së lashtësisë por edhe me veprat e shkencëtarëve muslimanë. Për këtë po i referohemi librit nën [7] "…në zgjimin matematik të Europës, që fillon aty nga shekulli XI ka luajtur rolin e vet edhe njohja me qytetërimin islamik. Se sa e etur ishte Europa për dijet shkencore,

---

[2] Autori i librit [15] citon nga Irol Thomas, *Greek Mathematical Works*, Vëllimi 1, Loeb Classical Library, Cambridge, MA, 1967 p.p. viii-ix.

bartës të të cilave ishin arabët, e rrëfen fakti se kur më 1085 maurët u dëbuan nga Toledoja, aty u vërsulën turma të tëra studentësh nga vendet europiane për të mësuar shkencën e arabëve. Nisi përkthimi masiv në gjuhën latine i dorëshkrimeve shkencore arabe, nëpërmjet të cilave Europa shikoi punimet klasike të matematikës dhe veprat më të shquara të vetë arabëve. I njohu dhe jo vetëm u mrekullua, por e kuptoi që nuk mund të ndërtohej kurrsesi një kulturë serioze shkencore pa përvetësuar thesarin matematik të trashëguar nga bota e lashtë dhe lindja". Për ata që janë të interesuar për "*rrezatimin e fuqishëm grek nëpër shekuj*" [7] ofron të dhëna interesante, kurse [9] shpalon një pjesë të panjohur për shumkë, të rezultateve të arritura në "*kohën e artë islame*" periudhë kjo që ndryshe njihet si "*errësira mesjetare europiane*".

Trigonometria bëhet shkencë plotësisht e ndarë nga astronomia me librin *De Triagulis Omnimodus Libri Quinque*, shkruar nga *Johannes* Müller nga Königsbergu i njohur me pseudonimin *Regiomontanus* në vitin 1464 i cili doli nga shtypi në vitin 1533. Në këtë libër paraqitet hyrje komplete në trigonometri që dallon nga tekstet e tanishme vetëm në faktin që notacioni i sotëm nuk ekziston në të. Përmban *teoremën e sinusit* për *trekëndëshin sferik*.

Ndonëse cekëm më parë se përpjekjen më të hershme dhe rezultatet e para në këtë aspekt i ka arritur *Nasīr* al-*dīni* në shekullin XIII, por përpjekja dhe rezultati i *Regiomontanus*-it ishte më i lartë. Mbase "*largësia në kohë*" mund ta arsyetojë këtë.

Pas kësaj kohe trigonometria fillon të zbatohet edhe në algjebër në njehsimin e rrënjëve të barazimeve të ndryshme.

Sa i përket shkencëtarëve më të hershëm të Europës që u morën me punime nga lëmi i trigonometrisë, po e përmendim *Johan Müller*. Pastaj matematicienti françez *François Viète* kontribuoi me rezultatet e tij mbi *trekëndëshin polar* në *trigonometrinë sferike* dhe paraqiti formulat e funksioneve të këndeve të shumëfishta, $\sin(nq)$ dhe $\cos(nq)$ të shprehura përmes $\sin q$ dhe $\cos q$. Meqë jemi tek *Viète*, po cekim se me të trigonometria bëhet analitike.

Në lëminë e trigonometrisë kontribuoi edhe *John Napier* i cili më parë, në shek. XVII i pari kishte "*zbuluar*" *logaritmet*. Ai paraqiti dhjetë pohime për zgjidhjen e trekëndëshit sferik dhe disa relacione të njohura si *Analogjitë e Napier-it* për zgjidhjen e trekëndëshit sferik këndngusht.

Saktësisht gjysmë shekulli pas publikimit të logaritmeve nga *Napier-i*, *Isak Njutni* (*Isaac Newton*) "*zbuloi*" *njehsimet diferenciale dhe integrale*. Esenca e punës së tij me këtë rast ishte paraqitja e funksioneve të ndryshme në formë të serive të pafundme të shprehura në funksion të fuqive të x-it. Kështu *Newton-i* paraqiti seritë $\sin x$, $\cos x$ dhe $\mathrm{tg} x$. Me paraqitjen e *njehsimeve diferenciale dhe integrale*, funksionet trigonometrike "*futen*" në analizë ku edhe sot e kësaj dite vazhdojnë të luajnë rol të rëndësishëm si në matematikën aplikative ashtu edhe në atë teorike. Përfundimisht, në shek.XVII matematikani zvicerran *Leonhard Euler*[3] definoi *funksionet trigonometrike të numrave kompleks*. Duke zbatuar "*trigonometrinë komplekse*", vërtetohet një nga formulat fascinuese të matematikës

[3] Përdorimi sistematik i rrezes 1, dhe me këtë koncepti i *sinusit*, *tangjentit* dhe shënimet që përdorim sot në trigonometri datojnë nga *Euleri* (1748).

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

e cila në vete ngërthen konstantat më të rëndësishme të matematikës: $0, 1, \pi, e, i$.

Ky punim nuk do të trajtojë të gjitha periudhat e zhvillimit të trigonometrisë por vetëm ato që kanë të bëjnë *me trigonometrinë e lashtësisë, atë greke*, *indiane* dhe *trigonometrinë islame*.

Me formulën e *Muavrit* paraqitet trigonometria imagjinare dhe tani barazimi $\sin x = 2$ kishte zgjidhje. Dhe në fund *Fourie*, me seritë trigonometrike do t'i jap trigonometrisë atributet e një dege moderne dhe shumë të aplikueshme.

1. FILLIMI I TRIGONOMETRISË

Matematika nuk njeh për raca ose kufij gjeografik; për matematikën, bota e kulturuar është një vend.

David Hilbert

Në vitin 1858, juristi Skoces dhe koleksionisti i gjësendeve antike, *A. Henry Rhind* (1833–1863) në një nga udhëtimet e tij në luginën e Nilit, mori një dokument që ishte gjetur disa vite më parë në gërmadhat e një ndërtese të vogël në Thebes (afër Luxor-it të sotëm) në Egjiptin e epërm. Ky dokument i cili prej asaj kohe njihet si *Papirusi i Rhindit*, është përmbledhje e 84 problemeve matematike që kishin të bënin me *aritmetikë*, *algjebër elementare* dhe *gjeometri*[4]. *Papirusi i Rhindit* (*Papyrus Rhind*) i shkruar diku rreth vitit 1650 p.e.s. paraqet dokumentin më të pasur në aspektin historik. Karakteristikë kryesore e tij është se përmban materiale shumë më të vjetra se sa koha kur janë shkruar.

Pas vdekjes së hershme të Rhindit, papirusi u bë pronë e *Muzeut Britanik* (British Museum) ku gjendet edhe sot[5]. Ajo çka ne do të theksojmë për të, është se është shkruar nga *Ah-mose* i njohur më tepër si *Ahmes*.

Por siç edhe Ahmosi shkruan në parathënien e tij, kjo nuk ishte puna e tij. Ai e kishte përshkruar atë nga një dorëshkrim i vjetër.

Për këtë punim diplome me rëndësi është problemi 56.

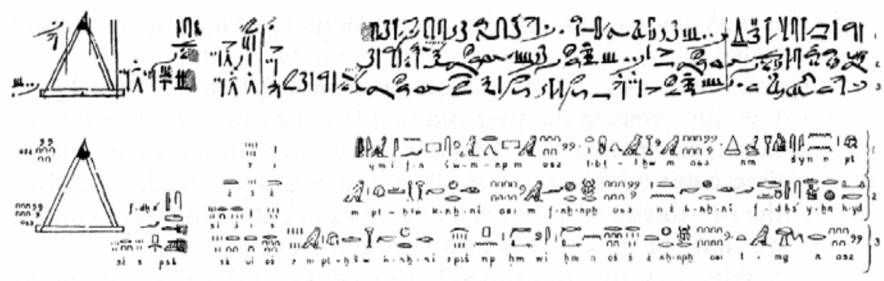


Figura 1. Problemi 56 i Papirusit të Rhindit

Ky problem[6] merret me monumentet më të famshme Egjiptase *Piramidat*.

Le të shohim problemin.

---

[4] Vlen të përmendet se papirusi përmbante edhe tri fragmente që nuk kishin të bënin me matematikë, dhe disa autor këtyre pjesëve u referohen si problemet 85, 86, 87.

[5] Për detaje tjera për *Papirusin e Rhindit* shih [18], fq. 3-11.

[6] Të të njëjtës natyrë janë edhe problemet 57, 58, 59, 60.

Problemi 56: "Nëse piramida është 250 *kubits* (cubits) e lartë kurse brinja e bazës së saj është e gjatë 360 *kubits*, sa është *sekedi* i saj?

Në këtë problem paraqiten dy "*probleme*" gjuhësore. Çfarë është *kubits*? Dhe çka është *sekedi*? Qartë se i pari paraqet njësi të matjes egjiptase të kohës kur u shkrua problemi, kurse në vijim do të kuptojmë domethënien e fjalës *seked.*

Zgjidhja e Ahmesit.

Merre $\frac{1}{2}$ e 360; bëjnë 180. Shumëzo 250 me diçka që të merret 180; bëjnë $\frac{1}{2}\ \ \frac{1}{5}$ $\frac{1}{50}$ e një *kubiti*. Një *kubit* është 7 *palma*. Shumëzo 7 me $\frac{1}{2}\ \ \frac{1}{5}\ \ \frac{1}{50}$:

1	7		
$\frac{1}{2}$	3	$\frac{1}{2}$	
$\frac{1}{5}$	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{15}$
$\frac{1}{50}$		$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{25}$.

Kështu *Sekedi* është $5\frac{1}{25}$ *palma* (që është: $\left(3+\frac{1}{2}\right)+\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{15}\right)+\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{25}\right)=5\frac{1}{25}$).

Le të analizojmë zgjidhjen.

Qartë se $\frac{1}{2}$ e 360 është 180 dhe kjo paraqet gjysmën e brinjës së bazës katrore të piramidës.

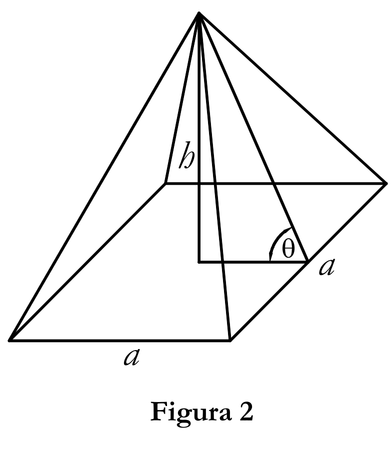


Figura 2

Pastaj kemi: "Shumëzo 250 me diçka që të merret 180" d.m.th. në notacionin tonë është $250\cdot x=180\Rightarrow x=\frac{180}{250}=\frac{18}{25}$.

Por, meqë *matematika egjiptase* kërkonte përgjigjet në formë thyesore, atëherë

$$\frac{18}{25} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{50}.$$

Ky numër, paraqet raportin e gjysmëbrinjës së bazës dhe lartësisë së piramidës.

Në fakt "*sekedi*" që Ahmesi e njehsoi është kotangjenti i këndit që formon baza e piramidës dhe faqja e saj.[7]

Tabela më e hershme trigonometrike *Plimton 322* i takon periudhës së Babilonisë së vjetër të dinastisë së Hamurabëve (1800 – 1600 p.e.s) dhe paraqet një dokument tjetër të lashtë.

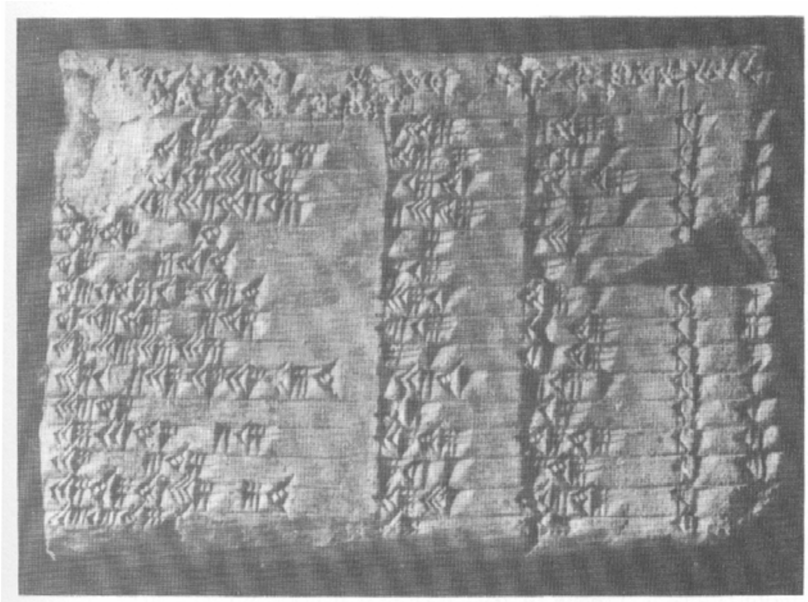


Figura 3. Tabela *Plimton* 322

Një analizë e bërë kësaj tabele tregon se në të shqyrtohen *treshet e Pitagorës* (numrat e plotë *a*, *b*, *c* të tillë që $c^2 = a^2 + b^2$)[8].

