LA DÉCOUVERTE DES INCOMMENSURABLES ET LE VERTIGE DE L'INFINI*

Jean-Luc Périllié

Il est communément admis que la découverte et le traitement de l'incommensurabilité est un des plus grands accomplissements de la science mathématique grecque : le peuple hellénique, jeune, initié depuis peu à la géométrie et à la science des nombres, est probablement le seul peuple de l'Antiquité à avoir osé affronter le thème de l'incommensurabilité. Si toutes les connaissances sur les incommensurables sont développées d'une manière discursive et systématique dans les livres X et XIII des *Éléments* d'Euclide, il est cependant fort possible que les découvertes en elles-mêmes ne se soient pas faites avec la sérénité qui animent, en apparence, les grandes productions de l'esprit grec : l'exposé technique des *Éléments* pourrait cacher une rencontre de l'infini vécue d'abord sous le mode du vertige. Comment les Anciens concevaient-ils l'infini mathématique ? Plusieurs conceptions significatives semblent s'être succédé, de l'infini arithmétique rationnel pythagoricien à l'infini géométrique irrationnel platonicien, avec, entre deux, l'infini aporétique zénonien. Il est surprenant, à cet égard, que Platon n'ait pas publié sa conception de l'infini incommensurable élevée à la dimension de principe ontologique. Peut-être y voyait-il une sorte de gouffre vertigineux qu'il préférait ne pas révéler au profane… Quelques rares témoignages platoniciens et présocratiques montrent en tout cas que la prise de conscience de l'incommensurabilité, loin d'avoir été vécue sous le mode de la jubilation archimédienne, aurait bien plutôt fait l'objet d'un scandale, d'une trahison, plongeant momentanément la conscience grecque dans l'absurdité, voire l'obscurité. C'est cette première vision véritablement « tragique » de l'incommensurabilité que nous allons tenter de reconstituer.

De l'infini rationnel au scandale logique

C'est dans le cadre du pythagorisme que l'on peut apprécier toute l'étendue du scandale. S'agit-il vraiment d'une découverte pythagoricienne ? C'est ce qui apparaît tout au moins dans le fameux résumé d'Eudème de Rhodes, exposé le plus ancien d'histoire de la géométrie.

« Après les Milésiens, Pythagore transforma cette étude [la géométrie], et en fit un enseignement libéral ; car il remonta aux principes supérieurs et

* Transcription d'une conférence qui a eu lieu le 16 mai 2001 à Grenoble.

recherecha les théorèmes abstraitement et par l'intelligence pure ; c'est à lui que l'on doit la découverte des irrationnelles et la constructions des figures du cosmos (τὴν τῶν ἀλόγων πραγματείαν καὶ τὴν τῶν κοσμικῶν σχημάτων σύστασιν ἀνεῦρεν[1]). »

Ce passage est considéré par les historiens comme relativement crédible, Eudème de Rhodes étant un disciple immédiat très fiable d'Aristote. Qu'il provienne véritablement d'Eudème, *via* Proclus, cela est peu douteux puisque ce témoignage est relayé par le mathématicien alexandrin Pappus[2] (IIIe siècle) qui donne un exposé similaire en signalant qu'il le doit à Eudème le Péripatéticien, mais en donnant moins de détails sur Pythagore : il parle seulement des Pythagoriciens. Malgré toutes les difficultés rencontrées pour reconstituer l'apport de Pythagore et de son école, on est fondé à admettre, grâce à ces documents, auxquels s'ajoutent d'autres témoignages convergents (certaines scolies des *Éléments* d'Euclide, la légende d'Hippase, que nous examinerons ci-après) que l'école pythagoricienne a joué un rôle primordial[3].

Au départ, les membres de cette école étaient intuitivement convaincus d'une totale adéquation entre les figures et les nombres, aussi représentaient-ils les figures par des nombres et les nombres par des figures : c'est le système des « points figurés ». Les suites arithmétiques correspondaient dès lors à une construction progressive des figures.

Par exemple, le nombre triangulaire figuré 6 s'exprimera par le diagramme suivant :

α
α α
α α α

Ce diagramme correspond à la suite 1, 3, 6, 10, 15… Si on ajoute un *gnomon* (la série d'unités qu'il faut ajouter pour obtenir une figure semblable) égal à 4 ajouté à ce nombre triangulaire[4], on obtient 10, la décade ou tétractys.

α
α α
α α α
α α α α

On reconnaîtra dans ce diagramme la présence des rapports musicaux 4/3, 3/2 et 2/1 en partant de la base.

1. Proclus. *In primum euclidis elementorum librum Commentarii.* Leipzig, Friedlein, Teubner, 1873, p. 65, l. 15-21.

2. Pappus. *Commentaire au Xe livre des* Éléments *d'Euclide*. Trad. française de Woepcke d'une version arabe, *Essai d'une restitution des travaux perdus d'Apollonius*, 1856. p. 662-663.

3. On pourra encore signaler que l'hypothèse de la datation ancienne, pré-platonicienne, de la découverte de l'irrationalité est confirmée par le fait que Démocrite, né en 470, aurait écrit un ouvrage sur l'irrationalité (*Die Fragmente des Vorsokratiker* [désormais noté *DK*], par H. Diels, 6e éd. revue par W. Kranz, Berlin, 1951-1952, 68 B11).

4. Voir Nicomaque de Gérase. *Introduction à l'arithmétique*. Livre II, chap. VIII. La série des gnomons est la suite des entiers naturels (2, 3, 4, 5,…) et le nombre triangulaire suivant sera donné par la formule : $\frac{n\,(n+1)}{2}$

C'est sur ce fondement musical et arithmo-géométrique, que les Pythagoriciens ont constitué toute leur philosophie du Nombre[5].

Voyons rapidement comment l'utilisation de ce système peut avoir débouché sur la découverte du fameux théorème dit « de Pythagore ». Celui-ci l'a-t-il vraiment découvert ? Il est difficile de l'attribuer à Pythagore en personne dans sa formulation euclidienne, mais on pense que le mathématicien présocratique est arrivé au moins à le formuler au niveau des triangles rectangles rationnels[6] : 3 – 4 – 5 ; 5 – 12 – 13 ; 7 – 24 – 25 ; etc. Sa découverte n'est pas une démonstration, mais une *monstration* en comptant le nombre des points figurés carrés que l'on peut construire sur chaque côté du triangle rationnel.

Le philosophe cependant a dû très vite s'apercevoir que cette propriété des nombres carrés ne pouvait s'appliquer aussi facilement au triangle rectangle isocèle, c'est-à-dire à la diagonale du carré, car on ne trouvera plus un nombre ou un rapport mesurable d'unités-points pour cette diagonale. Telle est la révélation la plus élémentaire de l'incommensurabilité. La question est donc de savoir comment celle-ci, dans la mesure où elle a été découverte d'une manière très inattendue, a pu être intégrée dans un système philosophique reposant sur la domination du nombre.

Un enseignement énigmatique révèle que pour les Pythagoriciens, les principes numériques de base sont la Monade et la Dyade indéfinie (*DK* 58 B 1a, 14, 15). Il est vrai qu'Aristote (*DK* 58B 13 = *Métaphysique* A 987 b 22 *sq.*) semble plutôt attribuer cette doctrine aux *ágrapha dógmata* (à l'enseignement oral de Platon). Mais on a quelques raisons de penser (en particulier grâce à l'autorité de Théophraste) que la théorie des principes appartenait bien aux Pythagoriciens, mais sous une forme beaucoup plus simple que chez Platon. Elle renverrait, d'après une étude de Paul Kucharsky[7], à l'opposition entre *nombres carrés* et *nombres oblongs* (de la table des contraires[8]), nombres carrés avec gnomons impairs et nombres oblongs avec

5. Aristote. *Métaphysique.* A 987 b 27-28 : « οἱ δ᾽ ἀριθμοὺς εἶναι φασιν αὐτὰ τὰ πράγματα. » et 987 b 11-12 : « οἱ μὲν γὰρ Πυθαγόρειοι μιμήσει τὰ ὄντα φασὶν εἶναι τῶν ἀριθμῶν. »

6. Tous les historiens restent très sceptiques, à juste titre, en ce qui concerne une preuve géométrique en bonne et due forme dès la haute période du pythagorisme. Cependant, les anciens Pythagoriciens auraient remarqué les propriétés spécifiques du triangle sacré 3-4-5, en disposant des galets à la manière d'Eurytos, et en auraient tiré une méthode globale d'évaluation des rapports entre côtés plutôt qu'une preuve apodictique. Voir Burkert W. *Lore and Science in Ancient Pythagoreanism*. Cambridge (Massachusetts) 1972. Trad. anglaise de l'édition allemande de 1962. p. 427-340

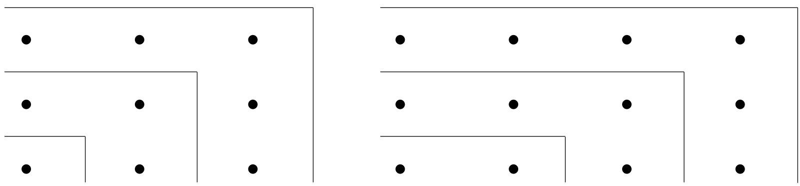
7. Kucharsky P. Les Principes des Pythagoriciens et la Dyade chez Platon, *Les Archives de la philosophie*, Paris, 1959, n° 22. Première partie, p. 175-191 – deuxième partie, p. 385 *sq*. Travail qui se situe dans le prolongement des analyses développées dans l'important ouvrage de Léon Robin. *La Théorie platonicienne des idées et des nombres d'après Aristote*, Paris, 1908.

