Euclides - Elementos de Geometria
Frederico Commandino
São Paulo: Edições Cultura, 1944
ISBN - Não indicado
Fonte: Biblioteca do Clube de Engenharia da Bahia
Obra digitalizada por: Neuziton Torres Rapadura - neuzitontr@terra.com.br
Colaboração voluntária

S É R I E   C I E N T Í F I C A

EUCLIDES

Elementos de Geometria

dos seis primeiros livros do undécimo
e duodécimo da versão latina de
FREDERICO COMMANDINO

Adicionados e Ilustrados
Por
ROBERTO SIMSON
Profº Matemática na Academia de Glasgow

REVISTOS P A R A
EDIÇÕES CULTURA
Por
ANÍBAL FARO

EDIÇOES CULTURA
AV. 9 DE JULHO, 872 e 878 (1º and.)
FONE: 402228 - SÃO I'AULO - BRASIL
1944

PRIMEIRO LIVRO

DOS

ELEMENTOS DE GEOMETRIA DE EUCLIDES

DEFINIÇÕES.

I

Ponto é o que não tem partes, ou o que não tem grandeza alguma.

II

Linha é o que tem comprimento sem largura.

III

As extremidades da linha são pontos.

IV

Linha reta é aquela, que está posta igualmente entre as suas extremidades.

V

Superfície é o que tem comprimento e largura.

VI

As extremidades da superfície são linhas.

VII

Superfície plana é aquela, sobre a qual assenta toda uma tinha reta entre dois pontos quaisquer, que estiverem na mesma superfície.

VIII

Ângulo plano é a inclinação recíproca de duas linhas, que se tocam em uma superfície plana, sem estarem em direitura uma com outra.

IX

Ângulo plano retilíneo é a inclinação recíproca de duas linhas retas, que se encontram, e não estão em direitura uma com outra.

Se alguns ângulos existirem no mesmo ponto B (Fig. 1.), cada um deles vem indicado com três letras do alfabeto; e a que estiver no vértice do ângulo, isto é, no ponto, no qual se encontram as retas que formam o ângulo, põe-se no meio das outras; e destas uma está posta perto de uma das ditas retas, em alguma parte, e a outra perto da outra linha. Assim () ângulo feito pelas retas AB, CB representar-se-á com as letras ABC, ou CBA; o ângulo formado pelas retas AB, DB, com as letras ABD, ou DBA; e o ângulo que fazem as retas DB, CB, com as letras DBC, ou CBD. Mas se um ângulo estiver separado de outro qualquer, poder-se-á marcar com a mesma letra, que estiver no vértice, como o ângulo no ponto E (Fig. 2.)

X

Quando uma linha reta, caindo sôbre outra. linha reta, fizer com esta dois ângulos iguais, um de uma, e outro de outra parte, cada um dêstes ângulos iguais se chama ângulo reto; e a linha incidente se diz perpendicular a outra linha; sôbre a qual cai (Fig. 3.).

XI

Ângulo obtuso é o que é maior, que o ângulo reto (Fig. 4.).

XII

Ângulo agudo é o que é menor, que o ângulo reto (Fig. 5.)_

XIII

Têrmo se diz aquilo, que é extremidade de alguma cousa.

XIV

Figura é um espaço fechado por um ou mais têrmos.

XV

Círculo é uma figura plana fechada por uma só linha, a qual se chama circunferência: de maneira que tôdas as linhas retas, que de um certo ponto existente no meio da, figura, se conduzem para a circunferência, são iguais entre si (Fig. 6.).

XVI

O dito ponto se chama centro do círculo.

XVII

Diâmetro do círculo é uma linha reta, que pas.sa pelo centro, e que se termina por ambas as partes na circunferência.

XVIII

Semicírculo é uma figura compreendida entre o diâmetro e aquela parte da circunferência do círculo, que é cortada pelo diâmetro.

XIX

Segmento de círculo é uma figura compreendida entre uma linha reta, e uma porção da circunferência.

XX

Figuras retilíneas são as que são formadas com linhas retas.

XXI

As triláteras são aquelas, que são formadas com três linhas retas.

XXII

As quadriláteras são aquelas, que são feitas por quatro linhas retas. .

XXIII

Ás multiláteras são as que são feitas por mais de quatro linhas retas.

XXIV

Entre as figuras triláteras o triângulo eqüilátero é o que tem os três lados iguais (Fig. 7.).

XXV

Triângulo isósceles é o que tem dois lados iguais (Fig. 8.).

XXVI

Triângulo escaleno é o que tem os três lados desiguais

(Fig. 9.).

XXVII

Triângulo retângulo é o que tem um ângulo reto (Fig. 10.).

XXVIII

Triângulo obtusângulo é o que tem um ângulo obtuso (Fig. 11.).

XXIX

O triângulo acutângulo é o. que tem todos os ângulos agudos (Fig. 12.).

XXX

Entre as figuras quadriláteras, o quadrado é o que é juntamente eqüilátero e retângulo (Fig. 13.).

XXXI

E a figura, que de uma parte, fôr mais comprida, pode ser retângula, mas não eqüilátera (Fig. 14.).

XXXII

Mas o rombo é uma figura eqüilátera, e não retângula

(Fig. 15.).

XXXIII

Romboide é uma figura, que tendo os lados opostos iguais, nem é eqüilátera, nem eqüiângula (Fig. 16.).

XXXIV

Tôdas as mais figuras quadriláteras, que não são as referidas, se chamam trapézios.

XXXV

Linhas paralelas, ou eqüidistantes são linhas retas, que existindo no mesmo plano, e sendo produzidas de ambas as partes, nunca se chegam a tocar (Fig. 17.).

POSTULADOS.

I

Pede-se, como cousa possível, que se tire de um ponto qualquer para outro qualquer ponto uma linha reta.

II

E que uma linha reta determinada se continue em direitura de si mesma, até onde seja necessário.

III

E que com qualquer centro e qualquer intervalo se descreva um círculo.

AXIOMAS

I

As cousas, que são iguais a uma terceira, são iguais entre si.

II

Se a cousas iguais se juntarem outras iguais, os todos serão iguais.

III

E sé de cousas iguais se tirarem outras iguais, os restos serão iguais.

IV

E se a cousas desiguais se juntarem outras iguais, os todos serão desiguais.

V

E se de, cousas desiguais se tirarem cousas iguais, os restos serão desiguais.

VI

As quantidades, das quais cada uma por si faz o dôbro de outra quantidade, são iguais.

VII

E aquelas, que são metades de uma mesma quantidade, são também iguais.

VIII

Duas quantidades, que se ajustam perfeitamente uma com outra; são iguais.

IX

O todo é maior do que qualquer das suas partes.

X

Duas linhas retas não compreendem espaço.

XI

Todos os ângulos retos são, iguais.

XII

E se uma linha reta, encontrando-se com outras duas retas, fizer os ângulos internos da mesma parte menores que dois retos, estas duas retas produzidas ao infinito concorrerão para a mesma parte dos ditos ângulos internos. *(Veja-se a nota sôbre a proposição 29 do livro I*).

Êstes sinais =, >, <, de que os matemáticos usam freqüentemente, servem para maior brevidade.

o sinal = significa que o primeiro têrmo é igual ao segundo.
\> que o primeiro têrmo é maior que o segundo.

<	que o primeiro têrmo é menor que o segundo.
Assim A = B	significa, que A é igual a B.
A>B	que A é maior que B.
A<B	que A é menor que B.

PROPOSIÇÃO I. PROBLEMA.

Sôbre uma linha reta determinada descrever um triângulo equilátero (Fig. 18.).

Seja a linha reta AB de um certo comprimento. Deve-se sôbre ela descrever um triângulo eqüilátero.

Com o centro A, e com o intervalo AB se descreva (*Postul*. 3.) o círculo BCD; e com o centro B, e com o intervalo BA se descreva o círculo ACE. Do ponto C, onde os círculos se cortam reciprocamente, tirem-se (Post. 1.) para os pontos A, B as retas CA, CR O triângulo ABC será equilátero. Sendo o ponto A o centro do círculo BCD, será AC = AB *(Def. 15.).* E sendo o ponto B o centro do círculo CAE, será BC = BA. Mas temos visto CA = AB. Logo, tanto CA, como CB, é igual a AB. Mas as cousas, que são, iguais a uma terceira, são iguais entre si (*Ax*. 1.). Logo, será CA = CB. Logo as três retas CA, AB, BC são iguais; e por conseqüência, o triângulo ABC, feito sôbre a reta dada AB, é eqüilátero.

PROP. II. PROB.

De um ponto dado tirar uma uma reta igual a outra reta dada (Fig. 19.).

Seja dado o ponto A, e dada também a reta BC. Deve-sedo ponto A tirar uma linha reta igual a reta dada BC.

Do ponto A para o ponto B tire-se *(Post. 1.)* a reta AB, e sôbre esta se faça *(Prop. 1.1.)* o triângulo eqüilátero DAB; e produzam-se *(Post. 2.)* as retas AE, BF em direitura das retas DA, DB. Com o centro B, e o intervalo BC descreva-se *(Post. 3.)* o círculo CGH; e também com o centro D, e o intervalo DG descreva-se o círculo GKL. Sendo o ponto B o centro do círculo CGH, será BC = BG *(Def. 15.).* E sendo' D o centro do círculo GKL, será DL = DG. Mas as partes DA, DB das retas DL, DG são iguais. Logo, tiradas estas, as partes resíduas AL, BG serão também iguais (*Ax*. 3.). Mas temos demonstrado, que é BC = BG. Logo cada uma das duas AL, BC será igual a BG. Mas as cousas iguais a uma terceira, são iguais entre si. Logo será AL = BC; e por conseqüência temos. tirado do ponto A a linha reta AL igual a outra dada BC.

PROP. III. PROB.

Dadas duas linhas retas desiguais, cortar da linha maior uma parte igual à linha menor (Fig. 20.).

Sejam as duas retas desiguais AB, e C, e seja AB maior. Deve-se da reta maior AB cortar uma parte igual à reta menor C.

Do ponto A tire-se *(Pr. 2.1.)* a reta AD = C. Com o centro A, e o intervalo AD descreva-se *(Post. 3.)* o círculo DEF. Porque o ponto A é o centro do círculo EF, será AE = AD. Mas é também C = AD. Logo tanto AE, como C, será igual a AD; e por conseqüência AE = C (*Ax*. 1.). Logo temos tirado da reta maior AB uma parte igual à reta C<AB.

PROP. IV. TEOREMA.

Se dois triângulos tiverem dois lados iguais a dois lados, cada um a cada um, e os ângulos, compreendidos por êstes lados, forem também iguais; as bases e os triângulos, e os mais ângulos, que são opostos a lados iguais, serão também iguais (Fig. 21.).

Sejam os dois triângulos ABC, DEF, cujos lados AB, AC, DE, DF são iguais, cada um a cada um, isto é, AB = DE, e AC = DF; e seja o ângulo BAC = EDF. Digo, que a base BC é igual à base EF; e que o triângulo' ABC é igual ao triângulo DEF; e que os outros ângulos do primeiro triângulo são iguais aos outros do segundo, cada um a cada um, segundo ficam opostos a lados iguais; isto é, o ângulo ABC = DEF, e ACB = DFE.

Considere-se pôsto o triângulo ABC sôbre o triângulo DEF, de sorte que o ponto A caia sôbre o ponto D, e a reta AB sôbre a r.eta DE. O ponto B cairá sôbre o onto E, por ser AB = DE. Ajustando-se pois AB sôbre DE, também a reta AC se ajustará sôbre a reta DF, sendo o ângulo BAC = EDF. Logo sendo AC = DF, o ponto C cairá sôbre o ponto F. Mas temos visto que B cai sôbre E. Logo a base BC se ajustará sôbre a base EF. Porque se não se ajustarem, caindo B em E, e C em F, se seguirá, que duas linhas retas compreendem um espaço, o que não pode ser *(Ax. 10.).* Logo a base BC deve-se ajustar sôbre a base EF, e por conseqüência são iguais. Logo todo o triângulo ABC se ajusta sôbre todo o triângulo DEF, e assim são iguais; e os outros ângu!os do primeiro triângulo também se ajustam sôbre os outros do,segundo e são iguais; isto é, o ângulo ABC = DEF, e ACB = DFE.

PROP. V. TEOR.

Em qualquer triângulo isósceles os ângulos que estão sôbre a base, são iguais e produzidos os lados iguais, os ângulos, que se formam debaixo da base, são também iguais (Fig. 22.).

Seja o triângulo isósceles ABC com os lados iguais AB, AC, os quais sejam produzidos para D e E. Digo, que será o ângulo ABC = ACB, e CBD = BCE.

Tome-se na reta BD um ponto qualquer F; e da reta AE>AF se corte (*Pr*. 3.1.) a parte AG = AF; e se tirem as retas PC, GB. Sendo AF = AG, e AB = AC; as duas FA, AC serão iguais às duas GA, AB, cada uma a cada uma. E além disto compreendem o ângulo comum F AG. Logo a base FC será igual (*Pr*. 4.1.) à base GB; e o triângulo AFC igual ao triângulo AGB; e os mais ângulos iguais aos mais ângulos, cada um a cada um; isto é, os que são opostos a lados iguais, como ACF = ABG, e AFC = AGB. E sendo AF = AG e AB = AC, tirando AB de AF, e AO de AG, ficará BF = CG (*Ax*. 3.). Mas temos demonstrado, que FC = GB. Logo as duas BF, FC são iguais às duas CG, GB, cada uma a cada uma; e o ângulo BFC = CGE. Mas a base BC é comum aos dois triângulos FBC, GCB. Logo êstes dois triângulos são iguais (*Pr*. 4.1.); e os mais ângulos dêles, que forem opostos a lados iguais, são também iguais. Logo será .() ângulo FBC = GCB e BCF = CBG. Assim sendo o ângulo total ABG igual ao total ACF, como se tem demonstrado; e sendo CBG = BCF, tirando QBG de ABG, e BCF de ACF, ficará o ângulo ABC = ACB, que são os ângulos sôbre a base BC do triângulo isósceles ABC. E já se tem provado FBC = GCB, que são os ângulos debaixo da base BC.

COROL. *Disto se segue, que todo o triângulo equilátero é também equiângulo*.

PROP. VI. TEOR.

Se dois ângulos de um triângulo forem iguais, os dados opostos a êstes ângulos iguais, serão também iguais (Fig. 28.).

Seja o triângulo ABC, e seja o ângulo ABC = ACE. Digo, que será AB = AO.

Se não fôr AB = AC, uma destas duas retas será maior que a outra. Seja AB a maior, e desta, que é maior, se corte *(Pr. 3.1.)* DB = AC, que é menor. Tire-se a reta DC. Sendo DB = AC, e BC comum, serão as duas DB, BC iguais às duas AC, CB, cada uma a cada uma. Mas é o ângulo DBC = ACB. Logo a base DC será igual à base AB; e o triângulo DBC igual *(Pr. 4.1.)* ao triângulo ACB, o que é absurdo, porque DBC é menor que ABC. Logo as retas AB, AC não são desiguais, e por conseqüência deve ser AB = AC.

COROL. *Desta proposição se infere que todo o triângulo eqüiângulo é também eqüilátero.*

PROP. VII. TEOR.

Sôbre a mesma base e da mesma parte não se podem construir dois triângulos diferentes, que tenham os outros lados iguais isto é, os dois, que partem de um mesmo têrmo da, base, e os outros dois, que partem do outro, não podem ser iguais (Fig. 24.).

Se é possível, estejam sôbre a mesma base AB, e da mesma parte os dois triângulos ACB, ADB, que tenham tanto os lados CA, DA, como os lados CB, DB, iguais entre si.

Tire-se a reta CD. Ou nenhum dos vértices dos triângulos cai dentro do outro triângulo, ou um vértice de um triângulo está dentro do outro triângulo. Primeiramente, nenhum vértice esteja dentro de um dos dois triângulos. Sendo AC = AD, será ângulo ACD = ADC *(Pr. 5.1.).* Mas o ângulo ACD é maior que o ângulo BCD. Logo será ADC>BCD, e por conseqüência BDC será muito maior que BCD. Também Rendo CB = DB, será o ângulo BDC = BCD *(Pr. 5.1.).* Mas tem-se demonstrado BDC>BCD. Logo BDC será igual e maior ao mesmo tempo, que BOD, o que não pode ser.

Agora o vértice D do triângulo ADB esteja dentro do outro triângulo ACB (Fig. 25). Produzam-se as retas AC, AD para os pontos E, F. Sendo AC = AD serão os ângulos ECD, FDC, que são debaixo da base CD, iguais (*Pr*. 5.1.). Mas é o ângulo ECD>BCD. Logo será FDC>BCD, e BDC será muito maior que BCD. E porque é CB = DB, será BDC = BCD *(Pr. 5.1.).* Mas temos visto ser BDC>BCD. Logo BDC será igual e maior ao mesmo tempo, que BCD, o que é igualmente absurdo. Suposto que um vértice de um triângulo caia sôbre um lado do outro triângulo, não há mister demonstração alguma.

PROP. VIII. TEOR.

Se dois triângulos tiverem dois lados iguais a dois lados, cada um a cada um, e as bases também iguais; os ângulos, compreendidos pelos lados iguais, serão também iguais (Fig. 26.).

Sejam os dois triângulos ABC, DEF, e seja o lado AB = DE, e AC = DF, e também a base BC = EF outra base. Digo, que será o ângulo BAC = EDF. Pôsto o triângulo ABC sôbre o triângulo DEF de sorte que o ponto B caia em E, e a reta BC sôbre a reta EF, também o ponto C deve cair sôbre o ponto F, por ser BC = EF; e assim ajuntando-se BC com EF, as duas BA, AC se ajustarão com as duas ED, DF. E se, ajustando-se a base BC sôbre a base EF, quisermos que os lados BA, AC se não ajustem sôbre os lados ED, DF, mas tenham outro lugar, como EG, GF, poder-se-ão construir sôbre a mesma base e da mesma parte dois triângulos, cujos lados, partindo de uma e outra extremidade da base comum, sejam iguais. Mas isto é impossível *(Pr. 7.1.).* Logo se a base BC se ajusta sôbre a base EF, os lados BA, AC devem-se ajustar sôbre os lados ED DF, e por conseqüência o ângulo BAC sôbre o ângulo EDF. Logo será BAC = EDF *(Ax. 8.).*

PROP. IX. PROB.

Dividir em duas partes iguais um ângulo retilíneo dado (Fig. 27.).

Seja dado o ângulo retilíneo BAC. Deve-se dividir êste ângulo em duas partes iguais.

Tome-se na reta AB qualquer ponto D, e da reta AC corte-se *(Pr. 3.1.)* a parte AE = AD; e tirada a reta DE, sôbre esta se faça *(Pr. 1.1.).* o triângulo eqüilátero DE:B', e se tire AF. Digo, que o ângulo BAC fica dividido em duas partes iguais pela reta AF. Sendo AD = AE e AF comum; nos dois triângulos FDA, FEA os dois lados DA, AF serão iguais aos dois lados EA, AF, cada um a cada um. Mas é a base DF = EF outra base. Logo, será o ângulo DAF = EAF *(Pr. 8.1.);* e por conseqüência o ângulo retilíneo dado BAC fica dividido pela reta AF em duas partes iguais.

PROP. X. PROB.

Dividir em duas partes iguais uma linha reta de um comprimento dado (Fig. 28.).

Seja dada a linha reta determinada AB. É preciso dividi-Ia em duas partes iguais.

Faça-se (*Pr*. 1.1.) sôbre a reta dada AB o triângulo eqüilátero ABC; e com a reta CD se divida (*Pr*.9 .1.) em duas metades o ângulo ACB. Digo, que a reta AB fica dividida em duas partes iguais no ponto D.

Porque sendo AC = CB, e CD comum, serão as duas AC, CD, iguais às duas BC, CD, cada uma a cada uma. Mas é o ângulo ACD = BCD. Logo será (*Pr*. 4.1.) a base AD = DB outra base. Logo temos dividido a reta determinada AB em duas partes iguais no ponto D.

PROP. XI. PROB.

De um ponto dado em uma linha reta dada levantar uma perpendicular sôbre a mesma reta dada (Fig. 29.).

Seja dada a reta AB, e nela o ponto C. Deve-se do ponto O levantar uma perpendicular sôbre a reta ÁB.

Tome-se na reta AC qualquer ponto D, e ponha-se OE = OD *(Pr. 3.1.),* e sôbre DE faça-se *(Pr. 1.1.)* o triângulo eqüilátero DFE. Tire-se finalmente a reta FC. Digo, que FC é perpendicular sôbre a dada AB no ponto C.

Por ser DC =CE, e FC comum; as duas DC, CF serão iguais às duas EC, CF, cada uma a cada uma. Mas é a base DF = FE outra base. Logo será o ângulo DCF = ECF *(Pr. 8.1.)* ; .e êstes ângulos são formados um de uma, e outro de outra parte da mesma linha. Mas quando uma reta,' caindo sôbre outra, faz os ângulos de ambas as partes iguais entre si, êstes ângulos são retos *(Def. 10.)*. Logo os ângulos DCF, FCE são retos, e assim temos levantado a perpendicular FC sôbre a reta dada AB, e do ponto dado C.

COROL. *Com isto podemos demonstrar que duas linhas retas não podem ter um segmento comum (Fig. 30.).*

Tenham as duas retas ABC, ABD, se é possível, o segmento comum AB. Do ponto B levante-se a perpendicular BE sôbre AB. Porque ABC é uma linha reta, será o ângulo CBE = EBA (*Def. 10.*). Do mesmo modo sendo ABD uma linha reta, será o ângulo DBE = EBA. Logo será DBE = CBE,isto é, um ângulo menor igual a um maior, o que não pode ser. Logo duas linhas retas não podem ter um segmento comum.

PROP. XII. PROB.

Conduzir uma perpendicular sôbre uma linha reta dada indefinita de um ponto dado fora dela (Fig. 81.).

Seja dada a linha reta AB, e fora dela o ponto C. Devese do ponto C conduzir uma perpendicular sôbre a reta AB.

Da outra parte da reta AB tome-se um ponto qualquer D, e com o centro C, e o intervalo CD descreva-se *(Post. 3.)* o círculo EGF, que corte a reta AB nos pontos F, G; e a reta FG se. divida pelo meio *(Pr. 10.1.)* no ponto H, e tirem-se as retas CF, CH, CG. Digo, que a reta CH é perpendicular sôbre a reta indefinita AB.

Sendo FH = HG, e HC comum, as duas FH, HC serão iguais às duas HG, HC, cada uma' a cada uma. Mas é a base CF = CG (Def. 15.) outra base. Logo, será o ângulo CHF = CHG *(Pr. 8.1.)*, e por conseqüência êstes ângulos, sendo adjacentes à mesma linha CH, serão retos, e a reta CH, que parte do ponto C, será perpendicular sôbre a reta dada indefinita AB, como se pedia.

PROP. XIII. TEOR.

Uma linha reta, caindo sôbre outra linha reta, faz com esta ou dois ângulos retos, ou dois ângulos iguais a dois retos (Fig. 32. 33.).

Caia a reta AB sôbre a reta CD, fazendo com esta os dois ângulos CBA, ABD. Digo, que os ângulos CBA, ABD, ou são dois retos, ou são iguais a dois retos.

Porque se fôr o ângulo CBA = ABD (Fig. 32.), claro está que são retos (*Def*. 10.). E quando assim não seja: do ponto B (Fig. 33.) levante-se *(Pr. 11.1.)* sôbre CD a perpendicular BE. Logo os ângulos CBE e EBD são dois retos. E porque o ângulo CBE é igual aos dois CBA, ABE, ajuntando de uma e outra parte o mesmo ângulo EBD, serão os dois, CBE, EBD iguais aos três CBA, ABE, EBD *(Ax. 2.)*. Também, sendo o ângulo DBA igual aos dois DBE, EBA, ajuntando de ambas as partes o ângulo comum ABC, serão os dois DBA, ABC iguais aos três DBE, EBA, ABC. Mas êstes três ângulos são iguais aos dois CBE, EBD; e as quantidades, que são iguais a uma terceira, são iguais entre si *(Ax. 1.)*. Logo. os dois ângulos CBE, EBD são iguais aos dois DBA, ABC.

Mas CBE, EBD são dois retos. Logo os dois ângulos DBA, ABC são iguais a dois retos.

PROP. XIV. TEOR.

Se em um ponto de uma linha reta qualquer concorrerem de partes opostas duas retas, fazendo com a primeira reta os ângulos adjacentes iguais a dois retos, as retas, que concorrem para o dito ponto, estarão em direitura uma da outra (Fig. 34.).

No ponto B da linha reta AB concorram de partes opostas; as duas BC, BD, fazendo com a reta AB os ângulos adjacentes ABC, ABD iguais a dois retos. Digo, que BD está em direitura de CB.

Se BD não está em direitura de CB, esteja-o BE, de sorte que CBE seja uma só linha reta. Caindo a reta AB sôbre a reta CBE, os ângulos ABC, ABE serão iguais a dois retos (*Pr*. 13.1.). Mas também são iguais a dois retos os ângulos ABC, ABD. Logo os dois ângulos CBA, ABE são iguais aos dois CBA, ABD. Logo tirando de uma e outra parte o ângulo comum CBA, ficará o ângulo ABE = ABD (*Ax*. 3.) ; isto é, um ângulo menor igual a um maior, o que não pode ser. Logo a reta BE não está em direitura com BC. O mesmo se pode demonstrar de qualquer outra reta fora de BD. Logo, as retas CB, BD estão em direitura.

PROP. XV. TEOR.

Se duas linhas retas reciprocamente se cortarem, farão os ângulos verticalmente opostos iguais entre si (Fig. 35.).

Cortem-se as duas retas AB, CD reciprocamente no ponto E. Digo, que será o ângulo AEC = DEB, e OEB = AED.

Porque a reta AE cai sôbre a reta CD, serão os ângulos CEA, AED iguais a dois retos *(Pr. 13.1.)*. Do mesmo modo, caindo DE sôbre AB, serão também os ângulos AED, DEB iguais a dois retos *(Pr. 13.1.)*. Logo, os ângulos CEA, AED são iguais aos ângulos AED, DEB. Logo, tirando de' uma parte e outra o comum AED, ficará CEA = BED.

Com a mesma demonstração se prova ser CEB = AED.

COROL. 1. *Disto se pode deduzir, que quando duas retas se cortam, fazem quatro ângulos iguais a quatro retos.*

COROL. 2. *E que todos os ângulos ao redor de um mesmo ponto são iguais a quatro retos.*

PROP. XVI. TEOR.

Produzido um lado qualquer de qualquer triângulo, o ângulo externo sempre é maior que cada um dos ângulos internos e opostos (Fig. 36.).

Seja o triângulo ABC, cujo lado BC seja produzido para a parte D. Digo, que o ângulo externo ACD é maior que 'qualquer dos internos e opostos CBA, BAC.

Divida-se o lado AC em duas partes iguais *(Pr. 10.1)* no ponto E; e tirada a reta BE, esta se continue até F de sorte que seja BE = EF. Tire-se FC, e o lado AC seja produzido para G. Sendo AE = EC, e BE = EF, as duas AE, EB serão Iguais às duas CE, EF, cada uma a cada uma. Mas é o angulo AEB = CEF *(Pr. 15.1)*, por serem êstes ângulos verticalmente opostos. Logo, a base AB é igual à base CF; e o triângulo AEB igual ao triângulo CEF; e os mais ângulos iguais aos mais ângulos. *(Pr. 4.1)*, cada um a cada um, segundo ficam opostos a lados iguais. Logo será o ângulo BAE = ECF. Mas é o ângulo ECD>ECF. Logo, será também ACD>BAE. Com o mesmo discurso, dividido pelo meio o lado BC, se demonstra ser o ângulo BCG, isto é, ACD>ABC *(Pr. 15.1.)*.

PROP. XVII. TEOR.

Dois ângulos de um triângulo qualquer, tomados de qualquer modo que se quiser, são menores que dois retos (Fig. 37.).

Seja o triângulo ABC. Digo, que dois ângulos quaisquer do triângulo ABC, tomados juntamente, são menores que dois retos.

Produza-se BC para D. Sendo no triângulo ABC o ângulo externo A CD maior *(Pr. 16.1.)* que o ângulo interno e oposto ABC; se a um e outro se ajuntar o ângulo comum ACB, os ângulos ACD, ACB juntos serão maiores que os ângulos ABC, ACB. Mas ACD, ACB são iguais a dois retos *(Pr. 13.1.)*.

Logo, os dois ângulos ABC, BCA são menores que dois retos. Do mesmo modo podemos demonstrar serem os ângulos BAC, ACB e os ângulos CAB, ABC menores que dois retos.

PROP. XVIII. TEOR.

Em qualquer triângulo, o lado maior opõe-se ao ângulo maior (Fig. 38.).

Seja o triângulo ABC, e seja o lado AC>AB. Digo que o ângulo ABC>BCA.

Sendo AC>AB, poderá tomar-se AD = AB (Pr. 3.1.).

Tire-se a reta BD. Porque no triângulo BDC o ângulo externo> ADB é maior que o ângulo interno e oposto BCD *(Pr. 16.1.)* ; e é ADB = ABD, por ser AB = AD *(Pr. 5.1.)*; será o ângulo, ABD>ACB, e por conseqüência ABC muito maior que ACB.

PROP. XIX. TEOR.

Em qualquer triângulo o ângulo maior fica oposto ao lado maior (Fig. 39.).

Seja o triângulo ABC, e seja o ângulo ABC>BCA. Digo, que é o lado AC>AB.

Se AC não é maior, será ou igual, ou menor, que AB. Mas não é igual, porque seria ABC = ACB *(Pr. 5.1.)*, contra a suposição. Logo não é AC = AB. Também não pode ser AC<AB, porque seria ABC<ACB *(Pr. 18.1.)*, contra a hipótese. Logo, não é AC<AB. Logo, segue-se ser AC>AB.

PROP. XX. TEOR.

Em qualquer triângulo dois lados, tomados de qualquer modo que se quiser, são maiores que o terceiro (Fig. 40.).

Seja o triângulo ABC. Digo que dois quaisquer lados do triângulo ABC são maiores que o terceiro; isto é, os lados BA, AC são maiores que o lado BC; os lados AB, BC são maiores que o lado AC: e os lados BC, CA são maiores que' o lado AB.

Produza-se BA, para D, e posta AD = CA *(Pr. 3.1.)*, tire-se a reta DC. Sendo DA = AC, será o ângulo ADC = ACD *(Pr. 5.1.)*. Mas é BCD>ACD. Logo, será BÚD> ADC. E porque no triângulo DCB é o ângulo BCD>BDC; e' ao ângulo maior fica oposto o lado também maior *(Pr. 19.1.)*, será o lado DB >BC. Mas DB é igual aos dois lados juntos ,BA, AC. Logo os dois lados BA, AC são maiores que O lado BC. Do mesmo modo se prova que os lados AB, BC são maiores que o lado CA; e que os lados BC, CA são maiores que o lado AB.

PROP. XXI TEOR.

Se sôbre os extremos de um lado de um triângulo estiverem postas duas retas dentro do mesmo triângulo, estas serão menores que os outros dois lados do triângulo, mas compreenderão um ângulo maior do que o ângulo que fica oposto ao lado, sôbre cujos extremos estão postas as ditas retas (Fig. 41.).

Sôbre os extremos B, C do lado BC do triângulo ABC estejam postas as retas BD, DC dentro do mesmo triângulo ABC. Digo que as retas BD, DC são menores que os outros lados dos triângulos BA, AC; mas que o ângulo BDC é maior que o ângulo BAC.

Produza-se BD até E. Porque dois quaisquer lados de um triângulo são maiores que o terceiro *(Pr. 20.1.)* ; serão os dois lados BA, AE do triângulo ABE maiores que o lado BE. Ajunte-se a uma e outra parte a reta EC. Logo, BA, ACserão maiores *(Ax. 4.)* que BE, EC. E porque, no triângulo CED, os dois lados CE, ED fião maiores que o lado, CD, ajuntando 1.1. comum DB, serão as duas CE, EB maiores *(Ax. 4.)* que as duas CD, DB; e por conseqüência BA, AC serão muito maiores que BD, DC.

E porque em qualquer triângulo o ângulo externo é maior que o interno e oposto *(Pr. 16.1.)*, no triângulo CDE será o angulo externo BDC> CDB. Pela mesma razão, no triângulo ABE deve ser o ângulo CEB>BAC, e por conseqüência será o ângulo BDC muito maior que o ângulo BAC.

PROP. XXII. PROB.

Construir um triângulo com três linhas retas iguais a três outras dadas, entre as quais duas, tomadas como se quiser, sejam sempre maiores que a terceira (Fig. 42.).

Sejam dadas as três retas A, B, C, das quais duas tomadas como se quiser, sejam maiores que a terceira, isto é, as duas A, B>C; as duas A, C>B; e as duas B, C>A *(Pr. 20.1.)*. Deve-se formar um triângulo de três lados iguais às três retas dadas A, B, C.

Tire-se de qualquer ponto D uma reta infinita DE, e ponha-se *(Pr. 3.1.)* DF = A; FG = B; e GH = C. Com o centro F, e o intervalo FD descreva-se (Post. 3.) o círculo DKL; e com o centro G, e o intervalo GB descreva-se o círculo KLH. Tirem-se as retas KF, KG. Digo que o triângulo KFG é o que se pede.

Sendo o ponto F o centro do círculo DKL, será FD = FK *(Def, 15.)*. Mas é FD = A. Logo será FK = A. E sendo Q ponto G o centro do círculo LKH, será GH = GK. Mas é GH = C. Logo, será GK = C.Mas se tem tomado FG = B. Logo, as três retas KF, FG, GK são iguais às três dadas, A, B, C, e o triângulo KFG é o que se pedia.

PROP. XXIII. PROB.

Em um ponto de uma linha reta dada formar 1tm ângulo retilíneo igual a outro ângulo retilineo dado (Fig. 43.).

Seja dada a reta AB, e nela o ponto A; e seja dado o ângulo retilíneo DCE. Deve-se formar no ponto A, e com a reta dada AB um ângulo retilíneo igual ao ângulo proposto DCE.

Tomados os pontos D, E, como se quiser, nos lados do ângulo DCE, tire-se a reta DE; e com três lados, que sejam iguais às três retas CD, DE, EC, faça-se *(Pr. 22.1.)* o triângulo AFG, e seja CD = AF, CE = AG, e DE = FG. Digo, que o ângulo F AG será igual ao proposto DCE. Porque as duas DC, CE são iguais às duas F A, AG, cada uma a cada uma, e a base DE = FG outra base; será o ângulo DOE = F AG *(Pr. 8.1.)*. Logo, com a reta dada AB, e no ponto A temos feito o ângulo retilíneo FAG igual ao ângulo retilíneo dado DCE.

PROP. XXIV. TEOR.

Se dois triângulos tiverem dois lados iguais a dois lados, cada um a cada um, e um dos ângulos compreendidos pelos lados iguais fôr maior, e o outro menor, a base, que estiver oposta ao ângulo maior, será maior que a outra base oposta ao âng1tlo menor (Fig. 44.).

Sejam os dois triângulos ABC, DEF, que tenham os lados AB, AC iguais aos lados DE, DF, cada um a cada um, isto é, o lado AB = DE, e AC = DF; e seja o ângulo BAC>EDF. Digo que será também a base BC>EF, que é a outra base.

Seja DE não maior que, DF. Com a reta DE e no ponto D faça-se *(Pr. 23.1.)* o ângulo EDG = BAC; e posta DG = DE *(Pr. 3.1.)*, tirem-se as retas EG, GF. Sendo AB = DE, e AC = DG, serão as duas BA, AC, iguais às duas ED, DG, cada uma a cada uma. Mas é o ângulo BAC = EDG. Logo, será a base BC = EG outra base *(Pr. 4.1.)*. E sendo DG = DF, será o ângulo DFG = DGF *(Pr. 5.1.)*. Mas é o ângulo DGE>DGF. Logo será o ângulo DEG>EGF. Logo, o ângu]o EFG é muito maior que o ângulo EGF. E porque ,no triângulo EFG é o ângulo EFG>EGF; e ao ângulo maior fica oposto o lado também maior *(Pr. 19.1)*, será o lado EG>EF. Mas é EG = BC. Logo será BC>EF.

PROP. XXV. TEOR.

Se em dois triângulos forem dois lados de um iguais a dois lados do outro, cada um a cada um, e fôr a base de um triângulo maior que a base do outro; aquêle dos ângulos compreendidos pelos lados iguais, que ficar oposto à base maior, será maior que o outro oposto à base menor (Fig. 45.).

Sejam os dois triângulos ABC, DEF, que tenham. os l/1dOfj AB, AC iguais aos lados DE, DF, cada uma a cada um, iHLn é, AB = DE, e AC = DF, e seja a base BC>EF. Digo fll'" será o ângulo BAC>EDF.

Se não é BAC>EDF, será ou igual, ou, menor. Mas não podo ser 13AC = EDF, porque seria BC = EF (Pr. 4.1.) contra o que temos suposto. Logo não é BAC = EDF. Mas nem pode ser BAC<EDF, porque seria BO<EF *(Pr. 24.1.)* contra a hipótese. Logo não é BAC<EDF; e por conseqüência deve ser BAC>EDF.

PROP. XXVI. TEOR.

> *Se em dois triângulos dois ângulos de um forem iguais a dois ângulos do outro, cada um a cada um, e um lado do primeiro igual a um lado do outro, e forem êstes lados ou adjacentes, ou opostos a ângulos iguais, os outros lados dos dois triângulos serão iguais aos outros lados cada um a cada um; e também o terceiro ângulo será igual ao terceiro (Fig. 46.).*

Sejam os dois triângulos ABO, DEF, que tenham os ângulos ABO, BOA iguais aos ângulos DEF, EFD, cada um a cada um, isto é, ABO = DEF, e BCA = EFD; e tenham um lado igual a um lado, e sejam êstes lados em primeiro, lugar adjacentes a ângulos iguais, isto é, BC = EF. Digo que os outros lados são iguais aos outros lados, cada um a cada um, isto é, AB = DE, e AC = DF; e o ângulo BAC = EDF outro ângulo.

Se AB, DE não são retas iguais, uma delas sera maior. Seja AB maior. Ponha-se BG = DE, e tire-se a reta GC. Sendo BG =DE, e BC = EF, as duas GB, BC serão iguais às duas DE, EF, cada uma a cada uma. Mas é o ângulo GBO = DEF. Logo será a base GO = DF outra base *(Pr. 4.1.)*; e o triângulo GBC = DEF outro triângulo; e os outros ângulos opostos a lados iguais serão respectivamente iguais entre si. Logo será o ângulo GCB = DFE. Mas temos posto DFE = BCA. Logo será o ângulo BCG = BCA, isto é, um ângulo menor igual a um maior, o que não pode ser, e por consequência AB, DE não são desiguais. Logo são iguais. Mas é BC = EF. Logo as duas AB, BC são iguais às duas DE, EF, cada uma a cada uma. Mas é também o ângulo ABC = DEF. Logo, será a base AC = DF, que é a outra base, e o ângulo BAC = EDF *(Pr. 4.1.)*.

Sejam agora iguais os lados (Fig. 47.), que ficam opostos a ângulos iguais, isto é, seja AB = DE. Digo outra vez que os outros lados são iguais aos outros lados, isto é, AO= DF, e BO = EF; e também que é o ângulo BAC = EDF.

Se as retas BO, EF não são iguais, uma delas será maior que a outra. Seja BC, se é possível, a maior; e posta BH = EP, tire-se a reta AH. Sendo BH = EF, e AB = DE, as duas AB, BH serão iguais às duas DE, EF, cada uma a cada uma. Mas os ângulos feitos por estas retas são iguais. Logo, a base AH será igual à base DF; e o triângulo ABH igual ao triângulo DEF; e os outros ângulos iguais aos outros ângulos, segundo ficam opostos a lados iguais. Logo, será o ângulo BHA. = EFD. Mas pela hipótese é EFD = BCA. Logo será BHA = BCA; isto é, o ângulo externo BHA do triângulo AHC será igual ao interno e oposto BCA, o que não pode ser *(Pr. 16.1.)*. Logo, as retas BC, EF não são desiguais. Logo, são iguais. Mas é AB = DE. Logo, as duas AB, BC são iguais às duas DE, EF, cada uma a cada uma. Mas os ângulos feitos por elas são iguais. Logo, é a base AC = DF outra base, e o ângulo BAC = EDF.

PROP. XXVII. TEOR.

Se uma reta, cortando outras duas retas, fizer com elas os ângulos alternos iguais, as mesmas duas retas serão paralelas (Fig. 48.).

A reta EF corte as outras duas AB, CD e faça com elas os ângulos alternos AEF, EFD iguais. Digo, que AB, CD são duas paralelas.

Se AB, CD não são paralelas, produzidas hão de concorrer ou para as partes B, D, ou para as partes A, C. Produzam-se, e concorram para as partes B, D no ponto G. Logo, no triângulo GEF, deve ser o ângulo externo AEF>EFG, flue é o interno e oposto *(Pr. 16.1.)*. Mas, pela hipótese, era AEF = EFG, o que já não pode ser. Logo, as duas retas AB, CD produzidas para as partes B, D não concorrem. Do mesmo modo se demonstrará, que nem podem concorrer para ns partes A, C. Mas as linhas retas, que produzidas nunca concorrem nem para uma, nem para outra parte, são paralelas *(Def. 35.)*. Logo, as duas retas AB, CD são paralelas.

PROP. XXVIII. TEOR.

Se uma reta cortar outras duas, e fizer o ângulo externo igual ao interno e oposto da mesma parte; ou também os dois internos da mesma parte iguais a dois retos, as mesmas retas serão paralelas (Fig. 49.).

A reta EF corte as duas AB, CD, e faça o ângulo externo EGB = GRD, que é o interno e oposto da mesma parte; ou faça os dois internos da mesma parte BGR, GRD iguais a dois retos. Digo que as retas AB, CD são paralelas.

Sendo o ângulo EGB = GHD, e EGB = AGH *(Pr.15.1.)*, será AGH = GHD. Mas são alternos. Logo AB será paralela a CD *(Pr. 27.1.)*. E porque os ângulos BGH, GHD são iguais a dois retos, pela hipótese e também os ângulos AGH, BGH são iguais a dois retos *(Pr. 13.1.)*, os dois AGH, BGH serão iguais aos dois BGH, GHD. Logo, tirando o ângulo comum BGH, ficará AGH = GHD. Mas são alternos. Logo, as duas retas AB, CD são paralelas.

PROP. XXIX. TEOR.

Uma linha reta, que corta duas retas paralelas, faz os ângulos alternos iguais entre si o ângulo externo igual ao interno e oposto da mesma parte, e finalmente os internos da mesma parte iguais a dois retos (Fig. 49.).

A linha reta EF corte as duas AB, CD, paralelas. Digo que fará com elas os ângulos alternos AGH, GHD iguais; e que o angulo externo EGB será igual ao interno e oposto da mesma parte GHD e que os internos e da mesma parte BGH, GHD serão iguais a dois retos.

Se não fôr o ângulo AGH = GHD, um será maior que o outro. Seja AGH o maior. Sendo AGH>GHD, se ajuntarmos a uma é outra parte o mesmo ângulo BGR, os ângulos AGH, BGH serão maiores que os ângulos BGH e GHD.Mas os ângulos AGH, BGH são iguais a dois retos *(Pr. 13.1.)*. Logo, os ângulos BGH, GHD são menores que dois retos. Mas as retas, que com outra fazem os ângulos internos da mesma parte menores que dois retos, produzidas ao infinito finalmente concorrem *(Ax. 12.)*. Logo, as retas AB, CD, produzidas ao infinito, concorrem entre si. Mas isto não pode suceder, porque são paralelas. Logo, os ângulos AGH, GHD não são desiguais, e por conseqüência será AGH = GHD. Mas é também AGH = EGB *(Pr. 15.1.)*. Logo, será EGB = GHD. Ajunte-se-lhes o mesmo ângulo BGR j serão os ângulos EGB, BGH iguais aos ângulos BGI:I, GHD. Mas EGB, BGR são iguais a dois retos *(Pr. 13.1.).* Logo, também os ângulos BGH, GHD são iguais a dois retos (Vej. as noto a esta Prop.).

PROP. XXX. TEOR.

As linhas retas, que são paralelas a uma mesma linha reta, são paralelas entre si (Fig. 50.).

Sejam as retas AB, CD paralelas à mesma reta EF. Digo que as retas AB, CD são paralelas entre si.

A reta GHK corte as três retas AB, EF, CD nos pontos G, H, K. Porque a reta GK corta as duas paralelas AB, EF em G, e H, será o ângulo AGH = GHF *(Pr. 29.1.)*. E porque a mesma reta GK corta as paralelas EF, CD em H, e K, será também o ângulo GHF = GKD. Mas temos visto ser AGK = GHF. Logo, será AGK =GKD. Mas são os ângulos alternos. Logo, as retas AB, CD são entre si paralelas *(Pr. 27 . 1.)*.

PROP. XXXI. PROB.

De um ponto dado conduzir uma linha reta paralela a outra linha reta dada (Fig. 51.).

Seja o ponto A, e a reta BC. Deve-se do ponto A conduzir uma linha reta, que seja paralela à reta BC.

Tome-se na reta BC um qualquer ponto D, do qual se tire a reta DA para o ponto A. Com a reta DA se faça no ponto A o ângulo DAE = ADC *(Pr. 23.1.)*; e se produza EA para F. Digo que estará feito o que se pede.

Porque a reta AD cortando as duas BC, EF, faz os ângulos alternos EAD, ADC iguais entre si, será EF paralela a BC *(Pr. 27.1.)*. Logo do ponto dado A temos conduzido a reta EAF paralela à reta dada BC.

PROP. XXXII. TEOR.

Em todo o triângulo, produzido um lado qualquer, o ângulo externo é igual aos dois internos e opostos e os três ângulos internos de um triângulo qualquer são iguais a dois retos (Fig. 52.).

Seja o triângulo ABC, e um lado dêle BC seja produzido para D. Digo que o ângulo externo ACD é igual aos dois internos e opostos CAB, ABC; e que os três ângulos intern08 ABC, BCA, CAB do mesmo triângulo ABO são iguais a dois retos.

Pelo ponto C tire-se a reta CE paralela a AB *(Pr. 31.1.)*. Sendo AB, CE paralelas, e cortadas pela reta AC, os ângulos alternos BAC, A,CE serão iguais *(Pr. 29.1.)*. E as mesmas paralelas AB, CE, sendo cortadas pela reta BD, o ângulo externa ECD será igual ao interno e oposto ABC *(Pr. 29.1.)*. Mas temos demonstrado ser ACE = BAC. Logo, o ângulo externo e total ACD é igual aos dois internos e opostos CAB, ABC. Ajunte-se-lhes o mesmo ACB; e os dois ACD, ACB serão iguais aos três CBA, BAC, ACB. Mas os dois ACD, AGB são iguais a dois retos *(Pr. 13.1.)*. Logo, os três CBA, BAC, ACB serão também iguais a dois retos.

COROL. 1. *Todos os ângulos internos de qualquer figura retilínea, juntamente com quatro retos, são iguais a duas vêzes tantos retos, quantos são os lados da figura (Fig. 53.).*

Uma figura retilínea qualquer ABCDE pode-se dividir em tantos triângulos, quantos são os lados da mesma figura, tomando, como se quiser, dentro da figura um ponto F, e tirando dêste ponto para todos os ângulos da figura outras tantas retas, como FA, FB, FC, FD, FE. Mas pela precedente proposição, todos os ângulos dêstes triângulos tomados juntamente são iguais a duas vêzes tantos retos, quantos são os mesmos triângulos, isto é, quantos são os lados da figura; e ao mesmo tempo os ditos ângulos são iguais aos ângulos da figura juntamente com os outros ao redor do ponto F, que é o vértice comum de todos os triângulos, isto é, juntamente com quatro retos *(Cor. 2. Pr. 15.1.)*. Logo, todos os ângulos da figura, e mais quatro retos, são iguais a duas vêzes tantos retos, quantos são os lados da mesma figura.

COROL, 2. *Todos os ângulos externos de 1trlUl figura qualq1ter tomados juntamente são iguais a quatro retos (Fig. 54.)*.

O ângulo interno ABC, juntamente com o externo adjacente ABD, é igual a dois retos *(Pr. 13.1.)*. Logo; todos os internos juntamente com todos os externos são iguais a duas vêzes tantos retos, quantos são os lados da figura; isto é, pelo corolário precedente, são iguais a todos os ângulos internos da figura, juntamente com quatro retos. Logo, tirados os ângulos internos, ficarão os externos iguais a quatro retos.

PROP. XXXIII. TEOR.

> *As retas, que da mesma parte estão postas entre as extremidades ele duas outras retas iguais e paralelas, são também iguais é paralelas (Fig. 55.).*

Sejam as duas retas AB, OD iguais e paralelas, e entre os 'extremos dela A, C, B, D estejam postas as outras duas AO, BD. Digo que AO, BD são iguais e paralelas.

Tire-se a reta BC. Porque AB, CD são paralelas, e são cortadas pela reta BC, serão os ângulos alternos ABC, BCD iguais *(Pr. 29.1.)*. E sendo AB = CD, e BC comum; as duas AB, BC serão iguais às duas DC, CB. Mas temos o ângulo

ABC = BCD. Logo,será a base AC = BD, que é a outra base *(Pr. 4.1.)*; e o triângulo ABC igual ao triângulo BCD, e os mais ângulos iguais aos mais ângulos *(Pr. 4.1.)*, cada um a cada um, segundo ficam opostos a lados iguais. Logo, deve ser o ângulo ACB = CBD. Logo, a reta BC, fazendo com as duas AC, BD os ângulos alternos ACB, CBD iguais, as duas retas AC, BD serão paralelas *(Pr. 27.1.)*. E já temos demonstrado que são também iguais.

PROP. XXXIV. TEOR.

Os lados e os ângulos opostos dos espaços formados com linhas paralelas, ou paralelogramos, são iguais; e todo o espaço paralelogramo, fica dividido pela diagonal em duas partes iguais (Fig. 55.).

Seja o espaço paralelogramo ABDC, cuja diagonal é BC. Digo que os lados' e, os ângulos opostos do paralelogramo ABDC são iguais; e que a diagonal BC divide o mesmo parele~ogramo ARDC em duas partes iguais.

Sendo AB, CD paralelas e cortadas pela reta BC, os ângulos alternos ABC, BCD serão iguais *(Pr. 29.1.)*. Também por serem paralelas as duas AC, BD, e cortadas pela mesma reta BC, devem ser iguais entre si os ângulos alternos A.CR, CBD. Logo, Os dois triângulos ABC, CBD têm dois ângulos, ABC, BCA iguais a dois ângulos BCD, CBD, cada um a cada um, e um lado igual a um lado, que vem a ser o lado comum BC oposto aos ângulos iguais CAB, CDB. Logo, os outros lados serão iguais aos outros lados, cada um a cada um, e o ângulo, que resta, igual ao outro ângulo, que resta *(Pr. 26.1.)*. Logo, será AB = CD, AC = BD, e o ângulo BAC = BDC. E sendo ABC = BCD, e CBD = ACB; será o ângulo total ABD = ACD também total. Mas temos demonstrado ser o ângulo BAC = BDC. Logo, os lados e os ângulos opostos do paralelogramo ARDC são iguais. Deve-se agora demonstrar, que o paralelogramo ABDC fica dividido em duas partes iguais pela diagonal BC. Sendo AB = CD, e BC comum, serão as duas AB, BC iguais às duas DC, CB, cada uma a cada uma. Mas temos o ângulo ABC = BCD.Logo, será o triângulo ABC = BCD outro triângulo *(Pr. 4.1.)*. Logo, a diagonal BC divide em duas partes iguais o paralelogramo ABDC.

