Matematikai logika

A logika tudománnyá válása az ókori Görögországban kezdődött. Maga a logika szó is görög eredetű, a logosz szó jelentése: szó, fogalom, ész, szabály. Kialakulása ahhoz köthető, hogy már az első tudósok, filozófusok, sőt még politikusok is törekedtek arra, hogy gondolataikat világos, logikailag helyes formában közöljék. **Arisztotelész** (i.e. 384-322) **Organon** (Módszertan) című művében foglalta össze először a formális logika szabályait, azaz a logikus gondolkodás formális tulajdonságait. Arisztotelész szerint a **logika feladata** igaznak tekintett állításokból származtatott igaz következtetések levonása.

A tudományban elért eredmények megfogalmazása vagy éppen logikus indoklása egy adott nyelvhez (a matematikában régebben gyakran a latinhoz) kötődött. Így azonban a matematikai precizitású szöveg leírása meglehetősen bonyolulttá vált.

Nyilvánvalóvá vált, hogy a matematika további fejlődéséhez önálló nyelvet kellett alkotni. Olyat, amellyel formalizálni lehet a matematikai állításokat, vagy amely olyan szabályokat állít fel, hogy segítségével igaznak tekintett matematikai állításokból új állításokhoz juthatunk. Ez a nyelv a köznapi (természetes) nyelvek logikai szempontból jelentős elemeit tartalmazza. **Leibniz**, **Boole**, **De Morgan** és **Frege** munkásságának köszönhetően sikerült összekapcsolni a matematikát és a logikát.

A matematikai logikában a már meglévő ismereteinkből meghatározott logikai szabályok segítségével hozunk létre új következtetéseket. Ilyen módon a logika tudománya a **dedukció** elvén működik. A matematikai tárgyalás másik útja, az **indukció** során konkrét tapasztalatokra támaszkodva jutunk el egy általánosabb fogalomhoz.

A matematikai állításainkat kijelentő mondatokban fogalmazzuk meg. Ezek lehetnek igazak, de hamisak is. A matematikai logikában **kijelentésnek** az egyértelműen igaz vagy hamis állításokat tekintjük. A kijelentéseket latin nagybetűkkel jelöljük. Az igaz és hamis tulajdonságokat a szóban forgó kijelentés logikai értékének nevezzük. Egy kijelentés logikai értékét a kijelentés abszolút értékével jelöljük.

A 100 forintnak 50 a fele kijelentés logikai értéke igaz.

A *2-szer 2 néha 5* kijelentés logikai értéke hamis.

A nagy számokkal végzett műveleteknél normál alakot használunk állításnak nincs logikai értéke, mert nem lehet értelmezni a nagy szám kifejezést. Ezt az állítást tehát a matematikai logikában nem tekintjük kijelentésnek.

Logikai műveletek

Sok kijelentés olyan részekből áll, amelyek önmagukban is kijelentések. Két kijelentés összekapcsolása esetén 16 különböző eredmény fordulhat elő. (A táblázatban M az A és B kijelentéstől függő műveletet jelöl.)

		$M(A;B)$															
$\|A\|$	$\|B\|$	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	M_7	M_8	M_9	M_{10}	M_{11}	M_{12}	M_{13}	M_{14}	M_{15}	M_{16}
i	i	i	i	i	i	h	i	i	h	i	h	h	i	h	h	h	h
i	h	i	i	i	h	i	i	h	i	h	i	h	h	i	h	h	h
h	i	i	i	h	i	i	h	i	i	h	h	i	h	h	i	h	h
h	h	i	h	i	i	i	h	h	h	i	i	i	h	h	h	i	h

A matematikai kijelentéseknél összekötő szavakként gyakran a következők fordulnak elő: nem, és, vagy, ha – akkor, pontosan akkor ha. Ezeknek a logikai műveletekhez való kapcsolódását vizsgáljuk a következőkben.

I. Negáció

DEFINÍCIÓ: Az A ítélet **negációján** (tagadásán) azt a kijelentést értjük, amely igaz, ha A hamis, és hamis, ha A igaz. Jelölés: $\neg A$

A 2 < 3 ítélet tagadása $2 \geq 3$.

A konkrét kijelentések helyett általánosan, csupán a logikai értékek ismeretében is felírhatjuk a tagadást.

$\|A\|$	$\|\neg A\|$
i	h
h	i

Ez alapján felismerhetjük, hogy az M_{11} művelet írja le $\neg A$-t. A negációt **logikai nem műveletnek** is nevezzük.