8. Aristote. *Métaphysique*. A, V, 986 a22. On remarquera qu'on ne trouve pas dans cette table qui date, d'après Aristote, du tout début du Vᵉ siècle, l'opposition du rationnel et de l'irrationnel. Citons quelques contraires (parmi les dix) qui nous intéressent plus spécialement :

πέρας καὶ ἄπειρον	limitant et illimité
περριτὸν καὶ ἄρτιον	impair et pair
φῶς καὶ σκότος	lumière et ténèbres
ἀγαθὸν καὶ κακόν	bien et mal
τετράγωνον καὶ ἑτερόμηκες	carré et oblong

gnomons pairs. Le gnomon sera ici une figure en équerre qui permet de reproduire un nombre figuré semblable en l'encadrant. On remarque qu'au moyen de ces gnomons pairs et impairs, toute la série infinie des nombres entiers est parcourue génétiquement. Mais ce qui importe, c'est que le principe ou la base est soit la Monade pour les nombres carrés, soit la Dyade pour les nombres oblongs. Or, d'un côté les nombres carrés sont toujours semblables géométriquement (ils obéissent à la loi du limitant, du *péras*), alors que les nombres oblongs obéissent à la loi de l'illimité (*ápeiron*), car leur forme évolue sans cesse et n'est jamais strictement semblable.

Figure 1



nombres carrés avec la monade comme principe — nombres oblongs avec la dyade comme principe

Philosophiquement, les premiers Pythagoriciens voyaient certainement dans l'indéfini (simple et rationnel) des figures oblongues le principe de toute dissemblance existante, par opposition à la similitude des nombres carrés également égaux, principe de toute similitude. Or, dans son enseignement oral, Platon, d'après Aristote, substitue à l'infini pythagoricien qui était conçu *comme un* ὥς ἑνός, une dyade, c'est-à-dire un *apeiron* qui provient du Grand et du Petit (τὸ ἄπειρον ἐκ τοῦ μεγάλου καὶ μικροῦ). Ce qui voudrait dire qu'il enrichit le thème de *l'infini* pythagoricien : il le saisit comme double à travers l'opposition du Grand et du Petit. Que sont alors le Grand et le Petit ? Ce sont très vraisemblablement les principes fondamentaux de toutes les variations existantes du plus et du moins, substrat indéfini à partir duquel tous les êtres limités, en particulier les Nombres, et même les Idées seront produits dans le cadre de la γένεσις εἰς οὐσίαν comme cela est dit dans le *Philèbe* en 26d (« ce qui vient à l'être par l'effet des mesures qu'introduit le Limitant » : μέτα τοῦ πέρατος). En effet, certains passages du *Philèbe* (seul dialogue dans lequel Platon reprend les notions du *péras* et de l'*ápeiron* de son enseignement oral) laissent à entendre que le Grand et le Petit correspondent au fond irrationnel de toute réalité comme *substratum* mouvant qui reçoit l'action du Limitant pour produire le Nombre, car il est dit que la fonction du Limitant (τὸ πέρας) « est de rendre commensurables et consonants les contraires en y introduisant le Nombre (τἀναντία… σύμμετρα δὲ καὶ σύμφωνα ἐνθεῖσα ἀριθμὸν ἀπεργάζεται) » [25e]. En somme, les contraires sont le Grand et le Petit qui, sous la domination du Limitant, sont transformés en Nombres. La genèse des Nombres et des êtres finis à partir des deux principes fondamentaux de la Monade et de la Dyade indéfinie, celle-ci étant conçue comme *substratum* incommensurable, tel serait l'apport de Platon qu'Aristote signale d'une manière très elliptique dans la *Métaphysique*[9]. Au vu de ces textes, on comprendra que Platon dans son système pythagorisant des principes va intégrer la notion d'incommensurabilité « que les premiers Pythagoriciens n'avaient pas pu envisager » : il passe dès lors de l'*ápeiron* rationnel des nombres figurés à l'*ápeiron* incommensurable du Grand et du Petit, du Plus et du Moins.

En conséquence, ce passage de la *Métaphysique* sur lequel nous nous sommes arrêtés, suggère finalement que, chez les Pythagoriciens, l'incommensurabilité était restée un problème non résolu (donc impossible à intégrer dans leur théorie des principes comme dans leur table des contraires), surtout parce que, dans le cadre de leur théorie première des nombres figurés, ils ne pouvaient concevoir l'existence d'une telle propriété. Il y a là tous les signes d'une contradiction doctrinale, à savoir que ces mathématiciens connaissaient les irrationnelles, mais ont dû conserver une philosophie des principes issue de Pythagore, qui ignorait totalement cette propriété[10]. Un tel hiatus se comprend aisément : un préjugé fortement enraciné ne se détruit pas du jour au lendemain. Il est évident que, dans leur conception du départ, ces premiers mathématiciens s'appuyaient, comme tout homme non instruit, sur le principe empirique et intuitif que toute grandeur correspond inévitablement à un nombre et à une mesure.

C'est ce qu'a remarqué Paul Tannery[11] : « Comme le montrent leurs travaux sur la figuration des nombres et leur célèbre définition du point – l'unité ayant une position – les Pythagoriciens sont partis de l'idée, naturelle à tout homme non instruit, que toute longueur est nécessairement commensurable à l'unité. »

Aussi Tannery est le premier érudit à avoir avancé, pour la découverte de l'incommensurabilité, l'idée de « scandale logique », ce que l'on pourrait encore appeler « crise des fondements ». Et il parle à juste titre d'une découverte qui pose moins problème au niveau de sa difficulté intrinsèque (puis-

9. À première vue, d'après le *Philèbe*, cette genèse des êtres ne concerne que le domaine du sensible, mais la doctrine platonicienne des deux principes doit pouvoir s'appliquer à tout le réel intelligible et sensible (voir Aristote, *Métaphysique*. A 6, 987 b 15 *sq.*), notamment avec la genèse des nombres idéaux. Voir Kucharsky P. *Op. cit.*, p. 423 *sq*. La Dyade indéfinie platonicienne est dès lors fondamentalement l'incommensurabilité, d'une part dans l'intelligible en tant qu'elle peut être totalement convertie en nombres et en *lógoi* ; d'autre part dans le sensible en tant qu'elle ne peut l'être complètement, notamment dans les surfaces (diagonales des figures régulières), les volumes et principalement dans « le fond irrationnel et inconnaissable de toute réalité » (*Théétète* 202b). Voir *infra* notes 26 et 39. Consécutivement à la découverte des incommensurables, il se peut néanmoins que les Pythagoriciens aient assimilé ceux-ci à *l'apeiron*, avant Platon, comme le suggère un passage de Jamblique (*De Vita Pythagorica.* Leipzig : Teubner, 1937. § 179, 8-11).

10. On verra à la fin du Vᵉ siècle, au moment où la connaissance des irrationnelles était tombée dans le domaine public, un Pythagoricien, Eurytos (*DK* 45, 3), conserver le système archaïque des unités-points, les *psephoi*, certainement par vénération pour la doctrine du maître. Voir Burnet J. *Aurore de la philosophie grecque*. Trad. française. Paris : Payot, 1970. p. 113.

11. Tannery P. *Mémoires scientifiques*. Paris-Toulouse : E. Privat, 1912. I. p. 268.

qu'elle découle directement de la généralisation du théorème de Pythagore) qu'au niveau du préjugé, qui est en réalité d'autant plus indéracinable que l'expérience montre qu'une mesure des longueurs est toujours possible (par approximation pratique). Et il paraît à première vue inconcevable qu'à une longueur géométrique donnée, la diagonale du carré que les Grecs appelaient par surcroît *diámetros* (ce qui se mesure de part et d'autre de la figure), il ne puisse correspondre aucun nombre, aucune mesure exacte à partir de celle du côté.

On notera que les Pythagoriciens auraient parfaitement admis que le nombre de la diagonale ne fût pas un entier, qu'il fût seulement fractionnaire, ce qu'ils appelaient un *lógos*. En revanche, ils n'ont jamais conçu l'idée de « nombre irrationnel », comme lorsqu'on parle aujourd'hui du « nombre d'or » ou du nombre π, mais seulement l'idée de grandeurs irrationnelles ou incommensurables. Soit il y a nombre et, par conséquent, commensurabilité, soit il y a incommensurabilité et il n'y a pas de nombre. Les deux notions s'excluent mutuellement dans l'esprit des Pythagoriciens, comme chez Platon[12]. Donc, qu'il n'y ait pas de nombre correspondant à telle grandeur donnée devait relever pour eux du plus grand des scandales. Il est vrai que les textes ne parlent pas, à proprement parler, de « scandale ». Platon et Aristote parlent seulement « d'étonnement » (θαυμάζειν[13]). Mais, comme nous le verrons, il y avait chez ces deux penseurs un parti pris de dédramatisation par rapport à une première perception beaucoup plus tragique de l'irrationnelle. Pour saisir cette première impression de scandale, il faut remonter à une légende relative au personnage d'Hippase de Métaponte dans laquelle surgissent les notions de « trahison » et « d'absurdité ».