PROP. XXXV. TEOR.

Os paralelogramos, que estão postos sôbre a mesma base, e entre as mesmas paralelas, são iguais (Fig. 56.57.).

Sejam os paralelogramos ABCD, EBCF sôbre a mesma base BC (Fig. 57.), entre as mesmas paralelas AF, BC. Digo que o paralelogramo ABCD é igual ao paralelogramo EBCF.

Se os lados AD, DF (Fig. 56.) dos paralelogramos ABCD, DBCF oposto à base comum BC tiverem um têrmo comum D; claro está que, sendo os paralelogramos ABCD, DBCF cada um o dôbro do mesmo triângulo BDC *(Pr. 34.1.)*, serão iguais entre si.

Mas os lados AD, EF (Fig. 57.) não sejam terminados no mesmo ponto. No paralelogramo ABCD é AD = BC *(Pr. 34.1.)*, e no paralelogramo EBCF é EF

= BC. Logo, será AD = EF *(Ax. 1.)*. Ajunte-se a mesma reta DE, ou tire-se. Será AE = DF, isto é, o todo igual ao todo, ou o resto igual ao resto *(Ax. 2.3.)*. Mas é -AB = DC. Logo, as duas EA, AR são iguais às duas FD, DC, cada uma a cada uma. Mas o ângulo externo FDC é igual *(Pr. 29. 2.)* ao interno EAB. Será o triângulo EAB = FDC outro triângulo *(Pr. 4.1.)*. Do trapézio ABCF tire-se o triângulo FDC; e do mesmo trapézio ABCF tire-se o triângulo EAB. Logo, os paralelogramos ABCD, EBCE, que são os restos, serão iguais *(Ax. 3.)* entre si.

PROP. XXXVI. TEOR.

Os paralelogramos, que estão postos sôbre bases iguais, e entre as mesmas paralelas, são iguais (Fig. 58.).

Os paralelogramos ABCD, EFGH estejam postos sôbre as bases iguais BC, FG, e entre as mesmas paralelas AH, BG. Digo que êstes paralelogramos são iguais.

Tirem-se as retas BE, CH. Sendo BC = FG, e FG =EH *(Pr. 34.1.)* será BC = EH. Mas BC, EH são paralelas; e entre os têrmos delas B, E, C, H, estão tiradas as retas BE, CH; e as retas, que estão tiradas entre os extremos de duas outras iguais e paralelas, e da mesma parte, são também iguais e paralelas *(Pr. 33.1)*. Logo, EB, CH são iguais e paralelas. Logo, EBCH é um paralelogramo, igual ao paralelogramo ABCD *(Pr. 35.1.)*; por ter a mesma base BC, e por estar entre as mesmas paralelas BC, AD. Pela mesma razão será paralelogramo EFGH = EBCH, outro paralelogramo. Logo, os paralelogramos ABCD, EFGH serão iguais entre si.

PROP. XXXVII. TEOR.

Os triângulos, que estão postos sôbre a mesma base, e entre as mesmas paralelas, são iguais (Fig. 59.).

Os triângulos ABC, DBC, estejam postos sôbre a mesma base BC, e entre as mesmas paralelas AD, BC. Digo que os triângulos ABC, DBC são iguais.

Produza-se AD de uma e outra parte para E, e F, e pelo ponto B tire-se BE paralela a CA, e pelo ponto C tire-se CF paralela a BD *(Pr. 31.1.)*. Logo, EBCA, DBCF serão dois paralelogramos. Mas êstes paralelogramos são iguais *(Pr. 35. 1.)*, por estarem sôbre a mesma base BC, e entre as mesmas paralelas BC, EF; e o triângulo ABC é a metade *(Pr. 34.1.)* do paralelogramo EBCA, que fica dividido em duas partes iguais pela diagonal AB, como também o triângulo DBC é a metade do paralelogramo DBCF, que é dividido em duas partes iguais pela diagonal DC. Logo, será o triângulo ABC = DBC, outro triângulo, porque as metades de quantidades iguais são também iguais *(Ax. 7.)*.

PROP. XXXVIII. TEOR.

Os triângulos, que estão sôbre bases iguais, e entre as mesmas paralelas, são iguais (Fig. 60.).

Sejam os triângulos ABC, DEF, postos sôbre as bases iguais BC. EF e entre as mesmas paralelas BF, AD. Digo que os triângulos ABC, DEF são iguais.

Produza-se de uma e outra parte a reta AD para G, e H; e pelo ponto B tire-se a reta BG paralela a CA, e pelo ponto F a reta FH paralela a ED *(Pr. 31.1.)*. Serão GBCA, DEFH dois paralelogramos. Mas êstes paralelogramos são iguais *(Pr. 36.1.)*, porque estão sôbre as bases iguais BC, EF, e entre as mesmas paralelas BF, GH; e o triângulo ABC é a metade do paralelogramo GBCA, como também o triângulo DEF é a metade do paralelogramo DEFH *(Pr. 34.1.)*. Logo, será o triângulo ABC = DEF outro triângulo, por serem iguais as metades de quantidades iguais *(Ax. 7.)*.

PROP. XXXIX. TEOR.

Os triângulos iguais postos sôbre a mesma base e da mesma parte, estão entre as mesmas paralelas (Fig. 61.).

Sejam os triângulos ABC, DBC sôbre a mesma base BC, e da mesma parte. Digo que os triângulos ABC, DBC estão entre as mesmas paralelas.

Tire-se a reta AD. Digo que AD é paralela a BC. Se AD não é paralela a BC, pelo ponto A se faça passar outra reta AE paralela *(Pr. 31.1.)* a BC, e se tire EC. Logo, os triângulos ABC, EBC são iguais *(Pr. 37.1.)*, por estarem ambos sôbre a mesma base BC, e entre as mesmas paralelas BC, AE. Mas é o triângulo ABC = DBC outro triângulo. Logo, será DBC = EBC, isto é, um triângulo maior igual a um menor, o que não pode ser. Logo, as retas AE, BC, não são paralelas. O mesmo se demonstra de outra reta qualquer, que não seja a. reta AD. Logo, AD é paralela a BC.

PROP. XL. TEOR.

Os triângulos iguais postos sôbre bases iguais e da mesma parte, estão entre as mesmas paralelas , (Fig. 62.).

Sejam os triângulos iguais ABC, DEF sôbre as bases iguais BC, EF e da mesma parte. Digo que êstes triângulos estão entre as mesmas paralelas.

Tire-se a reta AD. Digo que AD é paralela a BF. Se AD não é paralela a BF, pelo ponto A tire-se AG paralela *(Pr. 31.1.)* a BF, e conduza-se a reta GF. Os triângulos ABC, GEF são iguais *(Pr. 38.1.)*, porque estão postos sôbre as bases iguais BC, EF, e entre as mesmas paralelas BF, AG. Mas o triângulo ABC é igual ao triângulo DEF, Logo, será também DEF = GEF, isto é, um triângulo maior igual a um menor, o que não é possível. Logo, AG não é paralela a BF. Do mesmo modo se prova que nenhuma outra reta, fora a reta AD, é paralela a BF. Logo, as duas AD, BF são paralelas.

PROP. XLI. TEOR.

Se um paralelogramo e um triângulo estiverem sôbre a mesma base, e entre as mesmas paralelas, o paralelogramo será o dôbro do triângulo (Fig. 63.).

Estejam sôbre a mesma base BC, e entre as mesmas paralelas BC, AE, eo paralelogramo ABCD, e o triângulo EBC. Gigo que o paralelogramo ABCD é o dôbro do triângulo EBC.

Tire-se a reta AC. Logo os triângulos ABC, EBC são iguais *(Pr. 37.1.)*, por estarem sôbre a mesma base BC, e entre as mesmas paralelas BC, AE. Mas o paralelogramo ABCD é o dôbro do triângulo ABC *(Pr. 34.1.)*, porque é dividido em duas partes iguais pela diagonal AC. Logo, também o paralelogramo ABCD será o dôbro do triângulo EBC.

PROP. XLII. PROB.

Construir um paralelogramo, que seja igual a um triângulo dado, e que tenha um ângulo igual a outro ângulo dado (Fig. 61.).

Seja dado o triângulo ABC, e o ângulo retilíneo D. Deve-se construir um paralelogramo igual ao triângulo ABC, e com um ângulo igual ao ângulo D.

Divida-se a base BC em duas partes iguais *(Pr. 10.1.)* no ponto E; tire-se AE, e com a reta EC no ponto E se faça *(Pr. 23.1.)* o ângulo CEF = D. Pelo ponto A conduza-se AG paralela *(Pr. 31.1.)* a EC, e pelo ponto C a reta CG paralela a EF. Será FECG um paralelogramo. E sendo BE = EC, o triângulo ABE será igual ao triângulo AEC *(Pr. 38.1.)*, por estarem ambos sôbre as bases iguais BE, EC, e entre as mesmas paralelas BC, AG. Logo, o triângulo ABC é o dôbro do triângulo AEC. Mas também o paralelogramo FECG é o dôbro *(Pr. 41.1.)* do mesmo triângulo AEC, que se acha sôbre a mesma base, e entre as mesmas paralelas do paralelogramo FECG. Logo, o paralelogramo FECG é *(Ax. 6.)* igual ao triângulo ABC, e tem o ângulo CEF = D, que é o ângulo dado. Logo, temos construído o paralelogramo que se pedia.

PROP. XLIII. TEOR.

Em qualquer paralelogramo os complementos dos paralelogramos, que existem ao redor da diagonal, são iguais entre si (Fig. 65.).

Seja o paralelogramo ABCD, cuja diagonal é AC, e existam ao redor da diagonal AC os paralelogramos EH, FG; e os que se chamam complementos, serão os dois paralelogramos BK, KD. Digo que o complemento BK é igual ao complemento KD.

No paralelogramo ABCD os dois triângulos ABC, ADC, são iguais *(Pr. 34.1.)*; como também os dois AEK, AHK no paralelogramo EKHA; e os outros dois KGC, KFC no paralelogramo KGCF. Logo, sendo o triângulo AEK igual ao triângulo AHK, e KGC = KFC, os dois AEK, KGC juntos serão iguais aos dois também juntos AHK, KFC. Mas o triângulo total ABC é igual ao triângulo total ADC *(Pr. 34.1.)*. Logo, o resíduo, que é o complemento BK, será igual ao resíduo, que é o outro complemento KD.

PROP. XLIV. PROB.

Sôbre uma linha reta dada construir um paralelogramo igual a um triângulo dado, e que tenha um ângulo igual a outro ângulo retilíneo dado (Fig. 66.):

Seja dada a reta AB, o triângulo C, e o ângulo retilíneo D. Deve-se construir sôbre a reta dada AB um paralelogramo igual ao triângulo C, e que tenha um ângulo igual ao ângulo D.

Faça-se *(Pr. 42.1.)* o paralelogramo BEFG igual ao triângulo C, e com um ângulo EBG igual ao triângulo D. Ponha-se BE em direitura com a reta AB, e produza-se FG para H; e pelo ponto A se tire AH paralela *(Pr. 31.1.)* a BC, ou EF; e finalmente seja conduzi da a reta HB. Porque as paralelas AH, EF são cortadas pela reta HF, os ângulos AHF, HFE serão iguais a dois retos *(Pr. 29.1.)*. Logo, os dojs ângulos BHF, HFE são menores que dois retos. Mas as retas, que com uma terceira fazem os ângulos internos, e da mesma parte menores que dois retos, produzidas ao infinito finalmente concorrem *(Ax. 12.)*. Logo, as duas retas HB, FE devem concorrer. Produza-se pois, e concorram no ponto K. Por êste ponto tire-se a reta KL paralela a EA, e sejam produzidas as retas HA, GB até L, e M. Logo, HLKF é um paralelogramo, cujo diâmetro é RH, e ao redor deste diâmetro RK existem os paralelogramos AG, ME, cujos complementos são os paralelogramos LB, BF. Logo, será LB = BF *(Pr. 43.1.)*. Mas o complemento BF é igual ao triãngulo C. Logo, o complemento LB será igual ao mesmo ângulo C. E porque o ângulo GBE é igual ao ângulo ABM *(Pr. 15,1.)*, e também é igual ao ângulo D, será o ângulo ABM = D. Logo, sôbre a linha reta dada AB temos construído o paralelogramo LB igual ao triângulo dado C, e com um ângulo ABM igual ao ângulo proposto D.

PROP. XLV. PROB.

Construir um paralelogramo igual a uma figura retilínea qualquer dada, e com um ângulo igual a outro ângulo dado (Fig. 67.).

Seja dado o retilíneo ABCD, e o ângulo retilíneo E. Deve-se construir um paralelogramo igual ao retilíneo ABCD, e com um ângulo igual ao ângulo E.

Tire-se a reta DB, e faça-se *(Pr. 42.1.)* o paralelogramo FH igual ao triângulo ADB, e com o ângulo HKF = E. Sôbre a reta GH faça-se *(Pr. 44.1.)* o paralelogramo GM igual ao, triângulo DBC com o ângulo GHM = E. Sendo o ângulo E igual ao ângulo FKH, e também igual a GHM, será FKH = GHM. Ajunte-se-lhes o mesmo ângulo KHG. Os ângulos FKH, KHG serão iguais aos ângulos KHG, GHM. Mas FKH, KHG são iguais a dois retos *(Pr. 29.1.)*. Logo, os dois KHG, GHM serão também iguais a dois retos. Logo, KH estará em direitura *(Pr. 14.1.)* com HM. E porque as paralelas KM, FG são cortadas pela reta HG, os ângulos alternos MHG, HGF são iguais *(Pr. 29.1.)*. Ajunte-se-lhes o mesmo ângulo HGL. Logo, os ângulos MHG, HGL são iguais aos ângulos HGF, HGL. Mas MHG, HGL são iguais a dois retos. Logo, também HGF, HGL serão iguais a dois retos. Logo, a reta FG está em direitura com a reta GL. E sendo KF paralela a HG, e HG paralela a ML, será KF paralela *(Pr. 30.1.)* a ML. Mas KM, FL são também paralelas. Logo, KFLM é um paralelogramo. E porque o triângulo ABD é igual ao paralelogramo HF; e o triângulo DBC igual ao paralelogramo GM, será o retilíneo total ABCD igual ao paralelogramo inteiro KFLM. Logo, temos construído o paralelogramo KFLM igual ao retilíneo dado ABCD, e com o ângulo FKM igual ao ângulo dado E.

COROL. *É manifesto, pelo que temos dito, como se possa fazer sôbre uma linha reta dada um paralelogramo igual a um retilíneo dado, e com um ângulo igual a outro dado. Deve-se sôbre a reta dada formar um paralelogramo igual (Pr. 44.1.) ao primeiro triângulo ABD, e que tenha um ângulo igual ao ângulo dado; e ir continuando o resto, como temos explicado acima.*

PROP. XLVI. PROB.

Sôbre uma linha reta dada descrever um quadado (Fig. 68.).

Seja a reta dada AB. Sôbre AB deve-se construir um quadrado.

Levante-se do ponto A a reta AC perpendicular *(Pr. 11.1.)* sôbre AB; e ponha-se *(Pr. 3.1.)* AD = AB. Pelo ponto D faça-se passar a reta DE paralela *(Pr. 31.1.)* a AB; e pelo ponto B a reta BE paralela a AD. Será ADEB um paralelogramo. Logo, será AB = DE *(Pr. 34.1.)*, e AD = BE. Mas temos feito BA = AD. Logo, as quatro retas BA, AD, DE, EB são iguais entre si, e por conseqüência o paralelogramo ADEB é eqüilátero. Digo que é também retângulo. Porque as paralelas AB, DE são cortadas pela reta AD, os ângulos BAD, ADE serão iguais a dois retos *(Pr. 29.1.)*, Mas BAD é reto. Logo, também ADE será reto. Mas nos paralelogramos os ângulos opostos são iguais *(Pr. 34.1.)*. Logo, os dois ABE, BED, que ficam opostos a ângulos retos, devem ser também retos. Logo, ADEB será um retângulo.

Logo, sendo equilátero, como temos provado, sôbre a reta dada AB temos descrito o quadrado AE, que se pedia.

COROL. *Disto se segue, que um paralelogramo é retângulo, quando tem um ângulo reto.*

PROP. XLVII. TEOR.

Em todo o triângulo retângulo o quadrado feito sôbre o lado oposto ao ângulo reto, é igual aos quadrados formados sôbre os outros lados, que fazem o mesmo ângulo reto (Fig. 69.).

Seja o triângulo retângulo ABC, cujo ângulo reto seja BAC. Digo que o quadrado feito sôbre o lado BC é igual aos quadrados descritos sôbre os lados BA, AC, que formam o ângulo reto BAC.

Descreva-se sôbre BC o quadrado BDEC *(Pr. 46.1.)*, e sôbre BA, AC os quadrados GB, HC. Pelo ponto A tire-se AL, paralela *(Pr. 31.1.)* a BD, ou CE, tirem-se também as retas AD, FC. Porque os ângulos BAC, BAG são retos *(Def. 30.)*, as duas retas CA, AG estão em direitura uma com outra *(Pr. 14.1.)*. O mesmo será a respeito das duas AB, AH. Os ângulos DBC, FBA, por serem retos, são iguais. Ajunte-se-lhes o mesmo ângulo ABC. Logo, o total DBA será igual ao total FBC *(Ax. 2.)*. E sendo as duas AB, BD iguais às duas

FB, BC, cada uma a cada uma, e o ângulo DBA = FBC, será o triângulo ABD = FBC outro triângulo *(Pr. 4.1.)*. Mas o paralelogramo BL é o dôbro *(Pr. 41.1.)* do triângulo ABD, porque está sôbre a mesma base BD, e entre as mesmas paralelas BD, AL; e o quadrado GB é o dôbro do triângulo FBC, porque tem a base comum FB, e estão entre as mesmas paralelas FB, GC. Logo, sendo iguais os dobros de quantidades iguais *(Ax. 6.)*, deve ser o paralelogramo BL igual ao quadrado GB. Do mesmo modo, tiradas as retas AE, BK, se demonstra, que o paralelogramo CL é igual ao quadrado HC. Logo, o quadrado inteiro BDEC, feito sôbre o lado BC oposto ao ângulo reto BAC, é igual aos dois quadrados GB, HC formados sôbre os lados BA, AC, que fazem o mesmo ângulo reto BAC.

PROP. XLVIII. TEOR.

Se o quadrado feito sôbre um lado de um triângulo fôr igual aos quadrados dos outros dois lados, o ângulo compreendido por êstes dois lados será reto (Fig. 70.).

Seja o quadrado feito sôbre o lado BC do triângulo ABC igual aos quadrados feitos sôbre os lados BA, AC. Digo que o ângulo BAC é reto.

Levante-se do ponto A sôbre AC a perpendicular AD *(Pr. 11.1.)*, e ponha-se AD = BA, e tire-se DC. Sendo DA = AB, será o quadrado sôbre DA igual ao quadrado sôbre AB. Ajunte_se-lhes o quadrado de AC. Os quadrados de DA, AC serão iguais aos quadrados de BA, AC. Mas o quadrado de DC é igual aos quadrados de DA, AC, por ser o ângulo DAC reto *(Pr. 47.1.)*, e o quadrado de BC se supõe igual aos quadrados de BA, AC. Logo, o quadrado de DC será igual ao quadrado de BC. Logo, será DC = CB. Sendo pois DA = AB, e AC comum, as duas DA, AC serão iguais às duas BA, AC. Mas é a base DC = BC outra base. Logo, será o ângulo DAC = BAC *(Pr. 8.1.)*. Mas o ângulo DAC é reto. Logo, também o ângulo BAC será reto.

LIVRO II

DEFINIÇÕES

I

Todo o paralelogramo retângulo se considera compreendido por duas linhas retas, que formam o ângulo reto.

II

Em todo o paralelogramo a figura, que resulta de um paralelogramo daqueles, que existem na diagonal do paralelogramo maior, juntamente com os dois complementos, chama-se gnômon. Dêste modo o paralelogramo HG (Fig. 1.), juntamente com os complementos, AF, FC fazem o gnômon que por brevidade, nota-se com as letras AGK, ou EHC, que estão postas nos vértices dos ângulos opostos dos paralelogramos, que formam o gnômon.

PROP. I. TEOR.

Se houver duas linhas retas, e uma delas fôr dividida em quantas partes se quiser, será o retângulo compreendido pelas duas retas igual, aos retângulos compreendidos pela reta inteira, e pelos segmentos da outra (Fig. 2.).

Sejam as duas retas A, e BC; e seja' BC dividida, como sc quiser, nos pontos D, E. Digo que o retângulo compreendido pelas retas Â:; BC é igual aos retângulos compreendidos pelas retas A, BD; A, DE; A, EC.

Do ponto B conduza-se a reta BF perpendicular a BC *(Pr. 11.1.)*, e faça-se BG = A *(Pr. 3.1.)*. Pelo ponto G tire-se GH paralela a BC, e pelos pontos D, E, C as retas DK, EL, CH paralelas a BG *(Pr. 31.1.)*. Logo, o retângulo BH é igual aos retângulos BK, DL, EH. Mas o retângulo BH é compreendido pelas retas GB, BC, ou pelas retas A, BC, por ser GB = A; e os retângulos BK, DL, EH são compreendidos pelas retas GB, BD; DK, DE; EL, EC, ou pela retas A, BD; A, DE; A, EC, porque sendo BG, DK, EL iguais entre si *(Pr. 34.1.)*, e sendo BG = A, cada uma das três retas BG, DK, EL é igual à linha reta A. Logo, o retângulo compreendido pelas retas A, BC é igual aos retângulos compreendidos pelas retas A, BD; A, DE; A, EC.

PROP. II. TEOR.

Se uma linha reta fôr dividida, como se quiser, os retângulos compreendidos pela reta tôda, e por cada uma das partes, são iguais ao quadrado da linha inteira (Fig. H.).

Seja a reta AB' cortada, como se quiser, no ponto C. Digo que os retângulos compreendidos pelas reta.<; AB, BC; AB, AO' são iguais ao quadrado da reta AB.

Descreva-se sôbre a reta AB o quadrado ADEB *(Pr. 46.1.)*; e pelo ponto C tire-se CF paralela a AD, ou BE *(Pr. 31.1.)*. Será o quadrado AE igual aos retângulos AF, CE. Mas a quadrado AE é o quadrado da reta AB; e o retângulo AF é compreendido pelas retas DA, AC, isto é, pelas retas BA, AC, por ser AD = AB; e o retângulo CE é compreendido pelas retas CF, GB, isto é, pelas retas AB, BC, por ser CF = AD, e AD = AB. Logo, os retângulos compreendidos pelas retas AB, AC; AB, BC são iguais ao quadrado da reta AB.

PROP. III. TEOR.

Se uma linha reta fôr dividida, como se quiser, será o retângulo compreendido pela mesma reta, e por uma parte dela, igual ao retângulo das partes juntamente com o quadrado da dita parte (Fig. 4.).

Seja a reta AB cortada, como se quiser, no ponto C. Digo que o retângulo compreendido 'pelas retas AB, BC ê igual ao retângulo compreendido pelas retas AC, CB, juntamente com o quadrado da reta BC.

Faça-se o quadrado CDEB da reta BC *(Pr. 46.1.)*, e produza-se ED para F, e pelo ponto A tire-se AF paralela a CD, ou BE *(Pr. 31.1.)*. Será o retângulo AE igual aos retângulos AD, CE. Mas AE é o retângulo compreendido pelas retas AB, BE, isto é, pelas retas AB, BC, por ser BE = BC; e o retângulo. AD é compreendido pelas retas AC, CD, isto é, pelas retas AC, CB, por ser CD = CB; e DB é o quadrado da reta BC. Logo, o retângulo compreendido pelas retas AB, BC é igual ao retângulo compreendido pelas retas AC, CB, juntamente com o quadrado da reta BC.

PROP. IV. TEOR.

Se uma uma reta fôr cortada em duas partes quaisquer, será o quadrado da tôda igual aos quadrados das partes, juntamente com o retângulo das mesmas partes, tomado duas vêzes (Fig. 5.).

Seja a reta AB cortada, como se quiser, no ponto C. Digo que o quadrado da reta AB é igual aos quadrados das partes AC, CB, juntamente com duas vêzes o retângulo, compreendido pelas mesmas partes AC, CB.

Sôbre a reta AB descreva-se o quadrado ADEB *(Pr. 46. 1.)*, e tirada a diagonal BD pelo ponto C tire-se a reta CGF paralela a AD, ou BE *(Pr. 31.1.)*; e pelo ponto G a reta HK paralela a AB, ou DE. Sendo, pois, as duas retas CF, AD paralelas, e ambas cortadas pela incidente BD, será o ângulo externo BGC = ADB, que é o interno e oposto *(Pr. 29.1.)*. Mas é ADB = ABD *(Pr. 5.1.)*, por ser BA = AD. Logo, será CGB = GBC, e por conseqüência BC = CG *(Pr. 6.1.)*. Mas é GB=GK e CG=BK *(Pr. 34.1.)*. Logo, será GK = KB. Logo, CGKB é uma figura eqüilátera. Digo que é também retângula. Porque, sendo paralelas as retas CG, BK, e caindo sôbre elas a incidente CB, serão os ângulos KBC, GCB iguais a dois retos. Mas o ângulo KBC é reto. Logo, também o ângulo GCB será reto, e por conseqüência são retos os ângulos opostos CGK, GKB *(Pr. 34.1.)*. Logo, a figura CGKB é retângula. Logo, sendo também eqüilátera, como temos demonstrado, será um quadrado, e consequentemente o quadrado da reta CB. Com a mesma demonstração se prova . ser HF o quadrado da reta AC. Sendo pois. AG = GE *(Pr. 43.1.)*, e sendo o retângulo AG compreendido pelas reta.s AC, CG, isto é, AC, CB, por ser CG = CB, será também o retângulo G E igual ao retângulo compreendido pelas retas AC, CB. Logo, os retângulos AG, GE são juntamente iguais a duas vêzes o retângulo compreendido pelas retas AC, CB. Mas HF, CK são os quadrados das retas AC, CB, por ser HG = AC. Logo, os quadrados HF, CK, e os retângulos AG, GE são todos juntos iguais aos quadrados de AC, e de CB, e a duas vêzes o retângulo compreendido pelas mesmas AC, CB. Mas HF, CK, AG, GE fazem o quadrado total ADEB, que é o quadrado da reta AB. Logo, o quadrado de AB é igual aos quadrados de AD e de CB, juntamente com duas vêzes o retângulo compreendido pelas retas AC, CB.

COROL. *Disto se segue que os paralelogramos, que existem na diagonal de um quadrado, são também quadrados.*

PROP. V. TEOR.

Se uma Unha reta fôr dividida em duas partes iguais, e em outras duas desiguais, será o retângulo compreendido pelas partes desiguais, juntamente com o quadrado da parte entre as duas seções, igual ao quadrado da metade da linha proposta (Fig. 6.).

Seja a reta AB dividida em partes iguais no ponto C, e €m partes desiguais no ponto D. Digo que o retângulo das retas AD, DB juntamente com o quadrado de CD, é igual ao .quadrado CB.

Sôbre a reta BC descreva-se o quadrado CEFB *(Pr. 46.1.),* é tirada a reta BE, pelo ponto D tire-se DHG paralela *(Pr. 31.1.)* a CE ou BF, e pelo ponto H a reta KLM paralela a CB, ou EF, e pelo ponto A a reta AK paralela a CL, ou BM. Sendo os complementos CH, HF iguais *(Pr. 41.1.)* ajunte-se-lhes o mesmo quadrado DM. Será CM = DF. Mas é BM = AL *(Pr. 36.1.)*, por ser AC = CB. Logo, será AL = DF. Ajunte-se-lhes o mesmo CH. Logo, será AH = DF mais CH. Mas AH é o retângulo compreendido pelas retas AD, DH, isto é, AD, DB; por ser DH = DB (Cor. 4.2.); e DF, CH fazem o gnômon CMG. Logo, o gnômon CMG é igual ao retângulo compreendido pelas retas AD, DB. Ajunte-se-lhes LG, que é igual ao quadrado de CD *(Cor. 4.2.)*. Logo, o gnômon CMG mais o quadrado LG são iguais ao retângulo compreendido pelas retas AD, DB, e mais ao quadrado de CD. Mas o gnômon CMG e LG fazem o quadrado CEFB, que é o quadrado da reta CB. Logo, o retângulo compreendido pelas retas AD, BD, juntamente com o quadrado de CD, é igual ao quadrado de CB.

PROP. VI. TEOR.

Se uma linha reta fôr dividida em duas partes iguais, e em direitura com ela se puser outra reta, será o retângulo compreendido pela reta tôda e mais a adjunta, e pela mesma adjunta juntamente com o quadrado da metade da primeira reta, igual ao quadrado da reta, que se compõe da mesma metade, e da outra reta adjunta (F1ig.7.).

Sendo a reta AB dividida pelo meio no ponto C, e com AB esteja em direitura a outra BD. Digo que o retângulo compreendido pelas retas AD, BD, juntamente com o quadrado de CB, é igual ao quadrado de CD.

Sôbre a reta CD descreva-se o quadrado CEFD *(Pr. 46. 1.)*, e tire-se DE. Pelo ponto B conduza-se BHG paralela a CE, ou DF *(Pr. 31.1.);* e pelo ponto H a reta KLM paralela a AD, ou EF; e finalmente pelo ponto A a reta AK paralela a CL, ou DM. Logo, sendo AC = CB, será o retângulo AL = CH outro retângulo *(Pr. 36.1.)*. Mas é CH = HF *(Pr. 43.1.)*. Logo, será AL = HF. Ajunte-se-lhes o mesmo CM. Logo, será o total AM = CMG, que é um gnômon. Mas AM é o retângulo compreendido pelas retas AD, DM, isto é, pelas retas AD, DB, por ser DM = DB *(Cor. 4.2.)*. Logo, o gnômon CMG será igual ao retângulo compreendido pelas retas AD, DB. Ajunte-se-lhes o mesmo LG, que é igual ao quadrado da reta OB. Logo, o retângulo compreendido pelas retas AD, DB, juntamente com o quadrado de CB, é igual ao gnômon CMG, juntamente com o quadrado LG. Mas o gnômon CMG, e o quadrado LG fazem o quadrado inteiro CEFD, que é o quadra,do de CD. Logo, o retângulo compreendido pelas retas AD, DB, juntamente com o quadrado de OB, é igual ao quadrado de OD.

PROP. VII. TEOR.

Se uma linha reta fôr dividida, como se quiser, em duas partes, serão os quadrados da tôda e de uma das partes iguais a duas vêzes o retângulo compreendido pela linha tôda, e pela dita parte juntamente com o quadrado da outra parte (Fig. 5.).

Seja a reta AB dividida, como se quiser, no ponto C. Digo que os quadrados de AB e de BC são iguais a duas vêzes o retângulo compreendido pelas retas AB, BO, juntamente com o quadrado de AC.

Faça-se sôbre a reta AB o quadrado ADEB *(Pr. 46.1.)*, e completada a figura, como se vê, será o retângulo AG = GE outro retângulo *(Pr. 43.1.)*. Ajunte-se-lhes o mesmo CK. Será o total AK = CE total. Logo, os retângulos AK, CE são juntamente o dôbro de AK. Mas AK, CE equivalem ao gnômon AKF, e mais ao quadrado CK. Logo, o gnômon AKF mais o quadrado CK são o dôbro do retângulo AK. Mas também o retângulo compreendido pelas retas AB, BC tomado duas vêzes é o dôbro do retângulo AK, por ser BK = BC *(Cor. 4.2.)*. Logo, o gnômon AKF, juntamente com o quadrado CK, é igual a duas vêzes o retângulo compreendido pelas retas AB, BC. Ajunte-se-lhes o mesmo HF, que é igual ao quadrado de AC. Logo, o gnômon AKF, e os quadrados CK, HF são iguais a duas vêzes o retângulo de AB, BC, e ao quadrado de AC. Mas o gnômon AKF, e os quadrados CK, HF equivalem aos quadrados ADEB, e CK, que são os quadrados de AB, e de BC. Logo, os quadrados de AB, e de BC são iguais a duas vêzes o retângulo compreendido pelas retas AB, BC, juntamente com o quadrado de AC.

PROP. VIII. TEOR.

Se uma linha reta estiver cortada, como se quiser, será o retângulo da reta tôda, e de uma das partes, tomado quatro *vêzes, juntamente com o quadrado da outra parte, igual ao quadrado da reta, que se compõe da linha tôda; e da dita primeira parte (Fig. 8.).*

Seja a reta AB dividida, como se quiser, no ponto C. Digo que o retângulo compreendido pelas retas AB, BC tomado quatro vêzes, juntamente com o quadrado de AC, é igual ao quadrado da reta, que fizera soma das duas AB, BC.

Ponha-se BD = CB, e em direitura com AB, e sôbre AD faça-se o quadrado AEFD, prosseguindo o resto da construção, como se vê na figura. Sendo pois CB = BD, e CB = GK *(Pr. 34.1.)*, e BD = KN, será GK = KN. Pela mesma razão será PR = RO. E porque temos CB = BD, GK = KN, será o retângulo CK = BN, e GR = RN *(Pr. 36.1.)*. Mas é CK = RN *(Pr. 43.1.)*, porque são complementos do paralelogramo CO. Logo, será BN = GR. Logo, os quatro BN, CK, GR, RN são iguais entre si; e por conseqüência são o quádruplo de CK. Também sendo CB = BD, e BD = BK *(Cor. 4.2.)*, isto é, BD = CG; e sendo CB = GK, isto é, CB = GP, será CG = GP. E sendo CG = GP, e PR = RO, será o retângulo AG = MP, e PL = RF. Mas é PM = PL *(Pr. 43.1.)*, porque são complementos do paralelogramo ML. Logo, será AG = RF. Logo, os quatro AG, MP, PL, RF são iguais entre si, e por conseqüência são o quádruplo de AG. Mas temos demonstrado que os quatro CK, BN, GR, RN são também o quádruplo de CK. Logo, as oito figuras, que formam o gnômon AOH, são o quádruplo de AK. Mas o retângulo AK é o retângulo compreendido pelas retas AB, BK, isto é, pelas retas AB, BC, por ser BK = BC. Logo, o retângulo das retas AB, BC, tomado quatro vêzes, será o quádruplo do retângulo AK. Mas o gnômon AOH, como se tem visto, é também o quádruplo de AK. Logo, o retângulo das retas AB, BC, tomado quatro vêzes, é igual ao gnômon AOH. Ajunte-se-lhes o mesmo XH, que é igual ao quadrado de AC. *(Cor. 4.2.)*. Será o retângulo das retas AB, BC, tomado quatro vêzes juntamente com o quadrado de AC, igual ao gnômon AOH e ao quadrado XH. Mas o gnômon AOH, e o quadrado XH fazem o quadrado inteiro AEFD, que é o quadrado da reta AD. Logo, o retângulo compreendido pelas retas AB, BC, tomado quatro vêzes, juntamente com o quadrado de AC, é igual ao quadrado da reta AD, que se compõe da reta dada AB, e da parte BC.

PROP. IX. TEOR.

Se uma linha reta fôr dividida em duas partes iguais, e em outras duas desiguais, os quadrados das partes desiguais serão o dôbro do quadrado sôbre a metade da reta, juntamente com o quadrado da porção, que fica entre as duas seções (Fig. 9.).

Seja a reta AB dividida em partes iguais no ponto C, e em parte!? desiguais no ponto D. Digo que os quadrados de AD e de DB são o dôbro dos quadrados de AC e de CD.

Do ponto C levante-se sôbre AB a perpendicular *(Pr. 11.1.)* CE, que seja igual a AC, ou CB, e conduzidas as retas EA, EB pelo ponto D, tire-se DF paralela a CE *(Pr. 31.1.)*, e pelo ponto F a reta FG paralela a AB. Tire-se também AF. Sendo AC = CE, será o ângulo EAC = AEC *(Pr. 5.1.)*. E porque o ângulo ECA é reto, serão os dois AEC, EAC juntos iguais a um reto *(Pr. 32.1.)*, e por conseqüência cada um dêles será a metade de um ângulo reto. Pela mesma razão, cada um dos ângulos CEB, EBC deve ser a metade de um reto. Logo, o ângulo total AEB é reto. E porque o ângulo GEF é a metade de um reto, e EGF é um reto, por ser igual ao ângulo ECB interno e oposto *(Pr. 29.1.)*, será o outro ângulo EFG também a metade de um reto. Logo, será o ângulo GEF = EFG e, por conseqüência, EG= GF *(Pr. 6.1.)*. Também, sendo o ângulo B semi-reto, e FDB reto, por ser êste igual a ECB interno e oposto, será o ângulo BFD semi-reto. Logo, será o ângulo B = BFD e, conseqüen-' temente, DF = DB *(Pr. 6.1.)*. E sendo AC = CE, será o quadrado de AC igual ao quadrado de CE. Logo, os quadrados de AC e de CE juntamente fazem o dôbro do quadrado de AC. Mas o quadrado de EA é igual aos quadrados de AC e de CE *(Pr. 47.1.)*, por ser o ângulo ACE reto. Logo, o quadrado de EA é o dôbro do quadrado de AC. Também, sendo EG = GF, será o quadrado de EG igual ao quadrado de GF. Logo, os quadrados de EG e de GF são o dôbro do quadrado de GF. Mas o quadrado de EF é igual aos quadrados de EG e de GF. Logo, o quadrado de EF será o dôbro do quadrado de GF. Mas é GF = CD *(Pr. 34.1.)*. Logo, o quadrado de EF é o dôbro do quadrado de CD. Mas também o quadrado de AE é o dôbro do quadrado de AC. Logo, os quadrados de AE, e de EF são o dôbro dos quadrados de AC e de CD. Mas o quadrado de AF é igual aos quadrados de AE e de EF, por ser o ângulo AEF reto. Logo, o quadrado de AF é o dôbro dos quadrados de AC e de CD. Mas os quadrados de AD, e de DF são iguais ao quadrado de AF; porque o ângulo ADF é reto. Logo, os quadrados de AD e de DF são o dôbro dos quadrados de AC e de CD. Mas é DF = DB. Logo, os quadrados de AD e de DB são o dôbro dos quadrados de AC e de CD.

PROP. X. TEOR.

Se uma linha reta fôr dividida em duas partes iguais, e se em direitura com ela se puser outra reta qualquer, serão os quadrados da tôda com a adjunta e da adjunta o dôbro dos quadrados da metade, e daquela reta, que se compõe da metade e da adjunta (Fig. 10.).

Seja a reta AB dividida pelo meio no ponto C, e em direitura com AB esteja outra reta qualquer BD. Digo que os quadrados de AD e de DB são o dôbro dos quadrados de AC e de CD.

Do ponto C levante-se sôbre AB a perpendicular *(Pr. 11.1.)* CE, que seja igual a AC ou CB, e tiradas as retas AE, EB, pelo ponto E conduza-se EF paralela a AB *(Pr. 31.1.)*, e pelo ponto D a reta DF paralela a CE. Porque a reta EF encontra as duas paralelas EC, FD nos pontos E, F, serão os ângulos CEF, EFD iguais a dois retos *(Pr. 29.1.)*. Logo, os ângulos BEF, EFD são menores que dois retos. Mas duas retas, que com uma terceira fazem os ângulos internos menores que dois retos, produzidas ao infinito, finalmente chegam a tocar-se *(Ax. 12.)*. Logo, as duas retas EB, FD produzidas para as partes B, D devem encontrar-se. Produzam-se pois, e encontrem-se no ponto G. Tire-se

AG. Porque temos AC = CE, será o ângulo CEA = EAC *(Pr. 5.1.)*. Mas o ângulo ACE é reto. Logo, cada um dos ângulos CEA, EAC será semi-reto. Pela mesma razão é semi-reto cada um dos ângulos CEB, EBC. Logo, o ângulo AEB deve ser reto. E porque EBC é semi-reto, será DBG também semi-reto *(Pr. 15.1.)*. Mas BDG é reto, porque é igual ao alterno DCE *(Pr. 29.1.)*. Logo, DGB será semi-reto. Logo, será DGB = DBG, e por conseqüência BD = DG *(Pr. 6.1.)* Também, sendo EGF semi-reto, e sendo F reto, por ser igual ao ângulo oposto ECD *(Pr. 34.1.)*, será FEG semi-reto. Logo, será EGF = FEG, e GF = FE. E porque temos EC = CA, será o quadrado de EC igual ao quadrado de CA. Logo, os quadrados de EC e de CA são o dôbro do quadrado de CA. Mas o quadrado de EA é igual aos quadrados de EC e de CA *(Pr. 47.1.)*. Logo, o quadrado de EA é o dôbro do quadrado de AC. Também, sendo GF = FE, será o quadrado de GF igual ao quadrado de FE. Logo, os quadrados de GF e de FE são o dôbro do quadrado de EF. Mas o quadrado de EG é igual aos quadrados de GF e de FE. Logo, o quadrado de EG é o dôbro do quadrado de EF. Mas EF, CD são iguais. Logo, o quadrado de EG é o dôbro do quadrado de CD. Mas temos demonstrado ser o quadrado de EA o dôbro do quadrado de AC. Logo, os quadrados de AE e de EG são o dôbro dos quadrados de AC e de CD. Mas o quadrado de AG é igual aos quadrados de AE e de EG.Logo, o quadrado de AG é o dôbro dos quadrados de AC e de CD. Mas os quadrados de AD e de DG são iguais ao quadrado de AG. Logo, os quadrados de AD e de DG são o dôbro dos quadrados de AC e de CD. Mas é DG = DB. Logo, os quadrados de AD e de DB são o dôbro dos quadrados de AC e de CD.

PROP. XI. PROB.

Dividir uma linha reta de sorte que o retângulo da tôda e de uma parte seja igual ao quadrado da outra parte (Fig. 11.).

Seja AB a linha reta dada. Deve-se dividir a reta AB em um ponto H, de sorte que o retângulo, compreendido pela reta AB e pela parte BH, seja igual ao quadrado de AH, que é a outra parte.

Descreva-se o quadrado ABDC *(Pr. 46.1.)* sôbre a reta AH, e divida-se AC em duas partes iguais no ponto E *(Pr. 10.1.)*, e tirada a reta BE, produza-se CA para F, e ponha-se EF = BE *(Pr. 3.1.)*. Sôbre AF descreva-se o quadrado FGHA, e produza-se GH até K. Digo que a reta AB fica dividida no ponto H, de sorte que o retângulo das retas AB, BH é igual ao quadrado de AH.

Porque a reta AC está dividida em duas partes iguais no ponto E, e em direitura com ela está posta a reta AF, será o retângulo compreendido pelas retas CF, FA, juntamente com o quadrado de AE, igual ao quadrado de EF *(Pr. 6.2.)*. Mas temos EF = EB. Logo, o retângulo das retas CF, FA, juntamente com o quadrado de AE, é igual ao quadrado de EB. Mas o quadrado de EB é igual aos quadrados de BA e de AE *(Pr. 47.1.)* por ser o ângulo BAE reto. Logo, o retângulo de CF, FA, juntamente com o quadrado de AE, é igual aos quadrados de BA e de AE. Logo, tirando quadrado comum de AE, será o retângulo de CF, FA igual ao quadrado de AB. Mas FK é o retângulo compreendido pelas retas CF, FA, por ser AF = FG; e AD é o quadrado da reta AB. Logo, será FK = AD. Tire-se de uma parte e outra o comum AK. Ficará FH

= HD. Mas HD é o retângulo compreendido pelas retas AB, BH, por ser AB = BD; e FH é o quadrado de AH. Logo, o retângulo de AB, BH, é igual ao quadrado de AH. Logo, temos dividido a reta AB no ponto H, de sorte que o retângulo compreendido pelas retas AB, BH é igual ao quadrado de AH.

PROP. XII. TEOR.

Em todo o triângulo obtusângulo, o quadrado do lado oposto ao ângulo obtuso é tanto maior que os quadrados dos outros lados, quanto é duas vêzes o retângulo compreendido por um dos ditos lados, e pela parte do mesmo lado produzido, que fica entre o ângulo obtuso e a perpendicular, que do ângulo agudo oposto cai sôbre o mesmo lado produzido (Fig. 12.).

Seja o triângulo obtusângulo ABC, e nêle o ângulo obtuso ACB. Do ponto A caia *(Pr. 12.1.)* a perpendicular AD sôbre o lado BC produzido para D. Digo que o quadrado de AB é tanto maior que os quadrados de AC e de CB, quanto é duas vêzes o retângulo compreendido pelas retas BC, CD.

Seja a linha reta BD cortada em C, será o quadrado de BD igual aos quadrados de BC e de CD, juntamente com o dôbro do retângulo das mesmas BC, CD *(Pr. 4.2.)*. Ajunte-se-lhes o mesmo quadrado de DA. Logo, os quadrados de BD e de DA serão iguais aos quadrados de BC, de CD e de DA, e mais ao dôbro do retângulo de BC, CD. Mas o quadrado de BA é igual aos quadrados de BD e de DA *(Pr. 47.1.)*, por ser o ângulo D reto; e o quadrado de CA é igual aos quadrados de CD e de DA. Logo, o quadrado de BA será igual aos quadrados de BC e de CA, e a duas vêzes o retângulo de BC, CD. Logo, o quadrado de BA é tanto maior que os quadrados de BC e de CA, quanto é duas vêzes o retângulo compreendido. pelas retas BC, CD.

PROP. XIII. TEOR.

Em todo o triângulo, o quadrado do lado oposto a um ângulo agudo é tanto menor que os quadrados dos lados, que formam o dito ângulo agudo, quanto é duas vêzes o retângulo compreendido por um dos lados, que fazem o ângulo agudo, e pela parte do mesmo lado, que fica entre o ângulo agudo e a perpendicular, que do vértice do ângulo oposto cai sôbre o mesmo lado (Figs. 12. 13. 14.).

Seja o triângulo ABC, e nêle o ângulo agudo B. Do ponto A caia *(Pr. 12.1.)* sôbre BC a perpendicular AD. Digo que o quadrado de AC é tanto menor que os quadrados de CB e de BA, quanto é duas vêzes o retângulo compreendido pelas retas CB, BD.

Caia primeiro a perpendicular AD dentro do triângulo ABC *(Fig. 13)*. Sendo a reta CB dividida no ponto D, serão os quadrados de CB e de BD iguais a duas vêzes o retângulo de CB, BD, juntamente com o quadrado de DC *(Pr. 7.2.)*. Ajunte-se-lhes o mesmo quadrado de AD. Serão os quadrados de CB, de BD e de DA iguais a duas vêzes o retângulo de CB, BD, juntamente com os, quadrados de AD e de DC. Mas o quadrado de AB é igual aos quadrados de BD e de DA *(Pr. 47. 1.)*, porque o ângulo BDA é reto; e o quadrado de AC é igual aos quadrados de AD e de DC. Logo, serão os quadrados de CB e de BA iguais ao quadrado de AC, juntamente com o dôbro do retângulo de CB, BD. Logo, o quadrado de AC será tanto menor que os quadrados de CB e de BA, quanto é duas vêzes o retângulo compreendido pelas retas CB, BD.

Caia agora a perpendicular AD fora do triângulo ABC (Fig. 12). Porque o ângulo D é reto, será o ângulo ACB maior que um reto *(Pr. 16.1.)*. Logo, o quadrado de AB é igual aos quadrados de AC e de CB, e a duas vêzes o retângulo das retas BC, BD *(Pr. 12.2.)*. Ajunte-se-lhes o mesmo quadrado de BC. Serão os quadrados de AB e de BC iguais ao quadrado de AC, a duas vêzes o quadrado de BC, e também a duas vêzes o retângulo das retas BC, CD. Sendo pois a reta BD dividida em C, será o retângulo das retas DB, BC igual ao retângulo de BC, CD, juntamente com o quadrado de BC *(Pr. 3.2.)*. Mas os dobros destas quantidades são também iguais. Logo, serão os quadrados de AB e de BC iguais ao quadrado de AC, e a duas vêzes o retângulo das retas DB, BC. Logo, o quadrado de AC será tanto menor que os quadrados de AB e de BC, quanto é duas vêzes o retângulo compreendido pelas retas CB, BD.

Seja finalmente o lado AC perpendicular sôbre o lado BC (Fig. 14.). Logo, a reta BC está posta entre a perpendicular AC e o ângulo agudo B. Sendo pois o quadrado de AB igual aos quadrados de AC e de CB *(Pr. 47 .,1.)*, ajuntando a uma e outra parte o mesmo quadrado de BC, serão os quadrados de AB e de BC iguais ao quadrado de AC, e a duas vêzes o quadrado de CB. Mas o quadrado de CB vem a ser o mesmo que o retângulo das retas CB, BC. Logo, os quadrados de AB e de BC serão iguais ao quadrado de AC e a duas vêzes o retângulo de CB, BC e, por conseqüência, será o quadrado de AC tanto menor que os quadrados de AB e de BC, quanto é duas vêzes o retângulo das retas CB, BC.

PROP. XIV. PROB.

Construir um quadrado igual a um retilíneo dado (Fig. 15.).

Seja dado o retilíneo A. Deve-se construir um quadrado igual ao retilíneo A.

Descreva-se o paralelogramo retângulo BCDE igual ao retilíneo A. *(Pr. 45.1.)*. Se fôr EB = ED, estará feito o que se pede, porque BD será um quadrado igual ao retilíneo A. Mas se não forem iguais os lados BE, ED, produza-se BE até F, de maneira que seja EF = ED, e corte-se a reta BF em duas partes iguais no ponto G; e fazendo centro em G, com o intervalo GB ou GF, descreva-se o semicírculo BHF, e produzida DE até H, tire-se a reta GH. Porque a reta BF está dividida em duas partes iguais no ponto G, e em duas desiguais no ponto E, será o retângulo compreendido pelas retas BE, EF, juntamente com o quadrado de EG igual ao quadrado de GF *(Pr. 5.2.)*. Mas é a reta GF = GH. Logo, o retângulo das retas BE, EF, juntamente com o quadrado de EG, será igual ao quadrado GH. Mas os quadrados de HE, EG são iguais ao quadrado de GH *(Pr. 47.1.)*. Logo, o retângulo de BE, EF, juntamente com o quadrado de EG, será igual aos quadrados de HE, EG. Logo, tirando o quadrado comum de EG, ficará o retângulo de BE, EF igual ao quadrado de EH. Mas o retângulo de BE, EF é o mesmo retângulo BD, por ser EF = EI). LQgo, será BD igual ao quadrado de EH. Mas temos construído o paralelogramo BD igual ao retilíneo dado A. Logo, o retilíneo A será igual ao quadrado da reta EH. Logo, fazendo um quadrado sôbre a reta EH, estará feito o que se pedia.

LIVRO III

DEFINIÇÕES.