Ajo çka e bënë këtë tabelë "*trigonometrike*" është fakti se në të një rëndësi e veçantë i kushtohet raportit $\frac{c}{a}$ e që dijmë se në trekëndëshin kënddrejtë ky raport paraqet kosekantin (cosec) e këndit α, ku α është këndi pranë kulmit A.

Faktet që në detyrën 56 të *Papirusit të Rhindit* dhe në tabelën *Plimton 322* përdoret një funksion trigonometrik nuk na lejon që mënjeherë të konkludojmë se Egjiptasit apo Babilonasit e zbuluan trigonometrinë. Mbase më e logjikshme do të ishte që atyre t'iu atribuohet merita për "*para-trigonometrinë*", fjalë kjo që më tepër i përshtatet kohës dhe rezultateve 2000 vite para se grekët të fillojnë ta transformojnë këtë lëmi në mjet të fuqishëm të matematikës së aplikuar.

[7] Për arsyet se pse dhe si kjo madhësi (*seked*) zbatohej në praktikë, shih [18].

[8] Ky paraqet një nga faktet e shumta që *teorema e Pitagorës* njihej mijëra vjet para *Pitagorës*, shih [18] fq.30-34

2. TRIGONOMETRIA GREKE

2.1 FILLIMI I TRIGONOMETRISË NË GREQI

> ***Të ashtuquajturit Pitagorasit, që ishin të parët që u morën me matematikë, jo vetëm që e zhvilluan këtë lëmi, por ata u "ushqyen" me të, ata mendonin që parimet e matematikës janë parime të të gjitha gjërave.***
>
> *Aristoteli*

Problemet e parashtruara nga *Plato*, *Apoloni* e të tjerët e që kryesisht kishin të bënin me astronominë ([1], fq.136-142) mbetën pa zgjidhje.

Arsyeja kryesore qëndronte në mungesën e aparatit trigonometrik.

Hiparkusi (*Hipparchus* 190 – 120 para erës sonë (shkurt p.e.s)) nga *Bithunia* që kreu vrojtime sistematike të pozitave të planetëve, pastaj paraqiti sistemin koordinativ për sferën e yjeve, filloi të merret edhe me njehsime trigonometrike të domosdoshme për zgjidhjen e trekëndëshit kënddrejtë. Për të kryer njehsimet që i nevojiteshin, Hiparkusit i nevojitej tabela e raporteve trigonometrike. Meqë tabelat e tilla nuk ekzistonin ai duhej t'i punonte ato vet.

Pak nga ajo që ai kontribuoi erdhi tek ne, gjersa burimi kryesor i njhurisë sonë për të arriturat e tij erdhi përmes *Ptolemeut*, i cli jetoi tre shekuj më vonë.

Ajo çka me keqardhje duhet të thuhet është fakti se që të 12 librat mbi *njehsimin e kordave* që shkroi *Hiparkusi* kanë humbur.

Për të studiuar pozitën e yjeve dhe planeteve, nevojitej njësia matëse për harqe dhe kënde, si dhe metoda për të përcaktuar pozitën e trupit (në këtë rast yjeve dhe planetëve në *sistemin sferik koordinativ*).

Kështu p.sh. *Euklidi*[9] si njësi matëse të këndit e konsideronte këndin e drejtë. Këndeve të tjerë ai iu referohej si shumëfish ose nënfish të këndit të drejtë. Babilonasit, diku afro 300 vite p.e.s. e ndanin perimetrin e rrethit në 360 pjesë të quajtura *shkallë*, ku çdo *shkallë* kishte 60 *minuta* dhe çdo *minutë* përbëhej nga 60 *sekonda*.

---

[9] *Euklidi* ndonëse punoi punime të ndryshme nga matematika, emri i tij lidhet ngusht me *Elementet*, një punim sistematik të matematikës gjeratëhershme greke. *Elementet* është e ndarë në 13 libra dhe përmban 465 pohime të *gjeometrisë* dhe *teorisë së numrave*. Nga shumë matematikanë konsiderohet si teksti më i rëndësishëm i matematikës i të gjitha kohërave. Ajo çka bënë *Elementet* dhe me të edhe *Euklidin* aq të rëndësishëm është zhvillimi logjik i saj duke filluar nga parimet më të thjeshta deri te rrjedhimet e sofistikuara. *Euklidi* e filloi Librin I me 23 definicione ashtu që lexuesi ta kishte të qartë se çka nënkuptonin termat e përdorura. Ai paraqiti 5 postulate (pa vërtetime ose arsyetime, ato thjesht duhej të pranoheshin) që shërbenin si bazë të gjeometrisë së tij, pra si pikënisje për çdo gjë që do të rrjedh më pastaj.

Është interesante të ceket se ende nuk dihet pse Babilonasit e ndanin rrethin në 360°. Por në këtë aspekt ekzistojnë hipoteza të ndryshme si:

- 360 plotëpjestohet me shumë numra të vegjël të plotë gjë që lehtëson llogaritjet,
- është numër i afërt i "*rrumbullakësuar*" me numrin e ditëve të vitit,
- për shkak se dielli lëviz për 1° në *ekliptikë*[10] gjatë çdo dite.

Përveç arsyeve të sipërpërmendura, autori i librit [18] mendon se një arsye tjetër mund të ketë qenë fakti se rrethi mund të ndahet në (6) gjashtë pjesë dhe secila prej tyre formon kordë të barabartë me rrezen e rrethit.

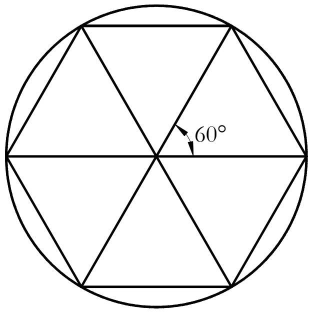


Figura 4

Por një gjë është më se e sigurtë: mungojnë faktet për të përkrahur këto hipoteza dhe mbase origjina e sistemit "360 shkallë" mund të mbetet përherë e panjohur.

Sidoqoftë, sistemi përshtatej me sistemin numerik babilonas e që ishte sistemi seksagecimal (me bazë 60), i cili më vonë do të adaptohet nga grekët dhe do të përdoret edhe nga *Ptolemeu* në tabelën e tij të kordave.

Ndonëse sot sistemi numerik me bazë 60 është i papërdorshëm, ndarja e rrethit në 360 pjesë të barabarta ka mbijetuar jo vetëm në matjen e këndeve por edhe në ndarjen e orës në 60 minuta dhe minutës në 60 sekonda.

Sa i përket fjalës shkallë ajo daton nga grekët. Sipas historianit të njohur të matematikës *David Eugene Smith*, grekët përdornin fjalën μοιρα (moira), të cilën arabët e përkthyen në fjalën daraja dhe pastaj kjo fjalë shndërrohet në latinisht de gradus, prej nga në gjuhën angleze merret degree...

Kohëve të fundit si njësi matëse e këndeve merret radiani. Sipas përkufizimit:

Këndi me kulm në qendër të rrethit, gjatësia e harkut të të cilit është e barabartë me rrezen e rrethit është 1 radian. Lehtë tregohet se 1 radian = 57.29°.

Sa i përket fjalës radian ajo është e vonshme. Atë e përdori i pari në vitin 1871 Johan Thomson, vëllau i fizikantit të famshëm Lordit Kelvin (Willian Thomson).

Ajo çka do të mbetet e panjohur do të jetë konventa për të matur këndin në drejtim të kundërt të akrepave të orës.

---

[10] Shih [14], fq.25-26. Me këtë rast po cekim se të gjitha kuptimet nga astronomia që nuk përmenden në fusnota gjenden në [14].

Figura 5. Ora me drejtim të kundërtë të akrepave të orës

Hiparkusi si njësi matëse të harkut përdori harqe që i përgjigjeshin 1/24 (të perimetrit të rrethit) dhe 1/48, dhe quheshin "*hapa*" ose "*gjysmë hapa*".

Elementi themelor i trigonometrisë së *Hiparkusit* (e më vonë edhe të *Ptolemeit*) ishte korda e që i përgjigjet harkut të dhënë (ose këndit qendror) në rrethin me rreze të dhënë.

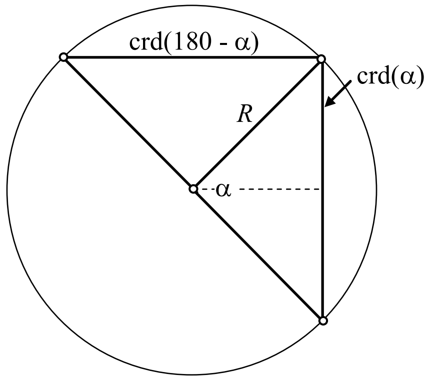


Figura 6

Që të dy punuan tabela me rezultatet për këndin α dhe kordën e tij crd(α) për vlera të ndryshme të harkut të këndit α. Duhet të kemi parasysh se korda (α) (ose crd(α)) është gjatësi. Nëse me R shënohet rrezja e rrethit, atëherë korda shprehet me barazimin $\mathrm{crd}(\alpha) = 2R \cdot \sin\frac{\alpha}{2}.$

Meqë këndet dhe harqet mateshin në shkallë dhe minuta, *Hiparkusi* vendosi që të përdorë të njëjtat njësi për rrezen e rrethit. Duke ditur se perimetri i rrethit është $2\pi R$ dhe duke marrë për vlerë të përafruar të π-së 3;80,30 me ç'rast është përdorur sistemi numerik me bazë 60, (rezultat ky që gjendet mes dy vlerave të *Arkimedit* $3\frac{10}{71}$ dhe $3\frac{1}{7}$ - për më tepër për *Arkimendin* dhe kontributin e tij shih [7] fq.83-113 si dhe [1] fq.102-116) ai e njehsoi rrezen R – si vijon:

$$R = \frac{60 \cdot 360}{2 \cdot \pi} = 57{,}18 = 3438'.$$

Për të njehsuar kordat e ndryshme *Hiparkusi* filloi me këndin 60°.

Në këtë rast korda është e barabartë me rrezen. Pra,

$$\text{crd}(60^{\circ}) = 3438' = 57{,}18\,.$$

Për këndin 90°, korda është baraz me $R\sqrt{2} = 4862' = 81{,}2$.

Për të njehsuar kordet e këndeve tjerë, *Hiparkusi* shfrytëzoi dy rezultate nga gjeometria të njohura për të. Së pari nga figura 6 është e qartë se

$$\text{crd}(180^{\circ} - \alpha) = \sqrt{(2R)^2 - \text{crd}^2(\alpha)}.$$

Pastaj, *Hiparkusi* njehsoi $\text{crd}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ me formulat për gjysmëkëndin. Për këtë le t'i referohemi figurës 7.

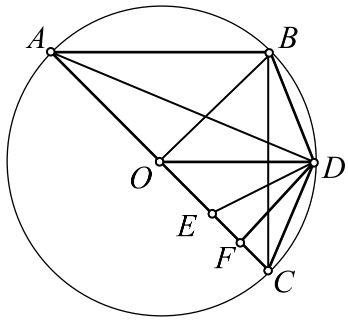


Figura 7

Le të supozojmë se këndi $\alpha = \angle BOC$ është ndarë në dy pjesë të barabarta nga *OD*. Për të shprehur $\text{crd}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ në funksion të crd(α) = *BC* në *AC* caktojmë pikën *E* ashtu që *AE* = *AB*. Atëherë trekëndëshi *ABD* është kongruent me trekëndëshin *AED*. Meqë *BD* = *DC* rrjedh se *DC* = *DE*. D.m.th. trekëndëshi *CDE* është barakrahës.