Trahison

Cette légende est rapportée par Jamblique dans deux passages de sa *Vie de Pythagore*[14] : un Pythagoricien nommé Hippase de Métaponte aurait péri en mer, en raison de son impiété, pour avoir révélé le secret de la construction

12. On trouve cette vision exclusive des Anciens dans le passage d'Aristote, *Métaphysique* Δ 1021a5 : ὁ γὰρ ἀριθμὸς σύμμετρος, κατὰ μὴ συμμέτρου δὲ ἀριθμὸς οὐ λέγεται (texte corrompu, correction d'Apelt : σύμμετρων σύμμετρου) [« En effet, tout nombre entier est commensurable, mais pour les grandeurs incommensurables, aucun nombre ne peut les exprimer » (trad. de J. Tricot)]. En revanche, Théétète introduira d'une certaine manière l'idée de nombre irrationnel. Voir *infra*, note 32.

13. Voir *infra*, p. 24 *sq*. Platon. *Lois*, VII, 819 d6 ; voir *infra*, note 34 ; Aristote, *Métaphysique*, A, 983 a 15. On notera que le terme grec θαυμάζειν comme le terme français « étonnement » (être frappé par le tonnerre) sont des termes forts qui expriment un bouleversement de l'esprit dépassant de loin la simple surprise

14. Jamblique. *De Vita Pythagorica* § 88, 246, 247 et *De communi mathematica scientia*. § 25. Teubner = Fragment *DK* 18 4. Sur l'authenticité du témoignage, Armand Delatte voit comme source Timée de Tauroménium, probablement parce que l'anecdote intervient à l'alinéa § 246 juste après une remarque qui rappelle la lettre de Lysis à Hipparchos, lettre qui aurait été utilisée par Timée. Voir Delatte A. *Études sur la littérature pythagoricienne*. Paris : E. Champion, 1915. p. 92, note 2 (voir *infra*, note 22). Timée vécut de 356 à 260. On lui doit une *Histoire des Grecs en Sicile et en Italie* en trente-huit volumes dont il ne reste que des fragments.

du dodécaèdre[15] – construction dont la paternité revenait à « celui-là », c'est-à-dire Pythagore. Une autre tradition voisine nous apprend que celui (Hippase ou un autre ?) qui aurait révélé la nature de l'incommensurabilité à des gens indignes de recevoir un tel enseignement aurait été exclu de la confrérie, et les membres de la secte lui auraient même érigé un tombeau pour lui signifier sa mort spirituelle…

On peut comprendre que ces traditions sur le secret et sur la mort d'un ou de plusieurs traîtres qui l'ont divulgué, comme la première expression imagée d'un traumatisme, comme le reflet du choc que la découverte de l'irrationalité aurait provoqué. À savoir que l'irrationalité est quelque chose de *littéralement impensable* et, en réalité, il faut admettre que ce n'est pas seulement la communauté pythagoricienne qui aurait été trahie par la divulgation d'Hippase, mais bien l'esprit grec dans sa totalité. En effet, on peut comprendre en profondeur dans cette légende que c'est la découverte même de l'irrationalité (qui doit revenir à Hippase[16] plus qu'à Pythagore) qui aurait été perçue dans la conscience grecque comme la plus grande trahison. L'explication en est simple : c'est toute la vision rationnelle du monde instaurée en particulier par Pythagore qui risquait de s'effondrer d'un seul coup. Une telle découverte, une telle impiété ne méritait que la mort, symbolique ou non, et la vengeance la plus sévère de la divinité. Autrement dit, la légende sur la trahison d'Hippase est bien la première expression du scandale du fait même de l'existence de l'irrationnelle : les Grecs se sont sentis profondément trompés par la découverte mathématique et Hippase, tout savant qu'il fût, ne serait que le lampiste à qui ils ont fait porter la responsabilité de cette humiliation de la raison. En cela, la légende d'Hippase doit être prise pour ce qu'elle est : une légende qui demande avant tout à être interprétée dans son sens symbolique, même si un fond historique n'est pas absent. Et, quand bien même la teneur historique serait discutable, la légende resterait en elle-même profondément vraie par ce qu'elle révèle sur l'état psychologique troublé des anciens Grecs face à l'incommensurable. En ce qui concerne le secret, celui-ci ne pouvait être perçu que comme la conséquence nécessaire de la découverte – conséquence qui est à interpréter, elle aussi, dans son sens symbolique. D'ailleurs, cette dimension symbolique du secret n'aurait pas échappé aux Pythagoriciens eux-mêmes.

C'est ce que nous explique un extrait de Pappus d'Alexandrie : *« Indeed the sect of Pythagoras was so affected by its reverence for this things that a saying became current in it, namely, that he who first disclosed the knowledge*

15. Il s'agit d'une des figures cosmiques pythagoriciennes dont la construction géométrique exige le maniement d'un incommensurable, la « section d'or ». Sur la connaissance des Anciens de cette grandeur irrationnelle, consulter mon article : « Platon et la section d'or ». In M. Fattal (dir.). *La Philosophie de Platon.* Paris : L'Harmattan, 2001.

16. Voir von Fritz K. The Discovery of Incommensurability by Hippasus of Metapontum. In *Annals of Mathematics*. April 1945. Vol. 46, n° 2, p. 242 *sq*. Cette étude magistrale sur le plan historique et scientifique laisse cependant de côté la dimension symbolique de la légende, qui me paraît fondamentale.

of surds or irrationals and spread it abroad among the common herd perished by drowning. Which is most probably a parabole by which they sought to express their conviction that firstly, it is better to conceal (or veil) every surd, or irrational, or inconceivable in the universe, and secondly, that the soul which by error or heedlessness discovers or reveals anything of this nature which is in it or in the world, wanders (thereafter) hither and thither on the sea of non-identity (lacking all similarity of quality or accident), immersed in the stream of the coming-to-be and passing-away[17]*, where there is no standard of measurement. This was the consideration which Pythagoreans and the Athenian Stranger*[18] *held to be an incentive to particular care and concern for these things*[19]*.* »

Il est clair que les Pythagoriciens avaient eux-mêmes compris qu'il y avait là une parabole, si ce n'est qu'ils avaient limité leur visée interprétative au secret et au fait pour le traître de périr en mer, alors que toute la légende est elle-même symbolique. À l'évidence, on voit qu'à l'époque d'Hippase (début du Ve siècle av. J.-C.), les Anciens vivaient essentiellement dans le symbole : ils accomplissaient des actes symboliques (le tombeau pour celui qui est mort pour la secte), ils créaient des symboles de toutes pièces, percevaient d'emblée la portée symbolique d'un geste ou d'un événement. On notera, à cet égard, l'importance du *súmbolon* (*pentalpha* ou pentagone étoilé[20]) et des *acousamata* (*DK* 58 C 4-6) qui sont essentiellement des symboles, dont les formules archaïques remontent à la première époque pythagoricienne.

Dans leur interprétation de la noyade du traître, ce que les adeptes de la secte ressentaient en plus de la trahison et du scandale, c'est la nécessité de « cacher la connaissance » en raison d'une grande inquiétude face aux irrationnelles, perçues comme en soi « absurdes et inconcevables ». Les Pythagoriciens auraient craint, comme plus tard Platon, que cette découverte jetât le trouble dans les esprits. La question est de savoir si les Pythagoriciens voilaient la connaissance parce que celle-ci contredisait leur

17. « *The coming-to-be and passing-away* » sont des concepts platoniciens du *Théétète* (153a6-7) : « τὸ γίγνεσθαι καὶ ἀπολλυσθαι». Ils correspondent au mobilisme d'Héraclite, de Protagoras, d'Homère etc. qui prétendent que « toutes choses sont nées du flux et du mouvement ».

18. Il s'agit de l'Étranger d'Athènes des *Lois* (819d) de Platon qui vient proposer aux Crétois une meilleure conception de l'apprentissage des mathématiques et qui déplore de ne pas avoir été initié plus tôt à l'incommensurabilité : voir *infra,* note 34 et Junge G. Von Hippasus bis Philolaus : Das Irrationale und die geometrischen Grundbegriffe, *Classica et Medievalia*. 1958, n° 19, p. 53-54. Junge fait remarquer que la légende présente une contradiction, car l'Étranger d'Athènes milite plutôt en faveur d'une vulgarisation de l'incommensurabilité. Ce récit refléterait par là même l'attitude contrastée du platonisme à cet égard – attitude que je vais essayer d'élucider ici même. Par sa symbolique, la légende paraît typiquement pythagoricienne, mais elle s'est chargée d'éléments platoniciens plus ou moins contradictoires.

19. Traduction anglaise de G. Junge et W. Thomson, à partir de la version arabe. In Pappus. *Commentary on Euclid X*. Cambridge. 1930. Voir aussi la scolie 417 des *Éléments*, *Euclidis. Opera* T. V. Éd. Heiberg. 1888. Voir Burkert W. *Op. cit.*, p. 457-458.