I

Aquêles círculos são iguais, cujos diâmetros são iguais, ou nos quais as retas, que vão do centro até à circunferência, são iguais.

Esta não é propriamente uma definição, mas sim um teorema de uma verdade patente. Porque se os círculos, nos quais as ditas retas, tiradas do centro até à circunferência, são iguais, se aplicarem reciprocamente entre si, de maneira que os centros venham a cair no mesmo ponto, os círculos se ajustarão entre si perfeitamente.

II

Uma linha reta se diz que toca um círculo, ou que é tangente de um círculo quando, estando no mesmo plano do círculo, encontra a circunferência sem a cortar. (Fig. 1).

III

Também os círculos se tocam reciprocamente, quando postos no mesmo plano, as circunferências dêle se encontram, e não se cortam (Fig. 1.).

IV

Em um círculo se diz que aquelas retas distam igualmente do centro, quando as perpendiculares, que do centro caem sôbre as ditas retas, são iguais (Fig. 2.).

V

Mas uma reta se diz mais distante do centro que outra reta, quando a perpendicular, que do centro cai sôbre a primeira reta, é maior que a perpendicular, que do mesmo centro cai sôbre a segunda (Fig. 2.).

VI

Segmento de círculo é uma figura compreendida por uma linha reta e por uma porção da circunferência do círculo (Fig.3.).

VII

O ângulo do segmento é aquêle que é formado pela dita reta, e pela porção da circunferência (Fig. 3.).

VIII

Um ângulo se diz estar, ou existir no segmento, quando é formado pelas retas, que de um, ponto qualquer, tomado na circunferência do segmento, se tiram para os extremos da reta, que é a base do segmento (Fig. 4.).

IX

Quando duas retas, fazendo um ângulo, compreendem entre, si uma porção da circunferência; o dito ângulo se diz insistir, ou assentar sôbre a dita parte da, circunferência (Fig. 1).

X

Setor de círculo é uma figura formada por duas retas, que fazem um ângulo no centro, e por aquela porção da circunferência, que as ditas retas compreendem entre si (Fig. 5.).

XI

Segmentos semelhantes de círculos são aquêles, nos quais existem ângulos iguais (Fig. 6.).

Às vêzes, para maior comodidade, usaremos dos têrmos raio, semidiâmetro, arco, e corda, Raio, ou semidiâmetro, significa uma reta conduzida do centro do círculo até à circunferência. E é manifesto que o raio é a metade do diâmetro, razão por que também se chama semidiâmetro.

Arco é uma' parte qualquer da circunferência do círculo.

Corda é aquela linha reta, que está tirada entre as extremidades de um arco qualquer. E fica evidente que a corda de um arco, igual à metade da circunferência, é o mesmo diâmetro.

PROP. I. PROB.

Achar o centro em um círculo dado (Fig. 7.).

Seja dado o círculo ABC. Deve-se-lhe achar o centro.

Tire-se a reta AB, como se quiser, e dividida pelo meio *(Pr. 10.1.)* no ponto D, dêste levante-se DC perpendicular *(Pr. 11.1.)* sôbre AB. Produza-se CD até encontrar a circunferência em E, e divida-se CF em duas partes iguais no ponto F. Digo que F é o centro do círculo ABC.

Se não é F, seja G o centro do círculo ABC. Tirem-se as retas GA, GD, GB. Sendo DA = DB, e DG comum, serão as duas AD, DG iguais às duas BD, DG, cada uma a cada uma. Mas é a base GA = GB outra base, por serem ambas raios do mesmo círculo. Logo, será o ângulo ADG = GDB. *(Pr. 8.1.)*. Mas quando uma reta, caindo sôbre outra, faz os ângulos adjacentes iguais entre si, cada um dêstes ângulos é reto *(Det. 10.)*. Logo, o ângulo GDB é reto. Mas também FDB é reto. Logo, será FDB = GDB, isto é, um ângulo maior será igual a um menor, o que não pode ser. Logo, o ponto G não é o centro do círculo ABC. O mesmo se pode demonstrar de outro ponto qualquer, que não seja o ponto F. Logo, o ponto F é o centro do círculo ABC.

COROL. *Disto se segue que, se dentro de um círculo, uma linha reta cortar outra em duas partes iguais e perpendicularmente, o centro do círculo deve estar na primeira linha que corta a outra.*

PROP. II. TEOR.

Se na circunferência de um círculo se tomarem dois pontos quaisquer, e entre êles como extremos estiver tirada uma linha reta, esta cairá tôda, dentro do círculo (Fig. 8.).

Seja o círculo ABC, uma circunferência dêle tomem-se dois pontos quaisquer A, B. Digo que a reta AB, tirada do ponto A até o ponto B, está tôda dentro do círculo ABC.

Se é possível, caia fora dêle, e seja a reta AEB. Ache-se o centro *(Pr. 1.3.)* do círculo ABC, o qual seja o ponto D. Tirem-se as retas AD, DB e DE, que encontrem a circunferência no ponto F. Sendo DA = DB, será o ângulo DAB = DBA *(Pr. 5.1.).* E porque no triângulo DAE temos um lado produzido AEB, será o ângulo DEB>DAE *(Pr.16.1.)*. Mas é DAE = DBE. Logo, será DEB>DBE. Mas a um ângulo maior fica oposto um lado também maior *(Pr.19.1.)*. Logo será DB>DE. Mas é DB = DF. Logo, será DF>DE, o que não pode ser. Logo, a reta tirada entre os pontos A, B não pode cair fora do círculo. Do mesmo modo se pode demonstrar que não cairá sôbre a circunferência. Logo, deve cair dentro do círculo.

PROP. III. TEOR.

Se dentro de um círculo uma linha reta, que passa pelo centro, cortar outra, que não passa pelo centro, em duas partes iguais, também a cortará perpendicularmente. E se a cortar perpendicularmente, também a cortará em duas partes iguais (Fig. 9.).

Seja o círculo ABC, e dentro dêle a reta CD tirada pelo centro E, a qual corte pelo meio no ponto F a reta AB, que não passa pelo centro. Digo que CD é perpendicular a AB.

Achado o centro *(Pr. 1.3.)*. E do círculo ABC, tirem-se as retas EA, EB. Sendo AF = FB, e FE comum, as duas AF, FE serão iguais às duas BF, FE, cada uma a cada uma. Mas é a base EA = EB outra base. Logo, será o ângulo AFE = BFE (*Pr. 8.1.*). Mas quando uma linha reta, caindo sôbre outra, faz os ângulos adjacentes iguais entre si, cada um dêstes ângulos é reto *(Def. 10.1.)*. Logo, os ângulos AFE, BFE são retos, e por conseqüência a reta CD, que passando pelo centro corta em duas partes iguais a reta AB, que não passa pelo centro, é perpendicular sôbre a mesma reta AB.

Seja agora CD perpendicular a AB. Digo que C]) corta .a reta AB em duas partes iguais, de maneira que é AF = FB. Feita a mesma construção como. acima, sendo EA = EB, por serem semidiâmetros do mesmo círculo, será o ângulo EAF = EBF *(Pr. 5.1.)*. Mas é também. AFE = BFE por serem ambos êstes ângulos retos. Logo, os dois triângulos EAF, EBF têm dois ângulos iguais a dois ângulos, cada um a cada um, e um lado igual a um lado, isto é, o lado comum EF, que é oposto a ângulos iguais. Logo, os outros lados dos ditos triângulos serão iguais aos outros lados, cada um a cada um *(Pr. 26.1.)* e por conseqüência será AF = FB.

PROP. IV. TEOR.

Se em um círculo duas retas, as quais ambas não passam juntamente pelo centro, se cortarem reciprocamente, não se poderão cortar em duas partes iguais (Fig. 10.).

Seja o círculo ABCD, e dentro dêle no ponto E cortem-se as duas retas AC, BD, que não passam pelo centro. Digo que as retas AC, BD não se podem cortar em duas partes iguais.

Seja, se fôr possível, AE = EC, e BE = ED. Se uma das retas passar pelo centro, claro está que não poderá ser cortada em duas partes iguais pela outra, que não passa pelo centro. Mas, se nenhuma delas passar pelo centro, achado o centro F do círculo ABCD *(Pr. 1.3.)*, tire-se a reta EF. Logo, a reta FE, que passa pelo centro, cortando em duas partes iguais a reta AC, que não passa pelo centro, também a cortará perpendicularmente *(Pr. 3.3.)*, e assim será FEA um ângulo reto. Pela mesma razão, deve ser reto o ângulo FEB. Logo, será FEA = FEB, isto é, um ângulo menor igual a um ângulo maior, o que não pode ser. Logo, as retas AC, DB não se cortam reciprocamente em duas partes iguais.

PROP. V. TEOR.

Se dois círculos reciprocamente se cortarem, não poderão ter um mesmo centro comum (Fig. 11.).

Cortem-se reciprocamente os dois círculos ABC, CDG nos pontos B, C. Digo que êstes círculos não podem ter um mesmo centro.

Seja E, se é possível, o centro comum de ambos. Tire-se a reta EC, e a outra EFG, como se quiser. Porque o ponto E é o centro do círculo ABC, será CE = EF. E porque o mesmo ponto E é o centro do círculo CDG, será CE = EG, e por conseqüência FE = EG, isto é, uma reta menor igual a uma maior, o que é absurdo. Logo, o ponto E não pode ser centro comum de ambos os círculos ABC, CDG.

PROP. VI. TEOR.

Se dois círculos se tocarem interiormente, não poderão ter um mesmo centro comum (Fig. 12.).

Toquem-se interiormente os círculos ABC, CDE no ponto C. Digo que êstes círculos não podem ter um mesmo centro.

Seja F, se é possível, o centro comum de ambos. Tire-se FC, e também a outra FEB, como se quiser. Porque F é o centro do círculo ABC, será CF = FB. E porque o mesmo ponto F é também centro do círculo CDE, será CF = FE, e assim FE = FB, isto é, uma reta menor igual a uma maior, o que não pode ser. Logo, não é o ponto F o centro comum dos círculos ABC, CDE.

PROP. VII. TEOR.

Se no diâmetro de um círculo se tomar um ponto qualquer, que não seja o centro do círculo, e se do dito ponto se tirarem para a circunferência quaisquer linhas retas, entre tôdas estas retas a máxima será aquela na qual estiver o centro, e a mínima o resto da máxima para diâmetro inteiro. Entre as outras aquela, que estiver mais perto da máxima, será sempre maior que outra qualquer mais afastada da dita máxima. Finalmente, do mesmo ponto não se poderão tirar para a circunferência senão duas retas iguais, e estas cairão para uma e outra parte daquela, que entre tôdas fôr a mínima (Fig. 13.).

Seja o círculo ABCD, cujo diâmetro seja AD. Tome-se em AD o ponto F, que não seja o mesmo que o ponto E, que é o centro do círculo.

Do ponto F para a circunferência ABCD tirem-se as retas FB, FC, FG. Digo que FA é a máxima, e FD a mínima entre tôdas as retas, que do ponto F vão para a circunferência. Digo também ser FB>FC, e FC>FG.

Tirem-se as retas BE, CE, GE. Porque em um triângulo qualquer dois lados são maiores que o terceiro *(Pr. 20.1.)*, serão BE, EF juntamente maiores que BF, mas é AE = BE, e por conseqüência as duas BE, EF iguais a AF. Logo, será AF>FB. Também sendo BE = CE, e FE comum, as duas BE, EF serão iguais às duas CE, EF. Mas é o ângulo BEF>CEF. Logo, será a base BF>FC *(Pr. 24.1.)*, que é outra base. Pela mesma razão, deve ser CF>FG. Sendo pois CF, FE juntamente maiores que EG, e sendo EG = ED, serão as duas GF, EF maiores que ED. Logo, tirando a comum FE, ficará GF>FD. Logo FA é a máxima, FD a mínima; e BF>FC, e FC>FG. Digo, finalmente, que do ponto F para a circunferência se poderão tirar somente duas retas iguais entre si, e que estas duas retas cairão uma para uma, e outra para outra parte da mínima FD. No ponto E, e com a reta EF faça-se *(Pr. 23.1,)* o ângulo FEH = GEF, e tire-se FH. Porque temos GE = EH, e EF comum, as duas GE, EF serão iguais às duas HE, EF. Mas é o ângulo GEF = HEF. Logo, será *(Pr. 4.1.)* a base GF = FH outra base. Digo que do ponto F para a circunferência não se pode tirar outra reta nenhuma igual à reta FG, que não seja a reta FH. Seja, se é possível, a reta FK = FG. Sendo FK = FG, e FG = FH, será FK = FH, isto é, a mais próxima igual à outra mais afastada da reta, que passa pelo centro, e contra o que temos demonstrado.

PROP. VIII. TEOR.

Se fora de um círculo se toma, um ponto qualquer, e dêste se tirarem para a circunferência algumas linhas retas, como se quiser, das quais, porém, uma passe pelo centro, entre aquelas, que caírem na parte côncava da circunferência, a máxima será a que passar pelo centro e, entre as outras, a que estiver mais *perto da máxima, será sempre maior que outra qualquer mais afastada dela. Mas entre as retas, que caírem na parte convexa da circunferência, a mínima será aquela que, produzida, passar pelo centro; e entre as, outras a que estiver mais perto da mínima será sempre menor que outra qualquer mais afastada dela. Finalmente, do mesmo ponto não se poderão tirar para a circunferência mais de duas retas iguais, e destas uma cairá para uma parte, e a outra para a parte oposta a respeito da reta, que entre tôdas fôr a mínima (Fig. 14.).*

Seja o círculo ACB, e fora dele o ponto D. Dêste ponto considerem-se tiradas para a circunferência do círculo as retas DA, DE, DF, DO, e passe DA pelo centro. Digo que entre as retas, que caírem na parte côncava da circunferência AEFC, a reta DA, que passa pelo centro, será a máxima; e que será DE>DF, e DF>DC. Mas entre as retas, que caírem na parte convexa HLKG, a mínima será a reta DG, que, produzida, passa pelo centro: e que será DK<DL, e DL<DH.

Ache-se *(Pr. 1.3.)* o centro M do círculo ACB, e tirem-se as retas ME, MF, MC, MK, ML, MH. Sendo AM = ME, ajuntando a uma e outra parte a mesma reta MD, será AD igual às duas EM, MD. Mas EM, MD juntamente são maiores *(Pr. 20.1.)* que EL. Logo, será AD>ED. Sendo também ME = MF, e MD comum, serão as duas EM, MD iguais às duas FM, MD. Mas é o ângulo EMD>FMD. Logo, será *(Pr. 24.1.)* a base ED>FD outra base. Do mesmo modo demonstraremos ser FD>CD. Logo, DA é a máxima; e DE>DF, e DF>DC. E porque MK, KD tomadas juntas são maiores que MD; e temos MK = MG; tirando de uma e outra parte as duas MK, MG, ficará *(Ax. 4.)* KD>GD; e por conseqüência GD<KD. Logo, GD é a mínima. E porque sôbre o lado MD do triângulo MLD estão tiradas dentro do mesmo triângulo as duas retas MK, KD, serão as duas MK, KD tomadas juntas menores *(Pr. 21.1.)* que as duas ML, LD. Logo, tirando destas as iguais MK, ML, ficará DK<DL. Do mesmo modo se pode demonstrar que deve ser DL<DH. Logo, DG é a mínima; e DK<DL, e DL<DH.

Digo também que do ponto D não se poderão tirar, para a circunferência, senão duas retas iguais, uma para uma e outra para outra parte da reta DG, que é a mínima. Sôbre a reta MD e no ponto M faça-se o ângulo DMB = KMD; e tire-se DE. Sendo pois MK = MB, e MD comum, serão as duas KM, MD iguais às duas BM, MD, cada uma a cada uma. Logo, sendo o ângulo KMD = BMD, será , *(Pr. ,4.1.)* a base DK = DB outra base.

Digo agora que do ponto D se não pode tirar para a circunferência outra reta igual à reta DK. Seja, se é possível, DN = DK. Logo, sendo DN = DK e DK = DB, será DB = DN, isto é, a mais próxima igual à mais afastada da reta DG, que é a mínima, contra o que se tem, demonstrado.

PROP. IX. TEOR.

Se de um ponto tomado dentro de um círculo caírem na circunferência mais de duas retas iguais entre si, o dito ponto será o centro do círculo (Fig. 15.).

Esteja dentro do círculo ABC o ponto D, do qual se oponham, tiradas para a circunferência, as três retas iguais DA, DB, DC. Digo que o ponto D é o centro do círculo ABC, Se D não é centro, sê-lo-á o ponto E. Tire-se DE, e produza-se, de uma e outra parte, para a circunferência até os pontos F, e G. Será FG o diâmetro do círculo ABC. E porque no diâmetro FG está o ponto D, que não é o centro do círculo, será DG a máxima, e também será DC>DB, e DB>DA *(Pr. 7.3.)*, o que é absurdo, porque, pela, hipótese, as três retas DA, DE, DO são iguais. Logo, o ponto E não pode ser o centro do círculo ABC. O mesmo se demonstrará de outro ponto qualquer, que não seja o ponto D. Logo, o ponto D é o centro do círculo ABC.

PROP. X. TEOR.

Um círculo não pode cortar outro círculo em mais de dois pontos (Fig. 16.).

Deve-se isto entender a respeito das circunferências dos, mesmos círculos.

O círculo ABC corte, se fôr possível, o círculo DEF em mais de dois pontos, isto é, nos três pontos B, G, F; e seja K o centro do círculo ABC. Tirem-se as retas KB, KG, KF. Porque dentro do círculo DEF se tem tomado o ponto K, do qual para a circunferência estão tiradas as três retas iguais KB, KG, KF, será o ponto K o centro *(Pr. 9.3.)* do círculo DEF. Mas, pela suposição, o ponto K é também o centro do círculo ABC. Logo, o mesmo ponto K será o centro comum de dois círculos, que reciprocamente se cortam, o que não pode ser *(Pr. 5.3.)*. Logo, um círculo não corta outro círculo em mais de dois pontos.

PROP, XI. TEOR.

Se dois círculos interiormente se tocarem, a reta, que fôr tirada pelos centros dêles, passará também pelo contacto dos mesmos círculos (Fig. 17.).

Toquem-se interiormente os dois círculos ABC, ADE no ponto A e seja F o centro do círculo ABC, e G o centro do círculo ADE. Digo que a reta tirada pelos dois centros F, G passa pelo ponto do contacto A.

Não seja assim, mas caia, se fôr possível, para fora do contacto A, e seja a reta FGDH. Tirem-se os raios AF, AG. Porque as duas retas AG, GF são maiores *(Pr. 20.1.)* que FA, isto é, são maiores que FH, por ser FA = FH, tirando a comum FG, ficará AG>GH. Mas é AG = GD. Logo, será GD>GH, o que não pode ser, porque temos GH>GD. Logo, a reta, que passa pelos centros F, G não cai para fora do contacto A. Logo, deve passar pelo mesmo contacto.

PRÓP. XII. TEOR.

Se dois círculos se tocarem exteriormente, a reta, que passar pelos centros dêles, passará também pelo contacto (Fig. 18.).

Toquem-se exteriormente os dois círculos ABC, ADE no ponto A; e seja F o centro do círculo ABC, e G o centro do círculo ADE. Digo que a reta tirada pelos centros F, G passa pelo contacto A.

Se assim não é, caia para fora do contacto A, e seja a reta FCDG. Tirem-se os semidiâmetros FA, AG. Sendo F o centro do círculo ABC, será AF = FC. E sendo G o centro do círculo ADE, será AG = GD. Logo, as duas FA, e juntamente AG são iguais às duas FC, DG também tomadas juntamente. Logo, a total FG é maior que as duas FA, AG, o que não pode ser, porque a mesma FG é menor *(Pr. 20.1.)* que as duas FA, AG. Logo, a reta tirada pelos centros F, G não cai para fora do contacto A. Logo, passa pelo mesmo contacto.

PROP. XIII. TEOR.

Um círculo não toca outro círculo em mais de um ponto, tanto interior como exteriormente (Fig.19.).

O círculo EBF toque o círculo ABC, interiormente, em mais de um ponto, se fôr possível, como nos dois pontos B, D.

Tirada a reta BD, tire-se também a reta GH, a qual corte a BD perpendicularmente, e em partes iguais *(Pr. 10 e 11.1.)*. Porque os pontos B, D estão nas circunferências de ambos os círculos, e a reta BD estará tôda dentro de um e outro círculo *(Pr. 2.3.)*. Logo, na reta GH, que corta a reta BD perpendicularmente, e em duas partes iguais, devem existir os centros *(Cor. 1.3.)* ambos os círculos. Logo, a reta GH produzida passará pelo ponto do contacto *(Pr. 11.3.)*. Mas não passa pelo contacto, porque os pontos B, D estão fora da reta GH, o que é absurdo. Logo, um círculo não toca outro círculo pela parte de dentro mais em de um ponto. Também digo que dois círculos se não podem tocar pela parte de fora em mais de um ponto.

O círculo AKC toque o círculo ABC (Fig. 20.), se é possível, em mais de um ponto, isto é, nos pontos A, C. Tire-se a reta AC. Estando pois os pontos A, C na circunferência do círculo AKC, a reta AC cairá tôda dentro *(Pr. 2.3.)* do mesmo círculo AKC. Mas o círculo AKC está inteiramente fora do círculo ABC. Logo, a reta AC está fora do círculo ABC. Também porque os pontos A, C estão na circunferência do círculo ABC, a mesma reta AC deve estar dentro do círculo ABC. Logo, a reta AC está dentro e fora do mesmo círculo ABC, O que é absurdo. Logo, um círculo não toca outro círculo peia parte de fora em mais de um ponto.

PROP. XIV. TEOR.

Em todo o círculo as retas iguais distam igualmente do centro; e as que distam, igualmente do centro são iguais (Fig. 21.).

Seja o círculo ABDC, e nêle as retas iguais AB, CD, tiradas entre os pontos da circunferência A, B, C, D. Digo que que estas distam igualmente do centro.

Seja E o centro do círculo ABDC, e do ponto E caiam caiam sobre as retas AB, CD as perpendiculares EF, EG. Tirem-se as retas AE, EC. Porque a reta EF, que passa pelo centro, corta perpendicularmente a reta AB, que não passa pelo centro, esta reta AB ficará dividida em duas partes iguais. *(Pr. 3.3.)*, e será AF = FB, e assim AB será o dôbro de AF. Pela mesma razão será CD o dôbro de CG. Mas é AB = CD. Logo, será AF =CG. Sendo pois AE = EC, será o quadrado de AE igual ao quadrado de EC. Mas os quadrados de AF, FE são iguais *(Pr. 47.1.)* ao quadrado de AE, por ser reto o ângulo AFE; e os quadrados de EG, GC são iguais ao quadrado de EC, porque o ângulo EGC é reto. Logo, os quadrados de AF, FE são iguais aos quadrados de CG, GE. Mas o quadrado de AF é igual ao quadrado de CG, por ser AF = CG. Logo, o quadrado de FE será igual ao quadrado de EG, e assim será: FE = EG. Mas em um círculo as retas distam igualmente do centro, quando as perpendiculares, que do centro caem sôbre elas, são iguais *(Def. 4.3.)*. Logo, as retas AB, CD distam igualmente do centro E.

Sejam agora as retas AB, CD igualmente distantes do centro E, isto é, seja FE = EG. Digo que será AB = CD. Feita a mesma construção como acima, se poderá do mesmo modo demonstrar que a reta AB é a dôbro da reta AF, e CD é o dôbro de CG. E porque temos AE = EC, o quadrado de AE será igual ao quadrado de EC. Mas as quadrados de EF, FA são iguais ao quadrado de AE; e os quadrados de EG, GC são iguais ao quadrado de EC. Logo, os quadrados de EF, FA são iguais aos quadrados de EG, GC. Mas a quadrado de EF é igual ao quadrado de EG, por ser EF = EG. Logo, a quadrado de AF será igual ao quadrado de CG, e por conseqüência será AF = CG.Mas AB é a dôbro de AF, e CD é o dôbro de CG. Logo, será AB = CD.

PROP. XV. PROB.

Em todo o círculo o diâmetro é a máxima de tôdas as retas, que podem estar dentro do mesmo círculo; e entre as outras aquela, que está mais perto do centro, é sempre maior que outra qualquer mais afastada do mesmo centro. Pelo contrário aquela, que é maior, fica mais perto do centro, que outra qualquer menor (Fig. 22.).

Seja o círculo ABCD, cujo diâmetro é AD, e a centro E. Seja a reta BC a mais próxima ao centro E, e a reta FG a mais apartada dêle. Digo que o diâmetro AD é a máxima entre tôdas as retas, que se podem tirar dentro do círculo ABCD; e digo que é BC>FG.

Tirem-se do centro E sôbre as retas BC, FG as duas perpendiculares EH, EK, e também os semidiâmetros EB, EC, EF. Sendo AE = EB, e DE = EC, será AD igual às duas BE, BC tomadas juntas. Mas BE, EC são maiores *(Pr. 20.1.)* que BC. Logo será AD>BC.

E porque BC está mais perto do centro do que FG, será EK>EH *(Def.5.3.)*. Mas BC, como temos demonstrado na proposição precedente, é o dôbro de BH, e FG é o dôbro de FK; e os quadrados de EH, HB são iguais aos quadrados de EK, KF, dos quais o quadrado de EH é menor que o quadrado de EK, por ser EH<EK. Lago, o quadrado de BH será maior que o quadrado de FK, e assim será BH>FK, BC>FG.

Seja porém BC>FG. Digo, que a reta BC estará mais perto do centro do que a reta FG; isto é, feita a mesma construção, será EH<EK. Porque sendo BC>FG, será BH>FK. Mas os quadrados de BH, HE são iguais aos quadrados de FK, KE, dos quais a quadrado de BH é maior que a quadrado de FK, por ser BH>FK. Logo, o quadrado de EH será menor que o quadrado de EK, e por conseqüência será EH<EK.

PROP. XVI. TEOR.

A reta, que de uma extremidade do diâmetro de um círculo se levantar, perpendicularmente, sôbre o mesmo diâmetro, cairá tôda fora do círculo; e entre esta reta e a circunferência não se poderá tirar outra linha reta alguma; que é o mesmo que dizer, que a circunferência do círculo passará entre a perpendicular ao diâmetro, e a reta que com o diâmetro fizer um ângulo agudo, por groode que seja; ou também que a mesma circ1tnferência passará entre a dita perpendicular e outra reta, que fizer com a mesma perpendicular um ângulo qualquer, por pequeno que seja (Figs. 23 e 24.).

Seja a círculo ABC, cujo centro seja D, e a diâmetro AB. Digo que a reta, que se levantar da extremidade A, perpendicularmente, sôbre o diâmetro AB, cairá tôda fora do círculo ABC.

Não seja assim, mas caia, se é possível, dentro do círculo, como a reta AC. Tire-se DC. Sendo DA = DC, será o ângulo DAC = ACD *(Pr. 5.1.)*. Mas DAC é reto. Logo, será também reto o ângulo ACD. Logo, no triângulo ACD, os dois ângulos DAC, ACD serão iguais a dois retos, o que não pode ser *(Pr. 17.1.)*. Logo, a reta, que do ponto A, se levante perpendicularmente sôbre o diâmetro BA, não cai dentro do círculo. Do mesmo modo se pode demonstrar, que não assenta sôbre a circunferência. Logo, cai fora do círculo, como a reta AE (Fig. 24.).

Digo mais que entre a reta AE e a circunferência ACB não se pode conduzir outra linha reta alguma (Fig. 24.).

Porque, se é possível, entre a circunferência ACB, e a perpendicular AE, esteja tirada a reta FA. Do ponto D seja conduzida sôbre FÁ a perpendicular *(Pr. 12.1.)* DHG. Por ser o ângulo AGD reto, e o ângulo DAG menor que um reto *(Pr.17.1.)*, será DA>DG *(Pr. 19.1.)*. Mas teremos DA = DH. Logo, será DH >DG, o que é absurdo, sendo DH<GD. Logo, entre a reta AE e a circunferência ACB, não se poderá tirar outra linha reta alguma; isto é, a circunferência do círculo passará entre a perpendicular, sôbre o diâmetro, e a reta, que com o diâmetro fizer um ângulo agudo, por grande que seja; ou também a mesma circunferência passará entre a dita perpendicular e outra reta, que faça com a perpendicular um ângulo qualquer, por pequeno que seja.

Isto somente, e não outra coisa alguma se deve entender, quando no texto grego e nas versões o ângulo do semicírculo é chamado o maior entre todos os ângulos agudos; e o outro, que falta para o complemento de um ângulo reto, o menor entre todos os ângulos também agudos.

COROL. *Do que se tem demonstrado fica claro, que a reta, a qual de uma extremidade do diâmetro de um círculo se levanta perpendicularmente sôbre o mesmo diâmetro, é tangente do círculo e o toca em um ponto só; porque já temos visto que uma reta, que encontra a circunferência de um círculo em dois pontos, está dentro do círculo (Pr . 2.3.). Também se faz evidente que uma só linha reta pode ser tangente de um círculo, no mesmo ponto.*

PROP. XVII. PROB.

De um ponto dado, e existente fora de um círculo, ou na circunferência dêle, tirar uma linha reta tangente ao mesmo círculo (Fig. 25.).

Seja dado primeiramente o ponto A fora do círculo BCD. Deve-se tirar do ponto A uma linha reta, que toque o círculo dado BCD.

Achado o centro E do círculo *(Pr. 1.3.)* BCD, e tirada a reta AE, com o centro E e o semidiâmetro EA descreva-se o círculo AFG; e do ponto D tire-se DF perpendicular *(Pr. 11.1.)* a EA. Tirem-se também as retas EBF, AB. Digo quo do ponto A está conduzida a reta AB, que toca o círculo BCD no ponto B.

Sendo aponto E o centro dos círculos BCD, AFG, será EA = EF, e ED = EB. Logo, as duas AE, EB são iguais às duas FE, ED. Mas estas retas compreendem o ângulo comum E. Logo, será a base DF = AB outra base; e o triângulo EDF igual ao triângulo EBA, e os outros ângulos iguais aos outros ângulos *(Pr. 4.1.)*, cada um a cada um, os opostos a lados iguais. Logo, será EBA = EDF. Mas EDF é um ângulo reto. Logo, será também reto o ângulo EBA. Mas a reta EB é um semidiâmetro; e uma reta, que de uma extremidade do diâmetro de um círculo se levanta perpendicularmente sôbre o diâmetro, toca o círculo *(Cor. 16.3.)*. Logo, a reta AB toca círculo CDB no ponto B.

Esteja agora o ponto D na circunferência do círculo BCD. Conduzida a reta DE, do ponto D tire-se a reta DF perpendicular *(Pr. 11.1.)* a DE. A reta DF tocará *(Cor. 16.3.)* o círculo BCD no ponto D. Logo, de um ponto dado temos conduzido uma tangente a um círculo dado.

PROP. XVIII. TEOR.

Se uma linha reta tocar um círculo, e do centro fôr tirada para o ponto do contacto outra reta, esta cairá perpendicularmente sôbre a tangente (Fig. 26.),

A reta DE toque o círculo ABC no ponto C, e do centro F do círculo seja tirada para o ponto C a reta FC, Digo, que FC é perpendicular a DE.

Se FC não é perpendicular a DE, do ponto F tire-se FBG perpendicular *(Pr. 12.1.)* a DE. Porque o ângulo FGC é reto, será GCF agudo *(Pr. 17.1.)*. Mas o lado, que fica oposto a um ângulo maior, é também maior *(Pr. 19.1.)*. Logo, será FC>FG. Mas é FC = FB. Logo, será FB>FG, o que é absurdo, por ser FB<FG. Logo, FG não é perpendicular a DE. O mesmo se pode demonstrar de outra reta qualquer, que não seja a reta FC. Logo, FC é perpendicular a DE.

PROP. XIX. TEOR.

Se uma linha reta tocar um círculo, e do ponto do contacto se tirar outra reta perpendicular sôbre a tangente, o centro do círculo estará na dita reta perpendicular (Fig. 27.).

A reta DE toque o círculo ABC no ponto C, e dêste ponto sôbre a tangente DE esteja levantada a perpendicular CA. Digo que o centro do círculo ABQ está na reta CA.

Se o centro do círculo ABC não estiver na reta CA, estará fora dela, como o ponto F. Tire-se CF. Porque a reta DE toca o círculo ABC no ponto C, e do centro F está tirada para o ponto do contacto C a reta FC; será FC perpendicular *(Pr. 18.3.)* a DE, e por conseqüência o ângulo FCE será reto. Mas também é reto o ângulo ACE. Logo, será FCE = ACE, o que não é possível, por ser FCE<ACE. Logo, o ponto F não é o centro do círculo ABC. O mesmo se demonstra de todos os mais pontos, que estejam fora da reta AC. Logo, o centro do círculo ABC deve estar na reta AC.

PROP. XX. TEOR.

Em todo o círculo o ângulo, que é feito no centro, é o dôbro do ângulo, que está na circunferência, tendo cada um dêstes ângulos como por base a mesma porção da circunferência (Figs. 28 e 29.).

Seja o círculo ABC, e esteja no centro E dêle o ângulo BEC, e na circunferência o ângulo BAC; e tenham os ângulos BEC, BAC como por base a mesma porção ou arco BC da circunferência. Digo que o ângulo BEC é o dôbro do ângulo BAC.

Caia em primeiro lugar o centro E (Fig. 28.) entre os lados do ângulo BAC. Tire-se o diâmetro AEF. Sendo EA = EB, será o ângulo EAB = EBA *(Pr. 5.1)*. Logo, os dois ângulos EAB, EBA tomados juntos fazem o dôbro do ângulo EAB. Mas o ângulo BEF é igual *(Pr. 32.1.)* aos ângulos EAB, EBA. Logo, o ângulo BEF será o dôbro do ângulo EAB. Pela mesma razão deve ser o ângulo FEC o dôbro do ângulo EAC. Logo, o ângulo total BEC é o dôbro do ângulo total BAC. Caia em segundo lugar o centro E (Fig. 29.) fora do ângulo BDC. Tire-se o diâmetro DEG. Do mesmo modo se pode demonstrar que o ângulo GEC é o dôbro do ângulo GDC. Mas GEB é o dôbro de GDB. Logo, tirando de GEC o ângulo GEB, e de GDC o ângulo GDB, ficará sendo o resto BEC o dôbro do resto BDC.

PROP. XXI. TEOR.

Em todo o círculo os ângulos, que existem no mesmo segmento, são iguais entre si (Figs. 30 e 31.).

Seja o círculo ABCD, em cujo segmento BAED estejam os ângulos BAD, BED. Digo que êstes ângulos são iguais entre si.

Seja o ponto F o centro do círculo ABCD (Fig. 30.), e o segmento BAED seja primeiramente maior que o semicírculo. Tirem-se as retas BF, FD. Sendo, pois, o ângulo BFD feito no centro, e o ângulo BAD na circunferência, e tendo êstes ângulos por base o mesmo arco BCD, será o ângulo BFD o dôbro *(Pr. 20.3.)* do ângulo BAD. Pela mesma razão o ângulo BFD é o dôbro do ângulo BED. Logo, será o ângulo BAD = BED.

Agora o segmento (Fig. 31.) BAED não seja maior que o semicírculo; e nêle existam os ângulos BAD, BED. Deve-se demonstrar que êstes ângulos são iguais entre si. Tirado o diâmetro AFC e a reta CE, o segmento BAEC será maior que o semicírculo. Logo, os ângulos BAC, BEC existentes no segmento BAEC serão iguais. Com a mesma demonstração se prova serem iguais os ângulos CAD, CED. Logo, serão também iguais os ângulos totais BAD,BED.

PROP. XXII. TEOR.

Os ângulos opostos de um quadrilátero, existentes em um círculo, tomados juntos são iguais a dois retos (Fig. 32.).

Seja o círculo ABCD, e nêle exista o quadrilátero ABCD. Digo que os ângulos opostos dêste quadrilátero tomados juntos são iguais a dois retos.

Tirem-se as retas AC, BD. Porque os três ângulos de um triângulo qualquer são iguais a dois retos *(Pr. 32.1.)*, os três ângulos CAB, ABC, BCA serão iguais a dois retos. Mas é CAB = CDB, por estarem ambos no mesmo segmento BADC; e também é ACB = ADB, porque cada um dêstes ângulos existe no mesmo segmento ADCE. Logo, será o ângulo total ADC igual aos dois BAC, ACB. Ajunte-se-lhe o mesmo ângulo ABC. Serão os três ABC, CAB, BCA iguais aos dois ABC, ADC. Mas os três ABC, CAB, BCA são iguais a dois retos. Logo, os dois ABC, ADC serão também iguais a dois retos. O mesmo se demonstra a respeito dos outros dois ângulos opostos BAD, DOE.

PROP. XXIII. TEOR.

Sôbre a mesma linha reta e para a mesma parte não podem existir dois segmentos semelhantes de círculos, sem caírem um sôbre o outro (Fig. 33.).

Sôbre a reta AB estejam para a mesma parte, se é possível, a dois segmentos semelhantes, ACB, ADB, e suponha-se que se não ajustam um sôbre o outro. Havemos de demonstrar que a suposição é falsa, e que os dois segmentos se ajustam entre si perfeitamente. Porque o círculo ACB corta o círculo ADB nos dois pontos A, B, o primeiro não poderá cortar o segundo em nenhum outro ponto *(Pr. 10.3.)*. Logo, segue-se que um segmento de um círculo deve cair dentro do segmento do outro círculo. Caia, pois, o segmento ACB dentro do segmento ADB. Tirem-se as retas BCD, CA, DA, porque os segmentos ACB, ADB, pela suposição, são semelhantes, será o ângulo ACB = ADB *(Def. 11.3.)*, isto é, o ângulo externo igual a um dos internos e opostos, o que não pode ser *(Pr. 16.1.)*. Logo, sôbre a mesma linha reta, e para a mesma parte, não podem existir dois segmentos semelhantes de círculos, sem caírem um sôbre o outro. Logo, êstes segmentos devem ajustar-se entre si perfeitamente.

PROP. XXIV. TEOR.

Os segmentos semelhantes de círculos, que estão postos sôbre linhas retas iguais, são também iguais (Fig. 34.).

Sôbre as retas iguais AB, CD estejam postos os segmentos semelhantes de círculos AEB, CFD. Digo que êstes segmentos são iguais.

Pôsto o segmento AEB sôbre o segmento CFD de maneira que o ponto A caia sôbre o ponto C, e a reta AB sôbre a reta CD, o ponto B cairá sôbre o ponto D, por ser AB = CD. Logo, o segmento AEB deve ajustar-se *(Pr.23.3.)* sôbre o segmento CFD, e por conseqüência êstes segmentos são iguais.

PROP. XXV. PROB.

Dado um segmento de círculo, descrever o círculo inteiro, do qual é segmento o dado (Figs. 35, 36 e 37.).

Seja dado o segmento de círculo ABC. Deve-se descrever o círculo de que ABC é um segmento.

Divida-se a reta AC pelo meio *(Pr. 10.1.)* no ponto D, e dêste ponto D levante-se sôbre AC a perpendicular *(Pr. 11.1.)* DE. Tire-se a reta AE. Se os ângulos ABD, BAD forem iguais (Fig. 35.), será BD = DA *(Pr. 6.1.)*, e por conseqüência BD = BC. Sendo, pois, as três retas DA, DB, DC iguais entre si, será D o centro *(Pr. 9.3.)*. do círculo. Logo, se com o centro D e com o intervalo igual a uma das retas DA, DB, DO se descrever um círculo, êste passará pelas extremidades das mesmas retas DA, DB, DC, e teremos o círculo de que ABC é um segmento. E porque o centro D está na reta AC, será o segmento ABC um semicírculo. Mas se os ângulos (Figs. 36 e 37.) ABD, BAD forem desiguais, faça-se no ponto A com a reta AB o ângulo BAE = ABD *(Pr. 23.1.)*, e produza-se BD, se fôr preciso, para o ponto E, e tire-se a reta EC. Porque temos o ângulo ABE = BAE, será BE = EA *(Pr. 23 .1.)*. E sendo AD = DC, e DE comum, as duas AD, DE serão iguais às duas CD, DE, cada uma a cada uma. Mas é o ângulo ADE = CDE, porque ambos são retos. Logo, será a base *(Pr. 4.1.)* AE = EC outra base. Mas tem-se demonstrado ser AE = EB. Logo, será também BE = EC, e conseqüentemente as três retas AE, EB, EC serão iguais entre si. Logo, será o ponto E o centro do círculo. Com o centro E e com o intervalo igual a uma das retas AE, EB, EC descreva-se um círculo; êste passará pelas extremidades de tôdas as ditas retas, e será o círculo de que ABC é um segmento. E claro está: 1º Que, se o ângulo ABD (Fig. 36.) fôr maior que o ângulo BAD, o centro E cairá fora do segmento ABC, que por isto será menor que o semicírculo. 2º Que, se o ângulo ABD fôr menor (Fig. 37.) do que o ângulo BAD, o centro E cairá dentro do segmento ABC, o qual por conseqüência será maior que o semicírculo. Logo, sendo dado um segmento de círculo, temos descrito o círculo, de que era segmento o dado.

PROP. XXVI. TEOR.

Em círculos iguais os ângulos, que são iguais, e existem ou nos centros ou nas circunferências, assentam sôbre arcos também iguais (Fig. 38.).

Sejam os círculos iguais ABC, DEF, em cujos centros G, H existam os ângulos iguais BGC, EHF, e nas circunferências existam os ângulos também iguais BAC, EDF. Digo que os arcos BKC, ELF, sôbre os quais assentam os ditos ângulos, são iguais.

Tirem-se as retas BC, EF. Porque os círculos ABC, DEF são iguais, serão também iguais os seus semidiâmetros. Logo, as duas retas BG, GC são iguais às duas EG, HF.

Mas pela hipótese é o ângulo G = H. Logo, será a base BC = EF outra base *(Pr.4.1.)*. E porque também é o ângulo A = D, serão os segmentos BAC, EDF semelhantes *(Def. 11.3.)*. Mas êstes segmentos estão postos sôbre as retas iguais BC, EF; e os segmentos de círculos os quais, sendo semelhantes, estão sôbre retas iguais, são também iguais *(Pr. 24.3.)*. Logo, será o segmento BAC igual ao segmento EDF. Mas os círculos ABC, DEF são iguais. Logo, os outros segmentos BKC, ELF devem ser iguais, e por conseqüência são também iguais os arcos BKC, ELF.

PROP. XXVII. TEOR.

Em círculos iguais os ângulos, que assentam sôbre arcos iguais, são iguais, ou existam os ditos ângulos nos centros, ou nas circunferências (Fig. 39.).

Nos círculos iguais ABC, DEF, e sôbre os arcos iguais BC, EF estejam postos os ângulos EGC, EHF feitos nos centros G, H, e também os ângulos BAC, EDF existentes nas circunferências BAC, EDF. Digo que será o ângulo BGC = EHF, e BAC = EDF.

Se fôr o ângulo BGC = EHF, claro está que será também o ângulo BAC = EDF. *(Pr.20.3.)*. Mas se supusermos que um dêles é maior que o outro, seja BGC o maior. Sôbre a reta BG, e no ponto G, faça-se *(Pr.23.1.)* o ângulo BGK = EHF. Os ângulos, feitos nos centros e iguais entre si, assentam sôbre arcos iguais *(Pr. 26.3.)*. Logo, será o arco BK igual ao arco EF. Mas era EF = BC. Logo, deve ser BE = BC, o que não é possível, sendo BK<DC. Logo, não são desiguais os ângulos BGC, EHF. Logo, são iguais. Mas o ângulo A é a metade *(Pr. 20.3.)* do ângulo BGC, e o ângulo D a metade do ângulo HEF. Logo, será também A = D.

PROP. XXVIII. TEOR.

Em círculos iguais cordas iguais cortam arcos também iguais; isto é, o arco maior igual ao maior, e o menor igual ao menor (Fig. 40.).

Sejam os círculos iguais ABC, DEF, e as cordas iguais BC, EF, que dividam as circunferências dos círculos nos arcos maiores BAC, EDF, e nos arcos menores BGC, EHF. Digo que será BAC = EDF, e BGC = EHF.

Achados os centros *(Pr. 1.3.)* dos círculos K, L, tirem-se as retas BK, KC, EL, LF. Porque os círculos são iguais, os raios também devem ser iguais. Logo, serão as duas retas BK, KC iguais às duas EL, LF. Mas é a base BC = EF outra base. Logo, será o ângulo BKC = ELF *(Pr. 8.1.)*. Mas os ângulos iguais, e que existem nos centros, assentam sôbre arcos iguais *(Pr. 26.3.)* Logo, será o arco BGC igual ao arco EHF. Logo, sendo as circunferências ABC, DEF iguais entre si, também será o arco BAC igual ao EDF.

PROP. XXIX. TEOR.

Em círculos iguais a arcos; iguais correspondem cordas também iguais (Fig. 40.).

Sejam os círculos iguais ABC, DEF, e nas circunferências dêstes tomem-se os arcos iguais BGC, EHF, cujas cordas sejam retas BC, EF. Digo que será BC= EF.

Achados os centros *(Pr. 1.3.)* dos círculos K, L, tirem-se os raios BK, KC, EL, LF. Porque os arcos BGC, EHF são iguais entre si, será o ângulo BKC = ELF *(Pr. 27.3.)*. E porque os círculos ABC, DEF são iguais, serão também iguais os seus raios. Logo, as duas retas BK, KC serão iguais às duas retas EL, LF. Mas os ângulos compreendidos por estas retas são iguais. Logo, será também a base BC = EF outra base *(Pr .4.1.)*. Logo, a arcos iguais correspondem cordas também iguais.

PROP. XXX. PROB.

Dividir um arco dado em duas partes iguais (Fig. 41.).

Seja dado o arco ADB. Deve-se dividir o arco ADB em duas partes iguais.

Tire-se a reta AB, e divida-se pelo meio (Pr .10.1.) no ponto C. Dêste ponto C levante-se sôbre AB a perpendicular CD, e tirem-se as retas AD, BD. Sendo pois AC = CB, e CD comum, serão as duas AC, CD, iguais às duas BC, CD. Mas é o ângulo ACD = BCD, por serem um e outro retos. Logo, será a base AD igual *(Pr. 4.1.)* à base BD. Mas cordas iguais cortam arcos iguais; isto é, o arco maior igual ao maior, e o menor igual ao menor; *(Pr. 28.3.)*; e cada um dos arcos AD, DB é menor que um semicírculo. Loo, será o arco AD igual ao, arco DB.

PROP. XXXI. TEOR.

Em um círculo qualquer o ângulo, que existe no semicírculo, é reto; o que existe em um segmento maior que o semicírculo é agudo; e o que existe em um segmento menor que o semicírculo é obtuso (Fig. 42.).

Seja o círculo ABCD, cujo diâmetro seja BC, e o centro E. Tirada a corda CA que divide o círculo nos dois segmentos ABC, ADC, conduzam-se as retas BA, AD, DC. Digo que o ângulo BAC, que existe no semicírculo BAC, é reto; e o ângulo ABC, que existe no segmento ABC maior que o semicírculo, é agudo; e o ângulo ADC, que existe no segmento ADC menor que o semicírculo, é obtuso.

Tire-se a reta AE, e produza-se BA para F. Porque temos BE = EA, será o ângulo EAB = EBA *(Pr. 5.1.)*. Também sendo AE = EC, será EAC = ECA. Logo, o ângulo total BAC será igual aos dois ABC, ACB, Mas o ângulo FAC externo é igual aos dois internos *(Pr. 32.1.)* e opostos ABC, ACB. Logo, será o ângulo BAC = FAC, e por conseqüência cada um dêles será reto *(Def. 10.1.)*. Logo, o ângulo CAB, existente no semicírculo BAC, é reto. E porque no triângulo ABC os dois ângulos ABC, BAC tomados juntos, são menores que dois retos *(Pr. 17.1.)*, e BAC, como fica demonstrado, é um ângulo reto; será o ângulo ABC, que existe no segmento ABC, maior que o semicírculo, menor que um reto, e assim será agudo.

Finalmente, porque o quadrilátero ABCD existe em um círculo, e os ângulos opostos de um quadrilátero qualquer, existente em um círculo, são iguais a dois retos *(Pr .22.3.),* os ângulos ABC, ADC serão iguais a dois retos. Mas o ângulo ABC, sendo agudo, é menor que um reto. Logo, o ângulo ADC, existente no segmento ADC menor que o semicírculo, será maior que um reto, e por conseqüência será obtuso.

É claro está que a porção AB da circunferência, a respeito do centro E, cai para fora da reta AB, que com a base AC de um e outro segmento forma o ângulo reto para a parte do segmento maior ABC; e que a porção AD cai entre o mesmo centro E e a reta AF, que com a mesma AC faz o ângulo reto para a parte do segmento menor ADC.

Isto é nada mais se deve entender, quando no texto grego e nas versões o ângulo do segmento maior se diz maior que um reto; e o ângulo do segmento menor se diz também menor que um reto.

COROL. *Disto se pode deduzir, que se em um triângulo um ângulo fôr igual aos outros dois, o dito ângulo deve ser reto. Porque o ângulo adjacente a êste, o qual ângulo adjacente vem a ser por conseqüência um ângulo externo, é igual àqueles outros dois ângulos do triângulo; e quando dois ângulos adjacentes são iguais, cada um dêles é reto (Def. 10.1.)*.

PROP. XXXII. TEOR.

> *Se uma linha reta fôr tangente de um círculo, e se do ponto do contacto se tirar outra reta, que divida o círculo em dois segmentos, os ângulos, que esta reta fizer com a tangente, serão iguais aos ângulos, que existem nos segmentos alternos (Fig. 43.).*

A linha reta EF seja tangente do círculo ABCD no ponto B, e dêste ponto B seja conduzida a corda BD, que divida o círculo ABCD nos segmentos BAD, BCD. Digo que os ângulos, formados pela corda BD, e pela tangente EF, são iguais aos ângulos existentes nos segmentos alternos; isto é, o ângulo FBD = DAB existente no segmento DAB, e o ângulo DBE = BCD, que existe no segmento BCD.

Do ponto B levante-se sôbre a reta EF a perpendicular BA *(Pr. 11.1.)*, e tomado no arco BD um ponto qualquer, C, tirem-se as retas AD, DC, CE. Porque a reta EF toca o círculo ABCD no ponto B, e do contacto B está levantada a reta BA perpendicularmente sôbre a tangente EF o centro *(Pr. 19.3.)* do círculo ABCD estará na reta BA. Logo, será reto o ângulo ADB existente no semicírculo *(Pr, 31.3.)*, e por conseqüência os dois ângulos BAD, ABD serão iguais a um reto *(Pr. 32.1.)*. Mas o ângulo ABF é reto. Logo, êste ângulo ABF será igual aos dois BAD, ABD. Logo, tirando o comum ABD, ficará o ângulo DBF = BAD, que existe no segmento alterno BAD. Sendo pois a figura ABCD um quadrilátero existente em um círculo, os ângulos opostos dêle serão iguais *(Pr. 22.3.)* a dois retos. Logo, os ângulos BAD, BCD são iguais aos ângulos DBF, DBE *(Pr. 13.1.)*. Mas temos visto DBF = BAD. Logo, será também o ângulo DBE = DOB ângulo existente no segmento alterno DCB.