Le të jetë *F* në *AC* e tillë që *DF* të jetë normale në *EC*, atëherë:

$$CF = \frac{1}{2}CE = \frac{1}{2}(AC - AE) = \frac{1}{2}(AC - AB) = \frac{1}{2}(2R - \text{crd}(180^{\circ} - \alpha)).$$

Gjithashtu trekëndëshat *ACD* dhe *DCF* janë të ngjashëm, d.m.th.

$$AC : CD = CD : CF.$$

Kështu që $\text{crd}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = CD^2 = AC \cdot CF = R(2R - \text{crd}(180^{\circ} - \alpha)).$

Ky rezultat në shënimet e sotme do të shënohej

$$\left(2R\sin\frac{\alpha}{4}\right)^2 = R\left(2R - 2R\cos\frac{\alpha}{2}\right)$$

ose duke zëvendësuar α me 2α do të kemi

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}.$$

Kështu *Hiparkusi* mund të njehsonte kordën për çdo kënd prej $\left(7\frac{1}{2}\right)^\circ$ deri në 180° duke u bazuar në "*gjysmë hapat*" $\left(7\frac{1}{2}\right)^\circ$.

Kontribut në lëmin e trigonometrisë dha edhe *Klaudius Ptolemeu* (*Claudius Ptolemy*, 100 – 178. e.s). Një nga punimet më të vlefshme të *Ptolemeut* në lëminë e trigonometrisë ishte vepra "*Mbi madhësinë e kordave të brendashkruara në rreth*", punim ky i cili u përfshi në veprën *Syntaxis Mathematica* (*Përmbledhje matematike*), vepër e cila përbëhet nga 13 libra dhe kështu të përkujtojnë *Elementet e Euklidit*[11] që paraqesin kulminacionin e astronomisë greke. Për kuriozitet po cekim se me shekuj kjo vepër është quajtur *Magisti syntaxis* (*Përmbledhja më e madhe*). Më pastaj shkencëtarët islamik filluan ta quajnë *al-magisti* dhe që atëherë njihet me emrin *Almagest*. Përveç *Almagestit*, *Ptolemeu* më shumë sot njihet si themelues i *sistemit gjeocentrik* sipas të cilit toka është e palëvizshme dhe gjendet në qendër të gjithësisë dhe se planetët tjerë lëvizin përreth tij. Shumë pjesë nga vepra e rëndësishme e *Ptolemeut*, *Almagesti* mund t'i dedikohet *Hiparkus*-it, në veçanti ajo që ka të bëjë me përdorimin e rrathëve ekscentrik dhe epicikloideve për të përshkruar lëvizjen e diellit, hënës dhe planeteve. Poashtu shumë ide që gjenden në të rrejdhin nga astronomët babilonas. Në *Almagest* gjendet *formula për sinusin dhe kosinusin e shumës dhe ndryshimet të dy këndeve*, poashtu elementet hyrëse të *trigonometrisë sferike*.

Almagesti paraqet në një mënyrë versionin e korrektuar dhe të zgjeruar të tabelës së kordave të *Hiparkus-it* duke i bashkangjitur edhe përshkrimin se si është konstruktuar tabela.

Para se të fillojmë të analizojmë punën e *Ptolemeut*, po përmendim se një numër i madh i shkencëtarëve grek në mesin e të cilëve ishte edhe *Ptolemeu* (i cili njihej si dashamirës i shkencës dhe mbrojtës i shkencëtarëve) emigruan në *Aleksandri*. Mendimi shkencor i kësaj periudhe i dha njerëzimit rezultate të mëdha, rezultate këto që më parë nuk ishin të ditura. Vetë fakti se në mesin e shkencëtarëve që punuan dhe kontribuan në *Aleksandri* ishin edhe *Arkimedi*, *Teoni* dhe vajza e tij *Hypatija* dëshmon një gjë të tillë. Kjo është arsyeja kryesore që autorët nga [9] këtë periudhë të historisë e quajnë "*Periudha e Aleksandrisë*". Përveç *Ptolemeut* edhe *Menelausi* i cili në këtë punim shqyrtohet në kuadër të trigonometrisë greke, mendohet të ketë qenë nga *Aleksandria*. P.sh. në [8] në sqarimin e trekëndëshit sferik shkruan:

"*Menelausi* nga *Aleksandria* (v.100 e.s) përdori termin *tripleuron* në veprën e tij *Sphaerica* (sipas Pappus-it)." Sipas botimit të dytë *The Oxford English Dictionary*, "*kjo është paraqitja më e hershme (që dihet) e nocionit të trekëndëshit sferik*"[12].

---

[11] Për ngjashmëritë mes këtyre dy librave si dhe dallimet e arsyet pse *Elementet* mbijetoi nëpër shekuj kurse *Almagesti* jo, shih [18].

[12] Meqë jemi tek trekëndëshi sferik për kuriozitet po e citojmë kryetarin e SH.B.A. *Thomas Jefferson* i cili në letrën dërguar L.H.Girardin-it, më 18 mars 1814 shkruan: "*Pas kërkesës suaj bërë atë ditë po ju dërgoj formulat dhe sqarimet e mia të teoremës së Napier-it për zgjidhjen e trekëndëshave kënddrejtë sferik*".

Në [14] *Ptolemeu* konsiderohet të ketë qenë "*astronom Aleksandrian*". Vlen të ceket se për kundër faktit që në [1] *Ptolemeu* dhe veprimtaria e tij trajtohen në kuadër të "*Metodave matematike në kohët helenike*" në një pjesë shkruan: "… *bëri observime të shumta të trupave qiellor nga lokacionet pranë Aleksandrisë* …".

Ne në këtë punim, duke mos pasur mundësi të studimit më të thellë të kësaj çështje e përmendëm opinionin shkencor të autorëve [9] dhe [8], por *Ptolemeun* dhe veprimtarinë e tij do ta shqyrtojmë si pjesë të periudhës greke duke dashur të veprojmë në mënyrën se si veproi autori në [1].

Ptolemeu filloi punën e tij në *Almagest* me një përshkrim të konceptit grek për kozmosin, përshkrim ky i përcjellur me rezultate të trigonometrisë në rrafsh dhe të asaj sferike për njehsimin e pozitës së planetëve. Si detyrë e parë që i vuri vetes *Ptolemeu* ishte konstruktimi i tabelave të kordave në një mënyrë më komplete se sa *Hiparkusi*.

Ideja e tij ishte që gjatë konstruktimit të kësaj tabele të përfshiheshin harqet prej $\left(\frac{1}{2}\right)^{\circ}$ deri në 180° në intervale $\left(\frac{1}{2}\right)^{\circ}$ dhe për këtë atij i nevojitej më shumë "*gjeometri*" se sa *Hiparkusit*.

Gjithashtu, për dallim nga *Hiparkusi* i cili për *R* mori vlerën 57,18, *Ptolemeu* me qëllim lehtësimi gjatë llogaritjeve mori $R = 60$.

Punën e tij ai e filloi me njehsimin e gjatësive të kordave për këndet qendrore që u korrespondojnë brinjëve të *dhjetëkëndëshit të rregulltë*, *gjashtëkëndëshit të rregulltë*, *pesëkëndëshit të rregulltë, katrorit* dhe *trekëndëshit* të brendashkruar në rreth.

Në kalkulimet e tij, *Ptolemeu* njehsoi kordën e këndit 36°, që është gjatësia e brinjës së dhjetëkëndëshit të rregulltë të brendashkruar në rreth.

Në figurën 8, *ADC* paraqet diametrin e rrethit me qendër në pikën *D*, *BD* është normal në *ADC*. Pika *E* e përgjysmon *DC*-në, kurse *F* është caktuar e tillë që *EF* = *EB*.

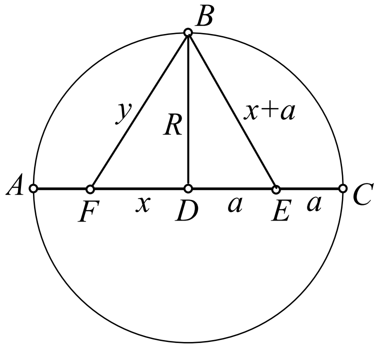


Figura 8

Nga figura 8 shihet se

$$CF \cdot FD + ED^2 = EF^2$$

ose

$$CF \cdot FD + ED^2 = EB^2 \text{ (sepse } EF = EB\text{)}$$

Nga zbatimi i *Teoremës së Pitagorës* për trekëndëshin EDB kemi

$$ED^2 + DB^2 = BE^2 .$$

Prandaj $CF \cdot FD + ED^2 = ED^2 + DB^2$

D.m.th. $CF \cdot FD = DB^2$

Meqë $DB = DC = R$ kemi $CF \cdot FD = DC^2$.

Tani sipas veprës *Elementet e Euklidit XIII-9*.[13]

> Nëse brinjët e gjashtëkëndëshit dhe dhjetëkëndëshit të brendashkruar në të njëjtin rreth, vendosen në të njëjtën drejtëz, atëherë pika e takimit e ndan segmentin sipas "*prerjes së artë*"[14].

Meqë rrezja *CD* është e barabartë me brinjën e gjashtëkëndëshit të brendashkruar në rreth, *Ptolemeu* ka treguar se *DF* është brinja e dhjetëkëndëshit, pra $DF = \text{crd}(36^\circ)$. Për të njehsuar këtë gjatësi, ai veproi si vijon:

$$DF = EF - ED = EB - ED = \sqrt{BD^2 + ED^2} - ED = \sqrt{3600 + 900} - 30 = 37;4,55.$$ [15]

Le t'i referohemi sërish veprës *Elementet e Euklidit XIII-10*.

> Nëse pesëkëndëshi i rregulltë brendashkruhet në rreth, atëherë katrori i brinjës së pesëkëndëshit është i barabartë me shumën e katrorëve të brinjës së gjashtëkëndëshit dhe dhjetëkëndëshit të rregulltë të brendashkruar në të njëjtin rreth[16].

Ptolemeu vërejti se katrori i brinjës së pesëkëndëshit të rregulltë (=crd(72°)) është i barabartë me shumën e katrorëve të brinjës së dhjetëkëndëshit të rregulltë dhe brinjës së gjashtëkëndëshit të rregulltë. D.m.th.

$$\text{crd}(72^\circ) = \sqrt{R^2 + \text{crd}^2(36^\circ)} = 70;32,3.$$

Rezultati i fundit merret pasi që crd(60°) = 60.

Për më tepër $\text{crd}(90^\circ) = \sqrt{2R^2} = \sqrt{7200} = 84;51,10.$

Kurse $\text{crd}(120^\circ) = \sqrt{3R^2} = 103;55,23.$ Përfundimisht, meqë $\text{crd}^2(180 - \alpha) = (2R)^2 - \text{crd}^2\alpha$, *Ptolemeu* mund të njehsonte kordën e këndit suplementar të çfarëdo harku, korda e të cilit dihej.

Kështu ai filloi të punojë në tabelën e vlerave të kordeve duke u mbështetur në pohimet e *Gjeometrisë Euklidiane*[17] dhe mundësitë për të njehsuar rrënjën katrore të

---

[13] Vepra *Elementet e Euklidit* përbëhet nga XIII libra. Shënimi XIII - 9 do të thotë, *Libri* XIII, *pohimi* 9.

[14] Sa i përket "*prerjes së artë*", shih p.sh. [3] fq.248, [4] fq.112, si dhe [8].

[15] Në sistemin numerik me bazë 60 të cilin e ka përdorur *Ptolemeu* shënimi 37;4,55 paraqet 37+4/60+55/3600.

[16] Zbërthimi dhe vërtetimi i disa nga teoremat e [2] gjenden në [6].

[17] Sipas [8] *Euklidi* nuk e quajti punimi e tij *Gjeometri* por *Elementet*.

numrave të ndryshëm. (Sa i përket mënyrës së njehsimit të rrënjës katrore nga *Ptolemeu*, shih [1], fq.147).

Në punën e tij të mëtejme, *Ptolemeu* formuloi teoremën e mëposhtme.

TEOREMA E PTOLEMEUT: Në çdo katërkëndësh të brendashkruar në rreth, prodhimi i diagonaleve është i barabartë me shumën e prodhimeve të brinjëve të kundërta ndërmjet tyre.

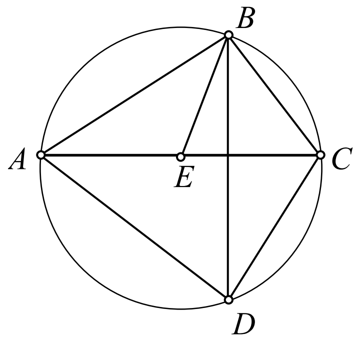


Figura 9

Në figurën 9 është dhënë katërkëndëshi *ABCD* i brendashkruar në rreth.

Pra, duhej treguar se $AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC$.