20. Lucien. *Pro Lapsu inter Salut*. Éd. Jacobitz. i 330, II-14. La part du symbolique est ici surdéterminée : la légende est un symbole concernant la révélation de la structure mathématique d'un symbole.

théorie du nombre ou si c'était uniquement pour ne pas égarer les esprits qui risquaient, à la suite de cette révélation, de sombrer dans l'abîme de «la mer de la dissemblance», comme cela est dit dans ce passage. Nous penchons pour la seconde solution, car, paradoxalement, les membres de l'école n'auraient pas vraiment adopté entre eux une attitude de censure ou de refoulement face à l'irrationnelle (puisque leurs symboles, signes de reconnaissances, étaient des figures, dont les diagonales étaient manifestement irrationnelles comme le pentagone, le carré ou le dodécaèdre). Sur ce point, Paul-Henri Michel, «successeur» de Paul Tannery, distingue deux conceptions du scandale: l'un est logique et légitime, l'autre est révolté et malsain (c'est l'oblitération d'un fait qui remet en question une doctrine préétablie[21]). Cet auteur montre que l'on ne peut accuser les Pythagoriciens d'avoir caché les irrationnelles en raison de la contradiction doctrinale, par une sorte de mauvaise conscience. Ce serait en plus porter contre eux une accusation très grave et insuffisamment fondée: la conscience malheureuse n'implique pas forcément la mauvaise conscience. Comme l'indique le passage de Pappus, les Pythagoriciens et Platon auraient eu bien plutôt une révérence, une vénération pour les figures dont ils connaissaient l'intime irrationalité. Ce qui devait les conforter, c'est que ces figures étaient d'abord régulières, parfaites et qu'elles exprimaient en premier lieu la toute-puissance du nombre. Par là même, en tant que figures cosmiques, elles étaient perçues comme dotées d'un haut pouvoir symbolique par leur expression première des nombres harmoniques ou transcendants: 12 (dodécaèdre), 5 (pentagone), 4 (carré, tétraèdre), 6 (cube). Étant conscients de l'irrationalité interne de ces figures, celles-ci devaient révéler à leurs yeux tout le mystère du réel, la subsomption de l'infini par le fini, de l'incommensurable par le commensurable. Si cette connaissance devait rester cachée du profane, c'est d'abord parce qu'il y avait à l'époque, chez les Pythagoriciens comme plus tard chez Platon, une conception sélective de la transmission orale du savoir qui n'est pas la nôtre[22]. Mais, en plus, ces philosophes mystiques pouvaient soupçonner, à juste titre, que le profane ne l'entendît pas ainsi et que, négligeant la domination du nombre sur l'incommensurable, il s'engouffrât dans la brèche de l'irrationalité. En conséquence, c'est toute la conception cosmo-théologique de la *communion rationnelle* des êtres, de la κοινωνια pythagoricienne dont Platon parle dans le *Gorgias* (508a), qui pouvait être mise à mal.

21. Michel. P.-H. *De Pythagore à Euclide*. Paris: Les Belles Lettres, 1950. p. 486.

22. Voir à ce sujet la *Lettre de Lysis à Hipparchos* (Jamblique. *Vie de Pythagore.* § 75-78) écrite par un Pythagoricien traditionaliste du IVe siècle av. J.-C., d'après Armand Delatte (*op. cit.*, p. 103) invoquant l'autorité de Lysis (Ve siècle). Cette lettre nous aurait été transmise par Timée de Tauroménium. On notera cependant la teneur très platonicienne de la critique de la sophistique: «Les sophistes […] attrapent les jeunes gens dans leur nasse sans convenance ni justesse. C'est pourquoi ils rendent malveillants et téméraires leurs auditeurs. En effet, ils déversent en des personnalités instables et troubles des savoirs et des doctrines divins, tout comme si quelqu'un versait dans un puits profond rempli de boue une eau pure et limpide» [trad. L. Brisson]. Voir Richard M.-D. *L'Enseignement oral de Platon*. Paris: Cerf, 1986. p. 49 *sq*.

Absurdité

Ainsi la légende d'Hippase donne un aperçu assez instructif sur l'importance du choc et du malaise face à l'émergence de l'irrationnel. Cependant, pour aller plus en avant dans l'analyse des sentiments que les Grecs ont pu ressentir, notamment du point de vue de l'*absurde* dont parle Pappus (*surd* [23]), il nous faut interroger les preuves de l'incommensurabilité, telles qu'elles ont pu être conçues durant cette haute époque de la science grecque.

Une véritable preuve mathématique de l'incommensurabilité de la diagonale du carré a été formulée par les Grecs (probablement au Vᵉ siècle). C'est une preuve qui inaugure la mathématique purement déductive, appelée preuve apagogique (ἀπαγωγή : déviance absurde). Aristote en fait un exposé allusif dans les *Premiers analytiques* (41a 21-37) – mais elle sera plus tard exposée en bonne et due forme dans un appendice du livre X des *Éléments* d'Euclide. Elle aboutit, en posant $\sqrt{2} = m/n$ (avec m et n premiers entre eux), à la considération que les nombres m et n sont à la fois pairs et impairs.

$\sqrt{2}$ situé entre 1 et 2 $= m/n$ avec m et n commensurables et premiers entre eux.

On suppose m pair donc n est impair.

$(m/n)^2 = 2 = m^2/n^2 \Leftrightarrow m^2 = 2n^2$. Si m^2 est un carré pair, il est divisible par 4, car tous les carrés pairs sont divisibles par 4.

Même chose pour $2n^2$ qui est égal à m^2, donc n^2 est divisible par 2, donc n est pair.

On a là un très ancien exemple de démonstration par l'absurde et c'est pour expliquer ce qu'est une preuve « hypothétique » qu'Aristote donne cet exemple (l'absurdité de la conclusion : n à la fois pair et impair, implique la fausseté de la prémisse qui postule que m et n commensurables : donc m et n sont incommensurables). On a pu remarquer le caractère pythagoricien de la terminologie de la preuve (table des contraires avec l'opposition du pair et de l'impair et le fragment 5 de Philolaos [m^2 : est pairement pair – divisible par 4 –, alors que $2n^2$ est censé être un pair-impair[24]]) ; on a remarqué aussi l'arithmétisme de la preuve : autre gage de pythagorisme. Cependant, cette preuve apagogique ne peut pas facilement être rapportée au premier pythagorisme (avant la dissolution de la secte au milieu du Vᵉ siècle) : pour la plupart des historiens, elle serait plus tardive puisqu'elle intègre le raisonnement par l'absurde qui a été certainement développé par l'école éléatique.

En tout cas, ce que nous révèle la preuve, c'est qu'il n'y a pas de nombres identifiables : l'incommensurable est un ἄρρητον, un *inexprimable*.

23. Le terme *surd* est en fait le terme anglais d'origine latine qui traduit l'arabe *asamm* qui veut dire sourd, ineffable : traduction arabe du grec ἄρρητον (inexprimable). Mais étymologiquement, l'absurde est ce qui est sourd, en dehors du ton.
24. Voir aussi *DK* 44A13, *DK* 58 B2, 58B5, 58B22.

Cependant, les Pythagoriciens n'en sont pas restés là. Ils ont trouvé au moins un algorithme d'approximation progressive, c'est la méthode des nombres diagonaux et latéraux.

Soit une figure triangulaire : un pseudo-triangle rectangle isocèle. En utilisant les propriétés de la figure ci-dessous, il s'agit d'introduire une sorte de commensurabilité factice en supposant le côté et la diagonale $a = d = 1$ et en construisant des figures d_1, d_2, d_3… qui s'approchent de plus un plus du triangle rectangle isocèle.

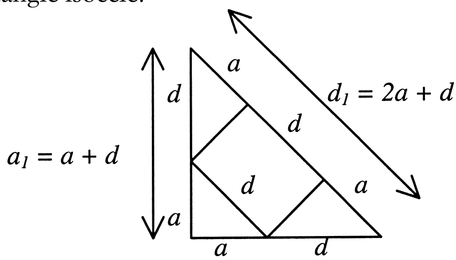


Figure 2

$d_1 = 2a + d = 2 \text{ x } 1 + 1 = 3$ $\quad a_1 = 1 + 1 = 2$

$d_2 = 2a_1 + d_1 = 2 \text{ x } 2 + 3 = 7$ $\quad a_2 = 2 + 3 = 5$

(approximations de Platon)

$d_3 = 2 \text{ x } 5 + 7 = 17$ $\quad a_3 = 5 + 7 = 12$

$d_4 = 2 \text{ x} 12 + 17 = 41$ $\quad a_4 = 12 + 17 = 29$

Signalons les différences entre les carrés des *diagonales rationnelles* (διαμέτρων ῥητῶν) et ceux des *diagonales irrationnelles* (ἄρρητον), en prenant le théorème de Pythagore :

$d_1^2 = (2a + d)^2 = 9$ $\quad a_1^2 + a_1^2 = 2a_1^2 = 8$ différence : + 1

$d_2^2 = (2a_1 + d_1)^2 = 49$ $\quad 2a_2^2 = 50$ différence : – 1

(diagonale rationnelle et diagonale irrationnelle de Platon)

$d_3^2 = (2a_2 + d_2)^2 = 289$ $\quad 2a_3^2 = 288$ différence : + 1

$d_4^2 = (2a_3 + d_3)^2 = 1681$ $\quad 2a_4^2 = 1682$ différence : – 1

On distingue donc bien les « diagonales rationnelles et irrationnelles » du livre VIII de la *République* (546c) – passage obscur fortement imprégné de mysticisme pythagoricien[25]. Apparaît dès lors une véritable preuve périodique (+1, -1, +1…) de l'incommensurabilité. En plus, on remarquera la propriété suivante : l'irrationnel $\sqrt{2}$ est toujours encadré en excès et en défaut par des rapports rationnels (*lógoi*) : 1 défaut, 3/2 (1,5) excès, 7/5 (1,4) défaut,

25. L'algorithme des nombres latéraux et diagonaux s'appuie sur le principe pythagoricien de la Monade, « comme principe de toutes les figures, selon la raison suprême et génératrice » (Théon. *Exposition des connaissances mathématiques utiles pour la lecture de Platon*. Texte grec et traduction. Paris : J. Dupuis, 1892 : πάντων τῶν σχημάτων κατὰ τὸν ἀνωτάτω καὶ σπερματικὸν λόγον ἡ μονάς ἄρχει). I, XXXI, p. 70 = Hiller p. 43 (5-7).