PROP. XXXIII. PROB.

Sôbre uma linha reta dada descrever um segmento de círculo, no qual segmento possa existir um ângulo igual a outro ângulo retilíneo dado (Figs. 44, 45, e 46.).

Seja a linha reta dada AB, e o ângulo retilíneo C. Sobre a reta AB deve-se descrever um segmento de círculo, em que possa existir um ângulo igual ao ângulo dado C.

Seja em primeiro lugar o ângulo O reto (Fig. 44.). Divida-se AB em duas partes iguais *(Pr. .10.1.)* no ponto F; e fazendo centro em F; com o intervalo FA descreva-se o semicírculo AHB. O ângulo AHB existente no semicírculo AHB será reto *(Pr. 31.3.)*, e por conseqüência igual ao ângulo dado C.

Não seja reto o ângulo dado C (Figs. 45 e 46.). Sôbre a reta AB, e no ponto dela A faça-se o ângulo BAD igual *(Pr. 23.1.)* ao ângulo C; e sôbre a reta AD levante-se do ponto A perpendicular *(Pr .11.1.)* AE, e divida-se a reta AB pelo meio *(Pr .10.1.)* no ponto F, do qual ponto F levantada a perpendicular *(Pr .11.1.)* FG sôbre a mesma AB, tire-se a , reta GB. Sendo AF = FB, e FG comum, serão as duas AF, FG I iguais as duas BF, FG. Mas é o ângulo AFG = BFG. Logo, será a base AG = GB outra base *(Pr, 4.1.)*. Logo, o "círculo descrito com o centro G e com o intervalo GA, deve passar também pelo ponto E. Descreva-se pois, e seja o círculo AHB. Porque da extremidade A do diâmetro AE está levantada a reta AD perpendicular ao mesmo diâmetro AE, será a reta tangente *(Pr. 16.3.)* do círculo AHB, no ponto A. Logo, porque do contacto A está conduzida a reta AB, que divide o , círculo em dois segmentos, será o ângulo DAB igual ao ângulo, que pode existir no segmento alterno AHB. Mas é DAB = C ângulo dado. Logo, o ângulo C será também igual ao ângulo no segmento AHB. Logo, sôbre a linha reta dada AB temos descrito o segmento de círculo AHB, em que pode existir um ângulo igual ao ângulo retilíneo dado C.

PROP. XXXIV. PROB.

Dado um círculo, cortar dêle um segmento, no qual possa existir um ângulo igual a outro ângulo retilíneo dado (Fig, 47.).

Seja dado o círculo ABO, e o ângulo retilíneo D. Do círculo ABC deve-se cortar um segmento, em que possa existir um ângulo igual ao ângulo dado D.

Tire-se a reta EF, que toque *(Pr .17.3.)* o círculo ABC em um ponto qualquer B. Faça-se *(Pr. 23,1.)* no ponto B com a reta BF o ângulo FBC = D, que é o ângulo dado. Porque a reta EF é tangente do círculo ABC no ponto B, e do ponto do contacto B está tirada a reta BC, será o ângulo FBC igual ao ângulo no segmento *(Pr. 32.3.)* alterno BAC. Mas temos feito o ângulo FBC = D. Logo, será o ângulo no segmento BAC igual ao ângulo D; e assim do círculo ABC temos cortado um, segmento, em que pode existir um ângulo igual ao ângulo retilíneo dado C.

PROP. XXXV. TEOR.

Se dentro de um círculo qualquer duas linhas retas se cortarem, será o retângulo, compreendido pelos segmentos de uma, igual ao retângulo compreendido pelos segmentos da outra (Figs. 48, 49, 50 e 51.).

Dentro do círculo ABCD cortem-se reciprocamente as duas retas AC, BD, no ponto E. Digo que o retângulo compreendido pelos segmentos AE, EO é igual ao retângulo compreendido pelos segmentos BE, ED.

Se as retas AC, BD (Fig. 48.) passarem pelo centro, isto é, se o ponto E fôr o centro do círculo ABCD, claro está que, sendo iguais entre si as retas AE, EC, BE, ED, será o retângulo das retas AE, EO igual ao retângulo das retas BE, ED.

Passe agora pelo centro a reta BD (Fig. 49.) e corte perpendicularmente no ponto E a reta AC, que não passa pelo centro. Dividida a reta BD em duas partes iguais no ponto F, o centro do círculo ABCD.Tire-se o raio AF. Porque a reta BD, que passa pelo centro, corta perpendicularmente no ponto E a reta AC, que não passa pelo centro, será AE = EC *(Pr.3.3.)*. E sendo a reta BD dividida em partes iguais ponto F, e em partes desiguais no ponto E, será o retângulo compreendido pelas retas BE, ED, juntamente com o quadrado de EF igual (Fig. 5.2.) ao quadrado de FB, isto é, igual ao quadrado de FA. Mas o quadrado de FA é igual *(Pr. 47.1.)* aos quadrados de AE e de EF. Logo, o retângulo BE, ED juntamente com o quadrado de EF, será igual aos quadrados de AE e de EF. Logo, tirando o quadrado comum de EF, ficará o retângulo compreendido pelas retas BE, ED igual ao quadrado de AE, isto é, igual ao retângulo compreendido pelas retas AE, EC.

Passando agora a reta BD (Fig. 50.) pelo centro, corte obliquamente no ponto E a reta AC, que não passa pelo centro. Divida a reta BD no ponto F em duas partes iguais, será o ponto F o centro do círculo ABCD. Tire-se AF, e do centro F caia a reta FG perpendicularmente *(Pr. 12.1.)* sôbre AC. Será AG = GC *(Pr. 3.3.)*, e por conseqüência o retângulo de AE, EC juntamente com o quadrado de EG igual *(Pr. 5.2.)* ao quadrado de AG. Ajunte-se a uma e outra parte o quadrado de FG. Será o retângulo de AE, EC juntamente com os quadrados de EG, e de GF igual aos quadrados de AG e de e de GF. Mas o quadrado de EF é igual aos quadrados de EG, e de GF, e quadrado de AF é igual *(Pr. 47.1.)* aos quadrados de AG e de FG. Logo, o retângulo das retas AE, EC juntamente com o quadrado de EF, será igual ao quadrado de AF, isto é, igual ao quadrado de FB. Mas o retângulo Be, ED juntamente com o quadrado de EF é igual *(Pr. .5.2.)* ao quadrado de FB. Logo, o retângulo de AE, EC juntamente com o quadrado de EF será igual ao retângulo de BE, ED juntamente com o mesmo quadrado de EF. Logo, tirando o quadrado comum de EF, ficará o retângulo das retas AE, EC igual ao retângulo das retas BE, ED.

Finalmentene nenhuma das retas Ac, BD (Fig. 51.) passe pelo centro, o qual seja o ponto F. tire-se pelo ponto E, onde se cortam as retas AC, BD, o diâmetro GEFH. Já temos demonstrado, que o retângulo de AE, BC é igual ao retângulo de GE, EH; e que o retângulo de BE, ED é igual ao mesmo retângulo de GE, EH. Logo, será o retângulo compreendido pelas retas AE, EC igual ao retângulo compreendido pelas retas BE, ED.

PROP. XXXVI. TEOR.

Se de um ponto qualquer fora de um círculo se tirarem duas linhas retas, das quais uma corte o círculo, e a outra toque; será o retângulo compreendido por tôda a reta, que corta o círculo, e pela parte dela, que fica entre o dito ponto e a circunferência convexa do círculo, igual ao quadrado da tangente (Figs. 52 e 53.).

Esteja o ponto D fora do círculo ABC, e dêste ponto D estejam tiradas a reta DCA, que corte o círculo, e a reta DB, que o toque. Digo que o retângulo das retas AD, DC é igual ao quadrado da tangente DE.

A reta DCA ou passa pelo centro do círculo ABC (Fig. 52.), ou não. Passe primeiramente pelo centro, o qual seja o ponto E. Tire-se o semidiâmetro EB. Logo, será o ângulo EBD reto *(Pr. 18.3.)*. E porque a linha reta AC está dividida pelo meio no ponto E, e em direitura dela está a outra CD, e retângulo da tôda AD, e da adjunta DC, juntamente com o quadrado de EC, será igual *(Pr. 6.2.)* ao quadrado de ED. Mas é CE = EB. Logo, o retângulo de AD, DC, juntamente com o quadrado de EB, será igual ao quadrado de ED. Mas o quadrado de ED é igual *(Pr.47.1.)* aos quadrados de EB, e de BD, por ser reto o ângulo EBD. Logo, o retângulo de AD, DC, juntamente com o quadrado de EB será igual aos quadrados de EB e de BD. Logo, tirando o quadrado comum de EB, ficará o retângulo de AD, DC igual ao quadrado da tangente DB.

Suponhamos agora que a reta DCA não passa pelo centro do círculo ABC (Fig. 53.). Achado o centro E *(Pr. 1.3.)*, e tirada a reta EF perpendicularmente *(Pr. 12.1.)* sôbre a corda AC, tirem-se as retas EB, EC, ED. O ângulo EFD é reto. E porque a reta EF passando pelo centro corta perpendicularmente a corda AC, que não passa pelo centro, a mesma corda AC ficará dividida em duas partes iguais. *(Pr. 3.3.)*, e será AF = FC. Logo, estando a reta CD em direitura com a reta AC dividida pelo meio no ponto F, será o retângulo de AD, DC juntamente com o quadrado de FC igual *(Pr. 6.2.)* ao quadrado de FD. Ajunte-se a uma e outra parte o mesmo quadrado de FE. Será o retângulo de AD, DC, juntamente com os quadrados de CF e FE, igual aos quadrados de DF e de FE. Mas o quadrado de ED é igual *(Pr. 47.1.)* aos quadrados de DF e de FE, por ser o ângulo EFD reto; e o quadrado de EC é igual aos quadrados de CF e de FE. Logo, o retângulo de AD, DC, juntamente com o quadrado de CE, é igual ao quadrado ED. Mas temos CE = EB. Logo, o retângulo de AD, DC, juntamente com o quadrado de EB, será igual ao quadrado de ED. Mas os quadrados de EB e de BD são iguais ao quadrado de ED, por ser o ângulo EBD reto *(Pr. 18.3.).* Logo, o retângulo de AD, DC, juntamente com o quadrado de EB, será igual aos quadrados de EB e de BD. Logo, tirando o quadrado comum de EB, ficará o retnngulo compreendido pelas retas AD, DC igual ao quadrado da tangente DB.

COROL. *Disto se segue que, se de um ponto qualquer A fora de um círculo (Fig. 54.) se tirarem duas retas que cortem o círculo, os retângulos compreendidos pelas retas inteiras e pelas partes delas, que ficam entre o dito ponto e a parte convexa da circunferência, serão iguais entre si; isto é, será o retângulo das retas BA, AE igual ao retângulo das retas CA, AF. E a razão é porque cada um dêstes retângulos é igual ao quadrado da tangente AD.*

PROP. XXXVII. TEOR.

> *Se de um ponto qualquer fora de um círculo se tirarem duas retas, das quais uma corte o círculo, e a outra chegue somente até a circunferência; e se o retângulo compreendido pela reta inteira que corta o círculo e pela parte dela que fica entre o dito ponto e a parte convexa da circunferência, fôr igual ao quadrado da reta incidente sôbre a circunferência, será a reta incidente tangente do círculo (Fig. 55.).*

Do ponto D fora do círculo ABC estejam tiradas as duas retas DCA, DB, das quais DCA corte o círculo, e DB seja incidente sôbre a circunferência. Seja também o retângulo compreendido pelas retas AD, DC igual ao quadrado de DB. Digo que DB é tangente do círculo ABC no ponto B.

Do ponto D tire-se à reta DE, que toque *(Pr. 17.3.)* o círculo ABC no ponto E, e achado o centro F do círculo, tirem-se as retas FE, FB, FD; O ângulo FED será reto *(Pr. 18.3.)*, E porque a reta DE toca o círculo ABC, é a reta DCA o corta, o retângulo de AD, DC será igual *(Pr. 36.3.)* ao quadrado de DE. Mas o retângulo das mesmas retas AD, DC se supõe igual ao quadrado de DB. Logo, será o quadrado de DE igual ao quadrado de DB, e por conseqüência sará a reta DE igual à reta DB. Mas é tambem FE = FB. Logo, as duas DE, EF são iguais as duas DB, FB; cada uma a cada uma. Logo, nos triângulos DEF, DBF sendo a base FD comum, será o ângulo DEF = DBF *(Pr. 8.1.)*. Mas o ângulo DEF é reto. Logo, será também reto o ângulo DBF. Mas a reta FB produzida é um diâmetro; e uma reta, que de uma extremidade do diâmetro, se levanta perpendicularmente sôbre o mesmo diâmetro, toca o círculo *(Pr. 16.3.)*. Logo, a reta DB é tangente do círculo ABC no ponto B.

LIVRO IV

DEFINIÇÕES

I

Uma figura retilínea se diz inscrita em outra figura retilínea, quando cada um dos ângulos da inscrita toca cada um, isto é, o correspondente, dos lados daquela em que a primeira está inscrita (Fig. 1.).

II

Do mesmo modo, uma figura retilínea se diz circunscrita a outra, quando cada um dos lados da circunscrita toca cada 11m, isto é, o correspondente, dos ângulos daquela, ao redor da qual a primeira está circunscrita (Fig. 1.).

III

Uma figura retilínea se diz inscrita em, um circulo, quando cada um dos ângulos dela toca a circunferência do círculo (Fig. 2.).

IV

Uma figura retilínea se diz circunscrita a um círculo, quando cada um dos lados da dita figura toca a circunferência do círculo (Fig. 3.).

V

Do mesmo modo, um círculo se diz inscrito em, uma figura retilínea, quando cada um dos lados da figura, na qual o círculo está inscrito, toca a circunferência do mesmo círculo (Fig. 3.).

VI

Um círculo se diz circunscrito a uma figura retilínea, quando a circunferência do círculo toca cada um dos ângulos da figura, ao redor da qual o círculo está circunscrito (Fig. 2.).

VII

Uma linha reta se diz inscrita em um círculo, quando as extremidades dela estão na circunferência.

PROP. I. TEOR.

Em um círculo dado inscrever uma linha reta igual a outra dada, e não maior que o diâmetro do círculo dado (Fig.4.).

Seja dado o círculo ABC e a reta D, a qual não seja maior que o diâmetro do círculo ABC. Deve-se inscrever no círculo ABC uma reta igual à linha reta D.

Seja BC o diâmetro do círculo ABC. Se fôr BC = D, estará feito o que se pede, porque no círculo ABC está, inscrita a reta BC = D. Mas se fôr BC>D, posta CE = D *(Pr. 3.1.)*, com o centro C, e o intervalo CE descreva-se o círculo AEF e tire-se CA. Será CA a reta que se pede. Porque C é o centro do círculo AEF, será CA = CE. Mas é D = CE. Logo, será também D = CA. Logo, no círculo dado ABC temos inscrito a reta AC igual à linha reta proposta D, e não maior que o diâmetro do círculo dado ABC.

PROP. II. PROB.

Em um círculo dado inscrever um triângulo equiângulo a outro triângulo dado (Fig. 5.).

Seja dado o círculo ABC e o triângulo DEF. Deve-se inscrever no círculo ABC um triângulo eqüiângulo ao triângulo DEF.

Tire-se a reta GAH tangente *(Pr. 17.3.)* do círculo, ABC no ponto A. Sôbre a reta AH, e nQ ponto dela A faça-se *(Pr. 23.1.)* o ângulo HAC = DEF, e sôbre a reta AG,no' mesmo ponto A, o ângulo GAB = DFE. Tire-se BC. Digo, que estará feito o que se pede. Porque a reta HAG toca o círculo ABC no ponto A, e do ponto do contacto está tirada a reta AC, será o ângulo HAC igual ao ângulo no segmento alterno *(Pr. 32.3.)*, isto é, será HAC = ABC. Mas temos feito HAC = DEF. Logo, será ABC = DEF. Pela mesma razão será ACB = DFE. Logo, o terceiro ângulo BAC deve ser igual *(Pr. 32.1.)* ao terceiro EDF. Logo, os triângulos ABC, DEF são eqüiângulos. Mas o triângulo ABC está inscrito no círculo ABC. Logo, temos inscrito no círculo dado ABC o triângulo ABC, eqüiângúlo ao triângulo proposto DEF.

PROP. III. PROB.

Circunscrever a um círculo dado um triângulo eqüiângulo a outro triângulo dado (Fig . 6.).

Seja dado o círculo ABC e o triângulo DEF. Deve-se circunscrever ao círculo ABC um triângulo eqüiângulo ao triângulo dado DEF.

Produza-se de uma e outra parte o lado EF para G e H, e do centro K do círculo ABC tire-se um semidiâmeltro qualquer KB. Façam-se, no centro K e sôbre o semidiâmetro KB, os ângulos *(Pr. 23 .1.)* BKA = DEG, e BKC = DFH; e pelos pontos A, B, C tirem-se as tangentes *(Pr. 17.3.*) ao círculo LAM, MBN, NCL, que se cortem reciprocamente nos pontos L, M, N. Será o triângulo LMN o que se pede. Porque as retas LM, MN, NL tocam o círculo ABC nos pontos A, H, C; e do centro K estão tirados os raios KA, KB, KC para os contactos A, B, C; cada um dos ângulos em A, B, C será reto *(Pr. 18.3.)*. E porque os quatro ângulos do, quadrilátero AMBK são iguais a quatro retos *(1.Cor. 32.1.)*. E cada um dos ângulos MAK, MBK, é reto; serão os dois AKB, AMB tomados juntamente iguais a dois retos. Mas também os ângulos DEG, DEF são iguais a dois retos *(Pr.13.1.).* Logo, serão os ângulos AKB, AMB iguais aos ângulos DEG, DEF. Mas é AKB = DEC. Logo, será AMB = DEF. Do, mesmo modo se pode demonstrar LNM = DFE. Logo, será terceiro MLN igual *(Pr. 32.1.)* ao terceiro EDF. Logo, os dois triângulos LMN, DEF são eqüiângulos. Mas o triângulo LMN está circunscrito ao círculo ABC. Logo, temos circunscrito a um círculo dado um triângulo eqüiângulo a outro triângulo dado.

PROP. IV. PROB.

Inscrever um círculo em um triângulo dado (Fig.7.).

Seja ABC o triângulo dado. Deve-se inscrever um cír.culo no triângulo ABC.

Dividam-se pelo meio *(Pr. 9.1.)* os ângulos ABC, BCA com as retas BD, CD, as quais se encontrem no ponto D; do ponto D sejam conduzidas as retas DE, DF, DG perpendiculares *(Pr.12.1.)* aos lados AB, BC, CA. Sendo o ângulo EBD = FBD, por estar dividido em partes iguais o ângulo ABC, e sendo o ângulo reto BED = BFD também reto; nos triângulos EBD, FBD haverá dois ângulos iguais a dois ângulos, cada um a cada um, e um lado BD comum a ambos os triângulos, e opôsto a ângulos iguais. Logo, serão os outros lados iguais aos outros lados *(Pr. 26 .1.)*, cada um a cada um, e assim será DE = DF. Pela mesma razão será DG = DF. Logo, as três retas DE, DF, DG serão iguais entre si. Logo, o círculo descrito com o centro D, e o intervalo igual a uma das retas DE, DF, DG, passará pelos pontos E, F, G, e tocará as retas AB, BC, CA, por serem retos os ângulos em E, F, G; pois já temos demonstrado que uma reta toca um círculo quando é perpendicular *(Pr. 16.3.)* ao diâmetro em uma das extremidades dêle. Logo, cada uma das retas AB, BC, CA toca o círculo EFG, e por conseqüência no triângulo dado ABC temos inscrito o círculo EFG.

PROP. V. PROB.

Circunscrever um círculo a um triângulo dado (Figs. 8, 9 e 10.).

Seja dado o triângulo ABC. Deve-se circunscrever um círculo ao triângulo ABC.

Dividam-se em partes iguais *(Pr. 10.1.)* os lados AB, AC nos pontos D, E, e dêstes pontos D, E sôbre AB, AC levantem-se as perpendiculares *(Pr. 11.1.)* DF, EF, as quais produzidas necessariamente hão de concorrer em algum ponto, porque de outra sorte seriam paralelas; e por conseqüência as duas AB, AC, que fazem ângulos retos com as duas DF, EF, seriam também paralelas, o que é manifesto absurdo. Concorram pois as duas DF, EF no ponto E. Tirem-se as retas BF, FC, FA. Sendo AD = DB, e DF comum, e os ângulos em D iguais, porque são retos; será a base AF igual *(Pr. 4.1.)* à base FB. Do mesmo modo se provará ser CF = F A. Logo, será também BF = FC, e conseqüentemente serão iguais entre si as três retas FA, FB, FC. Logo, o círculo descrito sôbre o centro F, e com o intervalo igual a uma das retas FA, FB, FC, passará pelos pontos A, B, C; e êste círculo ABC ficará circunscrito ao triângulo ABC. Logo, temos circunscrito um circulo a um triângulo dado.

COROL. Fica claro (Fig. 8.), que se o centro do círculo cair dentro do triângulo, cada um dos ângulos dêste triângulo será agudo *(Pr. 31.3 .),* porque cada um ficará existindo em um segmento maior, que o semicírculo.

Mas se o centro estiver em um lado do triângulo (Fig. 9.). o angulo oposto a êste lado será reto, porque o segmento, em que o dito ângulo ficará existindo, é um semicírculo,

Finalmente, se o centro do círculo cair fora do triângulo para a parte de um dos lados (Fig. 10.), o ângulo oposto a êste lado, existindo em um segmento menor que o semicírculo, será, obtuso *(Pr.31.3,)*. De tudo isto se colige que, se o triângulo dado fôr acutângulo, o centro do círculo circunscrito cairá dentro do triangulo; se fôr retângulo, o centro estará no lado oposto ao ângulo reto; e se fôr obtusângulo, o centro cairá fora do triângulo, e para a parte daquele lado, que estiver defronte do ângulo obtuso.

PROP. VI. PROB.

Inscrever um quadrado em um círculo dado (Fig. 11.).

Seja dado o círculo ABCD. Deve-se inscrever um quadrado no círculo ABCD.

No círculo ABCD, tirados os diâmetros AC, BD um perpendicular ao outro, tirem-se as retas AB, BC, CD, DA. Digo que a figura ABCD é o quadrado que se pede. Sendo BE = ED, por ser o ponto E o centro do círculo, e sendo EA comum, e os ângulos AEB, AED iguais entre si, porque são retos, será a base BA = AD *(Pr. 4.1.)* outra base. Pela mesma razão; cada uma das retas BC; CD é igual a cada uma das retas BA, AD. Logo, o quadrílátero ABCD é equilátero. Digo que é também retângulo. Porque, sendo a reta BD um diâmetro do círculo ABCD, será BAD um semicírculo, e, por consequência, o ângulo BAD reto *(Pr. 31.3.)*. Pela mesma razão, cada um dos ângulos ABC, BCD, CDA é reto. Logo, o quadrilátero ABCD é retângulo. Mas temos demonstrado que é também equilátero. Logo, o quadrilátero ABCD é um quadrado. E porque fica inscrito no círculo ABCD, é manifesto, que já está feito o que se pedia.

PROP. VII. PROB.

Circunscrever um quadrado a um círculo dado (Fig. 12.).

Seja dado o círculo ABCD. Deve-se circunscrever um quadrado ao círculo ABCD.

No círculo ABCD tirem-se os diâmetros AC, AD perpendicularmente um sôbre o outro; e pelos pontos A, B, C, D sejam conduzidas as retas FG, GH, RH, HF, tangentes *(Pr. 17.3.)*,do círculo ABCD. Digo que a figura GRHF é o quadrado que se pede. Porque FG toca o círculo ABCD no ponto A, e do centro E para o contacto A está conduzido o semidiâmetro EA, os ângulos em A serão retos *(Pr. 18.3.)*. Pela mesma razão, são retos os ângulos em B, C, D. Sendo pois retos os, ângulos AEB, EBG, serão GH, AC duas paralelas *(Pr. 28.1.)*. Do mesmo modo são paralelas as retas AC, FK. Com o mesmo discurso se demonstra ser cada uma das retas GK, HK paralela a BED. Logo, as figuras GK GC, AK, FB, BK são outros tantos paralelogramos. Logo, será GF = HK, e GH = FK *(Pr. 34.1.)*. E porque temos AC=BD, e AC é 'igual a cada uma das retas GR, FK, como BD é igual a cada uma das retas GF, HK, será cada uma das retas GH, FK igual a cada uma das retas GF, HK. Logo, o quadrilátero FGHK é equilátero. Digo que é também retângulo. Porque, sendo a figura GBEA um paralelogramo, e sendo o ângulo AEB reto, será também reto *(Pr. 34.1.)* o ângulo AGB. Do mesmo modo se prova serem retos os ângulos em H, K, F. Logo, o quadrilátero FGHK é retângulo. Logo, sendo também equilátero, como temos demonstrado, será um quadrado. Mas êste quadrado é circunscrito ao círculo ABCD. Logo, temos circunscrito um quadrado a um círculo dado.

PROP. VIII. PROB.

Inscrever um círculo em um quadrado dado (Fig. .12.).

Seja dado o quadrado GHKF. Deve-se inscrever um círculo no quadrado GHKF.

Dividá-se cada uma das retas GH, GF em partes iguais *(Pr. 10.1.)*, nos pontos B, A, e pelo ponto A conduza-se AC paralela *(Pr. 31.1.)* a qualquer das retas GH, FK, e pelo ponto B a reta BD paralela a qualquer das duas GF, HK. Cada Uma das figuras GD, DH, GC, CF, GE, EK, HE, EF será um paralelogramo, e por consequência serão iguais *(Pr. 34.1.)* todos os lados opostos. Sendo pois GF = GH, e sendo GA a metade de GF, e GB metade de GH, será GA = GB, e por consequência os lados opostos também iguais. Logo, será BE = EA. Da mesma forma podemos demonstrar que cada uma das retas EC, ED é igual a cada uma das retas BE, EA. Logo, são iguais entre si as quatro retas EA, EB, EC, ED. Logo, o círculo descrito com o centro E, e com o intervalo igual a uma das quatro retas EA, EB, EC, ED, passará pelos pontos A, B, C ,D, e tocará as retas GF, GH, HK, KF nos mesmos pontos A, B, Ç, D, por serem retos *(Pr. 29.1.)* os ângulos em A, B, C, D, e por conseqüência cada uma das retas GH, HK, KF, FG será tangente *(Pr .16.3.)* do círculo ABCD, que dêste modo fica inscrito no quadrado GRKF. Logo, temos inscrito um círculo em um quadrado dado.

PROP. IX. PROB.

Circunscrever um, círculo a um quadrado dado (Fig. 11.)

Seja dado o quadrado ABCD. Deve-se circunscrever um círculo ao quadrado ABCD.

Tirem-se as diagonais AC, BD, as quais se cortem reciprocamente no ponto E. Sendo DA = AB, e AC comum, serão as duas DA, AC iguais às duas BA, AC. Mas é também a base DC = BC outra base. Logo será o ângulo DAC = BAC *(Pr.8.1.)*. Logo, o ângulo DAB fica dividido pelo meio com a diagonal AC. Do mesmo modo se demonstra que cada um dos ângulos ABC, BCD, CDA fica dividido em duas partes iguais pelas diagonais AC, BD. Logo, sendo o ângulo DAB = ABC e sendo EAB a metade de DAB, e EBA a metade de ABC, será EAB = EBA. Logo, será também o lado EA igual *(Pr. 6.1.)* ao lado EB. Com a mesma demonstração se prova que cada uma das retas EC, ED é igual a cada uma das retas EA, EB. Logo, as quatro retas EA, EB, EC, ED são iguais entre si. Logo o círculo descrito com o centro E, e com o intervalo igual a uma das retas EA, EB, EC, ED, passará pelos pontos A, B, C, D, e assim será circunscrito ao quadrado ABCD. Logo, temos circunscrito um círculo a um quadrado dado.

PROP. X. PROB.

Construir um triângulo isósceles de maneira que cada um dos ângulos, que estão sôbre a base, seja o dôbro do ângulo do vértice (Fig. 13.).

Tome-se uma reta qualquer AB, e esta se divida em C de sorte que o retângulo, compreendido pelas retas AB, BC, seja igual *(Pr. 1.2.)* ao quadrado de CA. Com o centro A e o raio AB descreva-se o círculo BDE, e inscreva-se *(Pr. 1.4.)* nêle a reta BD igual à reta AC, que não é maior que o diâmetro do círculo BDE. Tirem-se as retas DA, DC, e circunscreva-se *(Pr. 5.4.)* o círculo ACD ao triângulo ACD. Digo que no triângulo isósceles ABD cada um dos ângulos ABD, ADB sôbre a base é o dôbro do ângulo BAD no vértice.

Porque o retângülo compreendido pelas retas AB, BC é igual ao quadrado de AC, e também temos AC = BD, será o retângulo de AB, BC igual ao quadrado de BD. E como do ponto B fora do círculo ACD estão tiradas as retas BCA, BD, das quais BCA corta o círculo ACD, e BD chega até à circunferência do mesmo círculo, e o retângulo das retas AB, BC é igual ao quadrado de BD, será a reta BD tangente *(Pr. 37.3.)* do círculo no ponto D. Logo, sendo BD tangente, e do contacto D saindo a corda DC, que divide o círculo em dois segmentos, será o ângulo BDC = DAC existentes no segmento *(Pr. 32.3.)* alterno DAC. Ajunte-se a um e outro dêstes ângulos o mesmo ângulo CDA. Será o ângulo total BDA igual aos dois CDA, DAC. Mas o ângulo externo BCD é igual *(Pr. 32.1.)* aos mesmos ângulos CDA, DAC. Logo, será BDA = BCD. Mas é BDA = CBD, por ser AD = AB *(Pr. 5.1.)*. Logo, será CBD, isto é, DBA = BCD. Logo, os três ângulos BDA, DBA, BCD são iguais entre si. E porque os ângulos DBC, BOD são iguais, também serão iguais *(Pr. 6.1.)* os lados BD, DC. Mas temos BD = CA. Logo, será CA = CD, e por conseqüência o ângulo CDA = DAC. Logo, os dois ângulos CDA, DAC tomados juntos fazem o dôbro do ângulo DAC. Mas BCD é igual aos dois CDA, DAC. Logo, também BCD será o dôbro de DAC. Mas BCD é igual a cada um dos ângulos BDA, DBA. TJogo, cada um dos dois BDA, DBA é o dôbro do ângulo DAB. Logo, temos construído um triângulo isósceles ABD, de maneira que cada um dos ângulos sôbre a base é o dôbro do ângulo do vértice.

PROP. XI. PROB.

Em um círculo dado inscrever um pentágono eqüilátero e eqüiângulo (Fig. 14.).

Seja dado o círculo ABCDE. Deve-se inscrever no círculo ABCDE um pentágono eqüilátero e eqüiângulo.

Formado o triângulo isósceles FGH, de maneira que cada um dos ângulos G, H, seja o dôbro *(Pr. 10.4.)* do ângulo F, inscreva-se no círculo ABCDE o triângulo ACD eqüiângulo *(Pr. 2.4.)* ao triângulo FGH, e seja o ângulo CAD = F, e cada um dos ângulos ACD, CDA igual a cada um dos ângulos G, H. Logo, tanto ACD como CDA Serão o dôbro de CAD. Divida-se cada um dos ângulos ACD, CDA em partes iguais *(Pr. 9.1.)* com as retas CE, DB, e tirem-se as cordas AB, BC, DE, EA. Digo que a figura retilínea ABCDE é o pentágono que se pede.

Porque cada um dos ângulos ACD, CDA é o dôbro do ângulo CAD, e cada um dos mesmos ângulos ACD, CDA está dividido pelo meio com as retas CE, DB; os cinco ângulos DAC, ACE, ECD, CDB, BDA serão iguais entre si. Mas os ângulos iguais e existentes na mesma circunferência de um círculo assentam sôbre arcos iguais *(Pr. 26.3.)*. Logo, serão também iguais entre si os cinco arcos AB, BC, CD, DE, EA. Mas a arcos iguais da mesma circunferência correspondem cordas também iguais *(Pr. 29.3.)*. Logo, serão iguais entre si as cinco retas AB, BC, CD, DE, EA. Logo, o pentágono ABCDE é eqüilátero. Digo que é também eqüiângulo. Porque, sendo iguais os arcos AB, DE, se ajuntarmos a uma e outra parte o mesmo arco BCD, será o arco ABCD igual. ao arco EDCE. Logo, os ângulos AED, BAE, que assentam sôbre os arcos iguais ABCD, EDCB, serão também iguais *(Pr. 27 .3.)*. Com a mesma demonstração se prova que cada um dos ângulos ABC, BCD, CDE é igual a cada um dos ângulos BAE, AED. Logo, o pentágono ABCDE é eqüiângulo. Logo, sendo também eqüilátero, como se tem demonstrado, temos inscrito em um círculo dado um pentágono eqüilátero e eqüiângulo.

PROP. XII. PROB.

Circunscrever a um círculo dado um pentágono eqüilátero e eqüiângulo (Fig. 15.).

Seja dado o círculo ABCDE. Deve-se circunscrever ao círculo ABCDE um pentágono eqüilátero e eqüiângulo.

Na circunferência do círculo ABCDE suponham-se marcados os pontos A, B, C, D, E, como vértices dos ângulos de um pentágono equilátero e eqüiângulo inscrito no mesmo círculo, de maneira que sejam iguais *(Pr. 11.4.)* entre si os arcos AB, BC, CD, DE, EA. Pelos pontos A, B, C, D, E sejam conduzidas as tangentes *(Pr. 17.3.)* GH, HK, KL, LM, MG; e do centro F do círculo tirem-se as retas FB, FK, FC, FL, FD. Porque a reta KL toca o círculo ABCDE no ponto C, e do contacto C para o centro F está tirado o semidiâmetro F€ será FC perpendicular *(Pr. 18.3.)* a KL, e assim o cada um dos ângulos em C será reto. Pela mesma razão, os ângulos em B e D são retos. Sendo, pois o ângulo FCK reto o quadrado de FK será igual *(Pr.47.1.)* aos quadrados dé FC e de CK. Do mesmo modo o quadrado de FK é igual aos quadrados de FB e de BK. Logo os quadrados de FC e de CK serão iguais, aos quadrados de FB e de BK. Mas o quadrado de FC é igual ao quadrado de FB. Logo, o quadrado do CK sará igual ao quadrado de BK, e por conseqüência será CK = BK. E porque temos FB = FC e FK comum, as duas BF, FK serão iguais às duas CF, FK. Mas é a base BK = KC outra base. Logo, será o ângulo BFK = KFC *(Pr. 8.1.)*, e BFK =FKC e por conseqüência será o ângulo BFC o dôbro do ângulo KFC e BKF o dôbro de FKC. Do mesmo modo CFD dôbro de CFL, e CLD o dôbro de CLF. E porque no são iguais os arcos BC, CD, será o ângulo BFC = CED *(Pr. 27.3)*. Logo, sendo BFC o dôbro de KEC, e CFD o dôbro CFL, será KFC = CFL. Mas é também FCK = FCL, porque ambos são ângulos retos. Logo, nos dois triângulos FKC, FLG há dois ângulos iguais a dois ângulos, cada um a cada um, e um lado igual a um lado, que é o lado comum FC adjascente a ângulos iguais. Logo, serão os outros lados iguais aos outros lados, e o terceiro ângulo igual ao terceiro *(Pr. 12.1)*. Logo, será KC = CL, e o ângulo FKC = FLC. Sendo pois KC = CL, será KL o dôbro de KC. Pela mesma razão, será HK o dôbro de BK. E porque temos demonstrado ser BK = KC, KL é o dôbro de KC, como HK é o dôbro de BK, será HK = KL. Com o mesmo discurso se prova que cada uma das retas GH, GM, ML deve ser igual a cada uma das duas HK, KL. Logo, o pentágono GHKLM é eqüilátero. Digo que é também equiângulo. Porque, sendo o ângulo FKC = FLC, e sendo HKL o dôbro de FKC, como KLM o dôbro de FLC, será HKL = KLM. Do mesmo modo se provará que cada um dos ângulos KHG, HGM, GHL é igual a cada um dos ângulos HKL, KLM. Logo, os cinco ângulos GHK, HKL, KLM, LMG, MHG, são iguais entre si. Logo, o pentágono GHKLM é equiângulo. Logo, sendo também eqüilátero e circunscrito ao círculo ABCDE, temos feito o que se pedia.

PROP. XIII. PROB.

Inscrever um círculo em um pentágono dado eqii.ilátero e eqüiângulo (Fig. 16.).

Seja dado o pentágono eqüilátero e eqüiângulo ABCDE. Deve-se inscrever um círculo no pentágono ABCDE.

Divida-se cada um dos ângulos BCD, CDE em partes iguais *(Pr. 9.1.)* com as retas CF, DF, e do ponto F, onde se encontram as mesmas retas CF, DF, tirem-se as três FB, FA, FE. Sendo BC = CD, e CF comum, as' duas BC, CF serão iguais às duas DC, CF. Mas é o ângulo BCF = DCF. Logo, será a base BF = FD outra base *(Pr. 4.1.)*, e o triângulo BFC igual ao triângulo DFC, e os outros ângulos iguais aos outros ângulos, segundo ficam opostos a lados iguais. Logo, será o ângulo CBF = CDF. E porque o ângulo, CDE é o dôbro do ângulo CDF, e temos CDE = CBA, e CDF = CBF, será também CBA o dôbro de CBF. Logo, será ABF = CBF e por conseqüência ficará o ângulo ABC dividido, pelo meio com a reta BF. Do mesmo modo se pode demonstrar, que cada um dos ângulos BAE, AED fica dividido em partes iguais pelas retas AF, FE. Do ponto F sôbre as retas AB, BC, CD, DE, EA sejam conduzidas as perpendiculares *(Pr. 12.1.)* FG, FH, FK, FL, FM. Sendo o ângulo HCF = KCF, e FHC = FKC, por serem êstes dois retos, nos triângulos FHC, FKC haverá dois ângulos iguais a dois ângulos, e um lado igual a um lado, que é o lado comum FC oposto a cada um dos ângulos retos. Logo, serão os outros lados iguais aos outros lados *(Pr. 26.1.)*. Logo, as duas perpendiculares FH, FK serão iguais. Com semelhante discurso se prova que cada uma das perpendiculares FL, FM, FG é igual a cada uma das outras FH, FK. Logo, as cinco retas FG, FH, FK, FL, FM são iguais entre si, e por conseqüência o círculo descrito com o centro F, e com o raio igual a cada uma das ditas cinco retas, passará pelos pontos G, H, K, L, M, e tocará as retas AB, EC, CD, DE, EA. nos mesmos pontos G, H, K, L, M, por serem nestes pontos retos todos os ângulos, porque uma reta, toca um círculo, quando faz ângulos retos com o diâmetro em uma das extremidades do mesmo diâmetro *(Pr. 16.3.)*. Logo, cada uma das retas AB, BC, CD, DE, EA, sendo uma tangente do círculo GHKLM, será êste círculo inscrito no pentágono ABCDE. Logo, temos inscrito um círculo em um pentágono dado eqüilátero e eqüiângulo.

PROP. XIV. PROB.

Circunscrever um círculo a um pentágono dado, equilátero. e eqüiângulo. (Fig. 17.).

Seja dado o pentágono eqüilátero e eqüiângulo ABCDE. Deve-se circunscrever um círculo ao pentágono ABCDE.

Divida-se em partes iguais. *(Pr. 9.1.)* cada um dos ângulos BCD, CDE com, as retas CF, FD; e do ponto F, onde: estas retas se cortam, tirem-se as três FB, F A, FE. Podemos demonstrar, como na proposição antecedente, que cada um dos ângulos CBA, BAE, AED fica dividido em partes iguais pelas retas FB, FA, FE. Sendo pois o ângulo BCD = CDE, e sendo FCD a metade de BCD, como CDF a metade de CDE, será FCD = FDC, e por conseqüência CF = FD, *(Pr. 6.1.)*. Do mesmo modo será cada uma das retas FB, FA, FE igual a cada uma das duas FC, FD. Logo, as cinco retas FA, FB, FC, FD, FE, são iguais entre si. Logo, o círculo descrito com o centro F, e o intervalo igual a uma das ditas cinco retas, passará pelos pontos A, B, C, D, E, e ficará circunscrito ao pentágono eqüilátero e eqüiângulo ABCDE. Logo, temos circunscrito um círculo a um pentágono dado eqüilátero e eqüiângulo.

PROP. XV. PROB.

Inscrever em um círculo dado um hexágono equilátero e equiângulo. (Fig. 18.).

Seja dado o círculo ABCDEF. Deve-se inscrever no círculo ABCDEF um hexágono eqüilátero e eqüiângulo.

Seja G o centro do círculo ABCDEF. Tirado o diâmetro AGD, com o ponto D como centro, e com o raio DG descreva-se o círculo EGCH, o qual corte o círculo dado ABCDEF nos pontos C, E. Por êstes pontos C, E tirem-se os diâmetros CGF, EGB; tirem-se também as cordas AB, BC, CD, DE, EF, FA. Digo que o hexágono ABCDEF inscrito no círculo ABCDEF ó eqüilátero e eqüiângulo.

Sendo o ponto G o centro do círculo ABCDEF, será GE = GD. E sendo D o centro do círculo EGCH, será DE = DG. Logo, será GE = ED. Logo, o triângulo EGD é eqüilátero, e por conseqüência os três ângulos dêle EGD, GDE, DEG são iguais entre si *(Pr. 5.1.)*. Mas em um triângulo qualquer os três ângulos são iguais a dois retos *(Pr. 32.1.)*. Logo, o ângulo EGD é a têrça parte de dois retos. Do mesmo modo provaremos que o ângulo DGC é a têrça parte de dois retos. E porque a reta GC, caindo sôbre a reta EB, faz os dois ângulos adjacentes EGC, CGB iguais a dois retos *(Pr. 13.1.)*, será o ângulo CGB também a têrça parte de dois retos. Logo, são iguais entre si os três ângulos EGD, DGC, CGB. Mas a êstes ângulos são iguais os verticalmente opostos *(Pr .15.1.)*, isto é, os ângulos BGA, AGF, FGE. Logo, os seis ângulos EGD, DGC, CGB, BGA, AEF, FGE são iguais entre si. Mas ângulos iguais assentam sôbre arcos iguais *(Pr. 26.3)*. Logo, os seis arcos AB, BC, CD, DE, EF, FA são iguais, como também as seis cordas *(Pr. 29.3.)*, AB, BC, CD, DE, EF, FA. Logo, o hexágono ABCDEF é eqüilátero. Digo que é também eqüiânguIo. Porque, sendo o arco AF igual ao arco ED, se a uma e outra parte se ajuntar o mesmo arco ABCD, será o arco FABCD igual ao arco EDCBA. Mas o ângulo FED assenta sôbre o arco FABCD, e o ângulo AFE assenta sôbre o arco EDCBA. Logo, será FED = AFE *(Pr. 27.3.)*. Do mesmo modo podemos demonstrar que cada um dos, outros ângulos do hexágono ABCDEF é igual a cada um dos dois AFE, DEF. Logo, o hexágono ABCDEF é eqüiângulo. Logo, sendo também eqüilátero e inscrito no círculo ABCDEF, temos inscrito em um. círculo dado um hexágono eqüilátero e eqüiângulo.

COROL. *Disto se conclui que o lado do hexágono eqüilátero e eqüiângulo é igual ao semidiâmetro do círculo, no qual o hexágono está inscrito.*

Também é claro que, se pelos pontos A., B, C, D, E, F se tirarem outras tantas tangentes ao circulo, ficará circunscrito ao mesmo círculo um hexágono eqüilátero e eqüiângulo, na conformidade do que temos demonstrado a respeito do pentágono; e que na mesma conformidade se poderá inscrever, ou circunscrever um círculo a um hexágono dado eqüilátero e eqüiângulo.

PROP. XVI. PROB.

Inscrever em um círculo dado um qüindecágono eqüilátero e eqüiângulo (Fig. 1.9.).

Seja dado o círculo ABCD. Deve-se inscrever no círculo ABCD um. qüindecágono eqüilátero e eqüiângulo.

Seja AC o lado do triângulo eqüilátero inscrito *(Pr. 2.4.)* no círculo ABCD; e AB o lado do pentágono eqüilátero e eqüiângulo também inscrito *(Pr. 11.4.)* no mesmo círculo.

Logo, se tôda a circunferência do círculo ABCD se entender dividida em quinze partes iguais, o arco ABC, que é uma têrça parte de toda a circunferência, constará de cinco partes daquela, nas quais foi dividida a circunrerência; e o arco AR, que é a quinta parte da mesma circunferência, constará de três daquelas mesmas partes. Logo, o arco BC, que é a diferença dos arcos AB, ABC, deve conter duas das mesmas partes. Divida-se o arco BC pelo meio *(Pr. 30.3.)* no ponto E. Será cada um dos arcos BE, EC a parte décima quinta de tôda a circunferência do círculo ABCD. Logo, se tiradas as cordas BE, EC, continuarmos inscrevendo *(Pr. 1.4.)* no círculo ABCD outras e outras retas, cada uma igual a BE, ou EC, até acabarmos o giro inteiro da circunferência no ponto B, ficará inscrito rio mesmo círculo ABCD o qüindecágono, que se pedia, eqüilátero e eqüiângulo.

Com o mesmo método, de que temos feito uso no pentágono, se por tôdas as divisões, feitas na circunferência, forem tiradas outras tantas tangentes ao círculo, ficará circunscrito ao mesmo círculo um qüindecágono eqüilátero e eqüiângulo.

Também em um qüindecágono dado, eqüilátero e eqüiângulo, poderemos inscrever um círculo, ou circunscrevê-lo ao redor dêle.

LIVRO V

DEFINIÇÕES

I

Uma grandeza se diz parte de outra grandeza, a menor da maior, quando a menor mede a maior.

II

A grandeza maior se diz múltipla, ou multíplice da menor, quando a menor mede a maior.

III

A razão entre duas grandezas, que são do mesmo gênero, é um respeito recíproco de uma para outra, enquanto uma é maior, ou menor do que a outra, ou igual a ela.

IV

As grandezas têm entre si razão, quando a grandeza menor, tomada certo número de vêzes, pode vencer a grandeza maior.

V

As grandezas têm entre si a mesma razão, a primeira para, a segunda, e a terceira para a quarta, quando umas grandezas, quaisquer que sejam, eqüimultíplices da primeira e da terceira a respeito de outras, quaisquer que sejam, eqüimultíplices da segunda e da quarta, são ou juntamente maiores, ou juntamente iguais, ou juntamente menores.

VI

As grandezas, que têm entre si a mesma razão, se chamam proporcionais.

VII

Quando das quantidades eqüimultíplices a multíplice da primeira fôr maior que a multíplice da segunda, não o sendo a multíplice da terceira a respeito da multíplice da quarta, neste caso' a razão da primeira grandeza para a segunda se diz maior que a razão 4a terceira para a quarta. E pelo contrário se diz que a terceira grandeza tem para a quarta uma razão menor, que a razão da primeira grandeza para a segunda.

VIII

Proporção, ou proporcionalidade é uma semelhança de razões.

IX

A proporção consiste em três termos, pelo menos.

X

Quando três grandezas são proporcionais, se diz que a primeira tem para a terceira a razão duplicada da razão, que a mesma primeira tem para a segunda.

XI

Quando quatro grandezas são contiuamente proporcionais, se diz que a primeira tem para a quarta a razão triplicada da razão, quê a primeira tem para a segunda. E assim, se as grandezas continuamente proporcionais forem cinco, seis, etc., a razão da primeira para a última chama-se quadruplicada; quintuplicada, sextuplicada, etc., da razão da primeira para a segunda.

DEFINIÇÃO A, QUE É DA RAZÃO QOMPOST A

Pôsto um numero, qualquer que seja, de grandezas do mesmo gênero, a primeira grandeza se diz que tem para a última a razão composta das razões da primeira para a segunda, da segunda para a terceira, da terceira para a quarta, e assim sempre até a última grandeza.

Exemplo. Sejam as grandezas A, B, C, D. A primeira A se diz que tem para a última D a razão composta da razão de A para B, da razão de B para C, e da razão de C para D, ou a razão de, A para D ,se chama razão composta das razões de A para B, de B para C, e de C para D. .

Se fôr pois a razão de, A para B a mesma que a razão de E para F., e a razão de B para C a mesma que a razão de G para H, e a razão de C para D a mesma que a razão de K para L; se dirá, que A tem para D a razão composta das razões, que são as mesmas que as razões de E para F, de G para H, e de K para L. E o mesmo ,se deve entender, quando por brevidade se diz que A tem para D a razão composta das razões de E para F, de G para H, e de K para L. .

Do mesmo modo se a razão de M para N fôr a mesma, que a razão de A para D, ficando tudo como na suposição precedente, por brevidade se diz que a razão de M para N é a mesma, que a razão composta das razões de E para F, de G para H, e de K para L.

XII

Postas umas grandezas proporcionais, as antecedentes a respeito das antecedentes, e as conseqüentes a respeito das conseqüentes, chamam-se grandezas homólogas.

Os vocábulos seguintes explicam os diferentes modos, inventadas pelos geômetras, de mudar a ordem, ou a quantidade das grandezas proporcionais, de maneira porém que fiquem sempre proporcionais.

XIII.

Permutar, ou alternar: Usa-se dêste vocábulo, quando, existindo quatro grandezas proporcionais, se argumenta que a primeira é para a terceira, como a segunda para a quarta.

Demonstra-se isto na *Proposição 16*, dêste Livro.

XIV

Inverter: Quando, dadas quatro grandezas proporcionais, se conclui, que a segunda é para a primeira, como a quarta para a terceira. *Prop. B*, deste Livro.

XV

Compor: Quando, postas quatro grandezas proporcionais, se conclui que a primeira juntamente com a segunda é para a segunda, como a terceira juntamente com a quarta é para a quarta. *Prop. 18*, dêste Livro.

XVI

Dividir: Quando, dadas quatro grandezas proporcionais, se argumenta que o excesso da primeira sôbre a segunda é para a segunda, como o excesso da terceira sôbre a quarta é para a quarta. *Prop. 17*, dêste Livro.

XVII

Converter: Quando de quatro grandezas proporcionais se colige, que a primeira é para o excesso da mesma primeira sôbre a segunda, como a terceira é para o excesso da mesma terceira sôbre a quarta. *Prop. E*. dêste Livro.

XVIII

Por igual, ou por igualdade de razões: Quando, pôsto certo número de grandezas de uma parte, e igual número de outras grandezas de outra parte, as quais grandezas, porém, em ambas as séries estejam entre si a duas e duas na mesma razão, e argumenta que a primeira grandeza é para a última, na primeira série, como a primeira grandeza é também para, a última, na segunda série. Deste modo de argumentar temos as duas espécies seguintes,

XIX

Por igual, ou por igualdade de razões simplesmente: Quando na primeira série, sendo a primeira grandeza para a segunda, como a primeira é para a segunda na outra série; e sendo, na primeira série, a segunda grandeza para a terceira, como a segunda é também para a terceira na segunda série; e dêste modo continuando sempre até às últimas grandezas em uma e outra série; finalmente, como temos dito, na Definição precedente, se conclui, que a primeira grandeza na primeira série é para a última, como a primeira é para a última na segunda série. *Prop. 22*, dêste livro.