Ptolemeu gjatë vërtetimit veproi si vijon:

Në *AC* caktoi pikën *E* ashtu që $\angle ABE = \angle DBC$. Pastaj $\angle ABD = \angle EBC$. Gjithashtu $\angle BDA = \angle BCA$ sepse formojnë të njëjtin hark. Kështu nga ngjashmëria e trekëndëshave *ABD* dhe *EBC* merret

$$BD : AD = BC : EC \text{ ose } AD \cdot BC = BD \cdot EC. \quad (1)$$

Ngjashëm, meqë $\angle BAE = \angle BDC$, trekëndëshi *ABE* është i ngjashëm me trekëndëshin *BDC*. Kështu $AB : AE = BD : CD$ ose $AB \cdot CD = BD \cdot AE$ (2)

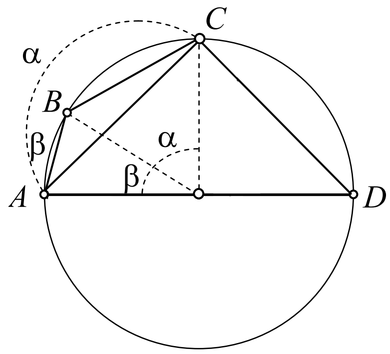


Figura 10

Duke mbledhur anë për anë relacionet (1) dhe (2) merret

$$AD \cdot BC + AB \cdot CD = BD \cdot EC + BD \cdot AE = BD(EC + AE) = BD \cdot AC.$$

Për të marrë formulën për kordën e ndryshimit të dy harqeve α, β *Ptolemeu* në teoremë zëvendëson $AC = \text{crd}\alpha$ dhe $AB = \text{crd}\beta$.

Meqë $BC = \mathrm{crd}(\alpha - \beta)$, nga teorema e mësipërme merret

$$120\mathrm{crd}(\alpha - \beta) = \mathrm{crd}\alpha \cdot \mathrm{crd}(180^\circ - \beta) - \mathrm{crd}\beta \cdot \mathrm{crd}(180^\circ - \alpha)$$

shprehje që në shënimet e sotme do të ishte

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \sin\beta$$

e që paraqet formulën sinusit të ndryshimit të dy këndeve.
Ngjashëm ai tregoi se

$$120\mathrm{crd}(180^\circ - (\alpha + \beta)) = \mathrm{crd}\alpha(180^\circ - \alpha) \cdot \mathrm{crd}(180^\circ - \beta) - \mathrm{crd}\beta \cdot \mathrm{crd}\alpha$$

formulë kjo ekuivalente me formulën e kosinusit të shumës së dy këndeve

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta.$$

Duke përdorur formulat e ndryshimit të këndeve dhe të gjysmëkëndit *Ptolemeu*, njehsoi), $\mathrm{crd}(12^\circ) = \mathrm{crd}(72^\circ - 60^\circ)$, $\mathrm{crd}(6^\circ) = \mathrm{crd}\frac{1}{2}(12^\circ)$, $\mathrm{crd}3^\circ$, $\mathrm{crd}\left(1\frac{1^\circ}{2}\right)$ dhe $\mathrm{crd}\left(\frac{3}{4}\right)^\circ$.

Rezultatet e tij të fundit në këtë kontest janë $\mathrm{crd}\left(1\frac{1}{2}\right)^\circ = 1;34,15$ dhe $\mathrm{crd}\left(\frac{3}{4}\right)^\circ = 0;47,8$.

Duke përdorur formulat e mësipërme ai mund të ndërtonte tabelën në intervale $\left(1\frac{1}{2}\right)^\circ$ e madje edhe $\left(\frac{3}{4}\right)^\circ$. Por, këtu atij i paraqitet një problem më "*serioz*". Në fillim treguam se ai dëshironte që tabelat e tij të ishin për intervalet $\left(\frac{1}{2}\right)^\circ$ dhe kështu sipas tij:

> "Nëse është dhënë korda e $\left(1\frac{1}{2}\right)^\circ$, atëherë korda e cila i korrespondon harkut i cili është sa $\frac{1}{3}$ e të sipërpërmendurit nuk mund të caktohet me metoda gjeometrike".

Me fjalë të tjera, *Ptolemeu* ishte i bindur, se metodat gjeometrike nuk janë të mjaftueshme për të përcaktuar $\mathrm{crd}\left(\frac{1}{2}\right)^\circ$ ose në përgjithësi, për të ndarë këndin në tri pjesë të barabarta. Pra, nevojitej një *metodë alternative*.

Metoda alternative që ai shfrytëzoi e që ishte *metodë përafrimi* bazohej në *lemën* vijuese: Nëse $\alpha<\beta$ atëherë $\mathrm{crd}\beta : \mathrm{crd}\alpha < \beta : \alpha$. Kjo lemë ndryshe njihet si *mosbarazia e Aristarkut* dhe vërtetimi i këtij pohimi gjendet në [5]. Duke aplikuar këtë lemë së pari për $\alpha = \left(\frac{3}{4}\right)^{\circ}$ dhe $\beta = 1^{\circ}$, *Ptolemeu* arriti në rezultatin $\mathrm{crd}(1^{\circ}) < \frac{4}{3}\mathrm{crd}\left(\frac{3^{\circ}}{4}\right) = \frac{4}{3}(0;47,8) = 1;2,50,40.$

Më pastaj ai aplikoi lemën për $\alpha = 1^{\circ}$ dhe $\beta = \left(1\frac{1}{2}\right)^{\circ}$ me ç'rast mori:

$$\mathrm{crd}(1^{\circ}) > \frac{2}{3}\mathrm{crd}\left(1\frac{1}{2}\right)^{\circ} = \frac{2}{3}(1;34,15) = 1;2,50.$$

Kështu arriti në rezultatet: $\mathrm{crd}(1^{\circ}) = 1;2,50$ dhe $\mathrm{crd}\left(\frac{1}{2}\right)^{\circ} = 0;31,25.$

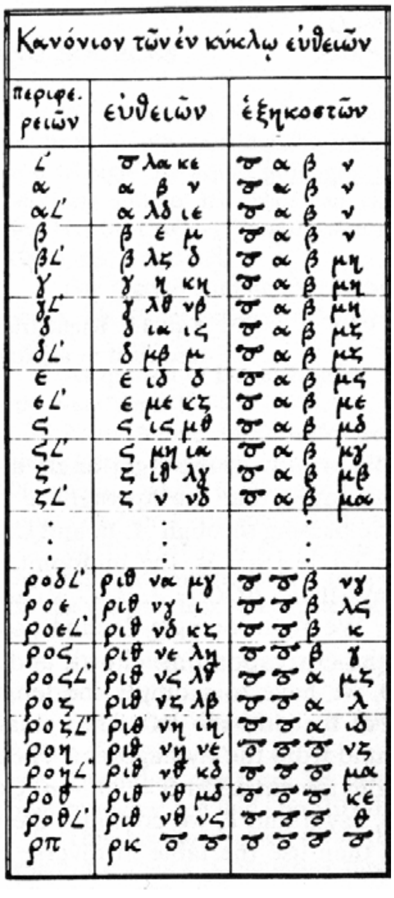
2.2 TABELA E KORDAVE

Për ne me rëndësi është *Tabela e Kordave* e *Ptolemeut*, që është temë trajtimi në kapitujtë 10 dhe 11 të librit të parë të *Almagestit.*

Tabelat e tij shprehin gjatësinë e kordës në rreth si funksion të këndit qendror që e formon ajo dhe në të përfshihen rezultatet për këndet prej 0° deri në 180° në intervale prej gjysmë shkalle. Më parë, pamë se nëse *r* është rrezja e rrethit, α - këndi qendror dhe gjatësia e kordës shënohet me *d* atëherë $d = 2r\sin\frac{\alpha}{2}$.

Ptolemeu mori diametrin e rrethit të jetë 120 njësi, kështu $d = 120\sin\frac{\alpha}{2}$. Ai përdori *sistemin numerik seksagecimal* (me bazë 60), pra atë e përdori bashkë me shkronjat greke ku çdo shkronje i shoqërohet një numër, p.sh. $\alpha = 1$, $\beta = 2$ etj.

Kështu p.sh. për këndin 7° (sipas alfabetit grek ζ) *Tabela e Ptolemeut* jep kordën me gjatësi 7;19,33 $(7 + \frac{19}{60} + \frac{33}{360})$ (në origjinal $\zeta\ \iota\theta\ \lambda\gamma$ ku $\iota, \theta, \lambda, \gamma$ janë 10, 9, 30, 3 përkatësisht).



Κανόνιον τῶν ἐν κύκλῳ εὐθειῶν		
περιφε-ρειῶν	εὐθειῶν	ἑξηκοστῶν
∠′	ō λα κε	ō α β ν
α	α β ν	ō α β ν
α∠′	α λδ ιε	ō α β ν
β	β ε μ	ō α β ν
β∠′	β λζ δ	ō α β μη
γ	γ η κη	ō α β μη
γ∠′	γ λθ νβ	ō α β μη
δ	δ ια ις	ō α β μζ
δ∠′	δ μβ μ	ō α β μζ
ε	ε ιδ δ	ō α β μς
ε∠′	ε με κζ	ō α β με
ς	ς ις μθ	ō α β μδ
ς∠′	ς μη ια	ō α β μγ
ζ	ζ ιθ λγ	ō α β μβ
ζ∠′	ζ ν νδ	ō α β μα
⋮	⋮	⋮
ροδ∠′	ριθ να μγ	ō ō β νγ
ροε	ριθ νγ ι	ō ō β λς
ροε∠′	ριθ νδ κζ	ō ō β κ
ρος	ριθ νε λη	ō ō β γ
ρος∠′	ριθ νς λθ	ō ō α μζ
ροζ	ριθ νζ λβ	ō ō α λ
ροζ∠′	ριθ νη ιη	ō ō α ιδ
ροη	ριθ νη νε	ō ō ō νζ
ροη∠′	ριθ νθ κδ	ō ō ō μα
ροθ	ριθ νθ μδ	ō ō ō κε
ροθ∠′	ριθ νθ νς	ō ō ō θ
ρπ	ρκ ō ō	ō ō ō ō

Figura 11. Pjesë nga tabela e kordave e Ptolemeut

Në vijim po e paraqesim një "*pjesë të kuptueshme*" të *Tabelës së Kordave*

Harqet	Kordet			Të gjashtëdhjetat[18]				Harqet	Kordet			Të gjashtëdhjetat			
$0\frac{1}{2}$	0	31	25	0	1	2	50	12	12	32	36	0	1	2	28
1	1	2	50	0	1	2	50	$12\frac{1}{2}$	13	3	50	0	1	2	27
$1\frac{1}{2}$	1	34	15	0	1	2	50	13	13	35	4	0	1	2	25
2	2	5	40	0	1	2	50	$13\frac{1}{2}$	14	6	16	0	1	2	23
$2\frac{1}{2}$	2	37	4	0	1	2	48	14	14	37	27	0	1	2	21
3	3	8	28	0	1	2	48	$14\frac{1}{2}$	15	8	38	0	1	2	19
$3\frac{1}{2}$	3	38	52	0	1	2	48	15	15	39	47	0	1	2	17
4	4	11	16	0	1	2	48	$15\frac{1}{2}$	16	10	56	0	1	2	15
$4\frac{1}{2}$	4	42	40	0	1	2	47	16	16	42	3	0	1	2	13
5	5	14	4	0	1	2	47	$16\frac{1}{2}$	17	13	9	0	1	2	10
$5\frac{1}{2}$	5	45	27	0	1	2	46	17	17	44	14	0	1	2	7
6	6	16	49	0	1	2	45	$17\frac{1}{2}$	18	15	17	0	1	2	5
$6\frac{1}{2}$	6	48	11	0	1	2	43	18	18	46	19	0	1	2	2
7	7	19	33	0	1	2	42	$18\frac{1}{2}$	19	17	21	0	1	2	0
$7\frac{1}{2}$	7	50	54	0	1	2	41	19	19	48	21	0	1	1	57
8	8	22	15	0	1	2	40	$19\frac{1}{2}$	20	19	19	0	1	1	54
$8\frac{1}{2}$	8	53	35	0	1	2	39	20	20	50	16	0	1	1	51
9	9	24	51	0	1	2	38	$20\frac{1}{2}$	21	21	11	0	1	1	48
$9\frac{1}{2}$	9	56	13	0	1	2	37	21	21	52	6	0	1	1	45
10	10	27	32	0	1	2	35	$21\frac{1}{2}$	22	22	58	0	1	1	42
$10\frac{1}{2}$	10	58	49	0	1	2	33	22	22	53	49	0	1	1	39
11	11	30	5	0	1	2	32	$22\frac{1}{2}$	23	24	39	0	1	1	36
$11\frac{1}{2}$	12	1	21	0	1	2	30								