17/12 (1,417) excès, 41/29 (1,413) défaut, 99/70 (1,41428) excès, 239/169 (1,41420…) défaut[26]…

Il y a là, il me semble, un lien troublant entre cette procédure d'approximation de l'irrationnelle (qui progresse indéfiniment vers une limite jamais atteinte) et l'aporie d'Achille et de la tortue de Zénon d'Élée, dans laquelle on voit bien deux positions (le plus et le moins, soit le plus rapide et le moins rapide) qui s'approchent indéfiniment l'une de l'autre sans jamais parvenir à se rencontrer…

En effet, qu'est-ce qui peut avoir donné à Zénon une telle idée de comparer la course paradoxale d'Achille et de la tortue, sinon l'exemple d'une limite jamais atteinte poursuivie par deux mouvements évolutifs qui devraient normalement se rencontrer et qui n'y parviennent pas ? Pour avoir imaginé que jamais le coureur le plus rapide ne parviendra à dépasser le moins rapide, il fallait que cette idée fût suggérée par un algorithme d'approximation à double progression. En soi, elle n'est pas naturelle, elle ne peut venir spontanément à l'esprit, sans une cause mathématique[27]. Il est vrai que l'approximation du plus et du moins ne va pas dans le même sens dans l'algorithme, alors qu'Achille et la tortue vont dans le même sens. Mais on peut très bien comprendre que Zénon, ayant pris connaissance de cet algorithme d'approximation, l'a trouvé tellement inconcevable, qu'il a cherché par tous les moyens à le caricaturer en révélant ce qui, pour lui, relevait de la plus totale absurdité. Que cet algorithme ait provoqué une telle réaction n'est en soi pas étonnant, car les Grecs n'ont jamais vraiment accepté l'idée d'une progression vers une limite : cela heurtait totalement leur sens de l'exactitude mathématique, selon lequel la perfection ne peut résider que dans le fini, le pondérable, le mesuré.

En tout cas, il a été remarqué que les arguments aporétiques de Zénon devaient combattre deux conceptions pythagoriciennes contemporaines : d'une part, celles des unités-points, les indivisibles des nombres figurés ; d'autre part, les conceptions de la division *ad infinitum* de la ligne qui ne peut résulter que de la découverte des irrationnelles.

26. Cet algorithme pourrait nous fournir quelques explications supplémentaires sur le sens mathématique de la notion platonicienne de la *Dyade indéfinie du Grand et du Petit*. C'est en cela qu'il y a pour Platon, un Plus et un Moins ou le Grand et le Petit transformés en Nombres par la procédure d'approximation. L'irrationnelle pure pour lui n'est pas un nombre, mais le *substratum* mouvant du Plus et du Moins vers l'excès et le défaut que les nombres discrets cernent de plus en plus avec des *lógoi*, sans jamais le saisir réellement. L'incommensurabilité en ce sens est véritablement une dyade indéfinie et le nombre commensurable qui approche l'incommensurable est un nombre en devenir qui oscille entre le plus et le moins : c'est la « production d'un *metrion* », comme cela est dit dans le *Politique* (284c1).

27. Rey Abel. *La Jeunesse de la science grecque*. Paris : Albin Michel. 1933. p. 197. Rey analyse particulièrement l'argument de la divisibilité infinie, exprimé dans le fragment 3, qui suppose une prise de conscience préalable de l'incommensurable : « L'argumentation de Zénon, en visant la divisibilité à l'infini, fait apparaître que, contrairement à une représentation archaïque, l'esprit s'était élevé à la conception de quelque chose que le nombre chiffrable et énonçable ne peut atteindre ni mesurer, à la construction conceptuelle d'une relation incommensurable. »

C'est une thèse célèbre défendue jadis (en 1933) par Abel Rey : « L'argumentation de Zénon vise deux interprétations pythagoriciennes : celle qui s'appuie sur le nombre nombré, fini, sur les indivisibles, l'interprétation archaïque, et celle qui, plus savante, fait état des innovations de la mathématique, mais des innovations tombées déjà dans le domaine courant, car Zénon, pas plus que Parménide, n'a fait figure de mathématicien[28]. »

Avec l'irrationnelle, l'infinie division de la droite cesse dès lors d'être arbitraire, inutile, comme lorsqu'on se complaît à diviser indéfiniment l'unité de mesure qui n'a pas à être divisée (voir Platon, *République,* VII, 525e) : elle s'impose dans toute sa densité ontologique. Elle devient nécessaire, une contrainte mathématique incontournable. Pour établir une mesure approximative de la diagonale, il faut délimiter des intervalles, des *lógoi* de plus en plus précis, et cela à l'infini. Cependant, une telle propriété, même nécessaire, n'a pas pu être acceptée sans de violentes réactions… On remarque en plus que Zénon semble avoir cherché à poser les bases de la commensurabilité, car il est dit dans certains témoignages qu'il aurait posé le principe des lignes insécables (*DK* 29A 22). De cette manière, il représenterait le passage de la mesure ponctuelle des Pythagoriciens à la mesure linéaire[29] (tout en défendant le principe du *plenum* absolu de l'Être parménidien) : car c'est surtout la théorie de la multiplicité des points figurés des Pythagoriciens qu'il aurait eu dans sa ligne de mire. Mais peut-être aussi pensait-il avec sa théorie des lignes insécables résoudre l'incommensurabilité de la diagonale exprimée en unités points…

En ce qui concerne l'aporie d'Achille et de la tortue, on notera que l'argument par l'absurde est ici pris à contresens par rapport à celui de la preuve apagogique. En effet, d'après la thèse que nous adoptons, Zénon se

28. Rey A. *Op. cit.*, p. 199. L'idée au départ consensuelle d'une relation entre les apories de Zénon et la conception des nombres figurés pythagoriciens a été contestée par un certain nombre de commentateurs hypercritiques. Voir Szabó. A. *Les Débuts des mathématiques grecques*. Traduction française de l'allemand. Paris : Vrin. 1977, p. 288-289 ; Kirk et Raven. In Kirk G. S., Raven J. E., Schofield M. *Les Philosophes présocratiques : une histoire critique avec un choix de textes.* Éd. et trad. H.-A. de Weck. Fribourg-Paris : Éd. Universitaires Fribourg, 1995. p. 298, note 9 ; Burkert W. *Op. cit.*, p. 285-288 ; Zhmud L. *All is number, basic doctrine of Pythagoreanism reconsidered. Phronesis.* 1989, n° 34, 3, p. 277. Il n'y aurait, d'après ceux-ci, ni de preuve conceptuelleπ ni de tradition concernant une opposition de Zénon aux Pythagoriciens. C'est oublier que Zénon a écrit un ouvrage : *Contre les philosophes* (ce qui ne peut désigner que les Pythagoriciens) [*DK* 29 A2] ; d'autre part, le terme ὄγκοι dans l'aporie des rangées de masses immobiles et mobiles rapportée par Aristote (*Physique* IV, IX 239b33) fait singulièrement penser aux ἀριθμοί ὄγκοι, les nombres entiers du *Timée* (31c4), selon l'ancienne conception pythagoricienne. Voir Caveing M. Quelques remarques sur le *Timée* et les mathématiques. *Revue d'étude philosophique*, 1965, n° 15, vol. 6. Et Brisson L. *Le Même et l'autre.* Academia Verlag Sankt Augustin. 1994, p. 373. De fait, la thèse de Tannery-Rey a été reprise avec des arguments nouveaux par M. Caveing : *Zénon d'Élée, prolégomènes aux doctrines du continu*. Paris : Vrin, 1982. chap. IV. Et *La Figure et le nombre*. Villeneuve-d'Asq : Presses universitaires du Septentrion, 1997. p. 315 : « Le pythagorisme ancien a certainement donné une signification physique immédiate à l'arithmo-géométrie, aussi bien qu'aux proportions numériques et à la géométrie des grandeurs rationnelles, sans soupçonner les apories qu'une telle conception devait nécessairement susciter. »

29. Rey A. *Op. cit.*, p. 204. « Zénon clôt la conception archaïque du nombre, l'indivisible conçu comme ayant grosseur et épaisseur, et étant point, unité ponctuelle tout de même. Elle est définitivement abattue pour le plus grand bien de la logique géométrique, de la saine mathématique. »

serait servi de la procédure par l'absurde pour montrer l'impossibilité de l'irrationnelle, alors que l'argument par l'absurde sera utilisé par les Pythagoriciens ou par un héritier de ceux-ci pour démontrer l'existence de l'incommensurable. On peut donc inférer qu'en amont de l'éléatisme, la preuve de l'incommensurabilité n'était pas encore totalement établie ou acceptée, tout en se présentant comme fortement probable, impliquée par les algorithmes d'approximation ; en aval, elle sera démontrée sans ambiguïté par la preuve apagogique. En conséquence, l'élaboration de la preuve apagogique a dû se faire à partir d'un dialogue polémique entre la communauté pythagoricienne et l'école éléatique vers 450. L'enseignement ensuite a été transmis à Hippocrate de Chios 450-430[30]. D'Hippocrate de Chios, il est parvenu à Platon, le relais a certainement été Théodore de Cyrène. Platon révèle, en effet, un enseignement mathématique de l'incommensurabilité de la part de Théodore dans le *Théétète*.