II. Konjunkció

DEFINÍCIÓ: Az A és B ítélet **konjunkcióján** azt a kijelentést értjük, amely pontosan akkor igaz, ha a két eredeti ítélet egyidejűleg igaz. Jelölés: $A \wedge B$

Két ítélet konjunkciójánál a két ítéletet az és, s, de, noha, pedig, bár, mégis, továbbá, valamint, illetve stb. kötőszók valamelyikével kapcsoljuk össze. Ezek a matematikai logika szempontjából helyettesíthetők az és kötőszóval, ezért a konjunkciót **logikai és műveletnek** is szokás nevezni.

Mivel valamely *A* ítélet és *B* ítélet is egyaránt kétféle logikai értéket vehet fel, az értéktáblázatban négy esetet kell megvizsgálnunk.

$|A|$	$|B|$	$|A \wedge B|$
i	i	i
i	h	h
h	i	h
h	h	h

A táblázatban az M_{12} művelet írja le a konjunkciót.

III. Diszjunkció

DEFINÍCIÓ: Az *A* és *B* ítélet **diszjunkcióján** azt a kijelentést értjük, amely pontosan akkor hamis, ha a két eredeti ítélet egyidejűleg hamis. Jelölés: $A \vee B$

A diszjunkciót **megengedő vagy** műveletnek is szokás nevezni. Értéktáblázata:

$|A|$	$|B|$	$|A \vee B|$
i	i	i
i	h	i
h	i	i
h	h	h

A mindennapi életben a vagy szót többféle értelemben is használjuk. Erre láthatunk példát az alábbiakban.

(1) *Anna vagy Andrea menjen el a kocsival vásárolni!* – kérték meg gyerekeiket a szüleik. (A vagy szó értelme itt **legalább egyikük, esetleg ketten együtt** – ez az előzőekben leírt megengedő jelentés.)
(2) Vásárlás után, már otthon a lányok elmesélték, hogy a csomagok miatt egy hely még maradt a kocsiban, ezért az áruházban megszólították a szomszédban lakó testvérpárt. *Hazafelé Antal vagy András velünk jöhet.* (A vagy logikai jelentése a mondatban **legfeljebb az egyik**.)
(3) *Anna vagy Andrea vezette visszafelé az autót?* – kérdezték meg a szülők otthon a lányokat. (A vagy szót itt **pontosan az egyik** értelemben használjuk – ez kizáró jelentés.)

A táblázat M_2–vel jelölt művelete a diszjunkció.

Bármely *A*, *B* és *C* ítélet esetén teljesülnek a következő azonosságok

TÉTEL:

Idenpotencia

$A \wedge A = A$ $\quad$ $A \vee A = A$

Kommutativitás

$A \wedge B = B \wedge A$ $\quad$ $A \vee B = B \vee A$

Asszociativitás

$(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C)$ $\quad$ $(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$

Disztributivitás

$A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ $\quad$ $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

De Morgan-képletek

$\neg (A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$ $\quad$ $\neg (A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$

Két összetett kijelentés azonossága, azaz valamely állítás igazsága belátható, ha az egyenlőség két oldalán álló kijelentéseknek minden lehetséges értéknél megegyező a logikai értékük. Ez például igazságtáblázat segítségével ellenőrizhető. Az alábbiakban megmutatjuk a disztributivitásra vonatkozó egyik azonosság bizonyítását.

$\|A\|$	$\|B\|$	$\|C\|$	$\|B \vee C\|$	$\|A \wedge (B \vee C)\|$	$\|A \wedge B\|$	$\|A \wedge C\|$	$\|(A \wedge B) \vee (A \wedge C)\|$
i	i	i	i	**i**	i	i	**i**
i	i	h	i	**i**	i	h	**i**
i	h	i	i	**i**	h	i	**i**
i	h	h	h	**h**	h	h	**h**
h	i	i	i	**h**	h	h	**h**
h	i	h	i	**h**	h	h	**h**
h	h	i	i	**h**	h	h	**h**
h	h	h	h	**h**	h	h	**h**

Észrevehetjük, hogy a 2 kijelentésből álló formula esetén 2^2, a 3 kijelentésből állónál 2^3 különböző esetet kellett megvizsgálni. Általánosan is elmondható, hogy egy n kijelentést tartalmazó azonosságnál 2^n különböző kiértékelés egyenlőségét kell igazolni.

Az olyan formulát, amely minden értékelésnél igaz, **tautológiának** nevezzük.

IV. Implikáció

Mikor tartjuk igaznak a következő kijelentést?