XX

Por igual, ou por igualdade de razões em proporção perturbada: Quando, na primeira série, sendo a primeira grandeza para a segunda como a penúltima é para a última, na outra série; e sendo, na primeira série, a segunda grandeza para a terceira, como a ante penúltima é para a penúltima, na segunda série; e sendo também, na primeira série, a terceira grandeza para a quarta, como a que precede a antepenúltima é para a mesma antepenúltima; e dêste modo, e por esta ordem continuando por tôdas as grandezas de ambas as séries, se argumenta finalmente, como na Definição 18, que a primeira grandeza, na primeira: série, é para a última, como a primeira é para a última, na segunda série. *Prop. 23*, dêste livro.

AXIOMAS I

As grandeza eqüimultíplices da mesma grandeza ou de grandezas iguais são também iguais.

II

As grandezas, que têm o mesmo eqüimultíplice, ou eqüimultíplices iguais, são iguais.

III

O multíplice de uma grandeza maior é maior que o igualmente multíplice de uma grandeza menor.

IV

Uma grandeza e maior que outra, quando um multíplice qualquer da primeira é maior que o igualmente multíplice da segunda.

[Os geômetras modernos, quando comparam entre si quatro grandezas proporcionais, isto é, quatro grandezas, as quais entre si duas a duas têm a mesma razão, como as quatro A, B, C, D, em lugar de dizer que a grandeza A é para a grandeza B, como a grandeza C para a grandeza D, escrevem por brevidade A:B::C:D. Nós faremos o mesmo, tôdas as vêzes que êste modo de representar a proporcionalidade de quatro grandezas não causar confusão, ou obscuridade alguma].

PROP. I. TEOR.

Se umas grandezas, seja qualquer que fôr o número delas, forem eqüimultíplices, de outras tantas grandezas, cada uma de cada uma; assim como uma grandeza das primeiras é multíplice de uma das segundas, assim também todas as primeiras juntas serão eqüimultíplices de tôdas as segundas juntas (Fig. 1.).

Sejam as grandezas AB, CD eqüimultíplices de outras em igual número E, F, cada uma de cada uma. Digo que como AB é multíplice de E, do mesmo modo AB, CD tomadas juntas são eqüimultíplices de E, F, também tomadas juntas.

Sendo AB multíplice de E, como CD o é de F, quantas forept as grandezas, que cabem em AB, cada uma igual a E, outras tantas serão aquelas, que cabem em CD, cada uma igual a F. Divida-se pois AB nas partes iguais cada uma a E, as quais sejam AG, GB; e CD nas partes iguais, cada uma a F, isto é, nas partes CH, HD. Será o número das partes CH, HD igual ao número das partes AG, GB. E porque temos AG = E, e CH = F, serão as duas AG, CH tomadas juntas, iguais às duas EF também tomadas juntas. Pela mesma razão, sendo GB = E, e HD = F, serão GB, HD tomadas juntamente iguais *(Ax. 2.1.)* a E, F tomadas também juntamente. Logo, quantas são as partes em AB iguais, cada uma a E, outras tantas serão as partes em AB, CD tomadas juntas iguais a E, F também tomadas juntas. Logo, como AB é multíplice de E, do mesmo modo as duas AB, CD tomadas juntas são multíplices de E, F também tomadas juntas.

E porque esta demonstração sempre subsiste, qualquer que seja o número das grandezas propostas, é manifesto que a proposição é verdadeira em tôda a generalidade dela.

PROP. II. TEOR.

Se a primeira grandeza fôr multíplice da segunda, como a terceira o é da quarta, e se a quinta fôr multíplice da segunda, como a sexta o é da quarta; será a primeira juntamente com a quinta multíplice da segunda, como a terceira juntamente com a sexta o é da quarta (Fig. 2.).

Seja a primeira grandeza ,AB multíplice da segunda C, como a terceira DE é multíplice da quarta F, e também seja a quinta BG multíplice da segunda C, como a sexta EH é multíplice da quarta F. Digo que a primeira, juntamente com a quinta, isto é, tôda a grandeza AG é multíplice da segunda C, como a terceira juntamente com a sexta, isto é, tôda a grandeza, DH é multíplice da, quarta F.

Sendo AB, DE' eqüimultíplices de C, F, quantas grandezas calhem em AB, das quais cada uma é igual a C, outras tantas devem caber em DE, sendo cada uma' delas iguala F. Pela mesma razão o número das grandezas, que cabem em BG cada uma das quais é igual a C, será igual ao número das, grandezas, que cabem em EH, sendo cada uma destas igual a F. Logo, o número das grandezas iguais, cada uma a C, compreendidas na grandeza total AG, será igual ao número das grandezas compreendidas em DH, outra grandeza total, e iguais cada uma a F. Logo, é AG multíplice de C, do mesmo modo que DH é multíplice de F. Logo, a primeira grandeza, juntamente com a quinta, iguala GA, é multíplice da segunda C, do mesmo modo que a terceira grandeza, juntamente com a sexta, igual a DH, é multíplice da quarta F.

COROL. Segue-se disto que, se fôr um número (Fig. 3.), seja qualquer que fôr, de grandezas AB, BG, GH multíplices de C, e outras tantas grandezas DE, EK, KL igualmente multíplices de, F, cada uma de cada uma, tôdas as primeiras tomadas juntas, isto é, AH, serão multíplices de C, como tôdas as segundas também tomadas juntas, isto é, DL, são multíplices de F.

PROP. III. TEOR.

Se a primeira grandeza sendo multíplice da segunda, como a terceira o é da quarta, se tomarem outras grandezas quaisquer eqüimultíplices da primeira e da terceira, serão estas grandezas também eqüimultíplices a respeito da segunda grandeza e da quarta (Fig. 4.).

Seja a primeira grandeza A multíplice da segunda B, como a terceira C é multíplice da quarta D, e sejam EF, GH eqüimultíplices de A, C. Digo que EF será multíplice de B, do mesmo modo que GH o é de D.

Sendo EF, GH eqüimultíplices de A, a, o número das -grandezas em EF, cada uma delas igual a A, será igual ao número das grandezas em GH, cada uma destas igual a C. Divida-se pois EF nas grandezas EK, KF, das quais cada uma seja igual a A; e GH nas grandezas GL, LH iguais cada uma a C. Logo, será o número das grandezas EK, KF igual ao número das grandezas GL, LH. E como A, C são eqüimultíplices de B, D, e temos EK = A, e GL, = C, serão também EK, GL eqüimultíplices de B, D. Pela mesma razão KF e LH são eqüimultíplices de B, D. O mesmo será, se nas grandezas EF, GH houver um número maior de partes iguais, - cada uma e respectivamente a A, e C. Logo, sendo a primeira grandeza EK multíplice da segunda B, do mesmo modo que a terceira GL o é da quarta D; e também sendo a quinta KF multíplice da segunda B, como a sexta LH é multíplice da quarta D, será a primeira grandeza, juntamente com a quinta, isto é, EF, multíplice (Pr. 2.5.) da segunda B, do mesmo modo que a terceira grandeza, juntamente com a sexta, isto é, GH, é multíplice da quarta D.

PROP. IV. TEOR.

Se a primeira grandeza tiver para a segunda a mesma razão, que a terceira tem para a quarta, também umas grandezas quaisquer eqüimultíplices da primeira e da terceira terão a mesma razão para outras grandezas quaisquer, eqüimultíplices da segunda e da quarta (Fig. 5.).

A primeira grandeza A tenha para a segunda B a mesma razão, que a terceira a tem para a quarta D. Sejam as grandezas quaisquer E, F eqüimultiplices de A, C. E as outras G, H quaisquer eqüimultiplices de B, D. Digo que será E:G::F:H.

Tomem-se as grandezas quaisquer K, L eqüimultíplices de E, F, e as outras M, N eqüimultíplices quaisquer de G, H. Sendo, pois, E, F eqüimultíplices de A, C, e K, L eqüimultíplices de D, F, serão as mesmas grandezas K, L também eqüimultíplices *(Pr. 3.5.)* de A, C. Pela mesma razão, as grandezas M, N são eqüimultíplices de B, D. E como temos A:B::C:D, e K, L, são eqüimultiplices de A, C, e M, N eqüimultiplices de B, D; se K fôr maior, ou igual, ou menor a respeito de M, também L será maior, ou igual, ou menor

(Def. 5.5.) a respeito de N. Mas K, L são umas grandezas eqüimil1típlices quaisquer de E, F; e M, N são outras eqüimultíplices quaisquer de G, H. Logo, será E:G::F:H *(Def. 5.5.).*

COROL. *Do mesmo rnodo, se a primeira grandeza tiver para a segunda a mesma razão, que a terceira tem para a quarta, também as grandezas eqüimultíplices quaisquer da primeira o da terceira terão a mesma razão para a segunda e para a quarta; e a primeira grandeza e a terceira terão a mesma razão para as grandezas eqilimultíplices quaisquer da segunda e da quarta.*

A primeira grandeza A para a segunda B tenha a mesma razão, que a terceira a tem para a quarta D. Sejam as grandezas E, F eqüimultíplices quaisquer de A, C. Digo que será E:B::F:D.

Tomem-se as grandezas K, L eqüimultíplices quaisquer do E, F, e as grandezas G, H outras eqÜimultíplices quaisquer de B, D. Podemos demonstrar, como acima, que K, L são eqüimultíplices de A, C. Sendo, pois A:B::C:D, e sendo K, L eqütmultíplices de A, C, e G, H eqüimultíplices do B, D; se K fôr maior, ou igual, ou menor a respeito de G, também L será maior, ou igual, ou menor a respeito de H. Mas K, L são umas grandezas eqüimultíplices quaisquer de E, F, e G, H são outras quaisquer eqiiimultíplices de B, D. Logo, serão E:B::F:D. Com o mesmo método se demonstra lambém o outro caso.

PROP. V.TEOR.

Se uma grandeza fôr multíplice de outra grandeza, do mesmo modo que uma parte da primeira grandeza é multíplice de uma parte da segunda; tiradas estas partes, será o que fica da primeira grandeza do mesmo modo multíplice do que fica da segunda grandeza, como a primeira grandeza é multiplice da segunda (Fig. 6.).

Seja a grandeza AB multíplice da grandeza CD, como a parte AE é multíplice da parte CF. Digo que o resto EB será multíplice do resto FD, do mesmo modo que a grandeza total AB o é da grandeza total CD.

Ponha-se a grandeza AG multíplice de FD, como a parte AE é multíplice da parte CF. Logo, as grandezas AE, EG são eqüimultíplices *(Pr. 1.5.)* de CF, CD. Mas AE, AB são pela hipótese eqüimultíplices de CF, CD. Logo, EG, Ab são eqüimultíplices da mesma grandeza CD, e. por conseqüência será EG = AB *(Ax. 1.5.)*. Logo, tirando a parte comum AE, ficará AG = EB. Logo, sendo AE, AG eqüimultíplices de CF, FD, e sendo AG = EB, também AE, BE serão eqüimultíplices de CF, FD. Mas temos suposto serem AE, AR eqüimultíplices de CF, CD. Logo, também EB, AB serão equimultíplices de FD, CD.

PROP. VI. TEOR.

Se duas grandezas, sendo igualmente multíplices de outras duas, umas partes daquelas forern também eqümultíplices destoutras duas,; tiradas aquelas partes, os restos, que ficarem, serão iguais às mesmas segundas grandezas, ou eqüímultíplices delas (Fig. 7.).

Sejam as duas grandezas AB, CD eqüimultíplices dasoutras duas E, F, e também as partes AG, CH sejam eqüimultíplices das mesmas grandezas, E, F. Digo que os restos GB, HD serão respectivamente, ou iguais, ou eqüimultíplices das grandezas E, F.

Seja, primeiramente, GB = E (Fig. 7.a). Digo que será HD = F. Ponha-se CK = F. Sendo pois AG, CH eqüimultíplices de E, F, e sendo GB = E, e CK = F, também AB, KH serão eqüimultíplices de E, F. Mas pela hipótese AB, CD são eqüimultíplices de E, F. Logo, KH, CD serão eqüimultíplices da mesma grandeza F, e assim será KH = CD *(Ax. 1. 5.)*. Logo, tirada a parte comum CH, ficará KC = HD. Mas era KC = F. Logo, será também HD = F. Logo, sendo GB = E, será também HD = F.

Seja agora GB multíplice de E (Fig. 7.b). Digo que HD será igualmente multíplice de F. Ponha-se CK multíplice de F, do mesmo modo que GB é multíplice de E. Porque tanto AG, CH, como GB, CK são eqüimultíplices de E, F, as duas grandezas AB, KH serão também eqüimultíplices *(Pr. 2.5.)* de E, F. Mas pela hipótese AB, CD são eqüimultíplices de E, F. Logo, KH, CD são eqüimultíplices da mesma grandeza F, e por conseqüência KH = CD. Logo, tirada a parte comum CH, será o resto KC igual ao resto HD. Mas CB, KC são eqüimultíplices de E, F, e temos KC = HD. Logo, HD, GB serão também eqüimultíplices de F, E.

PROP. A. TEOR.

Se a primeira grandeza tiver para a segunda a mesma razão, que a terceira tem para a quarta; sendo a primeira maior, ou igual, ou menor que a segunda, também a terceira será maior, ou igual, ou menor que a quarta.

Postas umas grandezas eqüimultíplices de tôdas as quatro grandezas propostas, por exemplo, o dôbro de cada uma; pela definição quinta dêste livro, se o dôbro da primeira grandeza fôr maior que o dôbro da segunda, também o dôbro da terceira será maior que o dôbro da quarta. Mas se a primeira grandeza fôr maior que a segunda, será o dôbro da primeira também maior que o dôbro da segunda. Logo, o dôbro da terceira grandeza será maior que o dôbro da quarta, e por conseqüência será a terceira grandeza maior que a quarta. Logo, se a primeira grandeza fôr maior que a segunda, também a terceira será maior que a quarta. Com a mesma demonstração se prova que, sendo a primeira grandeza igual, ou menor que a segunda, também a terceira deve ser igual, 011 menor que a quarta:

PROP. B. TEOR.

Se quatro grandezas forem proporcionais, invertendo serão também proporcionais (Fig. 8.).

Seja A:B::C:D. Digo que, invertendo, será também B:A::D:C.

Tomem-se os eqüimultíplices quaisquer E, F das grandezas B, D e os eqüimultíplices G, H quaisquer das grandezas, A, C; e, primeiramente, seja

E>G, ou G<E. Como temos A:B::C:D, e G, H são eqüimultrplices de A, C; e E, F eqüimultíplices de B, D; sendo G<E, será H>F *(Def. 5.5.)*, e por conseqüência F>H. Logo, sendo E<G, será também F>H. Do mesmo modo, se fôr E = G, se provará que F = H; e se fôr E>G, também será F<H. Mas E, F são umas grandezas eqüimultíplices quaisquer de B, D; e G, H eqüimultíplices quaisquer de A, C. Logo, será B:A::D:C *(Def. 5.5.).*

Logo, se quatro grandezas forem proporcionais, também invertendo serão proporcionais.

PROP. C. TEOR.

Se a primeira grandeza fôr multíplce, ou parte da segunda, do mesmo modo que a terceira é multíplice, ou parte da quarta, será a primeira grandeza para a segunda, como a terceira é para a quarta (Fig. 9.).

Seja a primeira grandeza A multíplice da segunda B, como a terceira C é multíplice da quarta D. Digo que será A:B::C:D.

Tomem-se Os eqüimultíplices quaisquer E, F das grandezas A, C; e os eqüimultíplices quaisquer G, H das outras grandezas B, D. Como A, C são eqüimultíplices de B, D, e E, F são eqüimultíplices de A, C; serão E, F também eqüimultíplices *(Pr. 3.5.)* de B, D. Mas G, H são eqüimultíplices de B, D. Logo, se E multíplice de B fôr maior que G multíplice da mesma grandeza B, isto é, se fôr E>G, será também F>H. Do mesmo modo, se E fôr igual, ou menor que G, demonstraremos que F é igual, ou menor que H. Mas E, F são umas grandezas eqüimultíplices quaisquer de A, C, e G, H eqüimultíplices quaisquer de B, D. Logo, será A:B::C:D *(Def. 5.5.)*. Mas, se a primeira grandeza A (Fig. 10.) fôr a mesma parte da segunda B, que a terceira C o é da quarta D, digo que será também A:B::C :D.

Porque B será multíplice de A, como D o é de C. Logo, pelo primeiro caso já demonstrado deve ser B:A::D:C. Logo, invertendo *(Pr. B. 5.)*, será A:B::C :D.

PROP. D. TEOR.

Se a primeira grandeza fôr para a segunda, como a terceira é para a quarta, sendo a primeira grandeza multíplice da segunda, ou uma parte dela, a terceira será uma grandeza igualmente multíplice da quarta, ou a mesma parte dela (Pr. 11.).

Seja A:C::B:D, e seja A multíplice de B. Digo que {) será uma grandeza multíplice de D, como A o é de B.

Tome-se E = A, e ponha-se F tal multíplice de D, como A, ou E é multíplice de B. Logo, sendo A:B::C:D, e sendo E, F eqüimultíplices da segunda grandeza B, e da quarta D, será A:E::C:F *(Cor. 4.5.)*. Mas temos A=E. Logo, será C = F *(Pr. A.5.)*. Mas F, E, ou F, A são eqüimultíplices de D, B. Logo, será C multíplice de D, como A o é de B.

Mas seja a primeira grandeza A (Fig. 10.) uma parte da segunda B. Digo que a terceira C será a mesma parte da quarta D. .

Porque, sendo A :B::C:D, será invertendo *(Pr. B.5.)* B:A::D:C. Mas A é uma parte de B, e por conseqüência B é uma grandeza multíplice de A. Logo, pelo caso antecedente, D será outra grandeza igualmente multíplice de C, e assim C será a mesma parte de D, como A é a parte de B.

PROP. VII. TEOR.

As grandezas iguais têm a mesma razão para uma mesma grandeza, e a mesma grandeza tem também a mesma razão para grandezas iguais (Fig. 12.).

Sejam as grandezas iguais A, B, e outra grandeza qualquer C. Digo que cada uma das grandezas A, B tem a mesma razão para a grandeza C, e que a grandeza C também tem a mesma razão para cada uma das grandezas A, B.

Tomem-se os eqüimultíplices quaisquer D, E das grandezas A, H; e F seja uma grandeza qualquer multíplice de C. Sendo pois D, E eqüimultíplices de A, B, e sendo A = H, será também D = E *(Ax. 1.5.)*. Logo, se D fôr maior, ou igual, ou menor que F, também E será maior, ou igual, ou menor que F. Mas D, E são grandezas eqüimultíplices de A, H, e F multíplice de C. Lago, será A:C::B:C *(Def. 5.5.)*.

Digo também que será C:A::C:D. Feita a mesma construção como acima, da mesma moda demonstraremos ser D = E. Logo, se F fôr maior, ou igual, ou menar que D, será também a mesma grandeza F maior, ou igual, ou menor que E. Mas F é uma grandeza multíplice de C; e D. E são eqüimultíplices de A, B. Logo, será C:A::C:B.

PROP. VIII. TEOR.

De duas grandezas desiguais a maior tem para uma terceira grandeza qualquer uma razão maior que a razão, que a menor tem para a mesma terceira. E esta tem para a grandeza menor uma razão também maior que a razão, que a mesma terceira tem para a grandeza maior (Figs. 13, 14 e 15.).

Sejam as grandezas desiguais AB, BC, e AB seja a grandeza maior. Seja D também uma terceira grandeza qualquer. Digo que a razão de AB para D é maior que a razão de BC para D; e que a razão de D para BC é maior que a razão da mesma D para AB

Se das duas grandezas AC, CB aquela, que não é a maior, não fôr menor que D, tome-se EF dôbro de AC, e FG dôbro de CB, como na figura 13. E se das mesmas grandezas AC, CB aquela, que não é maior, ou seja AC, ou seja CB, fôr menor que D, como nas figuras 14 e 15; esta mesma grandeza tomada certo número de vêzes, finalmente ficará sendo maior que D. Tome-se pais esta grandeza, como fica dito; e faça-se a mesma a respeito de outra, tomando-a igual número de vêzes; e seja EF multíplice de AC e FG igualmente multíplice de CB. Logo, cada uma das grandezas EF, FG é maior que a grandeza D. Em todos as casos tome-se H dôbro de D, K triplo de D, e assim se continue com a quádruplo, quíntuplo, etc., até que se chegue a um multíplice de D, proximamente maior que a grandeza FG. Seja L a grandeza multíplice de D, e proximamente maior que FG, e K seja também multíplice de D, e proximamente menor que L.

Sendo L multíplice de D, e proximamente maior que FG, K não será maior que FG, e por conseqüência FG não será menor que K. E sendo EF, FG eqüimultíplices de AC, CB, serão também FG, EG eqüimultíplices *(Pr. 1.5.)* de CB, AB, ou EG, FG eqüimultíplices de AB, CB. Mas temos demonstrado que FG não é menor que K, e pela construção temos EF>D. Lago, a grandeza total EG será maior que as duas juntamente K, D. Mas K, D tomadas juntas são iguais a L. Lago, EG é maior que L. Mas FG não é maior que L; e EG, FG são eqüimultíplices de AB, BC, e L é multíplice de D. Logo, a razão de AB para D é maior que a razão de BC para D *(Def. 7.5.)*.

Agora diga que a razão de D para BC é maior que razão da mesma D para AB. Feita a mesma construção coma acima, do mesmo modo demonstraremos que L deve ser maior que FG, mas não maior que EG. Mas L é multíplice de D, e FG, EG são eqüimultíplices de CB, AB. Logo, a razão de D para CB será maior que a razão de D para AB *(Def. 7.5.)*.

PROP. IX. TEOR.

As grandezas, que têm a mesma razão para uma mesma grandeza, são iguais entre si, como iguais são também aquelas, para as quais uma mesma grandeza tem a mesma razão (Fig. 16.).

Tenham as grandezas A, H a mesma razão para a grandeza C. Diga que A, H são iguaís.

Se A, B não são iguais, uma delas será maior que a outra. Seja A a maior. Logo, cama temas demonstrado na proposição precedente, poder-se-ão achar umas grandezas eqüimultíplices de A, B, e outra multíplice de C, de maneira que a multíplice de A, sendo maior que a multíplice de C, a multíplice de B não a seja a respeita da mesma multíplice de C. Sejam pois D, E grandezas eqüimultíplices de A, H, e F multíplice de C, de sorte, que sendo D>F, não seja E>F. Porque pela hipótese é A:C::B:C; e porque D, E, sendo eqüimultíplices de A, B, e F multíplice de C, temos D>F, será também E>F *(Def. 5.5.)*. Mas isto não pode ser, porque pela construção E não é maior que F. Logo, as grandezas A B não são desiguais, mas sim iguais.

Tenha agora a mesma grandeza C para cada uma das duas A, B a mesma razão. Digo que A, B serão iguais.

Se A, B não são iguais, será uma delas maior que a outra. Seja A a maior. Logo, haverá *(Pr. 8.5.)* uma grandeza F multíplice de C, e outras E, D eqüimultíplices de B, A, de maneira que, sendo F>E, não seja a mesma F>D. Mas, sendo C:B::C:A, e sendo F multíplice da primeira grandeza C maior que E, multíplice da segunda B, será F multíplice da terceira C, maior *(Def. 5.5.)* que D, multíplice da quarta A. Mas isto é impossível, porque pela construção F não é maior que D. Logo, as grandezas A, B não são desiguais. Logo, são iguais.

PROP. X. TEOR.

Entre as grandezas, cada uma das quais tem certa razão para outra grandeza, será maior aquela cuja razão para aqueloutra grandeza fôr maior; e entre as grandezas, para cada uma das quais outra grandeza tem certa razão, será menor aquela para a qual estoutra grandeza tiver uma razão maior (Fig. 16.).

A grandeza A tenha para a grandeza C uma razão maior que a razão de B para C. Digo que será A>B.

Tendo A para C uma razão maior que a razão de B para C, há de haver umas grandezas eqüimultíplices *(Def. 7.5.)* de A, B, e outra multíplice de C, de maneira que, sendo a multíplice de A maior que a multíplice de C, a multíplice de B não seja maior que a mesma multíplice de C. Tomem-se pois e sejam D, E eqüimultíplices de A, B, e F multíplice de C, de maneira que sendo D>F, não seja E>F. Logo, será D>E.

Mas D, E são eqüimultíplices de A, B, e temos D>E. Logo, será também A>B *(Ax. 4.5.)*.

Agora a grandeza C tenha para a grandeza B uma razão maior, que a razão de C para A. Digo, que será B<A.

Há de haver, como se tem dito acima, uma grandeza F multíplice de C, e outras E, D eqüimultíplices de B, A, de sorte que sendo F>E, não seja a mesma F>D. Logo, deve ser E<D. Logo, sendo E, D eqüimultíplices de B, será B<A *(Ax. 4.5.)*.

PROP. XI. TEOR.

Razões as mesmas que uma terceira, são as mesmas entre si (Fig. 17,).

Seja A:B::C:D, e seja também C:D::E:F. Digo que será A:B::E:F.

Tomem-se as grandezas G, H, K eqüimultíplices, como se quiser, de A, C, E, e as grandezas L, M, N equimultíplices quaisquer de BD, F. Porque se supõe A:B::C:D, e G, H são eqüimultíplices de A, C, e L, M são eqüimultíplices de B; se G fôr maior, ou igual, ou menor que L, também H será maior, ou igual, ou menor que M *(Def. 5.5.)*. Também, sendo C:D::E:F, e sendo H, K eqüimultíplices de C, E, e M, N eqüimultíplices de D, F; se H fôr maior, ou igual, ou menor que M, também K será maior, ou igual, ou menor que N. Mas, se G fôr maior, ou igual, ou menor que L, temos demonstrado, que H do mesmo modo será maior, ou igual, ou menor quê M.

Logo, se fôr G maior, ou igual, ou menor que L, também K será maior, ou igualou menor que N. Mas G, K são eqüimultíplices de A, E; e L, N são eqüimultíplices de B, F. Logo, deve ser A:B::E:F.

PROP. XII. TEOR.

Se umas grandezas, seja qualquer que fôr o número delas, forem proporcionais, será uma como antecedente para outra como conseqüente, como tôdas as antecedentes, tomadas juntas para tôdas as conseqüentes, também tomadas juntas (Fig. 17.). '

Sejam as grandezas proporcionais A, B, C, D, E, F, e suponha-se A:B::C: D, e C:D::E:F. Digo que como A é para B, assim A, C, E, juntamente, são para B D, F, também juntamente. .

Sejam as grandezas G, H, K eqüimultíplices, como se quiser, de A, C, E; e L, M, N eqüimultíplices de B, D, F. Porque se supõe A:B::C:D, e C:D::E:F, e G, H, K são eqüimultíplices de A, C, E, e L, M, N eqüimultíplices de B, D, F; se G fôr maior, ou menor que L, também H será *(Def. 5.5.)* maior, ou igual, ou menor que M, e K maior ou igual, ou menor que N. Logo, se G fôr maior, ou igual, ou menor que L, também as três grandezas G, H, K, juntamente, serão maiores, ou iguais, ou menores que as três L, M, N, tomadas juntas. Mas G, e G, H, K são umas grandezas eqüimultíplices quaisquer de A, e de A, C, E, e também L, e L, M, N são outras eqüimultíplices de B, e de B, D, F; porque, quando umas grandezas, qualquer que seja o número delas, são igualmente multíplices de outras tantas grandezas, cada uma de cada uma; assim como uma das primeiras grandezas é multíplice de outra das segundas, do mesmo modo tôdas as primeiras, juntamente, são multíplices *(Pr. 1.5.)* de tôdas as segundas, juntamente. Logo, será A para B como A, C, E, tomadas juntas, para B, D, F, também tomadas juntas *(Def. 5.5.)*.

PROP. XIII. TEOR.

Se a primeira grandeza tiver para a segunda a mesma razão, que a'terceira tem para a quarta, e se a terceira tiver para a quarta uma razão maior que a razão da quinta para a sexta, a primeira terá para a segunda uma razão maior que a razão da quinta para a sexta (Fig. 17.).

Tenha a primeira grandeza A para a segunda B a mesma razão, que a terceira C tem para a quarta D, e a terceira C tenha para a quarta D uma razão maior que a razão da quinta E para a sexta F. Digo que a razão da primeira A para a segunda B será maior que a razão da quinta E para a sexta F.

Porque a razão de C para D é maior que a razão de E para F, há de haver umas grandezas eqüimultíplices de C, E, e outras eqüimultíplices de D, F, de maneira que, sendo a multíplice de C maior que a multíplice de D, não seja a multíplice de E maior que a multíplice de F *(Def. 7.5.)*.

Sejam as grandezas H, K eqüimultíplices de C, E, e M, N eqüimultíplices de D, F, de modo que, sendo H maior que M, não seja K maior que N, e como H é multíplice de C, do mesmo modo se faça G multíplice de A. Faça-se também L multíplice de B, como M é multíplice de D. Sendo A:B::C:D, e sendo G, R eqüimultíplices de A, C, e L, M eqüimultíplices de B, D; se G fôr maior, ou igual, ou menor que L, também H será maior, ou igual, ou menor que M. Mas é H>M. Logo, será também G>L: Mas não é K>N, e G, K são eqüimultíplices de A, E, e L, N são eqüimultíplices de B, F. Logo, A tem para B uma razão maior *(Def. 7.5.)* que a razão de E para F.

COROL. *Se a primeira grandeza tiver para a segunda uma razão maior, que a razão da terceira para a quarta, e se a terceira tiver para a quarta a mesma razão, que a quinta tem para a sexta, do mesmo modo demonstraremos que a primeira tem para a segunda uma razão maior que a razão da quinta para a sexta.*

PROP. XIV. TEOR.

Se a primeira grandeza tiver para a segunda a mesma razão, que a terceira tem para a quarta; sendo a primeira maior, ou igual, ou menor que a terceira, também a segunda será maior, ou igual, ou menor que a quarta (Fig. 18.).

Tenha a primeira grandeza A para a segunda B a mesma razão, que a terceira C tem para a quarta D, e seja A>C. Digo que será B>D.

Sendo A>C, A deve ter para B, que é uma grandcza qualquer, uma razão maior *(Pr. 8.5.)* que a razão de C para B.

Mas é C:D::A:B. Logo, C tem para D, uma razão maior *(Pr. 13.5.)* que a razão de C para B, e por conseqüência deve ser D<B, ou B>D *(Pr.10.5.)*.

Em segundo lugar seja A = C. Digo que será B = D (Fig. 19.).

Sendo A:B::C:, e sendo A = C, será também A:B::A:D. Logo, será B = D *(Pr. 9.5.)*.

Finalmente se fôr A<C, será B<D (Fig.20.).

Sendo A<C, será C>A. Mas, porque temos C:D::A:B, deve ser pelo primeiro caso D>B. Logo, será B<D.

PROP. XV. TEOR.

As partes têm entre si a mesma razão, que têm as grandezas equimultíplices delas (Fig. 21.).

Sejam as grandezas AB, DE eqüimultíplices de C, F. Digo que será C:F::AB:DE.

Sendo AB, DE grandezas eqüimultíplices de C, F, quantas são as partes em AB, das quais, cada uma é igual á C, tantas são em DE, cada uma igual a F. Divida-se AB nas partes iguais, cada uma, a C, e sejam AG, GH, HB, e DE nas partes iguais, cada uma, a F, e sejam DK, KL, LE. Logo, o número das partes AG, GH, HB é igual ao número das partes DK, KL, LE. E porque as partes AG, GH, HB são iguais entre si, como também as partes DK, KL, LE, será AG:DK::GH:KL, e GH:KL::HB:LE *(Pr. 7.5.)*. Mas um antecedente é para um conseqüente *(Pr. 12.5.)*, como todos os antecedentes, tomados juntos, para todos os conseqüentes, também todos juntos. Logo, será AG:DK::AB:DE. Mas é AG = C, e DK = F. Logo, será também C:F::AB:DE.

PROP. XVI. TEOR.

Se quatro grandezas, tôdas do mesmo gênero, forem proporcionais, também permutando serão proporcionais (Fig. 22.).

Sejam as quatro grandezas proporcionais e do mesmo gênero A, B, C, D, e seja A:B::C:D. Digo, que permutando serão também proporcionais, isto é, será A:C::B:D.

Tomem-se as grandezas E, F eqüimultíplices quaisquer das duas A, B, e as grandezas G, H eqüimultíplices das duas C, D. Como E, F são eqüimultíplices de A, B, e como as partes têm entre si a mesma razão *(Pr. 15.5.)* que têm as grandezas eqüimultíplices delas, será A:B::E:F. Mas é A:B::C:D. Logo, será C:D::E:F *(Pr. 11.5.)*. Também, como G, H são eqüimultíplices de C, D, será C:D::G:H. Mas temos visto ser C:D::E:F. Logo, será E:F::G:H. Mas de quatro grandezas proporcionais, se a primeira fôr maior, ou igual, ou menor que a terceira, será também a segunda maior, ou igual, ou menor que a quarta *(Pr. 14.5.)*. Logo, se E fôr maior, ou igual, ou menor que G, também F será maior, ou igual, ou menor que H. Logo, sendo E, F eqüimultíplices de A, B, e G, H eqüimultíplices de C, D, será A:C::B:D *(Def. 5.5.)*.

PROP. XVII. TEOR.

Se as grandezas, que estão compostas, forem proporcionais, também estando divididas serão proporcionais (Fig. 23.).

Sejam proporcionais as grandezas compostas AB, BE, CD, DF, isto é, seja AB:BE::CD:DF. Digo que as mesmas grandezas divididas serão também proporcionais, isto é, será AE:EB::CF:FD.

Tomem-se as grandezas GH, HK, LM, MN eqüimultíplices quaisquer de AE, EB, CF, FD; e também as outras KX, NP eqüimultíplices de EB, FD. Sendo GH, HK grandezas eqüimultíplices de AE, EB, serão GH, GK também eqüimultíplices *(Pr. 1.5.)* de AE, AB. Mas GH, LM são eqüimultíplices de AE, CF. Logo, GK, LM serão eqüimultíplices de AB, CF. Também, sendo LM, MN eqüimultíplices de CF, FD, serão LM, LN eqüimultíplices *(Pr. 1.5.)* de CF, CD. Mas LM, GK eram eqüimultíplices de CF, AB. Logo, GK, LN são eqüimultíplices de AB, CD. Da mesma sorte também, porque HK, MN são eqüimultíplices de EB, FD, e KX, NP eqüimultíplices de EB, FD, as grandezas compostas HX, MP serão eqüimultíplices *(Pr. 2.5.)* de EB, FD. Sendo pois AB BE::OD:DF, e sendo GK, LN eqüimultíplices de AB, CD, e HX, MP eqüimultíplices de EB, FD; se GK fôr maior, ou igual, ou menor que HX, também LN será maior *(Def. 5.5.)*, ou igual, ou menor que MP. Mas, se GH fôr maior que KX, ajuntando a parte comum HK, será GK>HX, e por conseqüência LN>MP, e tirando a parte comum MN, será LM>NP. Logo, se fôr GH>KX, será também LM>NP. Do mesmo modo demonstraremos que, se GH fôr igual, ou menor que KX, também LM será igual, ou menor que NP. Mas GH, LM são eqüimultíplices de AE, CF; KX, NP são eqüimultíplices de EB, FD. Logo, será AE:EB::CF:FD.

PROP. XVIII. TEOR.

Se as grandezas, que estão divididas, forem proporcionais, também estando compostas, serão proporcionais (Figs. 24, 25 e 26.).

Sejam proporcionais as grandezas divididas AE, EB, CF, FD, isto é, seja AE:EB::CF:FD. Digo que estas grandezas, sendo compostas, também serão proporcionais, isto é, será AB:BE::CD:DF.

Tomem-se as grandezas GH, HK, LM, MN eqüimultíplices quaisquer de AB, BE, CD, DF, e as outras KO, NP, eqiiimultíplices quaisquer de BE, DF. Porque KO, NP, como também KH, NM são eqüimultíplices de BE, DF; se KO, multíplice de BE, fôr maior, ou igual, ou menor que KH, multíplice da mesma grandeza BE, também NP, multíplice de DF, será maior, ou igual, ou menor que MP, multíplice da mesma DF.

Seja, primeiramente, KO não maior que KH (Fig. 24.). Será NP não maior que NM. E porque GH, HK são eqüimultíplices de AB, BE, e é AB>BE, será GH>KH *(Ax. 3.5.)*. Mas KO não é maior que KH. Logo, será GH>KO. Do mesmo modo se demonstra ser LM>NP. Logo, não sendo KO>KH, será GH multíplice de AB sempre maior que KO, multíplice de BE, e também LM, multíplice de CD, será maior que NP, multíplice de DE.

Mas seja KO>KH (Fig. 25.). Será, como temos demonstrado, NP>NM. E porque a grandeza total GH é multíplice da total AB, como a parte HK é multíplice da outra parte BE, tiradas estas partes será o resto GK multíplice *(Pr. 5.5.)*, do resto AE, como GH é multíplice de AB, ou como LM é multiplice de CD. Do mesmo modo sendo LM multiplice dc CD, como a parte MN o é da parte DF, o resto LN será multíplice do resto CF, como LM o é de CD. Mas temos provado que LM, GK são eqüimultiplices de CD, AE. Logo, GK, LN são eqüimultíplices de AE, CF. Sendo pois KO, NP eqüimultíplices de BE, DF, também, sendo as partes KH, NM eqüimultíplices das mesmas grandezas BE, DF, os restos HO, MP serão iguais, ou às grandezas BE, DF, ou eqüimultíplices delas *(Pr. 6.5.)*.

Sejam, em primeiro lugar, (Fig. 25.) HO, MP iguais, respectivamente, a BE, DF. Sendo AE:EB::CF:FD, e sendo GK, LN equimultíplices do AE, CF, será GK:EB::LN:FD *(Cor. 4.5.)*. Mas temos HO = EB, MP = FD. Logo, será GK:HO::LO:MP. Logo, se GK fôr maior, ou igual, ou menor qe HO, também LN será maior *(Pr. A. 5.)*, ou igual, ou menor que MP.

Mas sejam (Fig. 26.) HO, MP eqüimultíplices de EB, FD. Porque temos AE :EB::CF:FD, e GK, LN são eqüimultíplices, de AE, CF, e HO, MP eqüimultíplices de EB, FD; e se GK fôr maior, ou igual, ou menor que HO, também LN será maior *(Def. 5.5.)*, ou igual, ou menor que MP, o que temos demonstrado também no caso precedente. Logo, se fôr GH>KO, tirando a parte comum KH, será GH>HO, e por conseqüência LN>LP, e juntando a mesma grandeza NM, será LM>NP. Logo, se fôr GH>KO, será LM>NP. Do mesmo modo se demonstra, que sendo GH = KO, será LM = NP; e que sendo GH<KO, será também LM<NP. Mas, quando KO não é maior que KH, temos visto que é sempre GH>KO, e LM>NP, e GR, LM são grandezas eqüimultíplices quaisquer de AB, CD; e KO, NP eqüimultíplices de BE, DF. Logo, será AB:BE::CD:DF *(Def. 5.5.)*.

PROP. XIX. TEOR.

Se uma grandeza fôr para outra grandeza, como uma parte daquela para uma parte desta, será o resto da primeira grandeza para o resto da segunda, corno a primeira grandeza para a segunda (Figo 27.).

Seja a grandeza total AB para a total CD, como a parte AE para a parte CF. Digo que o resto EB será para o resto FD como a grandeza total AB é para a grandeza' total CD.

Sendo AB:CD::AE:CF; será permutando *(Pr. 16.5.)* BA:AE::DC:CF. E como as grandezas compostas proporcionais também divididas são proporcionais *(Pr. 17.5.)*; será BE:EA::DF:FC, e outra vez permutando BE:DF::EA:FC. Mas é AE:CF::AB:CD. Logo, será EB:FD::AB:CD.

COROL. *Se uma grandeza total fôr para outra grandeza total, como uma parte daquela é para uma parte desta, será o resto, que fica da primeira grandeza, para o resto da segunda, como a parte da primeira , para a parte da segunda. Isto se faz evidente pela mesma demonstração, que fica dada.*

PROP. E. TEOR.

Se quatro grandezas forem proporcionais, também convertendo serão proporcionais (Fig. 27.).

Seja AB:BE::CD:DF. Digo, que convertendo será BA:AE::DC:CF.

Sendo AB:BE::CD:DF, dividindo *(Pr. 17.5.)* será AE:EB::CF:FD, e invertendo *(Pr. B. 5.)* BE:EA::DF:FC, Logo, compondo *(Pr. 18.5.)* será BA:AE: :DC:CF,

PROP. XX. TEOR.

Se estiverem três grandezas de uma parte, e outras três de outra, e estas duas a duas estiverem na mesma razão, que as primeiras também duas a duas; sendo a primeira grandeza maior, ou igual, ou menor que a terceira, também a quarta será maior, ou igual, ou menor que a sexta (Figs. 28, 29 e 30.).

Sejam as três grandezas A, B, C, e as outras três D, E, F, e seja A:B::D :E, e B:C::E :F, e suponha-se A>C. Digo que será D>F. Mas, se A fôr igual, ou menor que C, também D será igual, ou menor que. F.

Sendo A>C, A terá para B (Fig. 28.), que é outra grandeza qualquer, uma razão maior *(Pr. 8.5.)* que a razão de C para a mesma grandeza B. Mas é D:E ::A:B. Logo, a razão de D para E será maior *(Pr. 13.5.)* que a razão de C para B. E como temos B:C::E:F, será invertendo C:B::F:E. Mas tem-se demonstrado que a razão de D para E é menor que a razão de C para B. Logo, a razão de D para E é maior *(Cor. 13.5,)* que a razão de F para E, e por conseqüência será D>F *(Pr. 10.5.)*.

Seja em segundo lugar A = C (Fig. 29,). Digo que serão D = F. Sendo A = C, será A:B::C:B *(Pr. 7.5.)*. Mas é A:B::D:E, e C:B::F:E. Logo, será *(Pr. 11.5.)* D:E::F:E, e por conseqüência D = F *(Pr. 9.5.)*.

Seja finalmente A>C (Fig. 30.). Digo que será D>F.

Sendo A<C, será C>A. E porque, pela hipótese, e invertendo, é C:B::F:E, e B:A::E:D, e temos C>A; será pelo primeiro caso F>D, e por conseqüência D<F.

PROP. XXI. TEOR.

Se estiverem três grandezas de uma parte, e outras três de outra, e estas duas a duas estiverem na l1iesma razão, que as primeiras também duas a duas, mas em proporção perturbada; sendo a primeira grandeza maior, ou igual ou menor que a terceira, também a quarta será maior, ou igual, ou menor que a sexta (Fig. 35.).

Sejam as três grandezas A, B, C, e as outras três D, E, F, e seja A:B::E :F, e B:C::D :E, que é proporção perturbada.

Suponha-se A>C. Digo que será D>F. Mas, se A fôr igual, ou menor que C, também será D igual, ou menor que F.

Sendo A>C, a razão de A para B, que é outra grandeza qualquer, será maior *(Pr. 8.5.)* que a razão de C para a mesma B. Mas temos E:F::A:B. Logo, a razão de E para F será maior *(Pr. 13.5.)* que a razão de C para B. Sendo pois B:C::D:E, invertendo será C:B::E:D. Mas tem-se demonstrado que a razão de E para F é maior que a razão de C para B. Logo, a razão de E para F é maior *(Cor. 13.5.)* que a razão de E para D. Logo, será F<D *(Pr. 10.5.)*, e por conseqüência D>F.

Em segundo lugar seja A = O. Digo que será D = F.

Sendo A = C, será A:B::C:B *(Pr. 7.5.)*. Mas é A:B::E:D, e C:B::E:D. Logo, será E:F::E:D *(Pr. 11.5.)*, e por conseqüência D=F *(Pr. 9.5.)*.

Finalmente, seja A<C. Digo que será D<F.

Sendo A<C, será C>A. E porque, pela hipótese e invertendo, é C:B::E:D, e B:A::F:E, e supõe-se C>A; será pelo primeiro caso F>D, e por conseqüência D>F.

PROP. XXII. TEOR.

Se estiverem Umas grandezas em um número qualquer de uma parte, e outras em número igual de outra parte; e se estas tiverem duas a duas a mesma razão, que as primeiras também duas a duas, por igual estarão também na mesma razão (Fig. 31.).

Sejam, primeiramente, as três grandezas A, B, C, e as outras três D, E, F, e estejam estas duas a duas na mesma razão, que aB primeiras também dUaB a duas, isto é, seja.

A:B::D:E, e B:C::E:F. Digo que será A:C::D:F.

Tomem-se as grandezas G, H eqüimultíplices quaisquer de A, D, e K, L eqüimultíplices quaisquer de B, E, e M, N equimultíplices quaisquer de C, F. Como temos A:B::D:E, e G, H são eqüimultíplices de A, D; e K, L eqüimultíplices de B, E, será G:K::H:L *(Pr. 4.5.)*. Pela mesma razão será K:M::L:N.

Sendo pois as três grandezas G,K, M, e as outras três H, L, N, e tendo estas duas a duas a mesma razão, que têm as primeiras também duas a duas; se G fôr maior, ou igual, ou menor que M, também H será maior, ou igual, ou menor que N *(Pr. 20.5.)*. Logo, sendo G, H umas. grandezas quaisquer eqüimultíplices de A, D, e M, N outras grandezas quaisquer eqüimultíplices de C, F, será A:C::D:F. *(Def.5.5.)*.

Sejam agora as quatro grandezas A, B, C, D (Fig. 32.) de uma parte, e as outras quatro E, F, G, H de outra parte; e tenham estas duas a duas a mesma razão, que têm as primeiras também duas a duas, isto é, seja A:B::E:F, e B :C::F:G. e C:D::G:H. Digo que será A:D::E :H.

Porque as três grandezas A, B, C, e as outras três E, F, G têm duas a duas respectivamente a mesma razão, será pelo primeiro casO A:C::E:G. Mas é C:D::G:H. Logo, pelo mesmo caso primeiro será A:D::E:H. Dêste modo procede ,sempre a demonstração; qualquer que seja o número das grandezas de uma e outra parte.

PROP. XXIII. TEOR.

Se estiverem umas grandezas em um número, seja qualquer que fôr, de uma parte, e outras em número igual de outra parte; e se estas tiverem duas a dutas a mesma razão, que têm as primeiras também duas a duas, mas em proporção perturbada, por igual estarão também na mesma razão (Fig. 33.).

Sejam em primeiro lugar as três grandezas A, B, C, e as outras três D, E, F, as quais estejam duas a duas na mesma razão que as primeiras também duas a duas, mas em proporção perturbada; isto é, seja A:B::E:F, e B:C::D :E. Digo que será A:C::D:F.

Tomem-se as grandezas G, H, K eqüimultíplices qualquer de A, B, D, e as grandezas L, M, N eqüimultíplices quaisquer de C, E, F. Sendo G, H eqüimultíplices de A, B, será A:B::G:H *(Pr. 15.5.)*. Pela mesma razão deve ser E:F::M:N. Mas é A:B::E:F. Logo, será G:H::M:N. *(Pr. 11.5.)*. E porque temos B:C::D:E, e H, K são eqüimultíplices de B, D; e L, M eqüimultíplices de C, E; será' H:L::K:M *(Pr. 4.5.)*. Mas tem-se demonstrado ser G:H::M:N. Logo, tendo as três grandezas G, H, L a mesma razão, que as outras três K, M, N, duas a duas, e em proporção perturbada; se G fôr maior, ou igual, ou menor *(Pr. 21.5.)* que L, também K será maior, ou igual, ou menor que N. Mas G, K são eqüimultíplices de A, D, e L, N eqüimultíplices de C, F. Logo, será A:C::D:F *(Def.5.5.)*.

Sejam agora as quatro grandezas A, B, C, D (Fig. 32.), e as outras quatro E, F, G, H, as quais tenham duas a duas a mesma razão, que têm as primeiras também duas a duas, e em proporção perturbada, de maneira que seja A:B::G :H, e B:C::F :G, e C:D::E:F. Digo que será A:D::E:H.

Porque as três grandezas A, B, a, e as três F, G, H têm entre si a mesma razão em proporção perturbada; será pelo primeiro caso A:C::F :H. Mas é C:D ::E:F. Logo, também pelo primeiro caso será A:D::E:H. A demonstração será a mesma para outro qualquer número de grandezas.

PROP. XXIV. TEOR.

Se a primeira grandeza fôr para a segunda, como a terceira é para a quarta, e se a quinta fôr para a segunda, como a sexta é para a quarta; a grandeza, que se compõe da primeira e da quinta, será para a segunda, como a que se compõe da terceira e da sexta é para a quarta (Fig. 2.).

Esteja a primeira grandeza AB para a segunda C, como a terceira DE para a quarta F; e esteja a quinta BG para a segunda C, como a sexta EH para a quarta F. Digo que a composta AG da primeira e da quinta é para a segunda C, como a composta DH da terceira e da sexta é para a quarta F.

Sendo BG:C::EH:F, será invertendo C:BG::F:EH.

E sendo AB:O: :DoE:F e O :BG : :F :EH, será por igual (Pr. 22.5.) AB:BG ::DE:EH. Logo, compondo *(Pr. 18.5.)* será AG:GB::DH:HE. Mas é GB:C::HE:F. Logo, por igual será AG:C::DH:F.

COROL. 1. *Feita a mesma suposição que acima, será a diferença entre a primeira grandeza e a quinta para a segunda, como a diferença entre a terceira e a sexta é para a quarta. A demonstração procede do mesmo modo que na proposição, e somente em lugar de compor deve-se dividir.*

COROL. 2. *A verdade desta proposição fica sendo a mesma, qualquer que seja o número das grandezas, das quais umas têm para uma certa grandeza comum as mesmas razões, que as outras têm para outra grandeza também comum; isto é, cada uma das primeiras tem para a mesma grandeza comum a mesma razão, que cada uma das segundas tem para outra graooeza também comum, como é evidente.*

PROP. XXV. TEOR.

Se quatro grandezas forem proporcionais, a máxima e a mínima delas tomadas juntas serão maiores, que as outras duas também tomadas juntas (Fig. 34.).

Sejam as quatro grandezas proporcionais AB, CD, E, F, isto é, seja AB:QD::E:F. E seja AB a máxima de tôdas, e por conseqüência F a mínima *(Pr. A. e 14.5.)*. Digo que AB e F tomadas juntas são maiores, que CD e E também tomadas juntas.

Ponha-se AG = E, e CH = F. Sendo AB:CD::E:F, e sendo AG = E e CH = F, será AB:CD::AG:CH. E porque a grandeza total AB é para a total CD, como à parte AG para a parte CH, será o resto GB para o resto HD, como a total AB para a total CD *(Pr. 19.5.)*. Mas é AB>CD. Logo, será também GB>HD (Pr. A.5.). E como temos AG = E, e CH = F, serão as duas AG, F iguais as duas CH, E. Logo, sendo GB, HD desiguais, e sendo GB>HD, se a GB se ajuntarem as duas AG, F, e a HD se ajuntarem as duas CH, E, as duas AB, F tomadas juntas serão maiores, que as duas CD, E, também tomadas juntas.