[18] Sipas sistemit numerik me bazë 60, $0^{\circ}1'2''50'''$ paraqitet si vijon $0+1/60+2/3600+50/216000=0.0174537037..$

2.3 SAKTËSIA E TABELËS SË KORDAVE

Një pjesë e rezultateve që përfitohen nga *Tabela e Kordave* është krahasuar me rezultatet që gjenerohen nga kalkulatori i sotëm që punon deri në dhjetë shifra pas presjes dhjetore. Rezultatet po i paraqesim në tabelën vijuese:

θ	crdθ	$(\text{crd}\theta)/120^{\circ}$	$\sin\frac{\theta}{2}$	*diferenca*
$16\frac{1}{2}^{\circ}$	$17^{\circ}\ 13'\ 9''$	0.1434930556	0.1434926220	0.0000004336
49°	$49^{\circ}\ 45'\ 48''$	0.4146944444	0.4146932427	0.0000012017
64°	$63^{\circ}\ 35'\ 25''$	0.5299189815	0.5299192642	0.0000002827
$83\frac{1}{2}^{\circ}$	$79^{\circ}\ 54'\ 21''$	0.6658819444	0.6658816660	0.0000002784
$110\frac{1}{2}^{\circ}$	$98^{\circ}\ 35'\ 32''$	0.8216018519	0.8216469379	0.0000450860
126°	$106^{\circ}\ 55'\ 15''$	0.8910069444	0.8910065242	0.0000004202
155°	$117^{\circ}\ 9'\ 20''$	0.9762962963	0.9762960071	0.0000002892
$176\frac{1}{2}^{\circ}$	$119^{\circ}\ 56'\ 39''$	0.9995347222	0.9995335908	0.0000011314

Nëse analizojmë rezultatet në tabelë apo më mirë të themi diferencën e marrë nga rezultatet e *Ptolemeut* dhe ato të fituara me kalkulator mund të konkludojmë se rezultatet e *Ptolemeut* janë të "*sakta*" deri në pesë ose gjashtë vlera pas presjes dhjetore. Një gjë e tillë tregon për vlerën e *Tabelës së Kordave.* Sa i përket vlerës së këndit $\text{crd}\left(110\frac{1}{2}\right)^{\circ}$ është mendimi i shkencëtarëve se me këtë rast kemi të bëjmë me gabim tipografik.

2.4 ZGJIDHJA E TREKËNDËSHIT NË RRAFSH

Ptolemeu, pas konstruktimit të *Tabelës së Kordave* mund të zgjidhte trekëndëshin në rrafsh.

Metoda e tij, për dallim nga metodat moderne shfrytëzonte gjatësinë e kordës në rrethin me rreze 60. Më poshtë po paraqesim një shembull të metodës që ai zbatonte.

- Le t'i referohemi figurës 12. *Ptolemeu* duhej të njehsonte gjatësinë *CF* të hijes në mesditë, të polit *CE* gjatësia e të cilit ishte 60, në vendin Rodos (Rhodes) (gjerësia gjeografike 36°), gjatë *ekuinoksit pranveror*[19]. *Ptolemeu* vërejti se në atë moment dielli ishte 36° nën *zenit*[20] d.m.th. se $\angle AEB = 36^{\circ}$).

[19] Shih [14] fq. 21.
[20] Po aty, fq. 10.

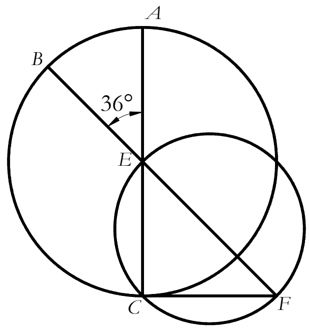


Figura 12

Ptolemeu e konsideronte CF – në si kordë të rrethit të jashtëshkruar në trekëndëshin ECF.

Meqë këndi qendror është dyfishi i këndit periferik (në vijën rrethore), ai mori

$$CF = \mathrm{crd}(72^\circ) = 70;32,3.$$

Pastaj $CE = \mathrm{crd}(180^\circ - 72^\circ) = \mathrm{crd}(108^\circ) = 97;4,56$.

Meqë *Ptolemeu* donte të njehsonte gjatësinë e hijës kur $CE = 60$ ai mori raportin $\frac{60}{97;4,56}$. Kështu që hija ishte $\frac{60}{97;4,56} \cdot (70;32,3) = 43;36$.

Ky metodë për njehsimin e gjatësisë a të trekëndëshit kënddrejtë kur dihet këndi α dhe brinja b mund të shprehet në formën vijuese:

$$a = b \cdot \frac{\mathrm{crd}(2\alpha)}{\mathrm{crd}(180 - 2\alpha)} = b \cdot \frac{2R\sin\alpha}{2R\cos\alpha} = b\mathrm{tg}\alpha.$$

Pra, kuptojmë se "*mungesa*" e funksionit *tangjent* dhe nevoja për përdorimin e kordave, e detyruan *Ptolemeun* të llogarisë kordet e këndeve të dhëna, pastaj të këndeve të dyfishta, komplementin, si dhe herësin e tyre.

2.5 ZGJIDHJA E TREKËNDËSHIT SFERIK

Trekëndëshi sferik është figurë në sferë e formuar nga tri harqe të rrathëve të mëdhenjë të sferës dy nga dy të cilët priten. (Të përkujtojmë se rrethi i madh është ai rreth në sferë që ka qendrën në qendër të sferës, kështu që rrezja e rrethit të madh është e barabartë me rrezen e sferës).

Këndet e trekëndëshit sferik janë këndet sferike që formojnë harqet, gjatësitë e brinjëve shpesh specifikohen me këndet që ata formojnë me qendrën e sferës. Për dallim nga trekëndëshat në plan, shuma këndeve të brendshme tek trekëndëshi sferik nuk është çdoherë180°. Ajo merr vlera nga 180° deri në 540°.

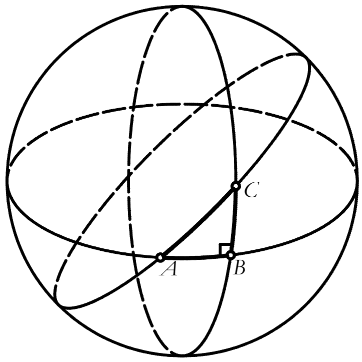


Figura 13

Ptolemeu u mor edhe me zgjidhjen e problemeve të ndryshme të ndërlidhura me trekëndëshin sferik. Edhe pse *gjeometria sferike* është studiuar afro 300 vite para erës sonë, studimet e hershme në *trigonometrinë sferike* datojnë që nga viti 100 i erës sonë në veprën *Spherica* të *Menelaus-it*. Rezultati kryesor të cilin ne e njohim është *Teorema e Menelausit* e cila jep varësinë në mes të harqeve të rrethit të madh në sipërfaqen sferike, siç shihet në figurën 14 .

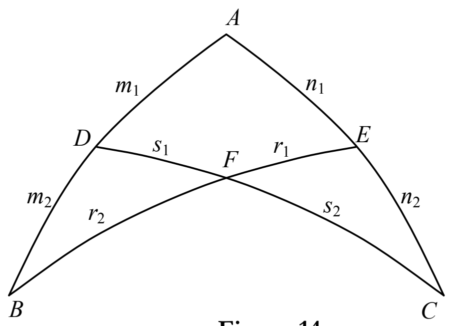


Figura 14

Harqet *AB* dhe *AC* janë prerë nga harqet *BE* dhe *CD*, pikëprerja e të cilave është pika *F*. Duke përdorur shënimet si në figurë *Teorema e Menelausit*[21] duke shënuar sinusët në vend të kordave do të ishte:

$$\frac{\sin(n_2)}{\sin(n_1)}=\frac{\sin(s_2)}{\sin(s_1)}\cdot\frac{\sin(m_2)}{\sin(m)} \text{ dhe } \frac{\sin(n)}{\sin(n_1)}=\frac{\sin(s)}{\sin(s_1)}\cdot\frac{\sin(r_2)}{\sin(r)}.$$

Menelaus-i vërtetoi këto rezultate (vërtetimet gjenden në veprën *Almagest*) duke i vërtetuar ato së pari për një sipërfaqe të ngjashme në rrafsh. Kështu *Ptolemeu* e shfrytëzoi *Teoremën e Menelausit* për zgjidhjen e trekëndëshit kënddrejtë sferik. Për zbatimin e *Teoremës e Menelausit* do të shohim më vonë në kapitullin mbi *matematikën islame*.

---

21 *Menelaus-i i Aleksandrisë* (viti 100 e.s). Matematikan i njohur grek për veprën e tij *Sphaerica* (*Sferat*) që përmban teoremat më të hershme të njohura të *trigonometrisë sferike* si dhe teoremën që prej atëherë njihet si teorema e Menelausit e cila thotë: në trëkëndëshin *ABC*, le të jenë *L*, *M*, *N* pika në brinjët *AB*, *BC* dhe *CA* përkatësisht. Atëherë konditë e nevojshme dhe e mjaftueshme që pikat *L*, *M*, *N* të jenë kolineare është që të vlejë $\frac{\overrightarrow{AL}}{\overrightarrow{LB}}\cdot\frac{\overrightarrow{BM}}{\overrightarrow{MC}}\cdot\frac{\overrightarrow{CN}}{\overrightarrow{NA}}=-1$.

3. TRIGONOMETRIA HINDUSE

Detyra kryesore e historianit të matematikës si dhe privilegj i tij është të sqarojë humanizmin e matematikës, të ilustrojë madhështinë e saj, bukurinë dhe dinjitetin dhe të përshkruajë se si përpjekjet e parreshtura dhe gjenialiteti i akumuluar i shumë gjeneratave e kanë ndërtuar këtë monument madhështor…Studimi i historisë së matematikës nuk do të sjellë matematicientë më të mirë por sigurisht më bujar, ajo do t'i pasurojë mendjet e tyre, do të arrijë në zemrat e tyre dhe do të sjell në shesh kualitetin e tyre të lartë.

G.Sarton

Dëshmitë tregojnë se gjatë shekujve të parë të erës së re, në periudhën e *Perandorisë së Kushanit* dhe të asaj të *Guptos*, bëhet bartja e njohurive të astronomisë Greke në Indi. Kjo mbase është e realizuar përmes rrugëve tregtare të *Perandorisë Romake*. Është për kuriozitet që veprat e *Ptolemeut* nga lëmia e matematikës dhe astronomisë nuk u transferuan në Indi. Ajo që u transferua ishte vepër e paraardhësve të tij, e në veçanti veprat e *Hiparkusit.* Ashtu si nevoja që kishin grekët për astronomi e që solli deri te zhvillimi i trigonometrisë, nevojat e indianëve për astronomi sollën deri te avansimi i këtij lëmi në Indi. Një punim i hershëm i indusëve mbi astronominë (Surya Siddhanta – vitit 400 e.s) prezenton një tabelë të gjysmëkordave.

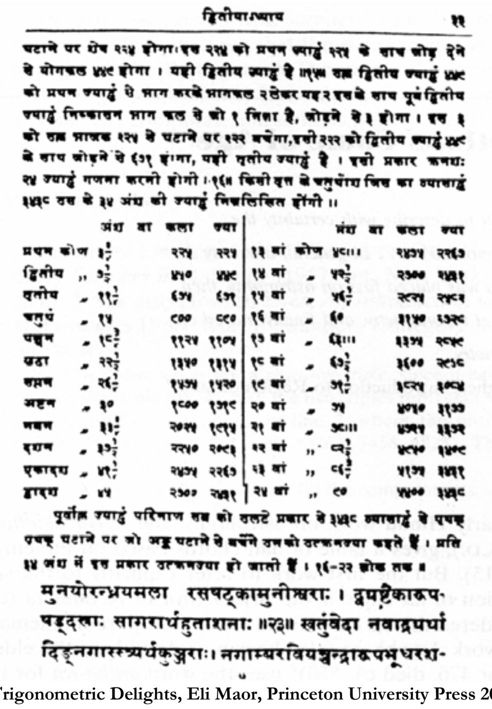


Figura 15. Një faqe nga Surya Siddhanta

3.1. NDËRTIMI I TABELAVE TË SINUSËVE

Vepra më e hershme në Indi me përmbajtje të elementeve të trigonometrisë është *Paitāmahasiddhānta*, e shkruar në fillim të shekullit të pestë. Vepra e sipërpërmendur, për njehsimet e elementeve në *trigonometrinë sferike* (njehsime këto të domosdoshme për zgjidhjen e problemeve astronomike) përmbante tabela të "*gjysmë-kordave*", fjalë kjo e përkthyer nga termi i gjuhës *Sanskritishte* "*jyā-ardha*"[22].