Ha *a lottószelvények kitöltésénél minden lehetséges esetet figyelembe veszünk,* ***akkor*** *biztosan lesz 5-ös találatunk.*

Az állításban két elemi kijelentésből, az előtagból (a lottószelvények kitöltésénél minden lehetséges esetet figyelembe veszünk), illetve utótagból (biztosan lesz 5-ös találatunk) összetett kijelentést alkottunk a „**ha**…**akkor**” kötőszavak segítségével.
Az alábbiakban megvizsgáljuk a szóbajövő lehetőségeket.
Ha minden lehetséges esetet figyelembe veszünk, és lesz 5-ös találatunk, akkor igaz a kijelentés.
Ha minden lehetséges esetet figyelembe veszünk, de mégsem lesz 5-ös találatunk, akkor hamis a kijelentés.
Ha nem veszünk minden lehetséges esetet figyelembe, akkor nem teljesítettük a feltételeket, tehát akár lesz 5-ös találatunk akár nem, a kijelentés igaznak tekinthető.
A példa alapján kitölthetjük a szóban forgó művelet igazságtáblázatát.

$\lvert A\rvert$	$\lvert B\rvert$	$\lvert A \Rightarrow B\rvert$
i	i	i
i	h	h
h	i	i
h	h	i

DEFINÍCIÓ: Az *A* előtag és *B* utótag **implikációján** azt az ítéletet értjük, amely pontosan akkor hamis, ha az előtag igaz, de az utótag hamis. Az előtagot **feltételnek**, az utótagot **következménynek** nevezzük. Jelölés: $A \Rightarrow B$

A 16 műveletes táblázat M_4 művelete az implikáció.

Megjegyzés: A matematikai tételek többsége „ha *A*, akkor *B* típusú”. Egyes tételeknél a két összetevőt felcserélve hamis, másoknál igaz állításokat kapunk. Ez utóbbiaknál $A \Rightarrow B$ és $B \Rightarrow A$ egyszerre teljesül.

A matematikai logika módszerei új eljárásokat adnak az állítások igaz vagy hamis voltának meghatározására. Vizsgáljuk meg a következő kijelentést.
Ha a szabályos háromszögre igaz a Pitagorasz-tétel, akkor minden háromszög egyenlő szárú.
Itt a **feltétel**, azaz hogy a szabályos háromszögre igaz a Pitagorasz-tétel nyilvánvalóan **hamis**. Hasonlóan **hamis** a **következmény**, tehát az, hogy minden háromszög egyenlő szárú. Az előzőekben leírt $h \Rightarrow h = i$ szabály miatt viszont a kijelentés igaz.

Példa: Adjuk meg a következő mondat tagadását. *Nem zörög a haraszt, ha a szél nem fújja.*
Segítségként hasonlítsuk össze az $A \Rightarrow B$ és $\neg (A \wedge \neg B)$ kifejezéseket.

$\lvert A\rvert$	$\lvert B\rvert$	$\lvert A \Rightarrow B\rvert$	$\lvert\neg B\rvert$	$\lvert A\wedge(\neg B)\rvert$	$\lvert\neg (A \wedge \neg B)\rvert$
i	i	**i**	h	h	**i**
i	h	**h**	i	i	**h**
h	i	**i**	h	h	**i**
h	h	**i**	i	h	**i**

A végeredményből leolvasható egy lehetséges megoldás. A szél nem fújja, mégis zörög a haraszt.

V. Ekvivalencia

A matematikában gyakran előfordul, hogy két kijelentés ugyanazt a gondolatot fejezi ki, azaz a két kijelentés egyenértékű. Ha ez teljesül, akkor a két kijelentést a következő szavakkal kapcsolhatjuk össze.

Egy természetes szám **akkor és csak akkor** osztható 10-zel, ha a szám 0-ra végződik.

Egy természetes szám **pontosan akkor** osztható 10-zel, ha a szám 0-ra végződik.

Egy természetes szám osztható 10-zel állítás **ekvivalens azzal, hogy** a szám 0-ra végződik.

DEFINÍCIÓ: Az A és B ítéletek **ekvivalenciáján** azt az ítéletet értjük, amely pontosan akkor igaz, ha a két összetevő logikai értéke megegyezik. Jelölés: $A \Leftrightarrow B$

A definíció alapján a következő táblázathoz jutunk.

$\lvert A\rvert$	$\lvert B\rvert$	$\lvert A \Leftrightarrow B\rvert$
i	i	i
i	h	h
h	i	h
h	h	i

A korábbi táblázatból leolvasható, hogy az M_9 művelet az ekvivalencia.

Az $(I;I)$, $(I;H)$, $(H;I)$, $(H;H)$ párokból képezhető 16-féle összekapcsolási lehetőség az előzőekben leírt öt logikai műveletre visszavezethető. Azonban ezt az öt összekapcsolást tartalmazó rendszert is még tovább lehet egyszerűsíteni. Könnyen belátható, hogy például $A \Leftrightarrow B$ mindig igaz $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$ esetén. (Ez az észrevétel megfelel az implikációnál leírt megjegyzésben foglaltaknak.)