PROP. F. TEOR.

As razões, que se compõem de razões entre si as mesmas, são também as mesmas entre si (Fig. 35.).

Seja A:B::D:E, e B:C::E:F. Digo .que a razão composta das razões de A para B, e de B para C, isto é, pela definição da razão composta, a razão de A para C é a mesma que a razão de D para F, que se compõe das razões de D para E, e de E para F.

Tendo as três grandezas A, B, C, e as outras três D, E, F entre si duas a duas a mesma razão, será por igual *(Pr. 22.5.)* A:C::D:F.

Seja agora A:B::E:F e B:C::D:E. Logo, por igual em proporção perturbada *(Pr. 23.5.)* será A:C::D:F, isto é, a razão de A para C, que se compõe das razões de A para B, e de B para C, será a mesma que a razão de D para F, que se compõe das razões de D para E, e de E para F. A mesma cousa se demonstra do mesmo modo em um e outro caso, qualquer que seja o número dás razões propostas.

PROP. G. TEOR.

Se umas razões, a que chamo primeiras, forem as mesmas que outras razões, a que chamo segundas, cada uma a respeito de cada uma, a razão, que se compõe de razões, que são as mesmas que as primeiras propostas cada uma a respeito de cada uma, será a mesma que a razão, que se com. põe de outras razões as mesmas que as segundas propostas, cada uma a respeito de cada uma (Fig. 36.).

Seja A:B::E:F e C:D::G:H. Seja também A:B::K:L e C:D::L:M. A razão de K para M, pela definição da razão composta, se compõe das razões de K para L, e de L para M, que são as mesmas que as outras de A para B, e de C para D. Seja mais E:F::N:O e G:H::O:P. A razão de N para P é composta das duas de N para O, e de O para P, que são as mesmas que as razões de E para F e de G para H. Deve-se demonstrar que a razão de K para M é a mesma que a razão de N para P, ou que é K:M::N:P.

Sendo K:L::A:B e A:B::E:F e E:F::N:O, será K:L::N:O. Também, sendo L :M::C:D e C:D::G:H e G:H::O:P, será L:M::O:P. Logo, por igual *(Pr. 22.5.)* deve ser K:M::N:P.

PROP. H. TEOR.

Se uma razão composta de algumas razões fôr a mesma que outra razão também composta de outras; e se uma razão das primeiras, ou a razão, que se compõe de algumas razões das primeiras, fôr a mesma que a razão, que é composta de algumas das segundas; a razão, que fica das primeiras, ou a razão composta daquelas razões, que ficam das primeiras, será a mesma que a razão, que fica das segundas, ou a mesma que a razão, que se compõe das razões que ficam das segundas (Fig. 37.).

Sejam as razões de A para B, de B para C, de C para D, de D para E, e de E para F; e as outras razões de G para H, de H para K, de K para L, e de L para M. E seja a razão de A para F, que se compõe *(Def. A.5.)* das primeiras razões propostas, a mesma que a razão de G para M, que é a composta das segundas razões. Também a razão de A para D, que é composta das razões de A para B, de B para C, e de C para D, seja a mesma que a razão de G para K, que se compõe das razões de G para H, e de H para K. Digo que a razão de D para F, que é composta das razões de D para E e de E para F, que são as que restam das primeiras razões propostas, é a mesma que a razão de H para M, que se compõe das razões de H para L e de L para M, que são as resíduas das outras razões também propostas.

Sendo pela hipótese A:D::G:K, será invertendo *(Pr. B.5.)* D:A::K:G. Mas é A:F::G:M. Logo, por igual *(Pr. 22.5.)* será D:F::K:M.

PROP. K. TEOR.

Se houver umas razões em um número qualquer, a que chamo primeiras, e outras razões também em outro número qualquer, a que chamo segundas; e se a razão composta das razões as mesmas que as primeiras propostas, cada uma a respeito de cada uma, fôr a mesma que a razão composta das razões as mesmas que as segundas, cada uma a respeito de cada uma; e uma razão das primeiras, ou a razão composta de razões as mesmas que outras tantas das primeiras, cada uma a respeito de cada uma, fôr a mesma que uma razão das segundas, ou a mesma que a razão composta de razões as mesmas que outras tantas das segundas, cada uma a respeito de cada uma; a razão, que resta das primeiras, ou sendo mais razões, a razão composta de razões as mesmas que as outras, que restam das primeiras, cada uma a respeito de cada uma, será a mesma que a razão que fica das segundas; ou se forem mais razões, será a mesma que a razão composta de razões as mesmas que as outras, que ficam das segundas, cada uma a respeito de cada uma (Fig. 38.).

Sejam as razões de A para B, de C para D, e de E para F as razões, que chamo primeiras; e as que chamo segundas sejam as razões de G para H, de K para L, de M para N, de O para P, e de Q para R. Seja pois A:B::S:T e

C:D::T:V e E:F::V:X. Pela definição da razão composta, a razão de S para X será a que se compõe das razões de S para T, de T para V e de V para X, que são as mesmas que as razões de A para B, de C para D e de E para F, cada uma a respeito de cada uma. Seja também G:H::Y:Z e K:L::Z:*a* e M:N::*a*:*b* e O:P::b:*c* e Q:R::*c*:*d*. A razão de Y para *d*, pela mesma definição, será a razão composta das razões de Y para Z, de Z para *a*, de *a* para *b*, de *b* para *c*, e de *c* para *d*, que são as mesmas que as razões de G para H, de K para L, de M para N, de O para P, e de Q para R, cada uma a respeito de cada uma. Logo, pela hipótese será S:X::Y:*d*. Seja, agora a razão de A para B, ou a razão de S para T, isto é, uma das razões primeiras, a mesma que a razão de *e* para *g*, que se compõe das razões de *e* para *f*, e de *f* para *g*, as quais razões, pela hipótese, são as mesmas que as outras de G para H, e de K para L, que pertencem às segundas razões propostas. Seja também a razão de *h* para *l* a composta das razões de *h* para *k*, e de *k* para *l*, as mesmas que as razões que restam das primeiras, isto é, as mesmas que as razões de C para D e de E para F; e a razão de *m* para *p* seja a composta das razões de *m* para *n*, de *n* para *o*, e de *o* para *p* as mesmas que as razões, que ficam das segundas, cada uma a respeito de cada uma, isto é, as mesmas que as razões de M para N, de O para P, de Q para R. Isto tudo suposto, digo que a razão de *h* para *l*, é a mesma que a razão de *m* para *p*. Deve-se pois demonstrar, que é *h*:*l*::*m*:*p*.

Sendo *e*:*f*::G:H e G:H::Y:Z, será *e*:*f*::Y :Z. E sendo *f*:*g*::K:L e K:L::Z:*a*, será *f*:*g*::Z:*a*. Logo, será por igual *e*:*g*::Y:*a*. Mas pela hipótese é A para B, ou S para T, como *e* para *g*. Logo, será S:T::Y :*a*, e, invertendo, T:S::*a*:Y. Mas temos S:X::Y:*d*. Logo, por igual será T:X::*a*:*d*. Também, sendo *h*:*k*::C:D e C :D::T:V, será *h*:*k*::T:V. E sendo *k*:*l*::E:F e E:F::V:X, será *k*:*l*::V:X. Logo, será por igual *h*:*l*::T:X. Com as mesma demonstração se faz evidente que deve ser m:*p*::*a*:*d*. Mas temos já demonstrado que é T:X::*a*:*d*. Logo, será *(Pr. 11.5.)* *h*:*l*::*m*:*p*.

Os geômetras, tanto antigos como modernos, por brevidade costumam incluir estas duas proposições G e K nas outras duas F e H. É porém coisa útil e conveniente demonstrar em que sentido isto pode ser assim, pelo uso assaz freqüente que os mesmos geômetras fazem destas proposições.

LIVRO VI

DEFINIÇÕES.

I

Figuras retilíneas semelhantes são aquelas, que tendo os ângulos iguais cada um a cada um, também têm proporcionais entre si os lados, que compreendem os ditos ângulos iguais (Fig. 1.).

II

Figuras recíprocas, falando de triângulos e paralelogramos, são aquelas que têm ao redor de ângulos iguais os lados proporcionais, de maneira que um lado de uma figura seja para um lado da outra, como o outro lado desta é para o outro lado da primeira.

III

Uma linha reta se diz dividida em extrema e média razão, quando tôda a linha é para o segmento maior, como êste segmento maior é para o segmento menor.

IV

A altura de uma qualquer figura é a linha reta, que do vértice dela cai perpendicularmente sôbre a base (Fig. 2.).

PROP. I. TEOR.

Os triângulos e paralelogramos, que têm a mesma altura, estão entre si como as bases (Fig. 3.).

Tenham os triângulos ABC, ACD, e os paralelogramos EC, CF a mesma altura, que é a perpendicular, que do ponto A cai sôbre a reta BD. Digo que a base BC é para a base CD, corno o triângulo ABC é para o triângulo ACD, e também como, o paralelogramo EC é para o paralelogramo CF.

Produza-se a reta BD de uma e outra parte para os pontos R, L, e tomadas as partes BG, GH em um número, seja êle qualquer que fôr, e sendo cada uma delas igual à base BC, e as partes DK, KL, cada uma igual à base CD, tirem-se as retas AG, AH, AK, AL. Visto serem as retas CB, BG, GH iguais entre si, também são iguais *(Pr. 38.1.)* os triângulos AHG, AGB, ABC. Logo, como a base HC é multíplice da base BC, do mesmo modo o triângulo AHC será multíplice do triângulo ABC. Pela mesma razão, como a base HC é multíplice da base CD, do mesmo modo o triângulo ALC deve ser multíplice do triângulo ACD. Mas, se a base HC fôr maior, ou igual ou menor, que a base CL, também o triângulo AHC será maior, ou igual, ou menor que o triângulo ALC. Logo, sendo a base HC, e o triângulo AHC umas grandezas eqüimultíplices quaisquer da base BC, e do triângulo ABC, e a base CL, e o triângulo ALC outras grandezas quaisquer. eqüimultíplices da base CD e do triângulo ACD, será a base BC para a base CD, como *(Def. 5.5.)* o triângulo ABC é para o triângulo ACD.

E porque o paralelogramo EC é o dôbro *(Pr. 41.1.)* do triângulo ABC, e o paralelogramo CF o dôbro do triângulo ACD, e porque as partes têm entre si a mesma razão, que as grandezas eqüimultiplices delas *(Pr. 15.5.),* o triângulo ABC será para o triângulo ACD, como o paralelogramo EC é para o paralelogramo CF. Logo, tendo nós demonstrado que a base BC é para a base CD, como o triângulo ABC para o triângulo ACD, e que o triângulo ABC é para o triângulo ACD, como o paralelogramo EC para o paralelogramo CF; a base BC será para a base CD, como *(Pr. 11.5.)* o paralelogramo EC é para o paralelogramo CF.

COROL. *Desta proposição se infere, que os triângulos e paralelogramos, que têm alturas iguais, estão entre si na razão das bases.*

Porque, dispostas as fiurtras de maneira que as bases delas estejam na mesma linha reta, e lançadas dos vértices dos triângulos umas perpendiculares sôbre as bases dos mesmos triângulos, a linha reta que passar pelos vértices será paralela à outra reta, sôbre a qual se ajustam as bases (Pr. 33.1.), por se suporem iguais entre si as alturas dos triângulos, e por conseqüência iguais as, ditas perpendiculares, as quais além disto são também paralelas. Feita pois a mesma construção, a demonstração se fará do mesmo modo que acima.

PROP. II. TEOR.

> *Se uma linha reta fôr tirada paralela a qualquer lado de um triângulo, esta cortará proporcionalmente os outros dois lados do mesmo triângulo, ou cortará os mesmos lados produzidos. E se dois lados doe um triângulo, ou os mesmos lados produzidos, forem cortados proporcionalmente por uma linha reta, esta será paralela ao terceiro lado (Fig. 4.).*

Seja conduzi da a reta DE paralela ao, lado BC do triângulo ABC. Digo, que será BD:DA::DE:EA.

Tirem-se as retas BE, CD. Serão iguais *(Pr. 37.1.)* os triângulos BDE, CDE, por estarem sôbre a mesma base DE, e entre as mesmas paralelas DE, BC. Mas as grandezas iguais têm para outra qualquer grandeza a mesma razão (Pr. 7.5.). Logo, o triângulo BDE será para o triângulo ADE, como o triângulo CDE é para o mesmo triângulo ADE. Mas o triângulo BDE é para o triângulo ADE, como *(Pr. 1.6.)* BD para DA, porque os triângulos BDE, ADE, tendo a mesma altura que é a perpendicular, que do ponto E cai sôbre AB, estão entre si como as bases, e pela mesma razão o triângulo CDE é para o triângulo ADE, como CE para EA. Logo, será BD:DA::CE:EA. *(Pr. 11.5.)*.

Sejam agora os lados AB, AC do triângulo ABC, ou os mesmos lados produzidos, cortados proporcionalmente nos pontos D, E pela reta DE, isto é, seja BD:DA::CE:EA. Digo que a reta DE é paralela à BC.

Tirem-se as retas BE, CD. Sendo BD:DA::CE: EA, e BD para DA como o triângulo BDE para o triângulo ADE *(Pr. 1.6.)*, e também CE para EA, como o triângulo CDE para o triângulo ADE; será o triângulo BDE para o triângulo

ADE, como o triângulo CDE é para o mesmo triângulo ADE. Logo, visto ter cada um dos triângulos BDE, CDE a mesma razão para o triângulo ADE, serão os triângulos BDE, CDE iguais *(Pr. 9.5.)* entre si. Mas também estão postos sôbre a mesma base DE. Logo, devem estar também entre as mesmas paralelas *(Pr. 39.1.)*, e por conseqüência a reta DE é paralela ao lado BC.

PROP. III. TEOR.

Se um ângulo de um triângulo fôr dividido em partes iguais por uma reta que, divida ao mesmo tempo a base em dois segmentos, êstes segmentos estarão entre si na razão dos outros dois lados do triângulo. E se os segmentos da base tiverem a mesma razão, que têm os outros lados do triângulo, também, a reta, que do vértice do triângulo fôr tirada para o ponto da seção, que separa os ditos segmentos, dividirá igualmente o ângulo que fica oposto à mesma base (Fig. 5.).

Seja o triângulo ABC, cujo ângulo BAC esteja dividido em partes iguais pela reta AD. Digo que será BD:DC::BA:AC.

Pelo ponto C seja conduzida a reta CE paralela *(Pr. 31.1.)* a DA, e o lado BA produzido concorra com ela no ponto E. Porque a reta AC corta as paralelas AD, EC, será o ângulo ACE = CAD ângulo alterno *(Pr. 29.1.)*. Mas pela hipótese é CAD = BAD. Logo, também será BAD = ACE. E como a reta BAE corta as paralelas AD, EC, será o ângulo externo BAD =AEC interno e oposto. Mas temos visto ser ACE = BAD. Logo, será ACE = AEC, e por conseqüência o lado AE igual *(Pr. 6.1.)* ao lado AC. Sendo pois a reta AD paralela ao lado E.C do triângulo BCE, será *(Pr. 2.6.)* BD:DC::BA:AE. Mas temos AE = AC. Logo, será também BD:DC::BA:AC *(Pr. 7.5.)*.

Seja agora BD:DC::BA:AC. Tire-se a reta AD. Digo que o ângulo BAC fica dividido em partes iguais pela reta AD.

Feita a mesma construção que acima, como temos pela hipótese BD:DC::BA:AC, e também BD:DC::BA:AE, *(Pr. 2.6.)*, por ser AD paralela ao lado EC do triângulo BCE, será *(Pr. 11.5.)* BA:AC::BA:AE. Logo, deve ser AC = AE *(Pr. 9.5.)*, e por conseqüência o ângulo AEC = ACE *(Pr. 5.1.)*. Mas é AEC = BAD, e ACE = CAD *(Pr. 20.1.)*. Logo, será BAD = CAD, e assim o ângulo BAC ficará dividido em partes iguais pela reta AD.

PROP. A. TEOR.

Produzido um lado de um triângulo, se o ângulo externo fôr dividido em partes iguais por uma reta, que chegue a cortar a base também produzida, os segmentos da base assim produzida, que ficam entre as extremidades da mesma base e a dita reta, que divide o ângulo, terão entre si a mesma razão, que têm os outros lados do triângulo. E se os segmentos da base tiverem a mesma razão dos outros lados do triângulo, a reta, que do vértice do triângulo fôr tirada para a seção da base, dividirá em partes iguais o ângulo externo do triângulo. (Fig. 6.).

Seja o triângulo ABC, e a reta AD dividindo em partes iguais o ângulo externo CAE do triângulo ABC; corte também a base BC produzida no ponto D. Digo que, será BC:DC::BA:AC.

Pelo ponto C seja conduzida a reta CF paralela *(Pr. 31.1.)* a AD. A reta AC cortando as paralelas AD, FC, será o ângulo ACF = CAD alterno *(Pr. 29.1.)*. Mas pela hipótese é CAD = DAE. Logo, será DAE = ACF. E como a reta FAE corta as paralelas AD, FC, será o ângulo externo DAE = CFA interno e oposto *(Pr. 29.1.)*. Mas tem-se demonstrado ser ACF = DAE. Logo, será ACF = CFA, e por conseqüência o lado AF igual *(Pr. 6.1.)* ao lado AC. E sendo a reta AD paralela ao lado FC do triângulo BCF, será *(Pr. 2.6.)* BD:DC::BA:AF. Mas é AF = AC. Logo, também será BD:DC::BA:AC.

Suponha-se agora ser BD:DC::BA:AC, e tire-se a reta AD. Digo que o ângulo CAE fica dividido em partes iguais pela reta AD.

Porque, feita a mesma construção que acima, sendo BD:DC::BA:AC, e sendo também BD:DC::BA:AF *(Pr. 2.6.)*, por ser a reta AD paralela ao lado FC do triângulo BCF, será BA:AC::BA:AF *(Pr. 11.1.)*. Logo, será AC = AF *(Pr. 9.5.)*, e por conseqüência serão iguais os ângulos AFC, ACF. Mas temos AFC = EAD ângulo externo, e ACF = CAD ângulo alterno. Logo, será EAD = CAD, e assim o ângulo CAE fica, dividido em partes iguais pela reta AD.

PROP. IV. TEOR.

Nos triângulos eqüiângulos os lados, que formam ângulos iguais, são proporcionais; e os lados opostos a ângulos iguais são homólogos (Fig. 7.).

Sejam os triângulos eqüiângulos ABC; DEF, cujos ângulos ABC, DEF, ACB, DEC sejam iguais. Do mesmo modo serão iguais *(Pr. 32.1.)* os ângulos BAC, CDE. Digo que nos triângulos ABC, DCE os lados, que formam ângulos iguais, são proporcionais, e que os lados opostos aos ângulos iguais são homólogos.

Ponha-se o triângulo DCE de maneira que o lado CE esteja em direitura *(Pr. 22.1.)* com o lado BC do triângulo ABC. Como os ângulos ABC, ACB são menores que dois retos *(Pr. 17.1.)*, e temos ACB = DEC; serão os ângulos ABC, DEC menores que dois retos, e por conseqüência as duas retas BA, ED produzidas devem finalmente concorrer *(Ax. 12.1.)*. Produzam-se pois e concorram no ponto F. Sendo o ângulo DCE = ABC, as retas BF, CD serão paralelas *(Pr. 28.1.)*. Também sendo ACB = DEC, a reta AC será paralela a FE. Logo, a figura FACD é um paralelogramo, e por conseqüência deve ser AF = CD, e AC = FD *(Pr. 34.1.)*. E porque a reta AC é paralela ao lado FE do triângulo FBE, será *(Pr. 2.6.)* BA:AF::BC:CE. Mas é AF = CD. Logo, será BA:CD::BC:CE *(Pr; 7.5.)*, e permutando AB:BC::CD:CE. Além disto, sendo, CD paralela a BF, será BC:CE::FD:DE. Mas é FD = AC. Logo, será BC:CE::AC:DE, e permutando BC:CA::CE:ED. Logo, tendo-se já demonstrado ser AB:BC::DC:CE, e BC:CA::OE:ED, será por igual *(Pr. 22.5.)* BA:AC::CD:DE.

PROP. V. TEOR.

Se dois triângulos tiverem os lados proporcionais, serão eqüiângulos; e serão iguais aquêles ângulos, aos quais ficarem opostos os lados homólogos (Fig. 8.).

Sejam os dois triângulos ABC, DEF, que tenham os lados proporcionais, isto é, seja AB:BC::DE:EF, e BC:CA::EF:FD, e por conseqüência, por igual BA:AC::ED:DF. Digo que os triângulos ABC, DEF são eqüiângulos, e que os ângulos opostos aos lados homólogos são iguais, isto é, o ângulo ABC = DEF, BCA= EFD, e BAC = EDF.

Faça-se com a linha reta EF, *(Pr. 23.1.)* no ponto E, o ângulo FEG = ABC, e no ponto F o ângulo EFG = BCA. Será BAC = EGF *(Pr. 32.1.)*, e assim os triângulos ABC, EGF serão eqüiângulos. Logo, será AB:BC::GE:EF. Mas pela hipótese AB:BC::DE:EF. Logo, será DE:EF::GE:EF *(Pr. 11.5.)*. Como pois cada uma das retas DE, GE tem para EF a mesma razão, será DE = GE *(Pr. 9.5.)*. Do mesmo modo, deve ser DF = FG; e assim nos triângulos EDF, EGF, sendo DE = GE, e DF = FG, e o lado EF comum, será o ângulo DEF = GEF, e DFE = GFE, e EDF = EGF *(Pr. 8.1.)*. E porque temos DEF = GEF, e GEF = ABC, será ABC = DEF. Pala mesma razão será ACB = DFE, e A = D. Logo, os triângulos ABC, DEF são eqüiângulos.

PROP. VI. TEOR.

Se dois triângulos tiverem um ângulo igual a outro ângulo e proporcionais os lados, que formam êstes ângulos iguais, serão eqüiângulos os triângulos, e os ângulos, que ficam opostos aos lados homólogos, serão iguais (Fig. 9.).

Seja os dois triângulos ABC, DEF, e seja o ângulo BAC do primeiro igual ao ângulo EDF do segundo. Sejam também proporcionais os lados, que fazem os ditos ângulos iguais, isto é, seja HA:AC::ED:DF. Digo que os triângulos ABC, DEF são equiângulos, e que o ângulo ABC é igual ao ângulo DEF, e ACB = DFE.

Com a reta DF e no ponto D faça-se *(Pr. 23.1.)* o ângulo FDG igual a um dos dois BAC, EDF, e com a mesma reta DF e no ponto F faça-se também DFG = ACB. Será o terceiro ângulo B igual *(Pr. 32.1.)* ao terceiro G. Logo, os triângulos ABC, DFG são equiângulos, e por conseqüência deve ser *(Pr. 4.6.)* BA:AC::GD:DF. Mas temos pela suposição, BA:AC::ED:DF. Logo, será ED:DF::GD:DF *(Pr. 11.5.)*, e assim será ED = DG *(Pr. 9.5.)*. Mas nos triângulos DEF, DGF é comum o lado DF, e são iguais os ângulos EDF, GDF. Logo, será a base EF igual *(Pr. 4.1.)* à base FG, e o triângulo EDF igual ao triângulo GDF; e os mais ângulos iguais cada um a cada um dos outros ângulos, segundo ficam opostos a lados iguais. Logo, será o ângulo DFG = DFE, e G = E. Mas é DFG = ACB. Logo, será ACB = DFE. Mas temos suposto ser BAC = EDF. Logo, o terceiro ângulo B é igual *(Pr. 32.1)* ao terceiro E, e os triângulos ABC, DEF são eqüiângulos.

PROP. VII. TEOR.

Se em dois triângulos, sendo um ângulo de um igual a outro ângulo do outro, e proporcionais os lados, que formam outros dois ângulos, e cada um dos terceiros ângulos, que ficam fôr menor, ou não menor que um reto; ou também se um dêstes terceiros ângulos fôr reto, os triângulos serão equiângulos, e os ângulos formados pelos lados proporcionais serão iguais (Figs. 10, 1.1, e 12.).

Sejam os dois triângulos ABC, DEF (Fig. 10.), que tenham os ângulos BAC, EDF iguais entre si, e sejam proporcionais os lados, que formam os ângulos ABC, DEF, de maneira, que seja AB:BC::DE:EF. Seja primeiramente agudo, ou menor que um reto cada um dos ângulos C, F. Digo que os triângulos ABC, DEF são eqüiângulos, e que o ângulo ABC é igual ao ângulo DFE, e C = F.

Supondo-se serem desiguais os ângulos ABC, DEF, um dêles há de ser maior. Seja ABC o maior. Sôbre a reta AB, no ponto B, faça-se *(Pr. 23.1.)* o ângulo ABG= DEF. Sendo o ângulo A = D, e ABG = DEF, será também AGB = DFE *(Pr. 32.1.)*. Logo, os triângulos ABG, DEF são eqüiângulos, e por conseqüência deve ser AB:BG::DE:EF *(Pr. 4.6.)*.

Mas pela hipótese temos DE:EF::AB:BC. Logo, será AB:BC::AB:BG *(Pr. 11.5.)*. Logo, tendo AB para cada uma das retas BC, BG a mesma razão, será BC = BG *(Pr. 9.5.)*, o ângulo BGC = BCG *(Pr. 5.1.)*. Mas BCG tem-se suposto menor que um reto. Logo, também BGC será menor que um reto, e assim AGB será maior que um reto *(Pr. 13.1.)*. Mas tem-se demonstrado AGB = F. Logo, F é maior que um reto, o que não pode ser, porque o temos suposto menor que um reto. Logo, não são desiguais os ângulos ABC, DEF, mas sim iguais. Mas o ângulo A é igual ao ângulo D. Logo, será também C = F, e assim são eqüiângulos os triângulos ABC, DEF.

Suponha-se agora não menor que um reto cada um dos ângulos, C, F (Fig. 11.). Digo que neste caso também são eqüiângulos os triângulos ABC, DEF.

Feita a mesma construção que acima, do mesmo modo se pode demonstrar BC = BG, e o ângulo C= BGC. Mas o ângulo C não é menor que um reto. Logo, BGC não será menor que um reto. Logo, no triângulo BGC, dois ângulos tomados juntos não são menores que dois, retos, o que não é possível (Pr.17.1.). Logo, os triângulos ABC, DEF devem ser eqüiângulos, como temos demonstrado no caso precedente. Seja, finalmente, reto um dos ângulos C, F, por exemplo o ângulo C (Fig. 12.). Também digo que os triângulos ABC, DEF são eqüiângulos.

Suposto não ser assim, sôbre a reta AB, no ponto B, faça-se o ângulo ABG = DEF. Provar-se-á, como no primeiro caso, ser a reta BG = BC, e o ângulo BCG = BGC. Mas BCG ó reto. Logo, BGC é também reto *(Pr. 5.1.)* Logo, no triângulo BGC há dois ângulos, os quais tomados juntos não são menores que dois retos, o que não pode ser *(Pr. 17.1.)*, Logo, os triângulos ABC, DEF são eqüiângulos.

PROP. VIII. TEOR.

Se do ângulo reto de um triângulo retângulo fôr tirada uma linha reta perpendicularmente sôbre a base, os triângulos assim feitos de uma e outra parte da perpendicular serão semelhantes ao triângulo total, e também semelhantes entre si. (Fig. 13.).

Seja o triângulo retângulo ABC, cujo ângulo BAC seja reto. Do ponto A esteja tirada a reta AD perpendicular sôbre a base BC. Digo que os tríângulos ABD, ADC são semelhantes ao triângulo total ABC, e também semelhantes entre si.

Sendo o ângulo BAC = ADC, por ser um e outro reto; e sendo o ângulo B comum aos dois triângulos ABC, ABD, será o terceiro ACB igual (Pr. 32.1.) ao terceiro BAD. Logo, os triângulos ABC, ABD são eqüiângulos, e por conseqüência, sendo proporcionais os lados que fazem os ângulos iguais *(Pr. 4.6.)*, são os mesmos triângulos ABC, ABD semelhantes *(Def. 1.6.)*. Com o mesmo discurso se prova serem também semelhantes os triângulos ADC, ABC.

Digo mais que os triângulos ABD, ADC são semelhantes entre si.

Como os ângulos retos BDA, ADC são iguais, e se tem demonstrado BAD = C; será o terceiro ângulo B igual *(Pr. 32.1.)* ao terceiro DAC. Logo, os triângulos ACD, ADB são eqüiângulos, e por conseqüência, semelhantes.

COROL. *Disto se pode coligir, que em um triângulo retângulo e perpendicular, que do ângulo reto cai sôbre a base do mesmo triângulo é média proporcional entre os segmentos da base; e que cada um dos lados do triângulo total é uma média proporcional entre a base e o segmento da base, que fica da mesma parte dêsse lado. Porque dos triângulos eqüiângulos BAD, ADC é BD:DA::DA:DC (Pr. 4.6.); e nos triângulos também eqüiângulos ABC, DBA é BC:BA::BA:BD; e finalmente nos triângulos eqüiângulos ABC DAC é BC:CA::CA:CD.*

PROP. IX. PROB.

Dada uma linha reta, cortar dela qualquer parte que se quiser (Fig. 14.).

Seja BA a linha reta dada. Deve-se cortar da reta AB uma parte qualquer dela, que fôr pedida.

Tire-se do ponto A a reta AC, que faça com a outra dada AB um ângulo qualquer que fôr. Na reta AC, tomado o ponto D, como quisermos, ponha-se AC multíplice de AD, do mesmo modo que a reta dada AB é multíplice da parte, que se deve cortar dela. Tire-se a reta BC, e pelo ponto D faça-se passar DE paralela a BC. Será AE a parte, que se pede.

Como no triângulo ABC a reta ED é paralela ao lado BC, será CD:DA::BE:EA *(Pr. 2.6.)*, e compondo *(Pr. 18.5.)*, CA:AD::BA:AE. Mas CA é uma grandeza multíplice de AD. Logo, também BA será multíplice de AE, e do mesmo modo *(Pr. D.5.)*. Logo, AE será a mesma parte de AB, como AD o é de AC. Logo, AE é a parte que se deve cortar da reta dada AB, e por consequência de uma linha reta dada temos cortado aquela. parte, que se pedia.

PROP. X. PROB

Dividir uma linha reta dada do mesmo modo, que outra linha reta está dividida. (Fig. 15.).

Seja dada a linha reta AB, e a outrá AC dividida de qualquer modo que fôr. Deve-se dividir a reta AB, assim como está dividida a reta AC.

Esteja a reta AC dividida nos pontos D, E. Ponham-se as retas AB, AC de maneira que façam entre si um ângulo, como se quiser, no ponto A; e tirada a reta BC, a esta pelos pontos D, E sejam conduzidas as paralelas *(Pr. 31.1.)* DF, EG; e também pelo ponto D a reta DHK paralela a AB. As figuras FH, HB serão paralelogramos, e assim será DH = FG, e HK = GB *(Pr. 34.1.)*. No triângulo DKC, sendo HE paralela ao lado KC, será CE:ED::KH:HD *(Pr. 2.6.)*. Mas temos KH = BG, e HD = GF. Logo, será CE:ED::BG:GF. Também no triângulo AGE, sendo FD paralela ao lado EG, será ED:DA::GF:FA. Mas temos demonstrado ser CE:ED::BG:GF. Logo,será CE:ED::BG:GF, e ED:DA::GF:FA. Logo, temos dividido a reta AB, assim como estava dividida a outra reta dada AC.

PROP. XI. PROB.

Dadas duas linhas retas, achar-lhes a terceira proporcional Fig. 16.).

Sejam dadas as retas AB, AC, as quais façam entre si um ângulo, como quisermos, no ponto A. É preciso achar a terceira reta proporcional.

Produzam-se as retas AB, AC para D e E, e feita BD = A e, tire-se BC, e a esta pelo ponto C conduza-se a paralela *(Pr. 31.1.)* DE. Visto ser, no triângulo AED, a reta BC paralela ao lado DE, será AB:BD::AC:CE *(Pr. 2.6.)*. Mas é BD = AC. Logo, também será AB:AC::AC:CD, e, por conseqüência, temos achado a reta CE, terceira proporcional a respeito das duas linhas retas dadas AB, AC.

PROP. XII. PROB.

Dadas três linhas retas, achar a quarta proporcional (Fig. 17.).

Sejam dadas as três linhas retas A, B, C. Deve-se achar a quarta proporcional.

Ponham-se as duas retas DE, DF em um ângulo, qualquer que fôr, EDF. Na reta DE tome-se DG = A, e GE = B; e na reta DF tome-se DH = C. Tire-se a reta GH, e esta pelo ponto E conduza-se a paralela *(Pr. 31.1.)* EF. Como no triângulo DEF a reta GH é paralela ao lado EF, será DG:GE::DH:HF *(Pr. 2.6.)*. Mas é DG = A, GE = B e DH = C. Logo, também será A:B::C:HF, e assim temos achado a reta HF, quarta proporcional a respeito das três linhas retas dadas A, B, C.

PROP. XIII. PROB.

Dadas duas linhas retas, achar entre elas uma média. proporcional (Fig. 18.).

Sejam dadas as retas AB, DC. Havemos de achar entre as retas AB, BC uma média proporcional.

Ponham-se as retas AB, BC em direitura uma com outra, e sôbre a total AC como diâmetro descreva-se o semicírculo ADC; e do ponto B levantada a reta AD perpendicularmente *(Pr. 11.1.)* sôbre AC, sejam tiradas as retas AD, DC. O ângulo ADC, que existe no semicírculo ADC, é reto *(Pr. 31.3.)* .

E, como no triângulo retângulo ADC do ângulo reto em D cai a reta DB perpendicularmente sôbre a base AC, será DB média proporcional *(Cor. 8.6.)* entre os segmentos da base AB, BC. Logo, entre as duas retas propostas AB, BC temos achado a média proporcional DB.

PROP. XIV. TEOR.

Nos paralelogramos iguais, se um ângulo de um fôr igual a um ângulo do outro, os lados, que formam êstes ângulos iguais, serão reciprocamente proporcionais. E os paralelogramos, que têm um ângulo igual a outro ângulo, e reciprocamente proporcionais os lados, que fazem os ditos ângulos iguais são iguais (Fig. 19.).

Sejam os paralelogramos iguais AB, BC e tenham os ângulos em B também iguais. Considerem-se os lados DB, BE postos em direitura um com outro. Estarão do mesmo modo em direitura um de outro também os lados FB, BG *(Pr. 14.1.)*. Digo que nos paralelogramos AB, BC os lados, que formam os ângulos iguais DBF, GBE, são reciprocamente proporcionais, isto é, que DB:BE::GD:BF.

Complete-se o paralelogramo FE. Como os paralelogramos AB, BC são iguais, cada um dêles terá a mesma razão para o paralelogramo. FE, e por conseqiiência será AB:FE::BC:FE *(Pr. 7.5.)*. Mas é AB:FE::DB:BE *(Pr. 1.6.)*, e BC:FE::GB:BF. Logo, será DB:BE::GB:BF *(Pr. 11.5.)*. Logo, nos paralelogramos AB, BC os lados, que formam os ângulos iguais DBF, GBE, são reciprocamente proporcionais.

Suponha-se agora que os lados, que fazem os ângulos iguais, são reciprocamente proporcionais, isto é, que é DB:.BE::GB:BF. Digo que os paralelogramos AB,BC são iguais.

Sendo DB:BE::GB:BF pela hipótese, e também sendo DB:BE::AB:FE, e GB:BF::BC:FE, será AB:FE::BC:FE *(Pr. 11.5.)*. Logo, o paralelogramo AB é igual ao paralelogramo BC *(Pr. 9.5.)*.

PROP. XV. TEOR.

Nos triângulos iguais, se um ângulo de um fôr igual a um ângulo do outro, os lados, que formam êstes ângulos iguais, serão reciprocamente proporcionais. E os triângulos, que têm *um ângulo igual a outro ângulo, e reciprocamente proporcionais os lados, que formam os ângulos iguais, são também iguais (Fig. 20.).*

Sejam os triângulos iguais ABC, ADE, e que tenham os ângulos BAC, DAE iguais. Digo que nos triângulos ABC, DAE OS lados, que compreendem os ângulos iguais BAG, DAE, são reciprocamente proporcionais, isto é, que deve ser, CA:AD::EA:AB.

Ponham-se os triângulos BAC, DAE, de maneira que esteja o lado CA em direitura com o lado AD. Estará também EA em direitura com AB *(Pr. 14.1.)*. Tire-se a reta BD. Sendo, pela hipótese, iguais os triângulos ABC, ADE, cada um dêles deve ter a mesma razão para o triângulo ABD, e assim será CAB:BAD::EAD:DAB *(Pr. 7.5.)*. Mas. é CAB:BAD::CA:AD (Pr. 1.6.); e EAD:DAB::EA:AB. Logo, será CA:AD::EA:AB *(Pr. 11.5.)*, e, por conseqüência, nos triângulos iguais ABC, ADE são, reciprocamente, proporcionais os lados. que fazem os ângulos BAC, DAE também iguais.

Nos triângulos ABC, ADE sejam agora reciprocamente proporcionais os lados, que formam os ângulos iguais BAC, DAE, isto é, seja CA:AD::EA:AB Digo que os triângulos ABC, APE são iguais.

Porque, tirada a reta BD, sendo CA:AD::EA:AB, e sendo CA:AD::BCA:BAD, e também EA:AB::EAD:BAD; será BAC:BAD::EAD:BAD. Logo, será o triângulo ABC igual *(Pr. 9.5.)* ao triângulo ADE.

PROP. XVI. TEOR.

Se quatro linhas retas forem proporcionais, o retângulo compreendido pelas ditas extremas será igual ao retângulo compreendido pelas duas médias. E se o retângulo compreendido pelas extremas fôr igual ao retângulo compreendido pelas médias, as quatro linhas retas serão proporcionais (Fig. 21.).

Sejam as quatro linhas retas proporcionais AB, CD, E, F. isto é, seja AB:CD::E:F. Digo que o retângulo compreendido pelas retas AB, F é igual ao retângulo compreendido pelas retas CD, E.

Dos pontos A, C sejam conduzidas as retas AG, CH perpendicularmente *(Pr. 11.1.*) sôbre as outras AB, CD; e feita AG = F e CH = E, completem-se os paralelogramos BG, DH. Sendo AB:CD::E:F, e também sendo E = CH, e F = AG será AB:CD::CH:AG *(Pr. 7.5.)*. Logo, nos paralelogramos: BG, DH os lados, que compreendem ângulos iguais, são reciprocamente proporcionais. Logo, os mesmos paralelogramos BG, DH são iguais *(Pr. 14.6.)*. Mas o paralelogramo BG é compreendido pelas retas AB, F, por ser AG = F; e o paralelogramo DH é compreendido pelas retas CD, E, por ser CH = E. Logo, o retângulo compreendido pelas retas AB, é igual ao retângulo compreendido pelas retas CD, E.

Suponhamos agora que o retângulo, compreendido pelas retas AB, F, é igual ao retângulo compreendido pelas retas, CD, E. Digo que as quatro retas AB, CD, E, F são proporcionais, isto é, AB:CD::E:F.

Repetida a mesma construção que acima, como o retângulo compreendido pelas retas AB, F se supõe igual ao retângulo compreendido pelas retas CD, E, e o retângulo BG é compreendido pelas retas AB, F, por ser AG = F, e o retângulo DH é compreendido pelas retas CD, E, por ser CH = E; será o paralelogramo BG igual ao paralelogramo DH. Mas êstes. paralelogramos são eqüiângulos; e nos paralelogramos eqüiângulos e iguais os lados, que formam os ângulos iguais, são reciprocamente proporcionais *(Pr. 14.6.)*. Logo, será, AB:CD::CH:AG. Mas é CR = E, e AG = F. Logo, será AB:CD::E:F.

PROP. XVII. TEOR.

Se três linhas retas forem proporcionais, o retângulo compreendido pelas extremas será igual ao quadrado da média. E se o retângulo compreendido pelas extremas fôr igual ao quadrado da média, as três linhas retas serão proporcionais (Fig. 22.).

Sejam proporcionais as três linhas retas .A, B, C, isto é, seja A:B::B:C. Digo que o retângulo compreendido pelas retas A, C é igual, ao quadrado da reta B.

Ponha-se D = B. Sendo, como temos suposto, A:B::B:C, o sendo B = D, será A:B::D:C *(Pr. 7.5.)*. Mas, quando quatro linhas retas são proporcionais, o retângulo compreendido pelas extremas é igual ao retângulo compreendido pelas médias *(Pr. 16.6.)*. Logo, o retângulo compreendido pelas retas A, C é igual ao retângulo compreendido pelas retas B, D. Mas o retângulo compreendido pelas retas B, D é igual ao quadrado da reta B, por ser B = D. Logo, o retângulo compreendido pelas retas A, C é igual ao quadrado da reta E.

Seja agora o retângulo compreendido pelas retas A, C igual ao quadrado da reta E. Digo que será A:B::B:C.

Feita a mesma construção que acima, sendo o retângulo das retas A, O igual ao quadrado da reta B; e sendo o quadrado da reta B o mesmo que o retângulo compreendido pelas retas B, D, por ser B = D; o retângulo das retas A, C será igual ao retângulo das retas B, D. Mas, quando o retângulo compreendido pelas extremas é igual ao retângulo compreendido pelas médias, as quatro retas são proporcionais *(Pr. 16.6.)*. Logo, será A:B::D:C, e, por conseqüência, sendo B = D, será também A:B::B:C.

PROP. XVIII. PROB.

Descrever sôbre uma linha reta dada um retilíneo semelhante, e semelhantemente pôsto a respeito de outro retilíneo dado (Fig. 23.).

Seja dada a linha reta AB, e o retilíneo quadrilátero CDEF. Sôbre a reta AB se deve descrever um retilíneo semelhante ao retilíneo CDEF, e semelhantemente pôsto.

Tirada a reta DF sôbre AB, e no ponto A faça-se *(Pr. 23.1,)* o ângulo BAG = C, e no ponto B faça-se o ângulo ABG = CDF, será o terceiro CFD igual *(Pr. 32.1.)* ao terceiro AGE. Logo, os dois triângulos FCD, GAB são eqüiângulos. Do mesmo modo, sôbre a reta BG e no ponto G faça-se o ângulo BGH = DFE; e no ponto B faça-se o ângulo GBH = FDE; será o terceiro FED igual *(Pr. 32.1.)* ao terceiro GHB. Sendo pois AGB = CFD, e BGH = DFE, será o total AGH igual ao total CFE. Pela. mesma razão deve ser ABH = CDE. Mas é também A = C, e GHB=FED. Logo, os retilíneos ABHG, CDEF são eqüiângulos. Demonstraremos agora que nestes retilíneos os lados, que formam os ângulos iguais, são proporcionais. Sendo eqüiângulos os triângulos GAB, FCD, será BA:AG::DC:CF *(Pr. 4.6.)*, e AG:GB:CF:FD; e também nos triângulos eqüiângulos BGH, DFE, sendo GB:QH::FD:FE, será por igual *(Pr. 22.5.)* AG:GH::CF:FE. Com o mesmo discurso se prova ser AB:BH::DC:DE. Mas é GH:HB::FE:ED. Logo, os retilíneos ABHG, CDEF têm proporcionais os lados, que formam os ângulos iguais, e, por conseqüência, sendo os mesmos retilíneos também eqüiângulos, como se tem demonstrado, serão semelhantes *(Def. 1. 6.)* entre si, e dêste modo está feito o que se pedia.

Descreveremos agora sôbre a reta AB uma figura de cinco lados, semelhante a outra CDKEF também de cinco lados, e semelhantemente posta.

Tirada a reta DE, descreva-se sôbre AB o quadrilátero ABHG semelhante ao quadrilátero CDEF, e semelhantemente pôsto. Faça-se com a reta BH no ponto B o ângulo HBL = EDK, e no ponto H o ângulo BHL = DEK. Será o terceiro K igual ao terceiro L. E como os quadriláteros ABHG, CDEF são semelhantes, será o ângulo GHB = FED. Mas é BHL = DEK. Logo, será o total GHL igual ao total FEG. Com a mesma demonstração se prova ser ABL= CDK.

Logo, as duas figuras de cinco lados AGHLB, CFEKD são eqüiângulas. Pela mesma semelhança dos quadriláteros AGHB, DFED temos GH:HB::FE:ED. Mas é HB:HL::ED:EK *(Pr. 4.6.)*. Logo, por igual *(Pr. 22.5.)* será GH:HL::FE:EK. Pela mesma razão será também AB:BL::CD:DK. Mas é BL:LH::DK:KE, por serem eqüiângulos os triângulos BLH, DKE. Logo, as figuras AGHLB, CFEKD têm proporcionais os lados, que fazem os ângulos iguais; e como são também eqüiângulos, pelo que temos demonstrado acima, serão semelhantes *(Def. 1.6.)* entre si. Logo, está feito o que se pedia. Com o mesmo método sôbre uma linha reta dada se poderá descrever um retilíneo semelhante a um hexágono, ou a outro qualquer polígono dado.

PROP. XIX. TEOR.

Os triângulos semelhantes estão entre si na razão duplicada daquela, que tem os lados homólogos (Fig. 24.).

Sejam os triângulos ABC, DEF semelhantes entre si; os ângulos B, E sejam iguais, e suponha-se AB:BC::DE:EF, de maneira que os lados BC, EF sejam homólogos. Digo que o triângulo ABC tem para o triângulo DEF a razão duplicada da razão do lado BC para o lado EF.

Achada a terceira proporcional *(Pr. 11.6.)* BG a respeito das duas retas BC, EF, teremos BC:EF::EF:BG. Tire-se a reta GA. Sendo, pela hipótese, AB:BC::DE:EF, será permutando *(Pr. 16.5.)* AB:DE::BC:EF. Mas é BC:EF::EF:BG. Logo, será AB:DE::EF:BG *(Pr. 11.5.).* Logo, nos triângulos ABG, DEF os lados, que fazem os ângulos iguais, são reciprocamente proporcionais. Logo, o triângulo ABG é igual *(Pr. 15.6.)* ao triângulo DEF. E, como temos BC::EF::EF:BG, e também, quando três linhas retas são proporcionais, a primeira se diz que tem para a terceira a razão duplicada *(Def.10.5.)* daquela, que a primeira tem para a segunda; a reta BC terá para a reta BG a razão duplicada da que a mesma BC tem para EF. Mas como BC é para BG, assim o triângulo ABC é para o triângulo ABG *(Pr. 1.6.)*. Logo, o triângulo ABC tem para o triângulo ABG a razão duplicada da razão de BC para EF. Mas os triângulos ABC, DEF são iguais. Logo, o triângulo ABC tem para o triângulo DEF a razão também duplicada da razão do lado BC para o lado EF *(Pr. 7.5.)*.

COROL. *Pelo que temos demonstrado, fica evidente que, se três linhas retas forem proporcionais, será a primeira para a terceira, como um triângulo feito sôbre a primeira reta é para outro triângulo semelhante, e semelhantemente descrito sôbre a segunda. Pois temos visto ser CB para BG, como o triângulo ABC é para o triângulo DEF.*

PROP. XX. TEOR.

Os polígonos semelhantes dividem-se em triângulos semelhantes, em número igual, e homólogos aos mesmos polígonos totais. E um polígono tem para outro polígono semelhante a razão duplicada que um lado homólogo tem para outro lado homólogo (Fig. 25.).

Sejam os polígonos semelhantes ABCDE, FGHKL, sejam homólogos os lados AB, FG. Digo que os polígonos ABCDE, FGHKL se dividem em triângulos semelhantes, em igual número, e homólogos aos mesmos polígonos. Digo mais que o polígono ABCDE tem, para o polígono FGHKL, a razão duplicada da razão do lado AB para o lado FG.

Tirem-se as retas BE, EC, GL, LH. Como os polígonos ABCDE, FGHKL são semelhantes, será o ângulo BAE = GFL *(Def. 1.6.)*, e também será BA:AE::GF:FL. Tendo pois os triângulos ABE; FGL um ângulo igual a um ângulo, isto é, o ângulo BAE = GFL, e também tendo proporcionais entre si os lados, que formam êstes ângulos iguais; os mesmos triângulos ABE, FGL serão eqüiângulos *(Pr. 6.6.)*, e por conseqüência semelhantes *(Pr. 4.6.)*. Logo, será o ângulo ABE = FGL. Mas o total ABC é igual ao total FGH, por serem semelhantes os polígonos ABCDE, FGHKL. Logo, também será o ângulo EBC = LGH. E sendo EB:BA::LG:GF pela semelhança dos triângulos ABE, FGL, e sendo também AB:BC::FG:GH, porque os polígonos são semelhantes; será por igual *(Pr. 22.5.)* EB:BC::LG:GH, isto é, serão proporcionais os lados, que compreendem os ângulos iguais EBC, LGH. Logo, os triângulos EBC, LGH são eqüiângulos, e por conseqüência semelhantes. Do mesmo modo se demonstra que os triângulos ECD, LHK são semelhantes. Logo, os polígonos ABCDE, FGHKL dividem-se em triângulos semelhantes, e em igual número em ambos os polígonos.

Digo agora que os ditos triângulos são homólogos aos polígonos, isto é, que são proporcionais entre si, e a respeito dos mesmos polígonos, e que os triângulos ABE, EBC, ECD são como umas grandezas antecedentes, e os triângulos FGL, LGH, LHK são como umas grandezas conseqüentes, e, finalmente, que o polígono ABCDE tem para o polígono FGHKL a razão duplicada da razão do lado homólogo AB para o lado homólogo FG.

Como o triângulo ABE é semelhante ao triângulo FGL, a razão de ABE para FGL será duplicada *(Pr. 19.6.)* da razão de BE para GL. Da mesma sorte o triângulo BEC tem para o triângulo GLH a razão duplicada da razão de BE para GL. Logo, o triângulo ABE é para o triângulo FGL, como o triângulo BEC para o triângulo GLH *(Pr. 11.5.)*. Também, por serem semelhantes os triângulos EBC, LGH, e os outros dois ECD, LHK, estarão uns e outros entre si na razão duplicada daquela, que o lado CE tem para o lado HL. Logo, será EBC:LGH::ECD:LHK. Mas temos provado ser EBC:LGH::ABE:FGL. Logo, será ABE:FGL::EBC:LGH, e ABE:FGL::ECD:LHK. Mas da mesma sorte que um antecedente é para um conseqüente, assim todos os antecedentes tomados juntos são para todos os conseqüentes também tomados juntos *(Pr. 12.5.)*. Logo, o triângulo ABE será para o triângulo FGL, como o polígono ABCDE é para o polígono FGHKL. Logo, tendo o triângulo ABE para o triângulo FGL a razão duplicada da que o lado homólogo AB tem para o lado homólogo FG; também o polígono ABCDE terá para o polígono FGHKL a mesma razão duplicada daquela que AB tem para FG.