Fjala "*sinus*" vjen në jetën e përditshme shkencore pas një numri të përkthimeve të gabuara të fjalës së gjuhës sanskritishte "*jyā-ardha*" (*gjysmë- kordë*).

Le të përkujtojmë se *Ptolemeu*, për të zgjidhur trekëndëshin duke përdorur tabelat e kordave shpesh kishte të bënte me gjysmë kordën e dyfishtë të këndit. Mbase një matematicient i panjohur nga India arriti në konkluzion se do të jetë më e lehtë të përdoren të veprohet me gjysmëkordë të këndit të dyfishtë se sa me korda. Kështu në punimin e tij si dhe në të gjitha punimet e mëvonshme mbi astronominë që rezultuan në Indi përdoret "*funksioni*" gjysmë-kordë. Le të përkujtojmë se *Ptolemeu* njehsoi "*kordat e tij*" në rrethin me rreze 60 (njësi), gjersa *Hiparkusi* disa shekuj para tij përdori rrezen 3438. Fakti se kjo vlerë e rrezes (pra 3438) u shfrytëzua si bazë për tabelat *Paitāmahasiddhānta*, ne mund të supozojmë se "*trigonometria e Hiparkusit*" arriti në Indi para asaj të *Ptolemeut*.

Me qëllim të thjeshtësimit tash e tutje do të përdorim termin "*sinus*" në vend të termit "*gjysmë-kordë*", edhe pse me këtë rast duhet të kemi parasysh se deri në shekullin e tetëmbëdhjetë fjala "*sinus*" nënkuptonte gjatësinë e segmentit në rreth me rreze të dhënë.

Në këtë punim do të prezentojmë një përshkrim të hershëm të konstruktimit të tabelave për vlerat e "*funksionit*" sinus por jo në mënyrën që paraqitet në veprën e sipërpërmendur por ashtu si paraqitet në një vepër pak më të vonshme të quajtur *Āryabhatīya* e *Āryabhates*[23], vepër nga më të hershmet mbi matematikën dhe astronominë në Indi. E tërë ajo që dihet për autorin, e kjo është shumë pak, është që ai shkroi librin në vitin 499 në *Kusumapura* afër vendit të quajtur *Gupka*, kyeqytetit të

---

[22] *Āryabhata* shpesh e shkurton këtë term me *jyā* ose në sinonimin e tij *jīvā*. Kur disa vepra nga India u përkthyen në gjuhën arabe, fjala e mësipërme u përkthye thjeshtë vetëm në aspektin fonetik, përndryshe në fjalën arabe *jiba*. Meqë gjuha arabe shkruhet pa zanore, shkruesit e mëvonshëm interpretuan bashkëtingëlloret *je* si *jaib*, që d.m.th. *gji* ose *liman*. Në shek.XII kur një vepër arabe e trigonometrisë u përkthye në gjuhën latine, përkthyesi përdori termin ekuivalent latin *sinus* që nënkupton të njëjtën gjë. Sipas *Cajori* (1906) termi latin *sinus* u përkthye gjatë përkthimit të veprës astronomike të *Al-Batani-it* nga Plato i Tivolit (ose *Plato Tiburtinus*). Kurse sipas disa burimeve të tjera [8] termi *sinus* për herë të parë paraqitet në gjuhën latine pas përkthimit të *Algjebrës* së *al-Khowarizmi* nga ana e *Gherard-it* nga Cremona (1114 – 1187). Kështu sot kemi fjalën *sinus*. Sipas [18] shkurtesa *sin* për herë të parë është përdorur nga *Edmund Gunter* (1581-1626), minister anglez që më vonë do të bëhet profesor i astronomisë në Kolegjin Gresham të Londrës.

[23] Sipas [18] *Āryabhata* (475 – 550 e.s) është një ndër matematikanët e parë indian. Në sektorin "*Ganita*" (*'Kalkulimi'*) të veprës së tij mbi astronominë *Aryabhatiya* (viti 499) ai kreu avansime fundamentale në njehsimin e gjatësisë së kordave të rrathëve duke punuar me gjysmë-korda për dallim prej grekëve që njehsimet i kryenin për kordat e plota. Puna e tij gjithashtu përfshin rregulla për njehsimin e numrit π, njehsimin e rrënjës katrore dhe shumat e vargjeve aritmetike.

Pātalipurës (sot Patna) në veri të Indisë. Libri *Āryabhatīya* përbëhet nga 4 *seksione* dhe 123 "*strofa*".

Përshkrimi i metodës për konstruktimin e tabelës së vlerave të sinusëve është dhënë në strofën 12 të seksionit II, kurse tabela e diferencave të sinusëve është dhënë në strofën 10 të seksionit I.

"*Sinusi i parë*" s_1 në trigonometrinë indiane gjithmon nënkupton sinusin e harkut $\left(3\frac{3}{4}\right)^{\circ} = 3^{\circ}45'$ dhe ky sinus në rrethin me rreze 3438 i shprehur në minuta është s_1=225.

Rregulla në *strofën II*,12 (shih. [1], fq.212) na mundëson të njehsojnë sinusin e çdo harku duke u nisur nga $3^{\circ}45'$. Kështu për të njehsuar s_2, që është sinusi i $7^{\circ}30'$, zbresim 225 nga 225 për të marrë 0 (në këtë moment sinusi i parë dhe i dytë janë të njëjtë), pastaj pjesëtojmë 225 me 225 për të fituar 1, pastaj nga 225 zbrezim 0+1=1 për të fituar 224. Ky numër është diferenca e sinusit të dytë, kështu që s_2 =225+224=449.

Për të fituar s_3, zbresim 224 nga 225 dhe marrim 1, pastaj pjesëtojmë 449 me 225 që përafërsisht jep rezultatin 2, atëherë nga 225 zbresim 1 + 2 =3 dhe marrim 222, si diferencë të sinusit të ardhshëm, kështu që s_3, sinusi i $11^{\circ}15'$ është s_3=449+222=671.

Në përgjithësi sinusi i *n*-të (sinusi i $n \cdot 3^{\circ}45'$) njehsohet me shprehjen

$$s_n = s_{n-1} + \left(s_1 - \frac{s_1 + s_2 + \ldots + s_{n-1}}{s_1}\right)$$

ku shprehja në kllapa është diferenca e sinusit të *n*-të.
Këto janë të paraqitur në:

STROFA I.10. Njëzet e katër sinusët (diferencat) të llogaritura në minuta të harkut janë:

225, 224, 222, 219, 215, 210, 205, 199, 191, 183, 174,
164, 154, 143, 131, 119, 106, 93, 79, 65, 51, 37, 22, 7.

Vlerat e treguara më sipër tregojnë mospërputhje të vogla nga vlerat e njehsuara me metodën e mësipërme. Mbase kjo mund të jetë për shkak të vlerave të thyesave gjatë pjesëtimeve që kryhen. Sidoqoftë ajo që është me rëndësi të ceket është njehsimi i sinusëve me këtë metodë.

Kështu si edhe *Hiparkusi* ata arritën në faktin se $\sin 90^{\circ}$ është baraz me rrezen $3438'$, sinusi i 30° është gjysma e rrezes $1719'$, sinusi i $45^{\circ} = 2431'$; kurse sinusët e harqeve të tjerë njehsohen duke zbatuar *Teoremën e Pitagorës* dhe formulën e gjysmë-këndeve.

Pasi që tabela e sinusëve prej $3^{\circ}45'$ deri në 90° sipas $3^{\circ}45'$ shkallëve të jetë konstruktuar, do të mund të konstruktohej tabela e diferencave të dyta.

3.2. METODAT E PËRAFRIMIT NË INDI

Në Indi, matematicientët zhvilluan metoda të përafrimit. Metoda më e thjeshtë ishte interpolimi linear në mes të vlerave të dhëna në tabelë. Në fillim të shekullit të shtatë, *Brahmagupta* konstruktoi një skemë më të saktë interpoluese duke përdorur diferencat e rendit të dytë. Në shënimet modern, nëse D paraqet diferencën e i-të sinusëve (të dhënë në strofën I.10 në *Āryabhata*), x_i – harkun e i-të dhe $h = \left(3\frac{3}{4}\right)^{\circ}$ - paraqet intervalin mes harqeve, atëherë rezultati i *Brahmaguptës* do të jetë

$$\sin(x_i + \theta) = \sin(x_i) + \frac{\theta}{2h}(D_i + D_{i+1}) - \frac{\theta^2}{2h^2}(D_i - D_{i+1})$$

Për shembull për të njehsuar $\sin(20^{\circ})$, së pari vërejmë se $20 = 18\frac{3}{4} + 1\frac{3}{4}$, ku $18\frac{3}{4} = x_5$. Nga formula e mësipërme marrim

$$\sin(20^{\circ}) = \sin\left(18\frac{3}{4} + 1\frac{1}{4}\right) = \sin\left(18\frac{3}{4}\right) + \frac{1\frac{1}{4}}{2\left(3\frac{3}{4}\right)} \cdot (215 + 210)$$

$$- \frac{\left(1\frac{1}{4}\right)^2}{2\left(3\frac{3}{4}\right)^2} \cdot (215 - 210) = 1105 + \frac{1}{6}(415) - \frac{1}{18}(5) = 1176$$

pra vlera më e përafërtë e plotë, ku sinusi është marrë për rastin kur rrezja e rrethit është 3438.

Brahmagupta fatkeqësisht nuk dha arsyetim për këtë formulë interpoluese, edhe pse matematicinetë të tjerë nga India dhanë arsyetime racionale. Ajo që vlen të përmendet si kuriozitet është fakti që *Brahmagupta* gjithashtu përdori formulat algjebrike për të marrë vlera të përafërta të sinusëve, formulë kjo që me gjasë është dhënë së pari nga bashkëkohasi *Bhāskara* I (në fillim të shekullit të shtatë). Ne këtu vetëm po e paraqesim formulën e *Brāskarës* në notacionin modern

$$R\sin\theta = \frac{R\theta(180 - \theta)}{\frac{1}{4}(40{,}500 - \theta)(180 - \theta))} = \frac{4R\theta(180 - \theta)}{40{,}500 - \theta(180 - \theta)}.$$

Rezultatet nga trigonometria në Indi barten më vonë në vendet arabe dhe avansohen edhe më tej.

4. TRIGONOMETRIA ISLAME

> ***Nga India deri në Spanjë lulëzonte civilizimi i shkëlqyeshëm islam …Neve civilizimi euro-perëndimor na duket të jetë civilizim por kjo është një pamje e kufizuar e jona.***
>
> *Bertrand Russell*

Në gjysmën e parë të shekullit të shtatë, në Gadishullin Arabik paraqitet një civilizim. Nën udhëheqjen e profetit Muhammed, Islami si besim i ri monoteist u zhvillua dhe për një kohë shumë të shpejtë joshi banorët e gadishullit të Arabisë. Në një periudhë të shpejtë territori i tyre u zgjerua. Më gjerësisht për këtë shih [1].

Me rritjen e papritur të Islamit, hegjemonia politike e grekëve pranë Lindjes së afërt pothuajse e tëra u zhduk. Pas vitit 622 (viti i hixhrit), arabët pushtuan zona të mëdha të Azisë perëndimore me një shpejtësi mahnitëse dhe para përfundimit të shek. të shtatë ata pushtuan Romën Perëndimore, Sicilinë, Afrikën Veriore dhe Spanjën. Dhe kudo që shkuan u munduan që civilizimin Greko-Romak ta zëvendësojnë me atë Islam. Gjuha arabe bëhet gjuhë zyrtare, dhe pikërisht fakti që në dokumentet shkencore përdorën gjuhën e re, sigurohet vazhdimësia në masë të madhe e kontinuitetit kulturor.

Civilizimet antike vendore kishin më tepër gjasa që të mbijetojnë nën sundimin e ri se sa nën grekët (shih [18]).