Vertige

Jusqu'à présent, nous avons parlé de scandale logique, de contradiction doctrinale, de trahison, d'inquiétude et d'absurdité, non pas encore exactement de « vertige » : pour cette notion, le dialogue platonicien du *Théétète* pourrait nous apporter quelques éléments. Remarquons d'abord l'important passage 147d qui est le texte le plus ancien à faire une référence directe à une preuve mathématique de l'incommensurabilité, vers la fin du Vᵉ siècle : « Théodore que voici, avait dessiné (ἔγραφε), devant nous, *quelque chose relativement à des puissances* (περὶ δυνάμεών τι), et avait montré (ἀποφαίνων) que celles de trois pieds et de cinq pieds sont, selon leur longueur, non commensurables (μήκει οὐ σύμμετροι) à celle d'un pied, et les ayant saisies une par une, jusqu'à celle de dix-sept pieds, il s'était, *pour une raison particulière* (πως), arrêté là. Il nous vint donc à l'esprit, le nombre des puissances apparaissant infini (ἄπειροι τὸ πλῆθος αἱ δυνάμεις ἐφαίνοντο), d'essayer de les rassembler sous un terme unique qui pût servir à désigner tout ce qu'il y a de puissances. »

Les *dunámeis* sont les longueurs considérées d'après le carré qu'elles engendrent. Certaines sont commensurables en longueur, d'autres ne le sont que par leur carré. Par exemple, $\sqrt{3}$ n'est pas commensurable en longueur, mais reste commensurable par le carré égal à 3 que cette grandeur engendre. Le but de Théodore a donc été de démontrer l'incommensurabilité des *dunámeis* de 3, de 5 et d'un certain nombre de grandeurs jusqu'à celle de 17. Sans prétendre, dans cette étude, régler la difficile question de savoir quel procédé de démonstration Théodore utilisait, ce qui nous intéresse, c'est que le texte laisse apparaître une certaine familiarité avec l'incommensurable : la connaissance semble acquise et même le nombre infini des *dunámeis* (pouvant

30. Jamblique. *De communi mathematica scientia*. § 25. La source pourrait être le *Résumé historique* d'Eudème.

être incommensurables) ne semble pas, dans ce passage, tout au moins, faire frémir le jeune Théétète. Plusieurs raisons pourraient expliquer ceci.

La connaissance est assimilée depuis un certain temps et ne suscite plus directement l'étonnement. On en est au deuxième stade dont parle Aristote (*Métaphysique,* 983 a 15-20), par rapport auquel les mathématiciens seraient des plus surpris s'il s'avérait que la diagonale fût commensurable. On remarquera qu'il n'est même pas question de la *dúnamis* de 2. La seule raison décelable de cette éviction est que la propriété était connue depuis longtemps et que son incommensurabilité n'était plus à démontrer. C'est là un élément de preuve suffisant contre les partisans de la datation tardive. La connaissance est maintenant digérée et même vulgarisée. À cet égard, Arpad Szabó a remarqué le vocabulaire négligé du personnage de Théétète, avec les formules abrégées de μῆκος (148a8) et δυνάμεις (148b1), au lieu de μήκει σύμμετρος et de δυνάμει σύμμετροι[31]. Théétète est donc présenté par Platon comme un jeune néophyte qui ne maîtrise pas encore vraiment le vocabulaire[32], alors que Théodore est véritablement le maître qui démontre par construction (ἔγραφε... ἀποφαίνων) et qui emploie l'expression correcte μήκει οὐ σύμμετροι(147d5-6).

Il est significatif que dans les rares passages où Platon aborde l'incommensurabilité ou l'irrationalité mathématique, celui-ci cherche souvent à la dédramatiser. Et on ne peut comprendre cet effort de dédramatisation que par rapport à un *pathos* initial, à un premier *thauma* traumatique. Dans ce passage du *Théétète*, Platon dédramatise *mathématiquement* le concept même de l'incommensurable en montrant que ce qui est incommensurable en longueur est finalement commensurable par sa *dúnamis*. Par ailleurs, les autres fois où il expose des connaissances sur les irrationnelles, il le fait dans des exemples humoristiques ou mathématiquement ludiques, comme dans le *Politique* (266ab) et dans le livre VIII de la *République* ou d'une manière très allusive dans *Hippias majeur* (303b). Si le vertige n'apparaît pas directement dans ces textes, c'est parce que Platon cherche à le penser et à le compenser : l'incommensurable devant être perçu avant tout sous son angle positif, logique, ludique, finalement comme un objet de recherche intellectuelle.

En effet, comme l'a vu Henri Joly, « Platon assiste ou participe à un effort de "rationalisation des irrationnels[33]", ce qui explique le mépris dans lequel il tient l'ignorance des incommensurables [dans le livre VII des *Lois*] et

31. Szabó A. *Les Débuts des mathématiques grecques*. *Op. cit.*, p. 70-71.

32. Cette absence de maîtrise n'empêche pas que la pensée de Théétète soit traversée par une intuition nouvelle qui consiste à créer la notion de nombre irrationnel : traiter les grandeurs géométriques rationnelles et irrationnelles comme des nombres, ce qui implique une non-distinction générique entre nombres entiers et irrationnels conçus comme nombres au même titre que les autres. Voir. Platon. *Théétète.* Paris : Flammarion, 1995. Introduction de M. Narcy à sa traduction, p. 62. Platon, dans son enseignement oral rejettera cette conception géométrique du nombre qui anticipe plutôt la vision aristotélicienne (voir *infra* notes 39 et 40). Voir Narcy M. *Op. cit.*, p. 65.

33. Joly Henri. *Le Renversement platonicien*. Paris : Vrin, 1974. p. 204-205. Il emprunte cette expression à Antoinette Virieux-Reymond. *Platon ou la géométrisation de l'univers*. Paris : Seghers, 1971. p. 38.

l'obligation qu'il fait à la cité d'en apprendre la science». Il s'agit dès lors de passer de l'ancien *thauma* pathologique du scandale et de la trahison des Pythagoriciens à un pur étonnement intellectuel seulement propre au philosophe, comme c'est dit encore dans le *Théétète* : μάλα γὰρ φιλοσόφου τοῦτο τὸ πάθος τὸ θαυμάζειν : «Il est plutôt propre au philosophe le pathos de s'étonner» (*Théétète*, 155d)[34]. Dans quel contexte précis cette importante phrase est-elle prononcée ? Socrate (en 155bc) vient de signaler un paradoxe dialectique sur l'opposition entre l'être et le devenir : Socrate qui ne grandit ni ne rapetisse en l'espace d'une année, peut, de plus grand qu'il est pour l'instant, devenir plus petit que Théétète, puisque celui-ci est en train de grandir. Il est donc postérieurement ce qu'antérieurement il n'était pas, sans être devenu, sans avoir pour autant changé. Or, dit Socrate, ce n'est là qu'un paradoxe parmi une myriade d'autres par rapport auxquels Théétète n'est pas un «ignorant». Curieusement, Socrate dit : «Tu n'es pas *illimité*» (οὐκ ἄπειρος) : puisqu'en grec le même terme signifie être infini, illimité et être ignorant ; ce qui non seulement témoigne de la vision péjorative que les Grecs se faisaient de l'infini, mais correspond en outre à une inversion totale de sens par rapport à notre vision : être «bornant», «délimitant» pour eux, c'est être au fait de quelque chose ; en revanche, être illimité, non borné (ou «non bornant»), c'est être noyé dans l'indistinction, être totalement dépassé. Face à l'illimitation des paradoxes, dit Socrate à Théétète, tu n'est pas censé être «non borné», c'est-à-dire : «ignorant».