COROL. 1. *Com o mesmo método se pode demonstrado que as figuras quadriláteras e multiláteras semelhantes, quaisquer que sejam, estão entre si na razão duplicada dos lados homólogos. E como já se tem demonstrado o mesmo a respeito dos triângulos semelhantes (Pr. 19.6.), podemos concluir que geralmente tôdas as figuras retilíneas semelhantes têm entre si a razão duplicada da razão dos lados homólogos.*

COROL. 2. *Se a linha reta M fôr terceira proporcional a respeito dos lados homólogos AB, FG, a reta AB terá para a reta M a razão duplicada (Def. 10.5.) daquela que AB tem para FG. Mas também o polígono ABCDE feito sôbre o lado AB tem para o polígono FGHKL feito sôbre o lado FG, ou qualquer outra figura retilínea, que quisermos feita sôbre o lado AB, tem para outra figura semelhante, e semelhantemente feita sôbre o lado FG a razão duplicada da que o lado homólogo AB tem para o lado homólogo FG. Logo, será o lado AB para a reta M, como a figura feita sôbre AB para, outra figura semelhante e semelhantemente feita sôbre FG. Mas temos demonstrado o mesmo a respeito dos triângulos semelhantes (Corol. 19.6.). Logo, pode-se geralmente afirmar que, se três linhas forem proporcionais, a primeira será para a terceira como uma figura retilínea, qualquer que seja, feita sôbre a primeira reta é para outra figura retilínea semelhante e .semelhantemente formada sôbre a segunda.*

PROP. XXI. TEOR.

As figuras retilíneas semelhantes à mesma figura retiUnea também são semelhantes entre si (Fig. 26.).

Sejam os retilíneos A, B, semelhantes ao mesmo retilíneo C. Digo que o retilíneo A é semelhante ao retilíneo B.

Como, pela hipótese, os retilíneos A, C são semelhantes entre si, serão também eqüiângulos, e serão proporcionais *(Def. 1.6.)* os lados dêles, que fizerem ângulos iguais. Do, mesmo modo, sendo semelhantes os retilíneos B, C, êstes mesmos retilíneos devem ser eqüiângulos, e os lados dêles, que formam ângulos iguais, devem ser proporcionais. Logo, cada um dos retilíneos A, B é eqüiângulo ao retilíneo C; e, todos êstes três retilíneos têm proporcionais os lados, que formam ângulos iguais. Logo, os retilíneos A, B são eqüiângulos, *(Ax. 1.1.)*, e têm proporcionais *(Pr. 11.5.)* entre si os lados; que fazem ângulos iguais. Logo, o retilíneo A é semelhante ao retilíneo B.

PROP. XXII. TEOR.

Se quatro linhas retas forem proporcionais, os retilíneos semelhantes e semelhantemente descritos sôbre as ditas retas serão também proporcionais. E se os retilíneos semelhantes e ,semelhantemente descritos sôbre quatro linhas retas forem proporcionais, também as quatro linhas retas serão proporcionais (Fig. 27.).

Sejam as quatro linhas retas proporcionais AB, CD, EF, , GH, isto é, seja AB:CD::EF:GH, e sejam formados sôbre as retas AB, CD os retilíneos semelhantes e semelhantemente postos KAB, LCD; e sôbre as outras EF, GH os retilíneos MF, NH também semelhantes entre si, e semelhantemente postos, Digo que o retilíneo KAB é para o retilíneo LCD, como o retilíneo MF é para o retilíneo NH.

Seja a linha reta X terceira proporcional *(Pr. 11.6.)* a respeito das duas AB, CD, e a reta O também terceira proporcional a respeito das outras duas EF, GH. Sendo, pela hipótese, AB:CD::EF:GH, será CD:X::GH:O *(Pr. 11. 5.)*.

Logo, por igual *(Pr. 22.5.)* deve ser AB:X::EF:O. Mas como AB é para X, assim é o retilíneo KAB para o retilíneo LCD *(2. Cor. 20.6.)*; e como EF é para O, assim o retilíneo MF é para o retilíneo NH. Logo, será o retilíneo KAB para o retilíneo LCD, como o retilíneo MF é para o retilíneo NH.

Suponhamos agora ser o retilíneo KAB para o retilíneo LCD, como o retilíneo MF para o retilíneo NH. Digo que será AB:CD::EF:GH.

Achada a reta PR de maneira que seja AB:CD::EF:PR *(Pr. 12.6.)*, descreva-se sôbre a mesma reta PR *(Pr. 18.6.)* o retilíneo SR, semelhante e semelhantemente pôsto a respeito de um dos dois MF, NH. Como temos AB:CD::EF:PR, e sobre as retas AB, CD estão descritos os retilíneos semelhantes e semelhantemente postos KAB, LCD, e sôbre EF, PR os outros retilíneos, também semelhantes e semelhantemente postos MF, SR: será, pelo que se tem demonstrado o retilíneo KAB para o retilíneo LCD, como o retilíneo MF é para o retilíneo SR. Mas temos suposto ser KAB:LCD::MF:NH. Logo, o retilíneo MF tem a mesma razão para cada um dos retilíneos NH, SR. Logo, o retilíneo NH é igual *(Pr. 9.5.)* ao retilíneo SR. Mas êstes dois retilíneos são também semelhantes e semelhantemente descritos. Logo, será GH = PR. Logo, sendo AB:CD::EF:PR e sendo PR = GH, será finalmente AB:CD::EF:GH

PROP. XXIII. TEOR.

Os paralelogramos eqüiângulos estão entre si na razão, que se compõe das razões dos lados. (Fig.28.).

Sejam os paralelogramos eqüiângulos AC, CF, cujos ângnlos BCD, ECG sejam iguais. Digo que o paralelogramo AC tem para o paralelogramo CF a razão composta das razões dos lados, isto é, da razão de BC para CG, e da razão de DC para CE.

Ponham-se os dois paralelogramos AC, CF de maneira que o lado BC esteja em direitura com o lado CG. Também o lado DC estará em direitura com o lado CE *(Pr. 14.1.)*. Completado pois o paralelogramo DG, tome-se uma linha reta K, como se quiser, e faça-se *(Pr. 12.6.)* K para L, assim como BC para CG; e L para M, assim como DC para CE. Serão as razões de K para L, e de L para M iguais às razões dos lados, isto é, às razões de BC para GC, e de DC para CE. Mas a razão de K para M se diz a razão composta *(Def. A.5.)* das razões de K para L, e de L para M. Logo, a razão de K para H é a composta das razões dos lados. E porque BC é para CG como o paralelogramo AC para o paralelogramo CH *(Pr. 1.6.)*, e também BC:CG::K:L; será K para L, como o paralelo gramo AC é para o paralelogramo CH *(Pr. 11.5.)*. Também sendo DC para CE, como o paralelogramo CH para o paralelogramo CF, e DC:CE::L:M; será L para M como o paralelogramo CH é para o paralelogramo CF. Logo, visto têrmos demonstrado ser K para L, com o o paralelogramo AC é para o paralelogramo CH; e L para M, como o paralelogramo CH é para o paralelogramo CF, será por igual *(Pr. 22.5.)* do mesmo modo que K para M, o paralelogramo AC para o paralelogramo CF. Mas K tem para M a razão composta das razões dos lados, isto é, da razão de BC para CG, e da razão de DC para CE. Logo, também o paralelogramo AC tem para o paralelogramo CF a razão composta das razões dos mesmos lados, isto é, da razão de BC para CG, e da razão de DO para CE.

PROP. XXIV. TEOR.

Os paralelogramos, que existem na diagonal de outro paralelogramo, são semelhantes entre si e também semelhantes ao paralelogramo total (Fig. 29.).

Seja o paralelogramo ABCD, cuja diagonal é a reta AC. Na diagonal AC existam os paralelogramos EG, HK Digo que os paralelogramos EG, HK são semelhantes entre si, e também semelhantes ao paralelogramo total ABCD.

Como as retas DC, GF são paralelas, será o ângulo ADC = AGF *(Pr. 29.1.).* Pela mesma razão, sendo BC, EF paralelas, será ABC = AEF. Mas cada um dos ângulos BCD, EFG é igual *(Pr. 33.1.)* ao ângulo oposto DAB. Logo, será BCD = EFG. Logo, os paralelogramos ABCD, AEFG são eqüiângulos. Sendo pois o ângulo ABC = AEF, e BAC comum, os triângulos BAC, EAF serão também eqüiângulos, e assim teremos AB:BC::AE:EF *(Pr. 4.6.).* Logo, sendo iguais *(Pr. 34.1.)* os lados opostos nos paralelogramos, será também (Pr. 7.5.) AB:AD::AE:AG, e CD:CB::GF:FE, e finalmente CD:DA::FG:GA. Logo, nos paralelogramos ABCD, AEFG, os lados, que fazem ângulos iguais, são proporcionais, e por conseqüência são semelhantes *(Def. 1.6.)* entre si os mesmos paralelogramos ABCD, AEFG. Pela mesma razão o paralelogramo ABCD é semelhante ao paralelogramo FHCK Logo, cada um dos paralelogramos GE, KH é semelhante ao mesmo paralelogramo DB. Mas os retilíneos semelhantes a outro retilíneo são também semelhantes *(Pr. 21.6.)* entre si. Logo, o paralelogramo GE é semelhante ao paralelogramo KH.

PROP. XXV. TEOR.

Construir um retilíneo semelhante a outro retilíneo dado, e igual a um retilíneo também dado (Fig. 30.)

Sejam os dois retilíneos ABC, D. Deve-se construir um retilíneo semelhante ao retilíneo ABC, e igual ao retilíneo D.

Sôbre a reta BC faça-se o paralelogramo BE igual ao retilíneo ABC; e sôbre a reta CE faça-se o paralelogramo CM igual ao retilíneo D e com o ângulo FCE = CBL *(Cor. 45.1.)*. Logo, BC está em direitura de CF, e LE em direitura de EM *(Pr. 29 e 14.1.)*. Entre as retas BC, CF acha-se a média proporcional GR *(Pr. 13.6.)*, e sôbre GH descreva-se *(Pr. 18.6.)* o retilíneo KGH semelhante ao retilíneo ABC. Será o retilíneo KGH o que se pede. Sendo BC:GR::GR:CF, e postas três linhas retas proporcionais, sendo a primeira reta para a terceira, como uma figura retilínea, qualquer que seja, feita sôbre a primeira para outra figura retilínea semelhante, e semelhantemente descrita sôbre a segunda *(2. Cor. 20.6)*; como BC é para CF assim será o retilíneo ABC para o retilíneo KGH. Mas como BC é para CF, assim o paralelogramo BE é para o paralelogramo EF *(Pr. 1.6.)*. Logo, como o retilíneo ABC é para o retilíneo KGH, assim *(Pr. 11.5.)* o paralelogramo BE será para o paralelogramo EF. Mas o retilíneo ABC é igual ao paralelogramo BE. Logo, o retilíneo KGH será igual *(Pr. 14.5.)* ao paralelogramo EF. Mas o paralelogramo EF é igual ao retilíneo D. Logo, o retilíneo KGR é igual ao retilíneo D. Mas KGR é semelhante a ABC. Logo, temos construído o retilíneo KGH, semelhante ao retilíneo ABC, e igual ao retilíneo D.

PROP. XXVI. TEOR.

Se de um paralelogramo fôr tirado outro paralelogramo semelhante ao total, e semelhantemente pôsto, e que tenha um ângulo comum ao mesmo total, o paralelogramo, que fôr tirado, existirá ao redor da diagonal do paralelogramo total (Fig. 31.).

Do paralelogramo ABCD tire-se o paralelogramo AEFG, semelhante ao total ABCD, e semelhantemente pôsto, e que tenha o ângulo DAB, que é comum ao paralelogramo ABCD. Digo que o paralelogramo AEFG existe ao redor da mesma diagonal AC do paralelogramo ABCD.

Suposto assim não ser, seja ARC, se é possível, a diagonal do paralelogramo BD; e o lado GF corte a pretendida diagonal ARC no ponto H. Tire-se pelo ponto R a reta RK paralela a uma das duas AD, BC. Como os paralelogramos ABCD, AKRG existem ao redor da mesma diagonal AR C, êstes paralelogramos serão semelhantes (Pr. 24.6.) entre si. Logo, será DA:AB::GA:.AK *(Def. 1.6.)*. Mas também, por serem semelhantes os paralelogramos ABCD, AEFG, deve ser DA:AB::GA:AE. Logo, será GA:AE::GA:.AK *(Pr. 11.5.)*, e por conseqüência teremos. AE = AK *(Pr. 9.5.)*, o que é absurdo, porque AK é menor que AE. Logo, os paralelogramos ABCD, AKRG não existem ao redor da mesma diagonal, mas sim os paralelogramos ABCD, AEFG.

Para que mais facilmente se possam entender as três proposições seguintes, convém advertir primeiramente o que se segue:

I. Um paralelogramo se diz que é aplicado a uma linha reta, quando é descrito sôbre ela. Por exemplo, o paralelogramo AC (Fig. 32.) se diz que é aplicado à reta AB, tôdas as vêzes que é descrito sôbre a mesma reta AB.
II. Mas o paralelogramo AE se diz que é aplicado à reta AB com a falta de uma figura paralelograma, quando a base AD do paralelogramo AE é menor que a reta AB; assim o paralelogramo AE é tanto menor que o paralelogramo AC, descrito sôbre a reta AB no mesmo ângulo, e entre as mesmas paralelas, quanta é. a figura paralelograma DC, que é o que falta ao paralelogramo AE para o complemento do paralelogramo AC. O paralelogramo DC chama-se o defeito, ou a falta do paralelogramo AE.
III. Finalmente, o paralelogramo AG.se diz que é aplicado à reta AB com o excesso de uma figura paralelograma, quando n base AF do paralelogramo AG é. maior que a reta AB; e assim o paralelogramo AG tem de mais que o paralelogramo AC tôda a figura paralelograma BG, que se chama o excesso do mesmo paralelogramo AG sôbre o paralelogramo AC.

PROP. XXVII. TEOR.

Entre todos os paralelogramos aplicados à mesma linha reta, e com os defeitos de figuras paralelogramas semelhantes à figura descrita sôbre a metade da dita reta, e senelhantemente postas, o máximo é aquêle que é aplicado à metade da mesma reta, e que é semelhante à figura paralelograma que falta (Figs. 33 e 34.).

Seja a reta AB dividida em partes iguais no ponto C.

Esteja o paralelogramo AD aplicado à reta AR com a falta da figura paralelograma CE descrita sôbre a metade da reta AB, A qual figura é semelhante o paralelogramo AD. Digo que entre todos os paralelogramos aplicados à reta AB, e com as faltas de figuras paralelogramas semelhantes à figura CE, e semelhantemente postas, o máximo é o paralelogramo AD.

Seja aplicado à reta AB o paralelogramo AF com a falta da figura paralelograma KH, semelhante à CE e semelhantemente posta. Digo que o paralelogramo AD é maior que o paralelogramo AF.

Seja primeiramente a base AK do paralelogramo AF maior que a reta AC (Fig. 33.). Como os paralelogramos CE, KH são semelhantes, necessàriamente devem existir ao redor de uma mesma diagonal *(Pr. 26.6.)*. Seja DB esta diagonal comum, e descreva-se a figura tôda, produzindo a reta KF até o ponto L. Sendo os paralelogramos CF, FE iguais *(Pr. 43.1.)*, se ajuntarmos a uma e outra parte o mesmo paralelogramo KH, será o total CH igual ao total KE. Mas é CR = CG *(Pr. 36.1.)*, por serem as retas AC, CB iguais entre si. Logo, também será CG = KE. Ajunte-se-lhes o paralelogramo comum CF. Será o paralelogramo AF igual ao gnômon CHL, e por conseqüência o paralelogramo CE, isto é, o paralelogramo AD será maior que o paralelogramo AF.

Em segundo lugar a base AK (Fig. 34.) do paralelogramo AF seja menor que a reta AC. Suposta a mesma construção, como os paralelogramos DH, DG são iguais *(Pr. 36.1.)*, por ser HM = MG *(Pr. 34.1.)*, será DH>LG. Mas é DH = DK *(Pr. 43.1.)*. Logo, será DK>LG. Logo, ajuntando a uma e outra parte o mesmo paralelogramo AL, será o paralelogramo AD maior que o paralelogramo AF.

PROP. XXVIII. TEOR.

Aplicar a uma linha reta dada um paralelogramo igual a um retilíneo dado, e com o defeito de uma figura paralelograma semelhante à outra dada. Mas o retilíneo dado, ao qual se quer que seja igual o paralelogramo que se pede, não deve ser maior do que o paralelogramo, que se aplica à metade da reta dada, sendo semelhantes entre si os defeitos, tanto do paralelogramo aplicado à metade da reta proposta, como do paralelogramo que se pede com o defeito da figura paralelograma semelhante à outra dada (Fig. 35.).

Seja AB a linha reta dada, e o retilíneo dado, ao que deve ser igual o paralelogramo, que se quer aplicar à reta AB, seja C; contanto, porém, que êste retilíneo não seja maior do que o paralelogramo aplicado à metade da mesma reta AB, sendo semelhantes os defeitos. Seja D a figura paralelograma, a que deve ser semelhante o defeito do paralelogramo que se pede. É preciso aplicar à reta AB um paralelogramo igual ao retilíneo C, e com o defeito de uma figura paralelograma semelhante ao paralelogramo. D.

Dividida em partes iguais *(Pr. 10.1.)* a linha reta AB no ponto F, descreva-se sôbre a parte EB como base o paralelogramo EBFG, semelhante *(Pr. 18.6.)* ao paralelogramo D, e semelhantemente pôsto. Complete-se o paralelogramo AG. O paralelogramo AG será igual, ou maior que o retilíneo C. Se o paralelogramo AG fôr igual ao retilíneo C, estará feito o que se pede, porque o paralelogramo AG igual ao retilíneo C, e com o defeito da figura paralelograma EF semelhante a D, já está aplicado à reta dada AB. Mas não sendo AG = C, será *(Pr. 27.6.)* AG>C. Logo, sendo EF = AG, será também EF>C. Descreva-se *(Pr. 25.6.)* o paralelogramo KLMN igual ao excesso de EF sôbre C, semelhante ao paralelogramo D, e semelhantemente pôsto. Será o mesmo paralelogramo KLMN semelhante *(Pr. 21.6.)* ao paralelogramo EF, por serem semelhantes entre si os dois EF, e D. Seja homólogo o lado KL a respeito do lado EG, e seja também homólogo o lado LM a respeito do lado GF: Como o paralelogramo EF é igual aos dois retilíneos C, KM tomados juntos, será EF>KM. Logo, será o lado GE maior que o lado LK, e o lado GF maior que o lado LM. Tome-se GX LK, e GO = LM, e complete-se o paralelogramo XGOP. Logo, os paralelogramos XO, KM são iguais e semelhantes. Mas KM é semelhante a EF. Logo; XO é também semelhante a EF. Logo, os paralelogramos XO, EF existem ao redor de uma mesma diagonal *(Pr. 26.6.)*. Seja esta diagonal a reta GPB. Descreva-se a figura tôda produzindo a reta OP até o ponto S, e a reta XP até os pontos T, R. Logo, sendo o paralelogramo EF igual aos dois retilíneos C, e KM tomados juntos; e sendo XO = KM tirando XO de EF, ficará o gnômon ERO igual ao retilíneo C. E como os complementos OR, XS são iguais *(Pr. 43.1.)* entre si, se ajuntarmos a um e outro o mesmo paralelogramo SR, será o total OB igual ao total XB. Mas é XB = TE *(Pr. 36.1.)*, por ser o lado AE igual ao lado EB. Logo, será também TE = OB Ajunte-se-lhes o mesmo paralelogramo XS. Será o paralelogramo TS igual ao gnômon ERO. Mas temos demonstrado que o gnômon ERO é igual ao retilíneo C; Logo, será o paralelogramo TS igual ao retilíneo C. Logo, temos aplicado à linha reta dada AB o paralelogramo TS igual ao retilíneo dado C, e com o defeito da figura paralelograma SR semelhante a D, por ser também SR semelhante *(Pr. 24.6.)* a EF, que foi feito semelhante a D.

PROP. XXIX. PROB.

Aplicar a uma linha reta dada um paralelogramo igual a um retilíneo dado, e com o excesso de uma fig1tra paralelograma semelhante a outra dada (Fig. 36.).

Seja AB a linha reta dada, C um retilíneo, e D um paralelogramo. Deve-se aplicar à reta AB um paralelogramo igual ao retilíneo C, e com o excesso de uma figura paralelograma semelhante a D.

Divida-se a reta AB em partes iguais no ponto E, e sôbre a parte EB descreva-se *(Pr. 18.6.)* o paralelogramo EL, semelhante ao paralelogramo D, e semelhantemente pôsto. Descreva-se *(Pr. 25.6.)* também o paralelogramo GH, igual ao paralelogramo EL e ao retilíneo C tomados juntos, e ao mesmo tempo semelhante a D. Será GH semelhante *(Pr. 21.6.)* a EL. Seja KH um lado homólogo a respeito do lado FL; e seja também KG outro lado homólogo a respeito do lado FE. Sendo o paralelogramo GH maior que o paralelogramo EL, também será o lado KH maior que o lados FL, e KG>FE. Produzam-se as retas FL, FE fazendo FLM = KH, e FEN = KG, e complete-se o paralelogramo MN. Serão os dois paralelogramos MN, GH iguais entre si e semelhantes. Mas GH é semelhante a EL. Logo, será também MN semelhante a EL, e por conseqüência haverá uma diagonal comum *(Pr. 26.6.)* a ambos êstes paralelogramos. Seja FX esta diagonal comum, e descreva-se a figura tôda produzindo as retas EB, LB até os pontos O, P. Logo, sendo o paralelogramo GH igual ao paralelogramo EL e ao retilíneo C, tomados juntos, e sendo GH = MN; será MN igual a EL e C, também tomados juntos. Tire-se de uma e outra parte o paralelogramo comum EL. Ficará o gnômon NOL. igual ao retilíneo C. E como temos AE = EB, será o paralelogramo AN igual *(Pr. 36.1.)* ao paralelogramo NB. Mas é NB = BM *(Pr. 43.1.)*. Logo, será AN = BM. Ajunte-se a uma e outra parte o mesmo paralelogramo NO. Será o paralelogramo AX igual ao gnômon NOL. Mas o gnômon NOL é igual ao retilíneo C. Logo, será AX = C. Logo, à linha reta dada AB temos aplicado o paralelogramo AX igual ao retilíneo proposto C, e com o excesso da figura paralelograma OP semelhante a D, por serem EL, OP semelhantes *(Pr. 24.6.)* entre si, e por têrmos feito o paralelogramo EL semelhante ao paralelogramo D.

PROP. XXX. TEOR.

Dividir uma linha reta determinada na extrema e média razão (Fig. 37.).

Seja a linha reta determinada AB. Deve-se dividir a reta AB na extrema e média razão.

Descreva-se *(Pr. 46.1.)* sôbre a reta AB o quadrado BC, e aplique-se *(Pr. 29.6.)* ao lado AC o paralelogramo CD igual ao quadrado BC, e com o excesso da figura paralelograma AD semelhante ao mesmo BC. Sendo pois BC um quadrado, também a figura AD será um quadrado. E como o quadrado BC é igual ao paralelogramo CD, tirando de uma e outra parte o paralelogramo comum CE, ficará o resto BF igual ao resto AD.

Mas êstes paralelogramos, além de serem iguais, são também eqüiângulos. Logo, os lados dêles, que fazem ângulos iguais, serão reciprocamente proporcionais *(Pr. 14.6.)*, e por conseqüência teremos FE:ED::AE:EB. Mas é FE = AC *(Pr. 34.1.)* e AC = AB, e assim FE = AB, e também temos ED = AE. Logo, será BA:AE::AE:EB. Mas é AB>AE, e por conseqüência AE>EB *(Pr. 14.5.)*. Logo, a linha reta AB está dividida na extrema e média razão no ponto E *(Def. 3.6.)*, como se pedia.

OUTRA CONSTRUÇÃO E DEMONSTRAÇÃO.

Seja dada a linha reta AB. Deve-se dividir a reta AB na extrema e média razão (Fig. 38.).

Divida-se a reta AB no ponto C de maneira que o retângulo, compreendido pela reta tôda AB e pela parte BC, seja igual *(Pr. 11.2.)* ao quadrado da outra parte BC. A reta AB ficará dividida na extrema e média razão no ponto C.

Como o retângulo das retas AB, BC é igual ao quadrado, de AC, será BA:AC::AC:CB *(Pr. 17.6.)*. Logo, a reta. AB está dividida na extrema e média razão no ponto C *(Def. 3.6.)*.

PROP. XXXI. TEOR.

Em todo o triângulo retângulo a figura retilínea, qualquer que fôr, formada sôbre o lado oposto ao ângulo reto, é igual às outras figuras retilíneas tomadas juntas, semelhantes à primeira, e semelhantemente descritas sôbre os lados, que compreendem o ângulo reto (Fig. 39.).

Seja o triângulo retângulo ABC, cujo ângulo BAC seja reto. Digo que a figura retilínea, formada sôbre o lado BC, e igual às outras duas figuras tomadas juntamente, semelhantes. à primeira, e semelhantemente descritas sôbre os lados BA, AC.

Caia do ponto A sôbre o lado BC a perpendicular AD. Como no triângulo retângulo ABC do ângulo reto em A, está tirada sôbre a base BC a perpendicular AD, os triângulos ABD, ADC serão semelhantes ao triângulo total ABC, e também serão semelhantes *(Pr. 8.6.)* entre si. Logo, sendo o triângulo AHC semelhante ao triângulo ABD, será CB:BA::BA:BD *(Pr. 4.6.)*. Logo, as três retas CB, BA, BD são proporcionais, e assim será a primeira destas três retas para a terceira, como a figura retilínea descrita sôbre a primeira reta para outra figura semelhante *(2. Cor. 20.6.)*, e semelhantemente descrita sôbre a segunda. Logo, será CB para BD, como a figura formada sôbre o lado CB para a figura semelhante, e semelhantemente descrita sôbre o lado BA. E invertendo *(Pr. B.5.)*, como DB para BC, assim a figura sôbre BA será para a figura sôbre BC. Com a mesma demonstração se provará ser DC para CB, como a figura sôbre CA é para a figura sôbre CB. Logo, como as duas retas BD, DC tomadas juntas são para BC, assim as, figuras formadas sôbre os lados BA, AC serão para a figura feita sôbre o lado BC *(Pr. 24.5.)*. Mas as duas retas BD, DC tomadas juntas são iguais a BC. Logo, a figura retilínea formada sôbre o lado BC será igual *(Pr. A.5.)* às figuras semelhantes, e semelhantemente descritas sôbre os lados BA, AC.

PROP. XXXII. TEOR.

Se dois triângulos, nos quais dois lados de um são proporcionais a, dois lados do outro, se dispuserem entre si de maneira que, tocando-se com dois ângulos, os lados homólogos sejam respectivamente, paralelos, os outros lados dos mesmos triângulos estarão em direitura um com outro (Fig. 40.).

Sejam os dois triângulos ABC, DCE, e sejam os lados BA AC do primeiro proporcionais aos lados CD, DE do segundo, isto é, seja BA:AC::CD:DE. Considerem-se os dois triângulos ABC, DCE postos entre si, de maneira que, tocando-se pela parte dos ângulos ACB, DCE no ponto C, seja o lado AB paralelo ao lado DC, e também seja o lado AC paralelo ao lado DE. Digo que o lado BC estará em direitura com o lado CE.

Como o lado AB é paralelo ao lado DC, e são ambos cortados pela reta AC, os ângulos alternos BAC, ACD serão iguais *(Pr. 29.1.)* entre si. Pela mesma razão são iguais os ângulos CDE, ACD. Logo, também será BAC = CDE E porque os dois, triângulos ABC, DCE têm iguais os ângulos A, D, e proporcionais os lados, que formam êstes ângulos iguais, sendo pela hipótese BA:AC::CD:DE, os mesmos triângulos ABC DCE serão eqüiângulos *(Pr. 6.6.)*. Logo, será o ângulo ABC = DCE. Mas temos demonstrado ser BAC = ACD. Logo, será o total ACE igual aos dois juntamente ABC, BAC. Ajunte-se a uma e outra parte o mesmo ângulo ACB, serão os dois ACE, ACB, tomados juntos, iguais aos três ABC, BAC, ACB, também tomados juntos. Mas os três ABC, BAC, ACB são iguais a dois retos *(Pr. 32.1.)*. Logo, também os dois ACE, ACB serão iguais a dois retos, e por conseqüência o lado BC estará em direitura *(Pr. 14.1.)* com o lado CE.

PROP. XXXIII. TEOR.

Em círculos iguais, os ângulos existentes ou nos centros; ou nas circunferências têm entre si a mesma razão, que têm os arcos sôbre os quais assentam os ditos ângulos. O mesmo tem lugar a respeito dos setores (Fig. 41.).

Sejam os círculos iguais ABC, DEF, e os ângulos BGC, EHF existentes nos centros G, H; e também os ângulos BAC, EDF existentes nas circunferências dos mesmos círculos. Digo que, como o arco BC é para o arco EF, assim o ângulo BGC é para o ângulo EHF; e assim também o ângulo BAC é para o ângulo EDF; e o setor BGC para o setor EHF.

Na circunferência do círculo ABC, principiando do ponto C, tomem-se os arcos CK, KL em um número qualquer que fôr, contanto que cada um dêles seja igual ao arco BC; e também na circunferência do círculo DEF, principiando no ponto F, tomem-se os arcos FM, MN, e cada um dêles seja igual ao arco EF. Tirem-se os raios GK, GL, HM, HN. Como os arcos BC, CK, KL são iguais entre si, também serão iguais *(Pr. 27.3.)* os ângulos BGC, CGK, KGL. Logo, assim como BL é multíplice do arco BC, do mesmo modo o ângulo BGL será multíplice do ângulo BGC. Pela mesma razão, como o arco EN é multíplice do arco EF, assim o ângulo EHN será multíplice do ângulo EHF. E se o arco BL fôr maior, ou igual, ou menor que o arco EN, também o ângulo BGL será maior, ou igual *(Pr. 27.3.)*, ou menor que o ângulo EHN. Logo, como o arco BC é para o arco EF, assim o ângulo BGC será para o ângulo EHF *(Def. 5.5.)*. Mas é BGC:EHF::BAC:EDF *(Pr. 15.5.)*, porque cada um dos primeiros ângulos é o dôbro *(Pr. 20.3.)* de cada um dos segundos. Logo, como o arco BC é para o arco EF, assim também o ângulo BAC será para o ângulo EDF. Logo, em círculos iguais os ângulos existentes, ou nos centros, ou nas circunferências, têm entre si a mesma razão, que têm os arcos sôbre os quais assentam os ditos ângulos.

Digo mais que assim como o arco BC é para o arco EF, assim também o setor BGC é para o setor EHF (Fig. 42.).

Tiradas as cordas BC, CK, e tomados ncs arcos BC, CK os pontos X, O, tirem-se as outras cordas BX, XC, CO, OK. Como as outras duas retas BG, CG são iguais às duas CG, GK, e os ângulos BGC, CGK formados por estas retas são também iguais entre si, será a base BC igual à, base CK, e o triângulo GBC igual *(Pr. 4.1.)* ao triângulo GCK. E sendo os arcos, BC, CK iguais, os complementos dêles para a circunferência inteira do círculo ABC serão também iguais. Logo, será o ângulo BXC = COK *(Pr. 27.3.)*, e assim serão semelhantes *(Def. 11.3.)* os segmentos BXC, COK. Mas os segmentos de círculos semelhantes existentes sôbre retas iguais são também iguais *(Pr.24.3.)*. Logo, o segmento BXC é igual ao segmento COK. Mas o triângulo BGC é igual ao triângulo CGK, como já temos provado. Logo, todo o setor BGC deve ser igual a todo o setor CGK. Com a mesma demonstração se prova que o setor KGL é igual a cada um dos dois setores BGC, CGK. Do, mesmo modo são iguais entre si os setores EHF, FHM, MHN. Logo, assim como o arco BL é multíplice do arco BC, do mesmo modo o setor BGL será multíplice do setor BGC. Pela mesma razão, como o arco EN é multíplice do arco EF, assim também o setor EHN o será a respeito do setor EHF. E se o arco BL for maior, ou igual; ou menor que o arco EN, também o setor BGL será maior, ou igual, ou menor que o setor EHN. Logo, como o arco BC é para o arco EF, assim o setor BGC será para o setor EHF *(Def. 5.5.)*.

PROP. B. TEOR.

Se um ângulo de qualquer triângulo fôr dividido em partes iguais por uma Unha reta, que corte também a base do mesmo triângulo, o retângulo compreendido pelos lados do triângulo será igual ao retângulo compreendido pelos segmentos da base, juntamente com o quadrado da reta que divide o ângulo em partes iguais (Fig. 43.).

Seja o triângulo ABC, cujo ângulo BAC seja dividido em partes iguais pela reta AD. Digo que o retângulo compreendido pelos lados AB, AC é igual ao retângulo compreendido pelos segmentos BD, DC da base BC juntamente com o quadrado da reta AD.

Circunscreva-se *(Pr. 5.4.)* ao triângulo BAC o círculo ACB, e produza-se a reta AD, até que encontre a circunferência no ponto E. Tire-se a corda EC. Visto serem iguais pela hipótese os ângulos BAD, CAE; e também os ângulos ABD, AEC *(Pr. 21.3.)*, por estarem êstes no mesmo segmento ABEC; os triângulos ABD, AEC serão eqüiângulos, e por consequência será BA:AD::EA:AC *(Pr. 4,6.)*; e assim o retângulo das retas BA, AC será igual *(Pr. 16.6.)* ao retângulo das retas AE, AD; isto é, o retângulo das retas BA, AC será igual *(Pr. 3.2.)* ao retângulo das retas de ED, DA juntamente com o quadrado de AD. Mas o retângulo das retas ED, DA é igual *(Pr. 35.3.)* ao retângulo das retas BD, DC. Logo o retângulo compreendido pelos lados BA, AC será igual ao retângulo compreendido pelas retas BD, DC juntamente com o quadrado da reta AD.

PROP. C. TEOR.

Se em um triângulo do ângulo, que fica oposto à base, fôr tirada uma reta perpendicularmente sôbre a mesma base, o retângulo compreendido pelos lados do triângulo será igual ao retângulo compreendido pela dita perpendicular, e pelo diâmetro do círculo, que se pode circunscrever ao mesmo triângulo (Fig. 44.).

Seja o triângulo ABC, e do ângulo A esteja tirada a reta AD perpendicularmente sôbre a base BC. Digo que, o retângulo compreendido pelos lados BA, AC é igual ao retângulo compreendido pela reta AD e pelo diâmetro do círculo circunscrito ao triângulo ABC.

Seja circunscrito. *(Pr. 5.4.)* ao triângulo ABC o círculo ACB, cujo diâmetro seja AE. Tire-se a corda EC. Como o ângulo BDA, que é reto, é igual ao ângulo

ECA existente no semicírculo *(Pr. 31.3.)*, e também o ângulo ABD é igual *(Pr. 21.3.)* ao ângulo AEC, por estarem ambos êstes ângulos no mesmo segmento ABEC, os triângulos ABD, AEC serão eqüiângulos. Logo, será BA:AD::EA:AC *(Pr. 4.6.)*, e por conseqüência o retângulo compreendido pelos lados BA, AC será igual *(Pr. 16.6.)* ao retângulo compreendido pela reta AD perpendicular à base BC, e pelo diâmetro EA do círculo ACB circunscrito ao triângulo ABC.

LIVRO XI

DEFINIÇÕES

I

Sólido é o que tem comprimento; largura e profundidade.

II

Os têrmos do sólido são superfícies.

III

Uma linha reta é perpendicular a um plano, quando faz ângulos retos com tôdas as retas que a tocam, existentes no mesmo plano.

IV

Um plano é perpendicular a outro plano, quando as linhas retas, que em um dos planos, qual quisermos, se conduzem perpendicularmente à seção comum dos mesmos planos, ficam sendo perpendiculares também ao outro plano.

V

A inclinação de uma linha reta sôbre um plano é um ângulo agudo formado pela mesma reta e por outra existente no plano entre a dita reta e a perpendicular, que de qualquer ponto da reta inclinada cai sôbre o mesmo plano.

VI

A inclinação de um plano sôbre outro plano é um ângulo agudo feito por duas linhas retas existentes uma em um plano, e outra no outro, as quais conduzidas por um mesmo ponto, ficam sendo perpendiculares à seção comum dos ditos planos.

VII

Dois planos se dizem semelhantemente inclinados a respeito de outros dois, quando os ângulos das inclinações são iguais.

VIII

Planos paralelos são aquêles que, produzidos como qual que quisermos, nunca concorrem para parte alguma.

IX

Ângulo sólido é um ângulo formado por mais de dois ângulos planos não existentes no mesmo plano, e os quais todos têm o mesmo vértice comum.

X

Esta décima definição se deixa pelas razões, que se deram nas Notas.

XI

As figuras sólidas semelhantes são aquelas, que têm iguais os ângulos sólidos correspondentes, como também semelhantes entre si, e em número igual os planos que se correspondem.

XII

Pirâmide é uma figura sólida formada por diferentes planos, os quais todos, saindo de um mesmo plano, se terminam em um mesmo ponto.

XIII

Prisma é uma figura sólida compreendida por vários planos, entre os quais dois, que ficam opostos, são iguais, semelhantes e paralelos; os outros todos são paralelogramos.

XIV

Esfera é uma figura sólida descrita pela revolução inteira de um semicírculo ao redor do seu diâmetro, que se considera como imóvel.

XV

Eixo da esfera é aquêle diâmetro ao redor do qual o semicírculo faz a sua revolução.

XVI

Centro da esfera é o mesmo centro do semicírculo.

XVII

Diâmetro da esfera se chama qualquer linha reta, que passa pelo centro da esfera, e se termina de uma e outra parte na superfície da mesma esfera.

XVIII

Pirâmide cônica é uma figura sólida, que fica formada pela revolução inteira de um triângulo retângulo ao redor de um lado daqueles, que compreendem o ângulo reto. E êste lado se deve considerar como imóvel no tempo de uma revolução inteira do triângulo.

Se o lado, que se imagina imóvel, fôr igual ao outro que gira, e que com o primeiro faz o ângulo reto, a pirâmide cônica se chamará ortogonia; se fôr menor, ambligonia, e se maior, oxigônia.

XIX

Eixo da pirâmide cônica é aquêle lado considerado como imóvel, ao redor do qual gira o triângulo.

XX

Base da pirâmide cônica é o círculo descrito pelo outro lado, que pertence ao ângulo reto, e que faz uma revolução inteira juntamente com o triângulo.

XXI

Cilindro é uma figura sólida formada pela revolução de um paralelogramo retângulo ao redor de qualquer lado, que se deve considerar como imóvel.

XXII

Eixo do cilindro é aquêle lado fixo, ao redor dp qual o paralelogramo faz uma revolução inteira.

XXIII

Bases do cilindro são os dois círculos descritos pelos lados opostos do paralelogramo, que giram justamente com o mesmo paralelogramo.

XXIV

Tanto as pirâmides cônicas como os cilindros se dizem semelhantes, quando os eixos, e os, diâmetros das bases são proporcionais entre si.

XXV

Cubo é uma figura sólida compreendida por seis quadrados iguais.

XXVI

Tetraedro é uma figura sólida formada por quatro triângulos iguais entre si, e equiláteros.

XXVII

Octaedro é uma figura sólida compreendida por oito triângulos iguais entre si, e eqüiláteros.

XXVIII

Dodecaedro é uma figura sólida formada por doze pentágonos iguais entre si, eqüiláteros, e eqüiângulos.

XXIX

Icosaedro é uma figura sólida formada por vinte triângulos iguais entre si, e eqüiláteros.

Def. A.

Sólido paralelepípedo é uma figura sólida compreendida por seis figuras quadriláteras, das quais cada duas opostas são paralelas.

PROP. I. TEOR.

Uma linha reta não pode ter uma parte dela mesma em um plano, e outra parte fora dêste mesmo plano (Fig. 1.).

Esteja a parte AB de uma linha reta em um plano, e a parte BC da mesma linha reta, se é possível, esteja fora dêste plano. Neste mesmo plano poderá haver outra linha reta, como DB, a qual esteja em direitura com a reta AB. Mas isto assim suposto, as duas retas ABC, ABD vêm a ter o segmento comum AB, o que não pode ser *(Cor. 11.1.)*. Logo, é falso que a parte AB da linha reta ABC esteja em um plano, e a outra parte BC exista fora dêste mesmo plano.

PROP. II. TEOR.

Se duas linhas retas se cortarem reciprocamente, existirão em o mesmo plano. E três linhas retas, as quais duas a duas se encontram, também existem no mesmo plano (Fig. 2.).

Cortem-se as, duas retas AB, CD no ponto E. Digo que as retas AB, CD existem no mesmo plano. Cortem-se agora duas a duas as três retas EC, CB, BE nos pontos C, B, E. Digo que estas retas também existem em um mesmo plano.

Imagine-se que passa um plano pela reta EB, a qual poderá ser produzida, se fôr necessário. Faça-se girar êste plano ao redor da reta EB, considerada como imóvel, até que passe pelo ponto C. Como os pontos E, C existem no dito plano, neste mesmo plano deve também existir *(Def. 7.1.)* a reta EC. Pela mesma razão a reta BC existe no plano, em que pela hipótese se acha a reta EB. Logo, as três linhas retas EC, CB, BE existem em um mesmo plano. Mas o plano das retas EC, EB é o mesmo *(Pr. 1.11.)*, que o plano das retas CD, AB. Logo, as duas retas AB, CD existem em um mesmo plano.

PROP. III. TEOR.

Se dois planos se cortarem reciprocamente, a seção comum será uma linha reta (Fig. 3.).

Cortem-se reciprocamente os dois planos AB, BC, e seja a linha DB a seção comum. Digo que a linha DB é uma linha reta.

Se DB não é uma linha reta, tire-se no plano AB do ponto D para o ponto B a reta DEB, e no plano BC a reta DFB.

Logo, as duas retas DEB, DFB têm os mesmos têrmos, e compreendem um espaço, o que é absurdo *(Ax. 10.1.)*. Logo, a seção comum BD dos planos AB, DC não é senão uma linha reta.

PROP. IV. TEOR.

Se uma linha reta fôr perpendicular a outras duas retas no ponto, onde estas duas se cortam reciprocamente, a dita reta será também perpendicular ao plano, que passa pelas outras duas (Fig. 4.).

Seja a reta EF perpendicular às duas AB, CD no ponto E, que é a seção comum das mesmas retas AB, CD. Digo que a reta EF é também perpendicular ao plano, que passa pelas retas AB, CD.

Postas as quatro retas AE, EB, CE, ED iguais entre si, tire-se pelo ponto E, no plano das retas AB, CD, a reta GEH, como quisermos. Tirem-se também as retas AD, CB, e de qualquer ponto F tomado na reta EF sejam conduzidas as retas F A, FG, FD, FC, FH, FB. Sendo pois AE = EB, e DE = EC, e também o ângulo AED igual *(Pr. 15.1.)* ao ângulo BEC, será AD = BC, e o ângulo DAE igual (Pr. 4.1.) ao ângulo EBC. Mas o ângulo AEG é igual ao ângulo BEH.

Logo, nos dois triângulos AGE, BHE dois ângulos de um são iguais a outros dois ângulos do outro, cada um a cada um. Mas o lado AE do primeiro é igual ao lado EB do segundo, e estes lados ficam sendo adjacentes a ângulos iguais. Logo, os outros lados do primeiro triângulo serão iguais *(Pr. 26.1.)* aos outros do segundo, cada um a cada um, segundo ficam opostos a ângulos iguais. Logo, será GE = EH, e AG = BH. E sendo AE = EB, e FE comum, e sendo iguais, por serem retos, os ângulos AEF, BEF, será a base AF igual à base FB. Pela mesma razão será CF = FD. E porque temos AD = BC, e AF = FB, e se tem já demonstrado ser DF = FC; será o ângulo FAD igual *(Pr. 8.1.)* ao ângulo FBC. Mas também temos visto ser AG = BH, e AF = FB, e o ângulo FAG igual ao ângulo FBH. Logo, será GF = FH. Do mesmo modo sendo GE = EH, GF = FH, e EF comum, será o ângulo GEF igual ao ângulo HEF, e por conseqüência serão retos *(Def. 10.1.)* os mesmos ângulos GEF, HEF. Logo, a reta EF cai perpendicularmente sôbre a reta GH. Com o mesmo discurso se pode demonstrar que a reta EF deve ser perpendicular a tôdas as retas, que pelo ponto E forem conduzidas no plano das retas AB, CD. Mas uma linha reta é perpendicular a um plano, quando é perpendicular a tôdas as retas que a tocam, e que existem no mesmo plano *(Def. 3.11.)*. Logo, a reta FE é perpendicular ao plano, que passa pelas retas AB, CD.

PROP. V. TEOR.

Se uma linha reta fôr perpendicular a outras três retas no ponto, em que estas se cortam reciprocamente, estas três retas existirão em um mesmo plano (Fig. 5.).

Seja a reta AB perpendicular a cada uma das outras três BC, BD, BE na seção comum B. Digo que as retas BC, BD, BE existem em um mesmo plano.

Existam as duas retas BD, BE em um plano, e fora dêste plano, se é possivel, esteja a reta BC. Considere-se produzido o plano das retas AB, BC, até que chegue a cortar o plano das retas BD, BE, e seja a reta *(Pr. 3.11.)* BF a seção comum dêstes planos. Logo, no plano, que passa pelas retas AB, BC existem as três linhas retas AB, BC, BF. E como a reta AB é perpendicular a cada uma das duas BD, BE, será também perpendicular ao plano, que passa por elas *(Pr. 4.11.),* e por conseqüência a tôdas as retas, que a tocam e que existem no mesmo plano *(Def. 3.11.)*. Mas a reta BF toca a reta AB no ponto B, e existe no plano, das retas BD, BF. Logo, a reta AB será perpendicular à reta BF, e assim será reto o ângulo ABF. Mas também pela hipótese é reto o ângulo ABC. Logo, será ABF = ABC, o que não pode ser, porque, existindo ambos em um mesmo plano, é evidente que êstes ângulos são desiguais. Logo, a reta BC não está fora do plano, que passa pelas outras duas BD, BE, mas sim existe juntamente com elas no mesmo plano.

PROP. VI. TEOR.

Se duas linhas retas forem perpendiculares ao mesmo plano, estas duas retas serão paralelas uma à outra (Fig. 6.).

Sejam as duas retas AB, CD perpendiculares ao mesmo plano BDE. Digo que as retas AB, CD são paralelas entre si.

Tire-se a reta BD entre os pontos BD, nos quais as retas BD, CD encontram o plano BDE. Seja conduzida neste mesmo plano a reta DE perpendicular a BD, e igual a AB. Tirem-se também as retas BE, AE, AD. Como a reta AB é perpendicular ao plano BDE, também será perpendicular a tôdas as retas, que existirem no mesmo plano e a tocarem *(Def. 3.11.)*. Logo, a reta AB será perpendicular a cada uma das duas BD, BE, e por conseqüência serão retos os ângulos ABD, ABE. Pela mesma razão são retos também os ângulos CDB, CDE. E sendo AB = DE, e BD comum, serão as duas AB, BD iguais as duas ED, DB. Mas os ângulos ABD, EPB são iguais, por serem retos. Logo, será a base AD igual *(Pr. 4.1.)*, à base BE. Também sendo AB = DE, e BE = AD, as duas AB, BE serão iguais às duas ED, DA, cada uma a cada uma. Mas a base AE é comum. Logo, o ângulo ABE será igual *(Pr. 8.1.)* ao ângulo EDA. Mas ABE, é reto. Logo, será também reto o ângulo EDA, e por conseqüência a reta ED é também perpendicular a cada uma das duas BD, DC. Logo, ED é perpendicular a tôdas as três retas BD, DA, DC na: seção comum D, e por conseqüência estas três retas devem existir em um mesmo plano, *(Pr. 5.11.)*. Mas a reta AB existe no plano das retas BD, DA, porque três retas, que a duas duas se encontram, estão postas em um só e mesmo plano. *(Pr. 2.11.)*. Logo, as três retas AB, BD, DC existem no mesmo plano. Mas os ângulos ABD, BDC são retos. Logo, as retas AB, CD são paralelas *(Pr. 28.1.)*.

PROP. VII. TEOR.

Se duas linhas retas forem paralelas, e de qualquer ponto de uma para qualquer ponto da outra estiver tirada uma reta, esta reta existirá no plano que passa pelas ditas duas paralelas (Fig. 7.).

Seja as duas retas paralelas AB, CD, e entre os pontos E, F esteja tirada a outra reta EF. Digo que a reta EF existe no plano, que passa pelas duas paralelas AB, CD.

Se a reta tirada do ponto E para o ponto F não existe no dito plano, estará fora dêle como a reta EGF. Agora no mesmo plano das paralelas AB, CD imagine-se, tirada do ponto E para o ponto F, a reta EHF. Mas também EGF se quer considerar como uma linha reta. Logo, as duas retas EHF, EGF compreendem um espaço, o que não pode ser *(Ax. 10.1.)*. Logo, a reta, que do ponto E se tira para o ponto. F, não existe senão no plano, que passa pelas duas paralelas AB CD.

PROP. VIII. TEOR.

Se forem duas linhas retas paralelas, e fôr uma delas perpendicular a um plano, também a outra será perpendicular ao mesmo plano. (Fig. 6.).

Sejam as duas paralelas AB,. CD, €i seja AB perpendicular ao plano BDE.Digo que também CD será perpendicular ao mesmo plano BDE.

Sejam os pontos B, D aquêles, onde as paralelas AB, ÇD encontram o plano BDE. Tire-se a reta BD. As três AB, CD, BD existem em um mesmo plano. No plano BDE entenda-se descrita a reta DE perpendicular a BD, e igual a AB. Tirem-se, finalmente as retas BE, AE, AD. Como pela suposição a reta AB é perpendicular ao plano BDE, também será perpendicular a tôdas as retas, que existem no plano BDE e a tocarem *(Def. 3.11.)*. Logo, serão retos os ângulos AED, ABE. E como as paralelas AB, CD são cortadas pela reta BD, os ângulos ABD, CDB devem ser iguais a dois retos *(Pr. 29.1.)*. Mas ABD é reto. Logo, será também reto o ângulo CDB, e assim a reta CD será perpendicular a BD. E sendo AB = DE, e BD comum, as duas AB, BD serão iguais às duas ED, DB. Mas o ângulo ABD é igual ao ângulo EDB, porque ambos são retos. Logo, será a base AD igual *(Pr. 4.1.)* à base BE. Sendo pois AB = DE, e BE = AD, as duas AB, BE devem ser iguais às duas ED, DA. Mas a base AE é comum. Logo, será o ângulo ABE igual *(Pr. 8.1.)* ao ângulo EDA. E como ABE é um ângulo reto, também será o reto o ângulo EDA, e por conseqüência será a reta ED perpendicular a DA. Mas ED é também perpendicular a BD. Logo, ED será perpendicular ao plano, que passa *(Pr. 4.11.)* pelas retas BD, DA, e assim será perpendicular a tôdas as mais retas, que a tocarem, existentes no mesmo plano. Mas a reta DC está no plano das retas BD, DA, porque cada uma destas três retas existe no mesmo plano, em que existem as paralelas AB, CD. Logo, a reta ED é perpendicular a CD, e assim CD é perpendicular a DE. Mas a mesma CD é também perpendicular a DB. Logo, a reta CD é perpendicular a ambas as retas DE, DB na seção comum D, e por conseqüência é perpendicular ao plano, que passa por elas, isto é, ao plano BDE.