…

Në vitin 766 Kalifi *al-Mansūr* caktoi si kryeqytet të tij Bagdadin, qytet ky që së shpejti do të shndërrohet në qendër të lulëzuar intelektuale dhe tregtare. Kalifi *Harūn al Rashīd* që udhëhoqi prej 786 deri më 809 themeloi bibliotekën në Bagdad. Dorëshkrimet ishin mbledhur nga akademitë e ndryshme të Lindjes së afërme të cilat ishin punuar nga shkollarët që kanë ikur nga persekutimet në Athinë dhe Aleksandri. Në këto dorëshkrime përfshihen shumë nga tekstet shkencore dhe matematike greke. Kështu së shpejti filloi programi i përkthimit të tyre në gjuhën arabe. Pasardhësi i *Harūn-it*, kalifi *al-Ma'mūn* (që udhëhoqi Kalifatin Islam gjatë viteve 813-833) themeloi Institutin për Hulumtime, të quajtur *Bayt al-Hikma* (*Shtëpia e Diturisë*), që pati një jetë mbi 200 vjeçare. Në këtë institut u ftuan shkollarët nga të gjitha anët e kalifatit për të përkthyer punimet greke dhe hinduse dhe në të njëjtën kohë për t'u marrë me hulumtime origjinale. Kah fundi i shekullit IX, shumica e veprave kryesore të *Euklidit*, *Arkimedit*, *Apolonit*, *Diofantit*, *Ptolemeut* dhe matematicientëve të tjerë u përkthyen në gjuhën arabe dhe ishin të gatshme për studiuesit e mbledhur në Bagdad. Shkollarët islamikë gjithashtu përkthyen edhe shkrimet babilonase, që ishin në dispozicion në regjionin e *Tigrit-Eufratit* si dhe mësuan *trigonometrinë hinduse*.

Por, studiuesit muslimanë bënë më shumë se sa mbledhja e këtyre burimeve. Ata i shkrinë ato në një tërësi. Sipas kulturës islame "*njohuritë shkencore*" nuk ishin në konflikt me "*njohuritë (shpalljen) e shenjta*", përkundrazi ato paraqitnin rrugë për t'u afruar me to. Kështu të studiuarit inkurajohej dhe ata që tregonin aftësi dhe kreativitet shpesh përkraheshin nga autoritetet (ato sekulare si dhe ato fetare) kështu që ata lirshëm mund të zhvillonin idetë e tyre. Ajo që vlen të ceket në këtë kontest është fakti se matematicientët islamë në fillim të veprave të tyre përmendin emrin e Zotit, në brendi të tekstit i referoheshin inspirimit nga ana e Zotit dhe në fund të tekstit shprehnin falënderim Zotit për suksesin e arritur. Për më tepër se kjo, meqë udhëheqësit ishin të interesuar në nevojat e përditshme, matematicientët islamikë ndryshe nga grekët, pothuajse të gjithë kontribuan jo vetëm në aspektin teorik por edhe në aplikimin praktik.

Duke pas parasysh ndikimin e islamit në shkencë në përgjithësi dhe në matematikë në veçanti, matematikës së kësaj periudhe do t'i referohemi si matematikë islame para se arabe meqë kontributor në këtë periudhë ishin edhe shkenctarët muslimanë me përkatësi kombëtare joarabe, edhe pse kishte disa matematicientë jomuslimanë. Kështu po i referohemi, sepse në të njëjtën mënyrë dhe po për të njëjtat arsye ashtu u referohen edhe autorët e punimeve [1], [5], [12], [14] etj.

4.1 FUNKSIONET TRIGONOMETRIKE

Shkollarët islamikë ishin të vetëdijshëm për njohuritë nga lëmi i trigonometrisë nga India por edhe për *Hiparkusin* si dhe për *Ptolemeun*, vepra e të cilit (*Almagest*) u përkthye në gjuhën arabe. Si edhe në të gjitha lëmitë tjera të shkencës, matematicientët islamikë absorbuan atë që e gjetën nga kulturat tjera dhe gradualisht e plotësuan me ide të reja.

Si në Greqi dhe Indi, trigonometria në këtë periudhë të zhvillimit të saj ishte e ndërlidhur me astronominë. Matematikanët e kësaj periudhe ishin të interesuar në aplikimin e trigonometrisë në zgjidhjen e trekëndëshit sferik, për shkak të faktit që muslimanët gjatë faljeve duhej të drejtohen në drejtim të Mekës, e pikërisht të përcaktuarit e një drejtimi të tillë nga një lokacion i çfarëdoshëm kërkonte njohuri të mëdha të zgjidhje së trekëndëshit sferik. Më poshtë do të paraqesim mënyrën se si *al-Birūni* përcaktoi pozitën e Mekkës nga Jerusalemi, kurse ata që janë të interesuar që të shohin se si caktohet një drejtim i tillë në notacionin modern të trigonometrisë sferike rekomandohet [12].

Le të përkujtojmë faktin që *Ptolemeu* përdori vetëm një "*funksion*" trigonometrik, atë të kordës, gjersa hindusët e modifikuan atë në "*sinus*" një funksion ky më i "*përshtatshëm*". Në fillim të *trigonometrisë islame* u përdorën që të dy këto (koncepte) "*funksione*" por si duket me kohë "*funksioni*" *sinus*, "*fitoi*" dhe gjeti përdorim më të madh. Le të cekim se edhe në këtë periudhë sinusi i një harku kishte të njëjtin kuptim si në matematikën hinduse.

Sa i përket "*funksioneve*" të tjera nuk dihet se kush filloi t'i përdor i pari, por dihet se *Abdullāh Muhammad ibn Jābir al-Battāni* (v.855-929 erës sonë) përdori "*sinusin e komplementit të* 90°" (*kosinusin*) në një vepër të tij mbi astronominë e cila paraqiste tendencë për të përmirësuar *Almagestin*. Meqë ai nuk përdorte numra negativ, ai e definoi kosinusin vetëm për harqe deri në 90°.

Funksionet *tangjent*, *kotangjent*, *sekant* dhe *kosekant* paraqiten në punimet trigonometrike islamike në shekullin e nëntë, respektivisht në punimet e *Ahmad ibn Abdullāh al-Marwazi Habas al-Hāasib* (v.770-870 erës sonë) edhe pse funksioni tangjent është përdorur në Kinë në shekullin e tetë.

Le të analizojmë një shembull edhe të këtyre funksioneve nga *Abu l-Rāyhan Muhammad ibn Ahmad al-Bīrūnī* (973-1055 erës sonë) në veprën e tij "*Trajtim i Plotë i Hijeve*".

Shembull të një hije të drejtëpërdrejtë (*kotangjenti*) po e japim në vijim. Le të jetë *A* trupi që "*paraqet*" diellin dhe *BG* normale në *EG*, ku *EG* është paralele me rrafshin e horizontit, *ABE* paraqet rrezen e diellit (figura 16(a)). *EG* quhet hija e drejtëpërdrejt ku *G* është baza dhe *E* fundi i saj. *EB* paraqet hipotenuzën[24] e hijës (*kosekanta*).

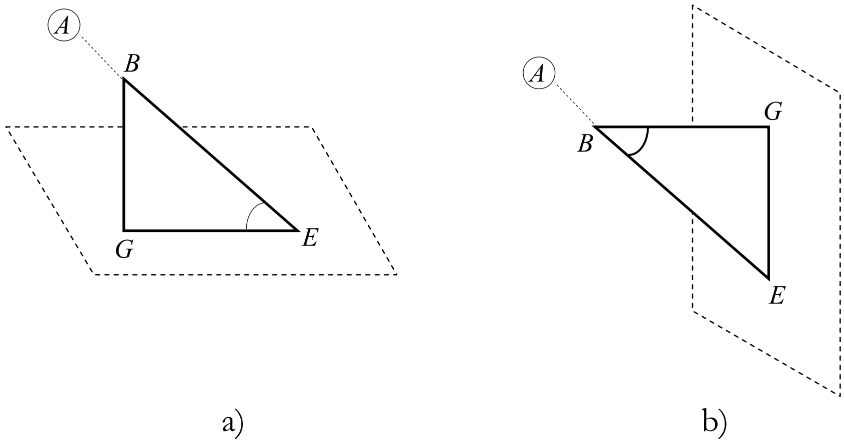


Figura 16

Në figurën 16 (b) *GE* quhet "*hija e kundërt*" (*tangjenta*) dhe *BE* është "*hipotenuza e hijes së kundërt*" (*sekanta*). Me fjalë të tjera në figurën 16 janë paraqitur definicionet e *al-Bīrūnīt* për *tangjentin*, *kotangjentin*, *sekantën* dhe *kosekantën*. Në veprat e tij *al-Bīrūnī* arriti rezultate të ndryshme të cilat në gjuhën e sotme të matematikës do të ishin:

$$\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha};$$
$$\operatorname{ctg}^2\alpha + 1 = \operatorname{cosec}^2\alpha;$$
$$\operatorname{tg}^2\alpha + 1 = \sec^2\alpha;$$
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha};$$
$$\operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha).$$

Më gjerësisht për këto rezultate shih [1], fq.276.

Mbase vlen për të cekur se e tërë "*pasuria trigonometrike*" e teksteve të *al-Bīrūnīt* shfrytëzohej vetëm për zgjidhjen e problemeve astronomike.

[24] Termi *hipotenuzë* për herë të parë është përdorur nga *Pitagorasit*.

Në këtë rast vlen të përmendim edhe *Abū l-Saqr al-Qābīsī* (shek.X) i cili paraqiti një metodë trigonometrike, duke përdorur vetëm sinusin për të përcaktuar gjatësinë dhe distancën e objekteve të paarritshme. Le të shqyrtojmë figurën 17.

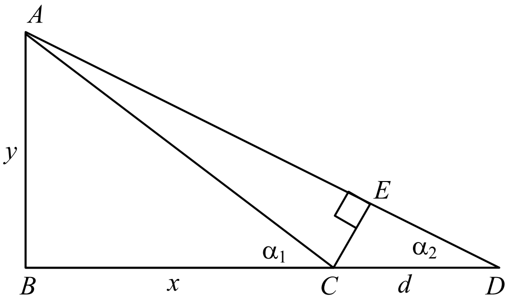


Figura 17

Për të caktuar largesën $BC = x$ dhe lartësinë $AB = y$, ai arriti në rezultatet (shih [1], fq.277)

$$y = \frac{d\sin\alpha_2}{\sin(90-\alpha_2) - \dfrac{\sin(90-\alpha_1)\cdot\sin\alpha_2}{\sin\alpha_1}}$$

$$x = \frac{y\cdot\sin(90-\alpha_1)}{\sin\alpha_1}$$

ku $\alpha_1 = \angle ACB$ dhe $\alpha_2 = \angle ADB$ janë caktuar duke përdorur *astrolabin* (instrument që shërbente për matjen e këndeve), kurse $CD = d$.

4.2 TRIGONOMETRIA SFERIKE

Përdorimi më i madh i funksioneve trigonometrike ishte në zgjidhjen e trekëndëshave sferikë sepse zgjidhja e shumë problemeve astronomike sillej në zgjidhjen e trekëndëshit sferik. Matematicientët islamikë paraqitën metoda më të thjeshta dhe më praktike se sa *Ptolemeu* për zgjidhjen e këtyre problemeve. Me gjasë rezultatet kryesore u arritën në mënyrë të pavarur nga dy bashkëkohësit e *al-Bīrūnīt*, të cilët ishin *Abū Nasr Mansūr ibn Iraq* (v.1030 erës sonë) dhe *Muhammad Abū'l-Wafā al Būzjānī*[25] (940-997), astronom nga Bagdadi.

Rezultati i parë i cili njihet si "*rregulla e katër madhësive*" duket me sa vijon:

---

[25] Funksionet *sekant* dhe *kosekant* për herë të parë janë përmendur (pa ndonjë emër të veçantë) nga *Abū'l-Wafā* , që ishte ndër të parët që ndërtoi tabelën e tangjentës. Ndërsa shënim *sec* u propozua në vitin 1626 nga matematikani frances *Albert Girard* (1595-1632). Për sekantën e A-së ai përdorte shënimin $\overset{\sec}{A}$ dhe në të njëtën mënyrë e shënonte tangjentin gjersa për $\sin A$ dhe $\cos A$ përdorte shënimet A , a përkatësisht. Trajtimet e funksioneve tangjent dhe kotangjent fillojnë me matematikanët musliman. Tabela e parë e *tangjentës* dhe *kotangjentës* u punua nga *Ahmad ibn Abdullah al Marvazi* i njohur me pseudonimin "*kompjuteri*". Nocioni modern tangjent u përdor në vitin 1583 nga matematikani danez Thomas *Fincke* (1561-1646).