Az előzőekben említetteken kívül a kijelentések között több nevezetes összefüggés is ismeretes.

1. $\neg(\neg A) \Leftrightarrow A$ azt fejezi ki, hogy egy állítás tagadásának a tagadása magával az eredeti állítással egyezik meg. Ezt fejezi ki a **kettős tagadás tétele**.

2. Az $A \vee \neg A$ formula tautológia, a **harmadik kizárásának tétele** azt jelenti, hogy egy állítás vagy igaz vagy nem igaz, harmadik lehetőség nincs.

3. $\neg(A \wedge \neg A)$, azaz **az ellentmondás tétele** szerint egy állítás és tagadása egyszerre nem lehet igaz.

Következtetési szabályok

Mint említettük, úgy a matematikai logikában mint a mindennapi életben nagyon fontos, hogy bizonyos állításokból helyes következtetésekre jussunk. De ugyanígy az is, hogy egy adott állításról el tudjuk dönteni, logikusan következik-e korábbi már ismert és igaznak elfogadott ismeretekből.

A következőkben egy nem matematikai jellegű következtetést vizsgálunk meg.

Ha Béla minden elméleti tételt megtanul, és a beugró gyakorlati számítást is megoldja, akkor sikerül a vizsgája. Béla minden tételt megtanul, és mégsem sikerül a vizsga. Tehát Béla a beugró gyakorlati számítást nem oldotta meg.

A következtetési szerkezet leírására használt jelölésben egy vonal fölé írjuk a premiszákat (feltételeket), a vonal alá a konklúziót (következményt). Ekkor a következtetés logikai szerkezete a következő.

$$\frac{(A \wedge B) \Rightarrow C, A \wedge (\neg C)}{\neg B}$$

A példában a betűk és a nekik megfelelő kijelentések a következők.

A: Béla minden elméleti tételt megtanul.

B: Béla a beugró gyakorlati számítást is megoldja.

C: Bélának sikerül a vizsgája.

Megvizsgáljuk, hogy a premisszákat alkotó kijelentések milyen logikai értéke mellett igazak az adott premisszák.

Ha $|A \wedge \neg C| = i$, akkor $|A| = i$ és $|C| = h$.

Mivel $|C| = h$, $|(A \wedge B) \Rightarrow C| = i$ csak akkor teljesülhet, ha $|A \wedge B| = h$. Ugyanis hamis utótag esetén csak akkor igaz az implikáció, ha az előtag is hamis. $|A| = i$ fennállása mellett ez $|B| = h$ esetén teljesülhet.

Tehát a konklúzió logikai értéke: $|\neg B| = i$, a következtetés helyes.

Az előzőekben leírt eljárás általánosítható.

Jelöljék a P_1, P_2, P_3, …, P_n szimbólumok a következtetés premisszáit, amelyeket az A_1, A_2, A_3, …, A_k elemi ítéletekből logikai műveletek segítségével alkottunk, és jelölje K a konklúziót. Akkor mondjuk a következtetési szabályt helyesnek, ha az A_1, A_2, A_3, …, A_k minden olyan logikai értéke mellett, amelyre a P_1, P_2, P_3, …, P_n premisszák logikai értéke igaz, a K konklúzió logikai értéke is igaz.

Nyitott mondatok

A következőkben néhány kijelentést adunk meg.

Petőfi Sándor magyar költő volt. $2 \cdot 3 + 1 = 7$

Albert Einstein magyar költő volt. $2 \cdot 4 + 1 = 7$

Ha a kijelentések egyik szavát kicseréljük egy változóval, akkor **nyitott mondathoz** jutunk.

x magyar költő volt. $2 \cdot x + 1 = 7$

Az előzőekben leírt eljárással többváltozós nyitott mondatok is előállíthatók.

x magyar y volt. $2 \cdot x + y = 7$

A fenti példából következik, hogy az egyenlet (és hasonlóan, az egyenlőtlenség és egyenletrendszer) logikai értelemben egy nyitott mondat.

A matematikai állításoknál és különösen a nyitott mondatoknál gyakran alkalmazzuk a következő jelöléseket:

$\forall$: jelentése bármely, minden

$\exists$: jelentése van olyan, létezik

Ezek a logikai kifejezések szoros kapcsolatban állnak egymással.

A *minden (bármely) háromszög egyenlő szárú* kijelentés tagadása

a) nem **minden** háromszög egyenlő szárú

vagy

b) **van** (létezik) **olyan** háromszög, amely nem egyenlő szárú.