Le jeune homme va répondre qu'il est effectivement complètement dépassé : «Par les dieux, Socrate, je m'étonne (θαυμάζω) de ce que ces choses-là peuvent être, au point que cela dépasse les bornes (ὑπερφυῶς), et chaque fois, à vrai dire, que je les regarde, je *tournoie dans les ténèbres* (βλέπων εἰς αὐτὰ σκοτοδινιῶ)[35]. » On a là un verbe σκοτοδινιῶ qu'Auguste Diès, et Émile Chambry traduisent fort justement par la notion de «vertige». Or, ce n'est pas un hasard si Aristote dans la *Métaphysique* (983 a 11-21) fait de l'incommensurabilité de la diagonale un objet caractéristique du *thaumazein* philosophique : on peut ainsi comprendre le passage aristotélicien comme un commentaire de cet extrait du *Théétète.* Et c'est vraiment ce dont il est question en filigrane dans l'esprit de Théétète, dans notre extrait. En plus, au moment de la scène du dialogue, Théétète est encore jeune (plus petit en taille et en esprit que Socrate) : il n'a pas encore eu le temps de maîtriser les subtilités de la dialectique philosophique. En revanche, il a déjà été initié par Théodore aux paradoxes mathématiques et, «petit» qu'il est pour l'instant, il deviendra le «grand» mathématicien qui

34. Dans les *Lois*, 819d5-6, Platon fait encore un lien entre incommensurabilité, pathos et étonnement : «je fus grandement étonné de notre passion à cet égard (παντάπασι... τὸ περὶ ταῦτα ἡμῶν πάθος ἐθαύμασα).» À noter que Platon, sous la figure de l'Étranger d'Athènes, parle en réalité de son étonnement personnel.

35. On pourra noter que Platon emploie le vocabulaire de la table pythagoricienne des contraires avec les «ténèbres» *(σκότος)* placées du côté de l'*ápeiron*. Voir *supra,* note 8. N'est-ce qu'une coïncidence ?

travaillera principalement sur les irrationnelles, qui surpassera dans ce domaine tous ses contemporains, y compris Socrate[36]. En conséquence, bien que le contexte de l'argument socratique paraisse quelque peu extérieur, on peut retenir que le grand étonnement vertigineux (ténébreux, non ludique) de Théétète concerne bien en réalité l'incommensurabilité ; de même, par sa jeunesse, ce personnage est bien placé pour représenter la conscience naïve des Grecs et en particulier des Pythagoriciens qui ont été les premiers à être confrontés au problème, en étant complètement dépassés.

Solutions et occultations

La réplique de Théétète peut donc être tenue pour un écho évident du « vertige » des premiers mathématiciens placés devant la découverte de l'incommensurabilité[37]. On ne saurait donc dire qu'il n'y a pas eu de crise des fondements, de profond vertige des Anciens face à l'incommensurable. Et c'est une illusion de croire que le progrès des sciences mathématiques ne procède généralement que d'une manière linéaire et cumulative, surtout pour une découverte en soi aussi problématique, aussi paradoxale que celle de l'incommensurabilité. Le fameux « miracle grec », ce fulgurant progrès de la mathématique grecque au Ve et au IVe siècle s'est tout au contraire accompli, non pas dans la lumière et la sérénité, mais dans les ténèbres, dans la confrontation de problèmes apparemment insolubles, en traversant une crise sans précédent, une situation des plus vertigineuses pour l'esprit. La pensée mathématique grecque naissante est donc autant une pensée des abîmes qu'une quête contemplative des essences. Mais, *in fine*, la crise des fondements, loin d'avoir paralysé la recherche, l'a au contraire considérablement développée : l'esprit grec a mobilisé toutes ses ressources pour trouver des solutions intellectuellement, rationnellement, philosophiquement acceptables. Ce que l'on a appelé le « miracle grec », d'un point de vue mathématique, n'est autre que cette extraordinaire aventure de l'esprit humain qu'a été la découverte et l'assimilation intellectuelle des irrationnelles, dont le résultat exemplaire est la publication, à la fin du IVe siècle, de ce monument de la pensée rationnelle que sont les *Éléments* d'Euclide. En réalité, ce « miracle grec » présente toutes les caractéristiques d'une « révolution épistémologique » au plein sens bachelardien[38] : ce n'est pas la Raison qui descend du ciel et qui se manifeste clairement, en toute sérénité, dans l'esprit contemplatif des Anciens, c'est au contraire un élan contrarié de l'esprit qui a réussi finalement à atteindre des hauteurs inégalées, mais qui a d'autant plus mobilisé des

36. Ce qui a frappé Théodore, c'est que Théétète, par sa laideur et sa grande vivacité d'esprit, semblait être une parfaite réplique de Socrate (143e-144a) et celui-ci avait perçu une « heureuse nature » et prédit la célébrité (142cd).

37. Il ne faut guère s'attendre à trouver des témoignages directs : hormis Platon et Théétète, la crise des fondements n'a touché particulièrement que les milieux pythagoriciens, éléatiques dont il ne reste que très peu d'écrits. Nous avons pu voir que c'est plutôt dans la dimension symbolique plus ou moins intentionnelle de certains textes que les traces peuvent être perçues.

38. Joly H. *Op. cit.*, p. 206-207.

ressources inespérées qu'il était plongé dans les apories les plus inextricables : on peut croire que c'est en s'exposant au vertige, tel le funambule du *Zarathoustra*, que la pensée a pu être amenée à se dépasser.

Cependant, en tant que révolution épistémologique, le résultat de ce douloureux processus se solde par le passage d'un système de pensée qui identifiait en toute naïveté les nombres et les choses, à une pensée du *continuum* géométrique dans lequel la rationalité se redécouvre elle-même sur de nouvelles bases, avec des possibilités d'extension infinie. Ainsi s'accomplit un profond « changement d'*épistémè* » : on passe de l'ancien arithmétisme du système des unités-points, au nouvel esprit théététien et euclidien, fondé sur la géométrie. Ce que Platon semble avoir intuitivement compris, c'est que par Théétète, s'accomplit un véritablement changement de paradigme : en cela « Théétète deviendra grand » ; il représente la nouvelle tendance. L'arithmétique qui, dans l'ancienne optique pythagoricienne résumait à elle seule toute la *mathesis universalis*, perd sa place privilégiée pour ne devenir qu'un cas particulier de la mathématique. On pourrait même, à cet égard, considérer le système platonicien des principes exposé dans les *ágrapha dógmata* retransmis par la tradition aristotélicienne, comme une ultime tentative de conserver ontologiquement la prééminence pythagoricienne du Nombre, dans une représentation du monde qui se fait *more geometrico*, et qui intègre l'incommensurabilité linéaire dans une vaste procession des quatre dimensions intelligibles et sensibles du réel, à partir des deux principes fondamentaux de la Monade et de la Dyade indéfinie. Si la géométrie d'Euclide (rassemblant les travaux de Théétète et d'Eudoxe) est la grande réponse mathématique de la crise des fondements du Ve et IVe siècle, la doctrine des principes de l'enseignement oral de Platon constitue la première grande réponse philosophique[39]. La seconde sera celle d'Aristote[40]. Si la réponse

39. Voir Gaiser K. *Platons Ungeschriebene Lehre*. Stuttgart : E. Klett, 1963. p. 136 *sq*. Tout le système platonicien (ouvert, en recherche dialectique, non pas fermé) s'organiserait selon les quatre dimensions Point-Ligne-Surface-Volume qui traversent hiérarchiquement la structure du réel intelligible et sensible. Voir Richard M.-D. *Op. cit.*, p. 192-3, 231 *sq.* Et le point d'achoppement entre les lignes et les surfaces, entre l'intelligible et le sensible, n'est autre que l'incommensurable lui-même présent dans *l'atomon eidos*, plus bas degré de l'intelligible. Voir notre étude : Platon et la section d'or. In *La Philosophie de Platon. Op. cit.* Finalement, en réponse aux apories de Zénon, Platon maintient principalement les deux termes aporétiques que Zénon opposait sans apporter de solution : les unités indivisibles et rationnelles seront cantonnées dans l'intelligible et la divisibilité infinie et incommensurable des grandeurs géométriques dans le sensible. On remarquera à quel point la réponse platonicienne aux apories est intimement liée au traitement des irrationnelles : encore une raison supplémentaire pour montrer qu'on ne peut concevoir les unes sans les autres.