TEOREMË: Nëse *ABC* dhe *ADE* janë dy trekëndësha sferik, me kënde të drejtë në *B* dhe *D*, përkatësisht dhe me një kënd të përbashkët të ngushtë në A, atëherë vlen $\sin BC : \sin CA = \sin DE : \sin EA$

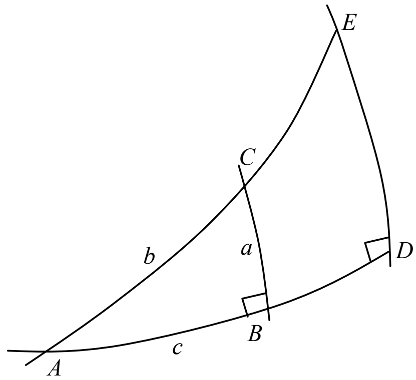


Figura 18

Një rrjedhim i menjëhershëm i kësaj teoreme paraqet rast të veçantë të *teoremës së Menelaus-it* të dhënë në kapitullin 1.
Nëse *ABC* është trekëndësh kënddrejtë sferik me kënd të drejtë në *B* atëherë $\sin A = \dfrac{\sin a}{\sin b}$. Për të vërtetuar këtë, le të zgjasim hipotenuzën *AC* dhe bazën *AB* deri te pikat *E* dhe *D*, përkatësisht ashtu që *AD* dhe AE të jenë kuadrante të rrethit të madh. Pastaj harqet e rrathëve të mëdhenjë nga *E* në *D* janë normale edhe në *AD* e edhe në *AE*, kështu që mund të aplikojmë teoremën. Meqë $\sin DE = \sin A$ pohimi u vërtetua.
Abū'l-Wafā gjithashtu vëretoi edhe rastet tjera të *teoremës së Menelaus-it*, përfshirë edhe rezultatet:

$$\frac{\cos a}{\cos b} = \frac{1}{\cos c} \text{ dhe } \frac{\sin c}{\text{tg}a} = \frac{1}{\text{tg}A}.$$

Përveç kësaj, ai vërtetoi *teoremën e sinusit* për çfarëdo trekëndëshi sferik.

TEOREMË: Për çdo trekëndësh sferik *ABC*, vlen $\dfrac{\sin a}{\sin A} = \dfrac{\sin b}{\sin B} = \dfrac{\sin c}{\sin C}$.

Vërtetimi sipas *Abū'l-Wafā's* është në [1] fq.278.

Tani me *teoremën e sinusit*, *al-Bīrūnī* ishte në gjendje të përcaktojë kiblen, drejtimin e Mekës, nga një lokacion i çfarëdoshëm.

Le të supozojmë se *M* është pozita e Mekës, dhe *P* le të jetë lokacioni i çfarëdoshëm.

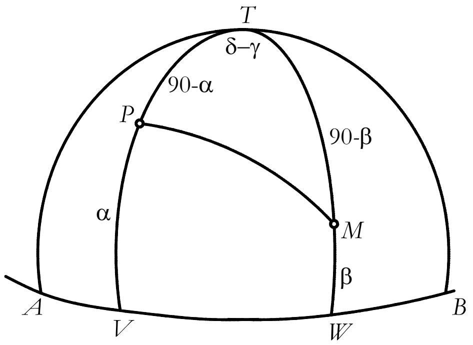


Figura 19

Harku *AB* le të paraqet *ekuatorin* dhe *T* polin e veriut. Le të ndërtohen meridianet nga pika *T* nëpër pikat *P* dhe *M*, përkatësisht. Kibla në sferën e tokës do të jetë $\angle TPM$. Le të supozojmë se dihen gjerësitë gjeografike α dhe β si dhe gjatësitë gjeografike γ dhe δ të *P*-së dhe *M*-së, përkatësisht, atëherë dihen edhe harqet *TP* dhe *TM* ($90^\circ - \alpha$, $90^\circ - \beta$ respektivisht), gjithashtu dihet edhe $\angle PTM$ ($=\delta - \gamma$). Në këtë rast teorema e sinusit nuk mund ta zgjidhte (këtë problem) trekëndëshin *PTM* sepse asnjë kënd i trekëndëshit dhe brinja përballë nuk diheshin. *Al-Bīrūnī*, përdori këtë teoremë në mënyrë të vazhdueshme në disa trekëndësha.

Ne do të përcjellim metodën e *al-Bīrūnīt* duke marr si shembull Jerusalemin si pikë *P* (gjerësia gjeografike $31^\circ 47'$ (Veri), gjatësia gjeografike $35^\circ 13'$ (Lindje)). Në anën tjetër Meka ka gjerësinë gjeografike $21^\circ 25'$ (Veri) dhe gjatësinë gjeografike $39^\circ 49'$ (Lindje).

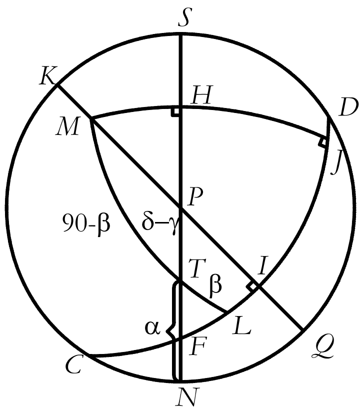


Figura 20

Rrethi *KSQN* le të paraqes rrethin e horizontit të pikës *P* dhe *M* le të jetë *zeniti* i Mekës. Nëse *S* është pika jugore e horizontit (Pika *P* është në veri-perendim të *M*), *N* është pika veriore. Le të paraqesim harqet *PMK* dhe *NPS*. Harku *NK* paraqet kiblën. Rrethi *CFD* le të paraqesë rrethin e horizontit të Mekës dhe rrethi *MHJ* është rrethi i horizontit të *F*-së. Të dhënat e këtij problemi janë: $TN = \alpha = 31^\circ 47'$; $TL = \beta = 21^\circ 25'$; $MT = 90^\circ - \beta = 68^\circ 35'$ dhe $\angle MTH = \delta - \gamma = 4^\circ 36'$.

Meqë *MT*, $\angle MTH$ dhe $\angle THM = 90^\circ$-dihen, duke aplikuar *teoremën e sinusit* për trekëndëshin *MTH* merret

$$\sin MH = \frac{\sin MT \sin \angle MTH}{\sin \angle THM} = 0.07466.$$

Kështu $MH = 4^\circ 17'; HJ = 90^\circ - MH = 85^\circ 43'$.

Meqë $\angle TFL = HJ$ dhe $TL = \angle TLF = 90^\circ$ dihen, zbatimi i *teoremës së sinusit* në trekëndëshin *TFL* jep:

$$\sin TF = \frac{\sin TL \sin \angle TLF}{\sin \angle TFL} = 0.36617$$

kështu që $TF = 21^\circ 29'$, kështu që $FN = \alpha - TF = 10^\circ 18'$ dhe

$$PF = 90^\circ - FN = 79^\circ 42'.$$

Tani aplikojmë *rregullën e katër madhësive* në trekëndëshat *FPI* dhe *FHJ*, dhe meqë dihet *PF*, $FH = 90^\circ$ dhe *HJ*, sin*PI* është përcaktuar sipas shprehjes

$$\sin PI = \frac{\sin PF \sin HJ}{\sin FH} = 0.98114$$

kështu që $PI = 78^\circ 51'$ dhe $IQ = 90^\circ - PI = 11^\circ 9'$.

Ngase *C* – paraqet polin e rrethit *KMPIQ* kështu që $\angle FCN$ ($=IQ$) dihet. Sërish aplikohet *teorema e sinusit* në trekëndëshin *CFN*. Edhe tani dihen tri madhësi: $\angle FCN$, $\angle CFN$ ($= \angle TFL$) dhe *FN*, kështu që madhësia e katërtë *NC* përcaktohet si vijon:

$$\sin NC = \frac{\sin \angle CFN \sin FN}{\sin \angle FCN} = 0.92204$$

Pra, $NC = 67^\circ 14'$ dhe kibla $NK = NC + CK = 67^\circ 14' + 90^\circ = 157^\circ 14'$.

Teorema e sinusit dhe *teorema e katër madhësive*, me rrjedhimet dhe tabelat si dhe funksionet që pasuan nga to u mundësuan matematicientëve islamik të zgjidhin trekëndëshin sferik rezultate që u shfrytëzuan për qëllime të ndryshme praktike si dhe në jetën religjioze.

Në shek. XII këto teorema u gjenden edhe në Spanjë, në veprën e *Abū Muhammad Jābir ibn Aflah al-Ishbīlī* për jetën e të cilit nuk duhet asgjë, përveç faktit që ishte nga Sevila. Libri i tij *Kritik Almagestit të Ptolemeut* u përkthye në gjuhën latine në fund të shekullit dymbëdhjetë dhe kjo i ofroi Europianëve njohuritë që diheshin në vendet islame.

Deri në shek. XIII të gjitha punimet që kishin të bënin në trigonometrinë në rrafsh dhe atë sferike ishin të ndërlidhura me astronominë. Në Shek. XIII shkruhet vepra e parë e ndarë nga astronomia, *Kitāb al shakl al-qitā* (*Studim i Figurave Transversale* nga *Nasir al-Dīn al Tūsī).* Në këtë vepër autori vërtetoi *teoremën e sinusit* për trekëndëshin në rrafsh, të cilën e zbatoi pastaj në zgjidhjen e trekëndëshave në rrafsh. Ai nuk përmendi mundësinë e dy zgjidhjeve, kur dihen dy brinjët dhe këndi përballë njërës prej tyre. Gjithashtu ai nuk përmendi *teoremën e kosinusit.* Në rastet kur paraqitet nevoja për aplikimin e kësaj teoreme ai e ndante trekëndëshin në dy trekëndësha kënddrejtë dhe i përdorte metodat për zgjidhjen e trekëndëshit kënddrejtë.

4.3 TABELAT TRIGONOMETRIKE

Për të zgjidhur probleme të ndryshme nga astronomia dhe gjeografia, përveç formulave për zgjidhjen e trekëndëshit, nevojiteshin edhe tabelat e saktësisë së lartë të cilat u punuan gradualisht. Kështu p.sh., *al-Bīrūnī* ndërtoi *tabelën e sinuseve* në intervale 15' deri në katër shifra pas prerjes dhjetore.

Si edhe tek *kalkulimet e Ptolemeut*, saktësia e tabelave të tilla shumë varej nga saktësia e njehsimit të $\sin 1^\circ$.

Për të njehsuar këtë u përdorën metoda të shumta, por ajo më impressive ishte metoda e al-Kāshīt që daton nga fillimi i shek. XV.

Ai u nis nga shprehja $\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$. Meqë *al-Kāshī* njehsoi tabelat e tij të sinusit duke u bazuar në rrethin me rreze 60, ai duhej të njehsonte $y=60\sin 1^\circ=60x$. Barazimi i tij merrte formën

$$3y - \frac{4y^3}{60^2} = 60\sin 3^\circ \text{ ose}$$

$$y = \frac{900(60\sin 3^\circ) + y^3}{45 \cdot 60}$$

Al - Kāshī në fakt si vlerë të tij për $60\sin 3^\circ$ përdori vlerën e sistemit numerik me bazë 60 dhe mori $y = \dfrac{q - y^3}{p}$ prej nga pastaj vazhdoi të përdorë aparatin algjebrik. (Shih. [1]).

LITERATURA

[1] Victor J. Katz, *A History of Mathematics, An introduction*, 1998, USA

[2] *Elements of Euclid*, English translation

[3] E. J. Borowski, J. M. Borwein, *Dictionary of Mathematics*, 1999, Glasgow

[4] Christopher Clapham, *Oxford Dictionary of Mathematics,* 1996

[5] Glenn Elert, *Ptolemy's Table of Chords*, 1994

[6] Donald Lancon, Jr. *An introduction to the works of Euclid with an emphasis on the Element, 1991*

[7] Aleko Minga, *Mjeshtër të mëdhenjë të matematikës greke*, Tetovë, 1994

[8] Grup autorësh, *Earliest known Uses of Some of the Words of Mathematics*

[9] Grup autorësh, *Arapsko-Islamski Uticaj na Evropsku Renesansu*, përkthimi në boshnjakisht, Sarajevë, 1987

[10] Mark R.Wooderal, *Quotes from the Mathematical Quotations Server*

[11] *Encyclopedia Britannica*, 2000

[12] Mohibullah N. Durrani, *Direction for Kabah (mathematical) from anywhere*, New York, 1995

[13] A. Zahoor, *Quotations on Islamic Civilization*, 1999

[14] R. Bejtullahu, *Astronomia*, për kl.IV gjimnaz, Prishtinë, 1995

[15] W. Dunham, *The Mathematical Universe, An Alphabetical Journey Through the Great Proofs, Problems and Personalities*, John Wiley & Sons, New York, 1994.

[16] J. Daintith, R. D. Nelson, *The Penguin Dictionary of Mathematics*, Penguin Books, England, 1989.

[17] Dirk J. Struik. *A Concise History of Mathematics*, Dover Publications, Inc, New York, 1967

[18] Eli Maor, *Trigonometric Delights*, Princeton University Press, New York, 2002.