40. Aristote propose la distinction de l'infini en puissance (domaine des idéalités mathématiques) et de l'infini en acte dont il rejette l'existence. Toussaint-Desanti J. Une crise de développement exemplaire : la découverte des nombres irrationnels. In *Logique et connaissance scientifique*. Paris : Gallimard, 1967. (La Pléiade). p. 451 *sq*. Toussaint-Desanti montre qu'Aristote résout la crise des irrationnelles en ce sens que la *distance* fondamentale entre, d'une part, la représentation substantielle du nombre (le réel comme multiplicité d'unités) et, d'autre part, le *continuum* en droit infiniment divisible des opérations sur les grandeurs, a d'abord été pensé comme incompatible par Zénon d'Élée (qui supprimait les deux termes de l'aporie). Mais Aristote, par sa distinction conceptuelle de *l'acte* et de *puissance*, trouvera une solution élégante pour garantir la possibilité des opérations mathématiques en les maintenant dans l'idéalité non réelle de l'infini en puissance.

platonicienne n'a pas été divulguée par écrit, c'est qu'au lieu d'élever les esprits vers la Raison transcendante, mal comprise, mal interprétée, elle risquait, au contraire, de précipiter les égarés dans les ténèbres et la noyade dans la «mer de la dissemblance»… On a là une explication supplémentaire non négligeable de la non-publication de la conception platonicienne de la *Dyade indéfinie* : plutôt que de révéler l'abîme de l'*apeiron* de l'incommensurabilité dans toute sa dimension ontologique, Platon, dans ses écrits, a préféré mettre l'accent sur la conversion de l'incommensurable en commensurable (*Philèbe*, 25e ; *Politique* 284 b-c). Un tel *apeiron* était perçu pour Platon comme un gouffre fascinant : il fallait donc éviter à tout prix que le commun des hommes s'y précipitât en montrant ce qui peut encore être sauvé comme rationnel dans l'irrationnel, et en masquant autant que possible l'existence du gouffre[41]. Une telle précaution peut paraître étrange et dérisoire de nos jours, mais l'homme moderne n'a-t-il pas lui-même tendance à occulter le problème en le camouflant derrière un mot ou sous une formule mathématique, en pensant ainsi avoir réglé la question une fois pour toutes ? Platon avait des raisons de penser qu'il fallait mieux masquer au profane le gouffre de l'irrationnel, mais il en a fait pour lui-même et pour ses disciples l'objet d'une véritable méditation métaphysique. L'homme actuel s'interroge-t-il vraiment pourquoi, dans les figures les plus simples, les plus régulières, apparemment les plus rationnelles (carré, pentagone, cercle, etc.), il n'est pas possible de trouver la moindre commune mesure entre les différentes grandeurs qui les constituent ? N'y a-t-il pas là une énigme incompréhensible qui persiste en deçà de la formule rassurante ?

Au travers des figures du scandale, de la trahison, de l'absurde et du vertige que nous avons pu percevoir plus ou moins directement dans certains témoignages, c'est tout le drame psychologique, moral et philosophique d'une des plus grandes conquêtes de l'esprit humain, qui peut être reconstitué. Face à la pénurie des données purement historiques, nous avons dû recourir au décryptage de l'imaginaire, de l'implicite, pour nous faire une idée claire (à défaut d'être distincte) de toute l'ampleur tragique d'une aventure qui s'est jouée durant le Vᵉ siècle av. J.-C. Il en ressort que le vertige de l'irrationnel ne peut avoir frappé qu'une élite de penseurs préalablement convaincus de l'existence d'une rationalité du monde, d'une toute-puissance

41. L'incommensurabilité a donc pour Platon un double aspect positif et négatif : positif en tant que concept pouvant admettre une rationalité géométrique, négatif en tant que principe ontologique du mal rebelle à toute rationalité. Cette ambiguïté a pu être source de confusion chez les disciples de l'ancienne Académie. On comprend dès lors que des éléments platoniciens contradictoires aient pu se greffer à la légende pythagoricienne rapportée dans le *Commentaire* de Pappus et la scolie d'Euclide. On remarquera qu'à l'instar des Pythagoriciens, l'*apeiron* chez Platon est effectivement marqué par le sceau du mal : «La forme de la vertu est une, celles du mal sont infinies (ἕν μὲν εἶναι εἶδος τῆς ἀρτῆς, ἄπειρα δὲ τῆς κακίας)» [*République*. IV, 445c5-6]. Bien que cette phrase soit en résonance avec le thème de la Monade et de la Dyade indéfinie, Socrate ne cherche pas à élucider la cause principielle du mal dans la *République*. Voir Szlezák Th. A. L'idée du Bien en tant qu'*arché* dans la *République* de Platon. In *La Philosophie de Platon*. *Op. cit.*, § 3.

de l'ordre du mesuré et du nombre. Même s'il correspond d'abord à une mise en cause troublante d'un préjugé populaire et empirique, on comprend d'autant plus l'importance du désarroi de ceux qui avaient poussé au plus haut degré la confiance en la Raison. Il y a là finalement une rencontre avec l'infini (comme impossibilité d'assigner une limite numérique) qui semble avoir été particulièrement problématique et qui pourrait même avoir été aussi douloureuse, aussi vertigineuse que la prise de conscience de l'infinité de l'univers aux XVI^e et XVII^e siècle. Les Grecs ont donc bien vécu une sorte de première « crise pascalienne » face à l'infini – une angoisse tellement insoutenable qu'ils ne pouvaient réagir que par de funestes désirs : la mort d'Hippase par l'eau et par colère divine anticipe singulièrement la mort de Giordano Bruno par le feu et par vengeance humaine. Mais, l'épreuve métaphysique des Grecs ne saurait être perçue dans toute son importance, sans un rapide examen des conséquences globales sur la pensée ultérieure.

Le trouble jeté dans les esprits en raison de l'existence de l'incommensurable, a amené certains penseurs, les sophistes, à douter de la valeur du *Lógos* et de la vérité qui lui est inhérente[42]. On ne saurait à cet égard sous-estimer le lien qu'il y a eu entre Théodore, le mathématicien, et le sophiste bien connu Protagoras (voir *Théétète* 161b, 162a[43]). Curieusement, de ces deux personnages, l'un a décidé de se taire (146b, 165a) et de ne faire plus que de la géométrie, l'autre a abandonné la théorie du *lógos*, mais a décidé de parler, comme son nom l'indique : Protagoras. Et dans un cas comme dans l'autre, c'est la vérité qui est menacée, c'est le *Lógos* qui est atteint. Chez l'un, il y a le *lógos*, mais sans le discours (le *lógos* purement mathématique), chez l'autre, il y a le discours, mais sans le *lógos*, sans la science. À travers l'exemple de ces personnages emblématiques, on remarque une fracture, c'est l'unité de la *ratio* et du discours qui est brisée d'une manière ou d'une autre. En outre, les apories zénoniennes nous sont apparues comme directement liées à la crise des irrationnelles. Or l'irrationalité a été démontrée par l'absurde. Autrement dit, par les irrationnelles, les Grecs ont été confrontés à l'absurde et ils ont même accompli le tour de force de transformer l'absurde en principe d'argumentation vraie qui débouchait sur la vérité de

42. Voir Joly Henri. *Op. cit.*, p. 380 : « En présence de ce *thauma*, où se mêlent l'étonnement intellectuel et une sorte de terreur tragique suscitée par le spectacle d'une réalité sans rationalité, deux attitudes étaient possibles. L'une consistait à douter de l'idée de science, d'où le conventionnalisme, voire le scepticisme de la sophistique. L'autre attitude, platonicienne celle-là, consistait à maintenir l'idée de la science *en opérant un déplacement de l'épistémè et en inaugurant, autour de la géométrie, un nouvel esprit scientifique.* » [souligné par l'auteur]. Concernant cette interprétation du platonisme, il me semble que, compte tenu de la doctrine orale des principes, Platon maintient la prééminence de l'arithmétique sur la géométrie, tout en rendant possible, dans le domaine du sensible, le changement d'*épistémè* que décrit Henri Joly : l'incommensurabilité n'existe pas en soi, mais suppose une commensurabilité fondamentale (par exemple, la diagonale n'est incommensurable que par rapport au côté commensurable) : donc l'arithmétique précède la géométrie.

43. Les accointances entre le maître de géométrie et le sophiste sont évidentes : Théodore, comme Protagoras, débarque à Athènes et attire une foule de jeunes gens (*Théétète,* 143de). Michel Narcy (*op. cit.*, p. 52-53) voit même dans la géométrie de Théodore un lien avec le sensualisme de Protagoras.

l'irrationnelle, de l'incommensurable et de l'inexprimable. Est-ce qu'on aura suffisamment pesé toutes ces notions qui s'entrechoquent et qui se déploient dans la négativité et dans l'impensable ? Au travers de cette convergence de notions aporétiques, comment ne pas percevoir les traces d'un véritable drame de la pensée qui a vacillé sur ses fondements logiques ? Aussi ne s'étonnera-t-on pas de voir qu'un des maîtres de l'argumentation par l'absurde, Zénon d'Élée, se trouve assimilé aux sophistes par Platon[44]. C'est celui qui a subi de plein fouet la crise de l'irrationnelle, qui l'a combattue avec des arguments dérisoires et qui probablement a dû s'y soumettre en raison de l'incontestable preuve apagogique, si tant est qu'il l'ait connue. Mais la conséquence a été désastreuse sur le plan du *lógos*-discours : plus aucune vérité ne pouvait dès lors tenir pour le premier des sophistes. N'importe qu'elle thèse, même la plus absurde pouvait être défendue… C'était le début de la ruine du *Lógos*. On se retrouve maintenant dans une situation qui n'est peut-être pas si différente : d'une part les disciples de Théodore, ceux qui calculent mais ne philosophent pas, triomphent ; d'un autre côté, les continuateurs des sophistes réduisent la philosophie à un discours rhétorique. À la suite de la crise des irrationnelles, nous avons finalement perdu le sens du *Lógos* qui rassemblait en une seule notion le Rapport, le Discours et le Cosmos, vision unitaire développée par Pythagore et que l'on retrouve chez Héraclite. Malgré les efforts de Platon, d'Aristote et des Stoïciens pour conserver sous des formes diverses cette vision d'une adéquation fondamentale entre la Raison et le Réel, le doute s'est définitivement introduit dans les esprits.

Jean-Luc Périllié
Docteur de l'université Pierre-Mendès France de Grenoble-II

44. Platon. *Alcibiade majeur*, 119a ; *Phèdre*, 261d.