PROP. IX. TEOR.

As retas, que são paralelas a outra reta, e não existem no plano desta, são também paralelas entre si (Fig. 8.).

Sejam as duas retas AB, CD paralelas à reta EF e estejam as mesmas retas AB, CD fora do plano da reta EF. Digo que AB é paralela a CD.

Tome-se na reta EF um ponto G, qualquer que seja, e dêste ponto no plano, que passa pelas duas EF, AB, tire-se a reta GH perpendicular a EF, e no plano das retas EF, CD tire-se GK também perpendicular a EF. Sendo EF perpendicular a cada uma das duas GH, GK, será também perpendicular ao plano, que passa *(Pr. 4.11.)* pelas mesmas retas GH, GK. Mas a reta EF é paralela a AB. Logo, AB deve ser perpendicular ao plano, que passa *(Pr. 8.11.)* pelas retas HG, GK. Pela mesma razão, também a reta CD é perpendicular ao mesmo plano HGK. Logo, sendo as duas retas AB, CD perpendiculares ao mesmo plano, que passa pelas retas HG, GH,serão paralelas *(Pr. 6.11.)* entre si.

PROP. X. TEOR.

Se duas linhas retas, que formam um ângulo em plano, forem paralelas a outras duas, que também fazem um ângulo em outro plano, o ângulo feito pelas primeiras será igual ao ângulo formado pelas segundas (Fig. 9.).

Sejam as duas retas AB, BC paralelas às duas DE, EF que existem em plano diferente do plano das retas AB, BC. Digo que o ângulo ABC formado pelas retas AB, BC é igual ao ângulo DEF feito pelas retas DE, EF.

Ponham-se iguais entre si as retas BA, BC, ED, EF, tirem-se as outras AD, CF, BE, AC, DF. Sendo BA igual e paralela a ED, será AD igual *(Pr. 33.1.)* e paralela a BE. Pela mesma razão, será CF igual e paralela a BE. Logo, sendo tanto AD como CF igual e paralela a BE, será AD paralela (Pr. 9.11.) a CF, e também será AD = CF *(Ax. 1.1.)*; e, finalmente, será AC igual e paralela a DF, E como as duas AB, BC são iguais às duas DE, EF, e a base AC é igual à base DF, o angulo ABC sera igual *(Pr. 8.1.)* ao angulo DEF.

PROP. XI. PROB.

De um ponto dado fora de um plano conduzir uma linha reta perpendicular a êste plano (Fig.10).

Seja dado o ponto A fora do plano BH. Deve-se do ponto A conduzir uma reta perpendicular ao plano BH.

Tira-se no plano BH qualquer reta BC, e seja conduzida do ponto A a reta AD perpendicularmente (*Pr*.12.1) sobre BC. Se a reta AD fôr perpendicular ao plano BH, já estará feito o que se pede. Mas não o sendo, no plano BH tire-se do ponto D a reta DE perpendicular *(Pr. 11.1.)* a BC, e do ponto A a reta AF perpendicular a DE; e, finalmente, faça-se passar pelo ponto F a reta GR paralela *(Pr. 31.1.)* a BC. Demonstraremos que a reta AF é perpendicular ao plano BH. Sendo a reta BC perpendicular a cada um a das retas ED, DA será também perpendicular ao plano, que passa *(Pr. 4.11.)* pelas mesmas retas ED, DA. Mas a reta GH é paralela a BC, e quando, postas duas paralelas, uma delas é perpendicular a um plano, também a outra é perpendicular *(Pr. 8.11.)* ao mesmo plano. Logo, a reta GH será perpendicular ao plano, que passa pelas retas ED, DA, e por conseqüência será perpendicular a tôdas as retas, que existindo no mesmo plano a tocarem *(Def. 3.11.)* Mas a reta AF existe no plano das retas ED, DA, e toca a reta GH no ponto F. Logo, GH deve ser perpendicular a AF, e assim AF vem a ser perpendicular a GH. Mas AF é perpendicular a DE. Logo, AF é perpendicular a cada uma das duas GH, DE, e por conseqüência é perpendicular ao plano, que passa pelas retas ED, UH, que é o mesmo que o plano dado BH. Logo, do ponto dado A, existente fora do plano BH, temos conduzido a reta AF perpendicular ao mesmo plano BH.

PROP. XII. PROB.

Dado um plano, e dado um ponto neste plano, levantar do ponto dado uma perpendicular ao mesmo plano (Fig. 11.).

Seja dado o plano AC, e nêle o ponto A. Deve-se do ponto, A levantar uma reta, que seja perpendicular ao plano AC.

Tomado fora do plano AC um ponto B, qualquer que seja, tire-se deste ponto B a reta BC perpendicular *(Pr. 11.11.)* ao plano AC, e faça-se passar pelo ponto A a reta AD paralela *(Pr. 31.1.)* a BC. Sendo AD e CB paralelas entre si, e sendo BC perpendicular ao plano AC, também AD será perpendicular *(Pr. 8.11.)* ao mesmo plano AC. Logo, do ponto A dado no plano AC temos levantado a reta AD perpendicular ao mesmo plano AC.

PROP. XIII. TEOR.

De um mesmo ponto tomado em um plano não se podem levantar para a mesma parte duas linhas retas, que sejam perpendiculares a dito plano. Também de um ponto tomado fora de um plano não se pode conduzir senão uma só linha reta perpendicularmente sôbre o mesmo plano (Fig. 12.).

Sejam levantadas, se é possível, do ponto A tomado no plano DE sôbre êste mesmo plano, e para a mesma parte as duas perpendiculares AB, AC, pelas quais se imagine que passa outro plano.

Êste plano cortando o plano proposto DE fará com êle uma seção comum, e será esta uma linha reta *(Pr. 3.11.)*, a qual passará pelo ponto A. Seja, a reta DAE esta seção comum. Logo, as três retas AB, AC, DAE devem existir no mesmo plano. Sendo pois CA perpendicular ao plano DE será também perpendicular a tôdas as retas, que existirem neste plano e a tocarem. Mas a reta DAB existe no plano DE, e toca a reta CA no ponto A. Logo, será AC perpendicular a DAE, e assim será reto o ângulo CAB. Do mesmo modo é reto também o ângulo BAE. Logo, será CAE = BAE, o que é absurdo porque, existindo êstes ângulos no mesmo plano, é evidente ser CAE<BAE. Logo, de um mesmo ponto tomado em um plano não se podem levantar, para a mesma parte, duas retas que sejam perpendiculares ao dito plano.

Mas, se de um ponto tomado fora de um plano supusermos que se podem conduzir duas retas perpendiculares ao mesmo plano, estas duas retas serão paralelas *(Pr. 6.11.)*. Mas isto é impossível, porque duas paralelas nunca se chegam a tocar. Logo, de um ponto tomado fora de um plano não se pode conduzir senão uma só linha reta, perpendicular ao mesmo plano.

PROP. XIV. TEOR.

Aquêles planos são paralelos entre si, sôbre os quais ambos a mesma linha reta cai perpendicularmente (Fig. 13.).

Seja a mesma linha reta AB perpendicular tanto ao plano CD, como ao plano EF. Digo que os planos CD, EF são paralelos. Se os planos CD, EF não são paralelos, produzidos hão de concorrer para alguma parte. Concorram pois, seja a reta GH a seção comum dêles; e tomado na mesma seção GH o ponto qualquer K, tirem-se as retas AK, BK. Sendo a reta AB perpendicular ao plano EF, também será perpendicular à reta BK, existente no mesmo plano EF produzido *(Def. 3.11.)*. Logo, é reto o ângulo ABK. Pela mesma razão também é reto o ângulo BAK; e, conseqüentemente, os dois ângulos ABK, BAK do triângulo ABK são iguais a dois retos, o que é impossível *(Pr. 17.1.)*. Logo, os dois planos CD, EF produzidos, quanto se quiser, não concorrem. Logo, são paralelos *(Def. 8.11)*.

PROP. XV. TEOR.

Se duas linhas retas, que fazem um ângulo em um plano, forem paralelas a outras duas, que formam outro ângulo em outro plano, o plano, que passar pelas primeiras, será paralelo ao plano, que passar pelas segundas (Fig. 14.).

As duas retas AB, BC, que formam o ângulo ABC, sejam paralelas às outras duas DE, EF, que fazem o ângulo DEF. Digo que o plano ABC, que passa pelas retas AB, BC, é paralelo ao plano DEF, que passa pelas retas DE, EF.

Tire-se do ponto B a reta BG perpendicular *(Pr. 11.11.)* ao plano, que passa pelas retas DE, EF, e seja G o ponto, em que a reta BG encontra, o plano DEF. Tirem-se *(Pr. 31.1.)* pelo ponto G as retas GH paralela a ED, e GK paralela a EF. Como a reta. BG cai perpendicularmente sôbre o plano DEF, também será perpendicular *(Def. 3.11.)* a tôdas as mais retas, que existindo neste mesmo plano a tocarem. Mas as duas retas GH, GK existem no dito plano, e tocam a reta BG. Logo, será BG perpendicular tanto a GH como a GK, e assim será reto cada um dos ângulos BGH, BGK. Sendo pois BA paralela *(Pr. 9.11.)* a GH, por serem ambas paralelas à mesma reta DE, ainda que existam em diferentes planos, os ângulos GBA, BGH, serão iguais *(Pr. 29.1.)* a dois retos. Mas BGH é um ângulo reto. Logo, será também reto o ângulo GBA, e por conseqüência será GB perpendicular a BA. Pela mesma razão a reta GB deve ser perpendicular a BC. Logo, sendo GB perpendicular a cada uma das duas BA, BC no ponto em que estas se cortam, a mesma GB será também perpendicular *(Pr. 4.11.)* ao plano conduzido pelas retas, BA, BC. Mas o mesmo se verifica a respeito do plano, que passa pelas retas DE, EF. Logo, a mesma reta BG é perpendicular tanto ao plano ABC, como ao plano DEF. Mas os planos, sôbre os quais a mesma reta cai perpendicularmente, são paralelos

(Pr. 14.11.) entre si. Logo, o plano, que passa pelas. retas AB, BC, é paralelo ao plano, que passa pelas retas. DE, EF.

PROP. XVI. TEOR.

Se dois planos paralelos forem cortados por outro plano as seções comuns dêstes planos serão paralelas (Fig. 15.).

Sejam cortados os dois planos paralelos AB, CD pelo plano EFHG, e sejam as retas EF, GH as seções comuns dêstes planos. Digo que as retas EF, GH são paralelas.

Se as retas EF, GH não são paralelas, produzidas devem concorrer, ou para a parte FH, ou para a parte oposta EG. Sejam, por exemplo, produzidas para a parte FH, e concorram no ponto K. Como a reta EFK existe no plano AB, qualquer ponto dela, como o ponto K, deve existir no mesmo plano. Pela mesma razão, o ponto K deve também existir no plano CD. Logo, os planos AB, CD produzidos concorrem entre si. Mas isto é contra a suposição de serem paralelos os planos AB, CD. Logo, as retas EF, GH não concorrem para a parte FH, por mais que sejam produzidas. Com o mesmo discurso podemos demonstrar que as mesmas retas EF, GH, produzidas para a parte EG, nunca poderão concorrer entre si. Logo, são paralelas.

PROP. XVII. TEOR.

Se duas linhas retas forem cortadas por diferentes planos todos entre si paralelos, estas retas ficarão tôdas divididas na mesma razão (Fig. 16.).

Sejam cortadas as duas retas AB, CD pelos planos paralelos GH, KL, MN nos pontos A, E, B; C, F, D. Digo que, será AE:EB::CF:FD.

Tirem-se as retas AC, BD, AP, e encontre a reta AD o plano KL no ponto X. Tirem-se também as retas EX, XF. Como os dois planos paralelos KL, MN são cortados pelo plano EBDX, serão paralelas *(Pr. 16.11.)* entre si as seções comuns EX, BD. Pela mesma razão, porque os dois planos paralelos GR, KL são cortados pelo plano AXFC, devem ser também paralelas as seções comuns AC, XF. Sendo pois no triângulo ABD a reta EX paralela ao lado BD, será AE:EB::AX:XD *(Pr. 2.6.)*. E no triângulo ADC, será AX:XD::CF:FD.Mas temos visto ser AX:XD::AE:EB. Logo, será AE:EB::CF:FD *(Pr. 11.5.)*.

PROP. XVIII. TEOR.

Se uma linha reta cair perpendicularmente sôbre um plano, todos os planos, que passarem pela dita reta, serão perpendiculares ao dito plano (Fig. 17.).

Caia a reta AB perpendicularmente sôbre o plano CK. Digo que todos os planos conduzidos pela reta AB são perpendiculares ao plano CK.

Seja conduzido pela reta AB o plano DE, e seja a reta CE a seção comum dos planos DE, CK. Tome-se na reta CE o ponto F, como se quiser; e dêste ponto F tire-se no plano DE a reta FG perpendicular a CE. Como pela hipótese a reta AB é perpendicular ao plano CK, será também perpendicular a tôdas as retas, que existirem no mesmo plano, e a tocarem *(Def. 3.11.)*. Logo, será também perpendicular a CE, e por conseqüência será reto o ângulo ABF. Mas GFB é reto. Logo, será AB paralela *(Pr. 28.1.)* a FG. Mas AB é perpendicular ao plano CK. Logo, será também FG perpendicular *(Pr. 8.11.)* ao mesmo plano CK. Mas um plano é perpendicular a outro plano quando as retas, tiradas em um dos planos perpendicularmente à seção comum dos mesmos planos, são também perpendiculares *(Def. 4.11.)* ao outro plano; e juntamente temos demonstrado, que a reta FG, tirada no plano DE perpendicularmente sôbre a seção comum CR dos planos DE, CK, é perpendicular ao plano CK. Logo, o plano DE é perpendicular ao plano CK. Do mesmo modo se demonstrará que todos os mais planos, que forem conduzidos pela reta AB, serão perpendiculares ao mesmo plano CK.

PROP. XIX. TEOR.

Se dois planos, que se cortam reciprocamente, forem perpendiculares a um terceiro plano, a seção comum dos ditos planos será também perpendicular ao terceiro plano (Fig. 18.).

Sejam os dois planos AB, BC perpendiculares ao plano ADC, e seja a reta BD a seção comum dos mesmos planos AB, BC, que reciprocamente se cortam. Digo que a reta BD é perpendicular ao plano ADC.

Suponhamos não ser a reta BD perpendicular ao plano ADC. Tire-se do ponto D, no plano AB, a reta PE perpendicular a AD j e no plano BC tire-se a reta DF perpendicular a CD. Sendo o plano AB perpendicular ao plano ADC, e sendo a reta ED existente no plano AB perpendicular à seção comum AD dos planos AB, ADC; será DE perpendicular *(Def. 4.11.)* ao plano ADC. Pela mesma razão deve ser a reta DF perpendicular ao mesmo plano ADC. Logo, do mesmo ponto D, existente no plano ADC, estão levantadas para a mesma parte as duas retas DE, EF perpendiculares ao mesmo plano ADC, o que não pode ser *(Pr. 13.11.)*. Logo, do ponto D não se pode levantar sôbre o plano ADC uma perpendicular, que não seja a reta DB, que é a seção comum dos planos AB, DC. Logo, a reta DD é perpendicular ao plano ADC.

PROP. XX. TEOR.

Se um ângulo sólido fôr feito por três ângulos planos, dois dêstes, quais quisermos, tomados juntos serão maiores que o terceiro (Fig. 19.).

Seja o ângulo sólido A formado pelos três ângulos planos DAC, CAD, DAB. Digo que dois dêstes ângulos, quaisquer que sejam, tomados juntamente são maiores que o terceiro.

Se os três ângulos BAC, CAD, DAB forem iguais entre si, fica evidente a verdade do que se afirma. Mas, suposto serem desiguais, seja o ângulo BAC não menor que qualquer dos outros dois, e ao mesmo tempo seja maior que o ângulo DAB. No plano, que passa pelas retas BA, AC, tire-se do ponto A a reta AE, de maneira que seja o ângulo BAE = DAB *(Pr. 23.1)*. Ponha-se AE = AD e pelo ponto E faça-se passar a reta BEC, que corte as duas AB, AC nos pontos B, C, e finalmente tirem-se as retas DB, DC. Sendo DA = AE, e AB comum, serão as duas DA, AB iguais às duas EA, AB. Más temos o ângulo DAB = BAE. Logo, será a base DB igual *(Pr. 4.1.)* à base BE. E como as duas retas BD, DC tomadas juntas são maiores *(Pr. 20.1.)* que CB, e é DB = BE, tirando de uma parte a reta DB, e de outra a reta BE, ficará DC>EC; Sendo pois DA = AE, e AC comum, e DC>EC; será o ângulo DAC>EAC *(Pr. 25.1.)*. Mas pela construção temos DAB = BAE. Logo, os ângulos DAB, DAC tomados juntos são maiores que o ângulo BAC. Mas temos suposto êste ângulo BAC não menor que qualquer dos dois DAB, DAC. Logo, o mesmo ângulo BAC juntamente com um, seja qualquer que fôr, dos ditos ângulos DAB,DAC, será maior, do que o outro que restar dos mesmos ângulos DAB, DAC.

PROB. XXI. TEOR.

Os ângulos planos, qualquer que seja o número deles, que formam um ângulo sólido, todos juntamente tomados são menores que quatro ângulos retos (Figs. 20 e 21.).

Seja primeiramente o ângulo sólido A formado pelos três ângulos planos BAC, CAD; DAB.Digo que os ângulos BAC, CAD, DAB tomados juntos são menores que quatro ângulos retos.

Tomem-se, como se quiser, nas retas AB, AC, AD os pontos B, C, D, e tirem-se as retas BC, CD, DB. Como o ângulo sólido B é formado pelos três ângulos planos CBA, ABD, DBC; dois dêstes ângulos, quaisquer que sejam, tomados juntos, serão maiores *(Pr. 20.11.)* que o terceiro. Logo, os dois ângulos CBA, ABD são maiores que o ângulo DBC. Do mesmo modo os dois BCA, ACD são maiores que DCB e os dois CDA, ADB são maiores que BDC. Logo, os seis ângulos CBA, A.BD, BCA, ACD, CDA, ADB tomados todos juntamente serão maiores do que os três DBC, BCD, CDB também tomados juntos. Mas os três DBC, BCD, CDB são iguais *(Pr. 32.1.)* a dois retos. Logo, os seis ângulos CBA, ABD, BCA, ACD, CDA, ADB, são maiores que dois retos. E como os três ângulos de cada um dos triângulos ABC, ACD, ADB são iguais a dois retos; os nove ângulos CBA, BAC, ACB, ACD, CDA, DAC, ADB, DBA, BAD dos ditos três triângulos serão iguais a seis ângulos retos. Mas seis dêstes ângulos, isto é, os ângulos CBA, ACB, ACD, CDA, ADB, DBA, são maiores que dois retos, como já se tem demonstrado. Logo, os três, que ficam e que formam o ângulo sólido A, isto é, os, ângulos BAC, CAD, DAB, serão menores que quatro ângulos retos.

Seja agora o ângulo sólido A *(Fig. 21.)* formado por quantos ângulos planos quisermos, como, por exemplo, pelos ângulos planos BAC, CAD, DAE, EAF, FAB. Digo também que todos êstes ângulos tomados juntos são menores que quatro retos.

Sejam cortados os planos, em que existem os ditos ângulos, por qualquer outro plano, e sejam as retas BC, CD, DE, EF, FB as seções comuns de todos os planos. Como o ângulo sólido B é feito pelos três ângulos planos

CBA, ABF, FBC, dois dêstes ângulos, tomados como se quiser, serão sempre maiores que o terceiro. Logo, os dois CBA, ABF são maiores que FBC. Pela mesma razão, cada dois ângulos planos formados nos pontos C, D, E, F, os quais ângulos são adjacentes às bases dos triângulos, que têm como vértice comum o ponto A, são maiores que o terceiro feito no mesmo ponto que os outros dois, e que sempre vem a ser um ângulo do polígono BCDEF, Logo, todos os ângulos existentes sôbre as bases dos triângulos, cujo vértice comum é o ponto A, tomados juntamente, são maiores que todos os ângulos do polígono BCDEF, também tomados juntos. Mas, como todos os ângulos dos ditos triângulos, tomados juntamente, são iguais a duas vêzes tantos retos, quantos são os mesmos triângulos, isto é, quantos são os lados do polígono, BCDEF, e além disto todos os ângulos de qualquer polígono, juntamente com quatro retos, são iguais a duas vêzes tantos retos, quantos são os lados do polígono *(1. Cor. 32.1.)*; serão todos os ângulos dos ditos triângulos, tomados juntamente, iguais a todos os ângulos do polígono também tomados juntos, e mais a quatro retos. Mas já se tem demonstrado quê todos os ângulos, existentes sôbre as bases, dos ditos triângulos são maiores que todos os ângulos do polígono BCDEF. Logo, os outros ângulos dos mesmos triângulos, que formam o ângulo sólido A, devem ser menores que quatro retos. Fica pois demonstrado que os ângulos planos, que em qualquer número formam um ângulo sólido, tomados juntamente, são menores que quatro ângulos retos.

PROP. XXII. TEOR.

Se houver três ângulos planos, dos quais dois, tomados como quisermos, sejam maiores que o terceiro, e se os lados, que formam os ditos ângulos, forem iguais entre si; com as retas, quê estiverem tiradas entre as extremidades dos ditos lados iguais, sempre se poderá construir um triângulo (Fig. 22.).

Sejam os três ângulos planos ABC, DEF, GHK, e dois dêstes ângulos, quaisquer que forem, sejam maiores que o terceiro. Sejam também iguais entre si os lados AB, BC, DE, EF, GH, HK. Tirem-se as retas AC, DF, GK. Digo que se poderá fazer um triângulo com as três retas AC, DF, GK, isto é, que duas quaisquer destas três retas serão sempre maiores que a terceira.

Se os ângulos ABC, DEF, GHK forem iguais, também as retas AC, DF, GK serão iguais *(Pr. 4.1.)*; e por conseqüência duas destas, quaisquer que sejam, serão maiores que a terceira. Mas suponhamos serem desiguais os ângulos, ABC, DEF, GHK, e juntamente ser o ângulo ABC não menor que qualquer dos outros dois DEF, GHK. Será a reta AC não menor que DF, nem menor que GK *(Pr. 4. ou 24.1.)*. É pois evidente que a reta AC, juntamente com a reta DF, será maior que GK, e que a mesma AC juntamente, com GK será maior que DF. Digo que as duas DF, GK tomadas juntas são maiores que AC. Faça-se *(Pr. 23.1.)* no ponto B e com a reta AB o ângulo ABL = GHK, e ponha-se BL igual a uma das retas AB, BC, DE, EF, GH, HK. Tirem-se as outras AL, LC. Como cada uma das retas AB, BL, é igual a cada uma das retas GH, HK, e são iguais os ângulos compreendidos ABL, GHK, serão também iguais entre si as bases AL, GK. E como os ângulos E, H tomados juntos são pela hipótese maiores que o ângulo ABC, e temos o ângulo H = ABL, será o ângulo E>LBC. Sendo pois cada uma das duas LB, BC igual a cada uma das duas DE, EF, e sendo o ângulo, DEF>LBC, será a base DF maior que a base LC. Mas temos. visto ser GK = AL. Logo; as duas retas DF, GK, tomadas juntas, serão maiores que as duas AL, LC, também tomadas juntas. Mas as duas AL, LC juntas são maiores *(Pr. 20.1.)* que AC. Logo, as duas DF, GK tomadas juntas serão ainda maiores que AC. Fica pois demonstrado que das três retas AC, DF, GK duas, quaisquer que sejam, tomadas juntas são maiores que a terceira, e que assim poderemos com elas construir *(Pr. 22.1.)* um triângulo.

PROP. XXIII. PROB.

Dados três ângulos planos, que todos juntos sejam menores que quatro ângulos retos, e dos quais dois tomados como quisermos, sejam maiores que o terceiro, formar com êles um ângulo sólido (Figs. 23, 24, 25, 26 e 27.).

Sejam os três ângulos planos ABC, DEF, GHK tomados juntos menores que quatro retos; e dois quaisquer dêles, também tomados juntos, suponha-se sejam maiores que o terceiro. Com os três ângulos planos ABC, DEF, GHK se deve formar um ângulo sólido.

Ponham-se iguais entre si as retas AB, BC, DE, EF, GH, RK, e tirem-se as outras AC, DF, GK. Com estas três retas AC, DF, GK poder-se-á fazer um triângulo *(Pr. 22.11.)*. Faça-se pois *(Pr. 22.11)*, e. seja o triângulo LMN, de sorte que seja AC=LM, DF=MN, e GK=NL *(Fig. 24.25.)*. Circunscreva-se *(Pr. 5.4.)* ao triângulo LMN o círculo LMN, cujo centro X cairá ou dentro do triângulo, ou em um dos lados dêle, ou fora do triângulo.

Caia em primeiro lugar o centro X *(Fig. 24.)* dentro do triângulo LMN, e tirem-se os raios LX, MX, NX. Digo que é AB>LX. Se não fôr AB>LX, será ou AB = LX, ou AB<LX. Suponha-se primeiramente ser AB = LX. Sendo pois AB = LX, e sendo, pela construção AB = BC, e LX = XM, serão as duas AB, BC iguais às duas LX, XM, cada uma a cada uma. Mas a base AC do ,triângulo ABC é igual à base LM do triângulo LXM. Logo, será ô ângulo ABC = LXM *(Pr. 8.1.)*. Pela mesma razão será DEF = MXN, e GHK = NXL. Logo, os três ângulos ABC, DEF, GHK, tomados juntos, são iguais aos três LXM, MXN, NXL, também tomados juntos. Mas êstes são iguais a quatro retos *(2. Cor. 15.1.)*. Logo, os três ABC, DEF, GHK, serão iguais a quatro retos, o que é absurdo, porque Os temos suposto todos juntos menores que quatro retos. Logo, não podia ser AB = LX.

Digo agora que nem pode ser AB<LX. Suponha-se AB<LX. Faça-se sôbre a reta LM, e para a parte do centro X, o triângulo LOM, de maneira que seja LO = AB, e OM = BC. Sendo pois a base LM igual à base AC, será o ângulo LOM = ABC *(Pr. 8.1.)*. Mas temos suposto ser AB; isto é, LO<LX. Logo, as duas retas LO, MO devem cair por dentro do triângulo LXM, porque, se se ajustassem sôbre os lados LX, XM do triângulo LXM, ou inteiramente caíssem para fora do mesmo triângulo, seriam ou iguais ou maiores que os lados LX, XM *(Pr. 21.1.)*. Logo, deve ser o ângulo LOM, isto é, o ângulo ABC>LXM *(Pr. 21.1.)*. Com o mesmo discurso se demonstra ser DEF>MXN, e GHK>NXL.

Logo, os três ângulos ABC, DEF, GHK, tomados juntos são maiores que os três LXM, MXN, NXL, também tomados juntos, e por conseqüência os ditos três ângulos ABC, DEF, GHK são maiores que quatro retos. Mas isto não pode ser, porque pela hipótese eram todos juntos menores que quatro retos. Logo, é falso ser AB<LX. Mas também se tem demonstrado que não pode ser AB = LX. Logo, resta ser AB>LX.

Caia agora o centro do círculo em um dos lados do triângulo LMN (Fig. 25.) por exemplo no lado MN, e seja o ponto X o dito centro. Digo outra vez que é AB>LX. Se não fôr AB>LX, será ou AB = LX, ou AB<LX. Seja primeiramente AB = LX. Serão as duas retas AB, BC juntas, isto é, as duas DE, EF, iguais às duas MX, XL, isto é, iguais a MN. Mas é MN = DF. Logo, as duas DE, EF, tomadas juntamente serão iguais a DF, o que não pode ser *(Pr. 20.1.)*. Não é pois AB = LX. Mas nem pode ser AB<LX. Porque feita esta suposição, finalmente se manifesta um absurdo ainda mais visível. Logo, deve ser AB >LX.

Caia finalmente o centro X. (Fig. 26 e 27.) do círculo fora do triângulo LMN. Tirem-se os semidiâmetros LX, MX, NX. Digo que também neste caso será AB>LX. Se não fôr AB>LX, será AB = LX, ou AB<LX. Seja em primeiro lugar AB = LX: Podemos demonstrar, como no primeiro caso, ser o ângulo ABC = MXL, e GHK = LXN. Logo, será o ângulo total MXN igual aos dois ABC, GHE tomados juntamente. Mas os dois ABC, GHK são maiores que o ângulo DEF. Logo, será MXN>DEF. E como os dois dos lados DE, EF são iguais aos dois MX, XN cada um a cada um; e também a base DF é igual à base MN, será o ângulo MXN = DEF *(Pr. 8.1.)*, o que é absurdo, por têrmos já demonstrado ser MXN>DEF. Logo, não é AB = LX.

Também digo, que não pode ser AB<LX. Se supusermos que é AB<LX; será o ângulo ABC>MXL, e GHK>LXN, como temos visto no primeiro caso. Faça-se no ponto B e com a reta BC o ângulo CBP = GHK, e posta BP = HK, tirem-se as retas CP, AP. Sendo CB = GH, serão as ditas CB, BP, iguais às duas GH, HK. Mas os ângulos CBP, GHK compreendidos por estas retas são iguais. Logo, será a base CP igual à base GK, ou LN. E nos triângulos ABC, MXL, dos quais cada um é isósceles, sendo o ângulo ABC, no vértice maior do que o ângulo MXL também no vértice, o ângulo MLX feito sôbre a base ML será maior *(Pr, 32.1.)* que o ângulo ACB formado sôbre a base AC. Pela mesma razão, sendo GHK, isto é, CBP>LXN, será também XLN>BCP. Logo, será o ângulo total MLN maior que o total ACP. E como os dois lados ML, LN são iguais aos dois AC, CP, cada um a cada um, e temos o ângulo MLN>ACP, será a base MN maior *(Pr. 24.1.)* que a base AP. Mas é MN = DF. Logo, será DF>AP. Logo, sendo os lados DE, EF iguais aos lados AB, BP, cada um a cada um; e sendo DF>AP, será o ângulo DEF>ABP *(Pr. 25.1.)*.

Mas o ângulo ABP é igual aos dois ABC, CBP, isto é, aos dois ABC, GHK tomados juntamente. Logo, o ângulo DE será ,maior que os dois ABC, GHK tomados juntos, o que é absurdo, por ser aquêle menor do que êstes dois juntos, pela suposição que temos feito. Logo, não é AB<LX. Mas temos demonstrado que nem é AB = LX. Logo, fica sendo AB>LX.

Tudo isto demonstrado assim, levante-se do ponto X (Fig. 23, 24, 25, 26 e 27.) a reta XR perpendicularmente *(Pr. 12.11.)* sôbre o plano do círculo

LMN. E como em todos os casos temos visto ser AB>LX, ponha-se RX de tal comprimento, que o seu quadrado seja igual ao excesso do quadrado de AR sôbre o quadrado de LX. Tirem-se finalmente às retas RL, RM, RN. Sendo pois a reta RX perpendicular ao plano do círculo LMN, será também perpendicular *(Def. 3.11.)* aos semidiâmetros LX, MX, NX, E sendo LX = XM, e XR comum, e retos os ângulos RXL, RXM, e por conseqüência iguais entre si, será RL = RM. Do mesmo modo deve ser RN = RL, e RN = RM. Logo, são iguais entre si as três retas RL, RM, RN. E como temos suposto ser o quadrado de XR igual ao excesso, em que o quadrado de AB excede o quadrado de LX, será o quadrado de AB igual aos dois quadrados de LX, e XR. Mas o quadrado de RL é igual (Pr. 47.1.) aos quadrados de LX e de XR, por ser reto o ângulo LXR. Logo, o quadrado de AB será igual ao quadrado de RL, e por conseqüência será AB = RL. Mas cada uma das retas BC, DE, EF, GH, HK é igual a AB, e tanto RM como RN é igual a RL. Logo, cada uma das retas AB, BC, DE, EF, GH, HK será igual a cada uma das retas RL, RM, RN. E como as duas RL, RM são, iguais às duas AB, BC, e a base LM é igual à base AC, será o ângulo LRM = ABC *(Pr. 8.1.)*. Pela mesma razão, será também o ângulo MRN = DEF, e NRL = GHK. Logo, com os três ângulos planos LRM, MRN, NRL, que são iguais aos três dados ABC, DEF, GHK, temos formado no ponto R um ângulo sólido, como se pedia.

PROP. A. TEOR.

Se forem dois ângulos sólidos ambos formados por três ângulos planos, sendo os três ângulos planos, que formam um dêstes ângulos sólidos, iguais aos três, que compreendem o outro ângulo sólido, cada um a cada um; os planos, em que existirem os ângulos planos iguais, serão entre si dois a dois semelhantemente inclinados (Fig. 28.).

Sejam os dois ângulos sólidos A, B, e seja o ângulo A formado pelos três ângulos planos CAD, CAE, EAD, e o ângulo B pelos três FBG, FBH, HBG. Seja também Q ângulo CAD = FBG; CAE = FBH, e EAD = HBG. Digo que os planos, em que existem os ditos ângulos iguais, têm entre si dois a dois a mesma inclinação.

Tome-se na reta AC qualquer ponto K, e dêste ponto K tire-se no plano CAD a reta KD, e no plano CAE tire-se a reta KL, uma e outra perpendicularmente sôbre a reta AC. O ângulo DKL é a inclinação *(Def. 6.11.)*, do plano CAD a respeito do plano CAE. Tome-se agora na reta BF a parte BM = AK, e tirem-se do ponto M nos planos FBG, FBH as retas MG, MN perpendiculares a BF. Será o ângulo GMN a inclinação do plano FBG sôbre o plano FBH. Tirem-se as retas LD, NG. Como nos triângulos KAD, MBG, são iguais os ângulos KAD, MBG, e também os ângulos AKD, BMG por serem retos e além disto têrmos AK = MB, será KD = MG, e AD = BG *(Pr. 26.1.)*. Pela mesma razão, nos triângulos KAL, MBN será KL = MN, e AL = BN. Mas nos triângulos LAD, NBG temos visto que os lados LA, AD são iguais aos lados NB, BG, cada um a cada um, e que êstes lados compreendem ângulos iguais. Logo, será LD = NG *(Pr. 4.1)*. Finalmente, nos triângulos KLD, MNG os lados DK, EL são iguais aos lados GM, MN, cada um a cada um, e a base LD é igual à base NG. Logo, será o ângulo DKL = GMN *(Pr. 8.1.)*. Mas o ângulo DKL é a inclinação do plano CAD sôbre o plano CAE, e o ângulo GMN a incl1nação do plano FBG sôbre o plano FBH. Logo, êstes planos estão entre si semelhantemente inclinados *(Def. 7.11.)*. Com o mesmo discurso podemos demonstrar que os outros planos, em que existem ângulos iguais, têm entre si respectivamente a mesma inclinação.

PROP. B. TEOR.

Se forem dois ângulos sólidos, ambos formados por três ângulos planos, sendo os três ângulos planos, que formam um dêstes ângulos sólidos, iguais aos três, que fazem o outro ângulo sólido, cada um a cada um, e semelhantemente postos, os ditos ângulos sólidos serão iguais (Fig. 29.).

Sejam os ângulos sólidos A, B, e seja o ângulo A formado pelos três ângulos planos CAD, CAE, EAD, e o ângulo B pelos três FBG, FBH, HBG. Seja também o ângulo CAD = FBG, CAE = FBH, e EAD = HBG. Digo que o ângulo sólido A é igual ao ângulo sólido B.

Aplique-se o ângulo sólido A ao ângulo sólido B, principiando por aplicar o ângulo plano CAD ao ângulo plano FBG, de maneira que o ponto A caia no ponto B, e a reta AC sôbre a reta BF. A reta AD cairá sôbre a reta BG, por ser o ângulo CAD = FBG. E como a inclinação do plano CAE sôbre o plano CAD é igual *(Pr. A.11.)* a inclinação do plano FBH sôbre o plano FBG, e o plano CAD está aplicado ao plano FBG; também o plano CAE se ajustará sôbre o plano FBH, e a reta AE sôbre a reta BH, por ser o ângulo CAE = FBH. Mas temos visto que a reta AD se ajusta sôbre a reta BG. Logo, o plano EAD se deve também ajustar sôbre o plano HBG. Logo, os ângulos sólidos. A, B se ajustam entre si a respeito de tôdas as suas partes, e conseqüentemente são iguais *(Ax. 8.1.)*.

PROP. C. TEOR.

As figuras sólidas formadas por planos semelhantes, em número e grandeza iguais, e semelhantemente postos, são iguais entre si, e semelhantes, contanto que cada um dos ângulos sólidos das ditas figuras sejam compreendido por três ângulos planos, e não por mais (Fig. 30.).

Sejam as figuras sólidas AG, KQ formadas por, planos semelhantes, em número e grandeza iguais, e semelhantemente postos. Seja o plano AC semelhante e igual ao plano KM; o plano AF semelhante e igual ao plano KP; o plano BG semelhante e igual ao plano LQ, e assim sempre, isto é, GD a QN; DE a NO, e RF a RP. Digo que a figura sólida AG é igual e semelhante à figura sólida KQ.

Como o ângulo sólido A é compreendido pelos três ângulos planos BAD, BAE, EAD, os quais pela hipótese são iguais aos três LKN, LKO, OKN, cada um a cada um, e êstes três formam o ângulo sólido K, será o ângulo A igual *(Pr. B.11.)* ao ângulo sólido K. Do mesmo modo os outros ângulos sólidos das duas figuras serão iguais entre si, respectivamente. Aplicando pois a figura sólida AG a figura sólida KQ, de maneira que a figura plana AC caia sôbre a figura plana KM, e tôda a reta AB sôbre tôda a reta KL; a figura AC se ajustará em tôdas as partes dela. sôbre a figura KM, por serem estas figuras iguais entre si e semelhantes. Logo, as retas AD, DC, CB se devem ajustar sôbre as retas KN, NM, ML, cada, uma sôbre cada uma, respectivamente; e os pontos A, D, C, B sôbre os pontos K, N, M, L, e o ângulo sólido A sôbre o ângulo sólido K, e, por conseqüência, o plano AF sôbre o plano KP, e a figura AF sôbre a figura KP, sendo estas iguais e semelhantes. Logo, as retas AE; EF, FB devem cair sôbre as retas KO, OP, PL, e os pontos E, F sôbre os pontos O, P. Do mesmo modo se provará que a figura AH se deve ajustar sôbre a figura KR, e à reta DH sôbre a reta NR, e o ponto R sôbre o ponto H. Sendo pois o ângulo sólido B igual ao ângulo sólido L, com a mesma demonstração concluiremos que a figura BG se ajusta sôbre a figura LQ, e a reta CG sôbre a reta MQ, e o ponto G sôbre o ponto Q. Ajustando-se pois entre si todos os planos e lados das figuras sólidas AG, KQ, serão estas iguais entre si, e semelhantes.

PROP. XXIV. TEOR.

Se houver um sólido formado por seis planos, paralelos entre si dois a dois, os que ficam opostos, êstes planos opostos serão paralelogramos iguais e semelhantes (Fig. 31.).

Seja o sólido CDGH formado pelos planos paralelos AC, GF, BG, QE, FB, AE. Digo que os planos opostos AC, GF BG, CE, FB, AE são paralelogramos iguais e semelhantes.

Como os planos paralelos BG, CE estão cortados pelo plano AC, serão paralelas entre si. *(Pr. 16.11.)* as seções comuns AB, CD. Pela mesma razão devem ser paralelas as seções comuns AD, BC dos planos BF, AE como o plano AC. Mas temos visto que a reta AB é paralela a CD. Logo, a figura AC será um paralelogramo. Do mesmo modo se pode demonstrar que as figuras CE, FG, GB, BF, AE são paralelogramos. Tirem-se as diagonais AH, DF. Sendo pois a reta AB, paralela a DC, e BH paralela a CF, isto é, as duas AB, BH paralelas às duas DC, CF existentes em outro plano, será o ângulo. ABH = DCF *(Pr. 10.11.)*. E também sendo as duas AB, BH iguais às duas DC, CF cada uma a cada uma, e sendo o ângulo ABH = DCF, será AH = DF, e o triângulo ABH igual (Pr. 4.1.) ao triângulo DCF. Mas o paralelogramo BG é o dôbro *(Pr. 34.1.)* do triângulo ABH, e o paralelogramo CE é ó dôbro do triângulo DCF. Logo, o paralelogramo BG será igual e semelhante ao paralelogramo CE. Com a mesma demonstração se provará que Os paralelogramos AC, AE são, respectivamente, iguais e semelhantes aos paralelogramos GF, DF.

PROP. XXV. TEOR.

Se um sólido paralelepipedo fôr cortado por um plano paralelo a dois planos opostos do mesmo sólido, as bases dos *sólidos, em que estiver dividido o sólido total; terão entre si a razão que têm os mesmos sólidos (Fig. 32.).*

Seja o paralelepípedo ABCD cortado pelo plano EV paralelo aos planos opostos AR, HD. Digo que a base AEFY é para a base EHCF, como o sólido ABFV para o sólido EGOD.

Produza-se a reta AH para uma e outra parte, e tomadas as partes HM, MN em qualquer número, e cada uma delas igual à reta EH, e as partes AK, KL também em qualquer número, e cada uma igual à reta EA; façam-se os paralelogramos LO, KY, HQ, MS, e sôbre êles como bases os sólidos LP, KR, HU, MT. Sendo iguais entre si as retas LK, KA, AE, também serão iguais *(Pr. 36.1.)* os paralelogramos LO, KY, AF. Pela mesma razão devem ser iguais os paralelogramos, KX, KB, AG. E os paralelogramos LZ, KP, AR são também iguais, por serem opostos *(Pr. 24.11.)*. Do mesmo modo são iguais entre si os paralelogramos EC, HQ, MS, como também os paralelogramos HG, HI, IN, e, finalmente, os paralelogramos HD, MU, NT. Logo, três planos do sólido LP são iguais e semelhantes a três planos do sólido KR, como também são iguais e semelhantes a três planos do sólido AV. Mas nestes sólidos três planos são iguais e semelhantes a outros três opostos; e juntamente nos mesmos sólidos cada ângulo sólido é formado por três ângulos planos. Logo, os três sólidos LP, KR, AV são iguais *(Pr. C.11.).* Pela mesma razão devem ser iguais também os três sólidos ED, HU, MT. Logo, como a base LF é multíplice da base AF, do mesmo, modo o sólido LV é multíplice do, sólido AV; e assim também como a base NF é multíplice da base HF, do mesmo modo o sólido NV é multíplice do sólido ED. E se a base LF fôr igual à base NF, também o sólido LV será igual *(Pr. C.11.)* ao sólido NV; e se a base LF fôr maior que a base NF, também o sólido LV será maior que o sólido NV, e, finalmente, se a base LF fôr menor que a base NF, do mesmo modo o sólido LV será menor que o sólido NV. Mas a base LF, e o sólido LV são quaisquer eqüimultíplices da base AF, e do sólido AV, e a base FN, e o sólido NV são outros quaisquer eqüimultíplices da base FH e do sólido ED; e juntamente temos demonstrado, que, se fôr a base LF maior, ou igual, ou menor que a base FN, também o sólido LV será maior, ou igual, ou menor que o sólido NV. Logo, *(Def. 5.5.)* será a base AF para a base FH, como o sólido AV é para o sólido ED.

PROP. XXVI. PROB.

Dada uma linha reta e dado nela um ponto, construir sôbre a dita reta e no ponto dado um ângulo sólido igual a outro ângulo sólido formado por três ângulos planos (Fig. 33.).

Seja dada a reta AB, e nela o ponto A. Seja também dado o ângulo sólido D, formado pelos três ângulos planos EDC, EDF, FDC. Deve-se construir, no ponto A e sôbre a reta AB, um ângulo sólido igual ao ângulo sólido D.

Tome-se na reta DF qualquer ponto F, e tire-se dêste ponto F a reta FG, perpendicular *(Pr. 11.11.)* ao plano, que passa pelas retas ED, DC. Seja G o ponto, em que a perpendicular FG encontra o plano. Tire-se DG, e faça-se *(Pr. 23.1.)* com a reta AB e no ponto A o ângulo BAL = EDC, e também o ângulo

BAK = EDG. Ponha-se AK = DG, e levante-se do ponto K a reta KH perpendicular *(Pr. 12.11.)* ao plano BAL, e feita KH = GF, tire-se HA. Digo que o ângulo sólido A, formado pelos três ângulos planos BAL, BAH, HAL, é igual ao ângulo sólido D feito pelos três ângulos planos EDC, EDF, FDC.

Tomadas as duas retas AB, DE iguais entre si, tirem-se as retas HB, KB, FE, GE. Sendo FG perpendicular ao plano das retas ED, DO, também será perpendicular a tôdas as mais retas, que existindo no dito plano a tocarem *(Def. 3.11.)*. Logo, serão retos os ângulos FGD, FGE. Pela mesma razão são retos os ângulos HKA, HKB. E porque os lados KA, AB são iguais aos lados GD, DE, cada um a cada um, e também são iguais entre si os ângulos formados por êstes lados, será a base BK igual *(Pr. 4.1.)* à base EG. Mas temos KH = GF, e o ângulo BKH = EGF. Logo, será HB = FE. Também sendo os lados AK, KH iguais aos lados DG, GF, e sendo iguais os ângulos AKH, DGF, por serem retos, será a base AH igual à base DF. Mas é AB = DE. Logo, as duas HA, AB serão iguais às duas FD, DE., Mas é HB = FE. Logo, será o ângulo BAH = EDF *(Pr. 8.1.)*. Pela mesma maneira se mostra ser HAL = FDC. Para isto ponha-se AL = DC, e tirem-se as retas KL HL, GC, FC. Sendo o ângulo total BAL igual ao ângulo total EDC; e sendo o ângulo BAK = EDG; tirando BAK de BAL, e EDG de EDC, será o resto KAL igual ao resto GDC. E como as duas retas KA, AL são iguais às duas GD, DC, é iguais entre si os ângulos compreendidos por elas, será também a base KL = GC, que é outra base. Mas é KH = GF. Logo, as duas, LK, KH são iguais às duas GC, GF. Mas estas retas fazem ângulos iguais. Logo, será a base HL igual à base FC. Sendo pois as duas RA, AL iguais às duas FD, DC, e sendo HL = FC. Será o ângulo HAL = FDC. Logo, sendo os três ângulos planos BAL, BAH, HAL, pelos quais é formado o ângulo sólido A, iguais aos três ângulos planos EDC, EDF, FDC, que fazem o ângulo sólido D, cada um a cada um; e também sendo os mesmos ângulos planos semelhantemente postos, será o ângulo sólido A igual *(Pr. B.11.)* ao ângulo sólido D. Logo, está feito o que se pedia.

PROP. XXVII. PROB.

Sôbre uma, linha, reta dada formar um sólido paralelepípedo semelhante a outro sólido paralelepípdo, e semelhantemente pôsto (Fig. 34.).

Seja dada a reta AB, e o paralelepípedo CD. Deve-se descrever sôbre a, reta AB um paralelepípedo semelhante ao paralelepípedo CD, e semelhantemente pôsto.

Faça-se sôbre a reta AB, e no ponto dela A com os três ângulos planos BAK, KAH, HAB o ângulo sólido A igual *(Pr. 26.11.)* ao ângulo sólido C; de maneira que seja o ângulo, BAK = ECG, KAH = GCF, e HAB = FCE. Faça-se *(Pr. 12.6.)* também EC:CG::BA:AK; e GC:CF::KA:AR. Logo, por igualdade de razões ordenada *(Pr. 22.5.)* será EC:CF::BA:AH. Complete-se o paralelogramo BH, e o sólido AL. Como temos EC:CG::BA:AK; isto é, proporcionais os lados, que fazem os ângulos iguais ECG, BAK, o paralelogramo BK será semelhante ao paralelogramo EG. Pela mesma razão, o paralelogramo KH é semelhante ao paralelogramo GF, e o paralelogramo HB é semelhante ao, paralelogramo FE.

Logo, três paralelogramos do sólido AL são respectivamente semelhantes a três paralelogramos do sólido CD. E como os paralelogramos, que ficam opostos aos ditos, três em ambos os sólidos, são iguais *(Pr. 24.11.)* e semelhantes respectivamente aos mesmos ditos três paralelogramos, e por serem também iguais entre si, e semelhante,mente postos os, ângulos planos, que formam os ângulos sólidos correspondentes dos dois paralelepípedos, são iguais *(Pr. B. 11.)* os mesmos ângulos sólidos que se correspondem; será o sólido AL semelhante *(Def. 11.11.)* ao sólido CD, e por conseqüência ficará feito o que se pedia.

PROP. XXVIII. TEOR.

Se um sólido paralelepípedo fôr cortado pelo plano, que passa pelas diagonais de dois planos opostos, ficará dividido em duas partes iguais (Fig. 31.)[*]*.*

Seja o paralelepípedo EB, e sejam as retas DF, AH as, diagonais dos planos opostos CE, BG. E como duas AD, HF são paralelas a GE, que não existe no plano delas, será AD paralela *(Pr. 9.11.)* a RF, e conseqüentemente as diagonais AH, DF existirão no plano das retas AD, HF; e serão paralelas entre si *(Pr. 16.11.)*. Digo pois que o paralelepípedo EB fica dividido em duas partes iguais pelo plano ADFH.

Sendo o triângulo AGH igual ao triângulo ABH, e o triângulo DEF igual ao triângulo DCF *(Pr. 34.1.)* e sendo o paralelogramo, HE igual *(Pr. 24.11.)* ao paralelagramo BD, por serem paralelogramos opostos, e finalmente sendo o paralelogramo EA igual ao paralelogramo BF, o prisma compreendido pelos dois triângulos AGH, DEF e pelos três paralelogramos HE, EA, e AF será igual *(Pr. C .11.)* ao prisma formado pelos dois triângulos ABH, DCF, e pelos três paralelogramos BD, BF, HD, por serem êstes planos respectivamente semelhantes entre si, em número e grandeza iguais, e, semelhantemente postos; e juntamente porque todos os ângulos, sólidos dêstes dois prismas são feitos por três ângulos planos e não mais. Logo, o sólido paralelepípedo EB fica dividido em duas partes iguais pelo plano ADFH.

PROP. XXIX. TEOR:

Os sólidos paralelepípedos, que estão postos sobre a mesma base, e têm a mesma altura e cujos lados, que se levantam sôbre a base, se terminam nas mesmas linhas retas, são iguais (Figs. 35, 36 e 37.).

Estejam postos sôbre a base comum AB os dois paralelepípedos AH, AK igualmente, altos; e terminem-se nas mesmas retas FN, DK os lados AF, AG, LM, LN CD, CE, BH, BK, que se levantam sôbre a base comum AB.Digo que os paralelepípedos AH, AK são iguais.

Tenham em primeiro lugar os paralelogramos DG, NN, que ficam opostos à base AB, o lado comum HG (Fig. 35.). Sendo o sólido AH cortado

[*] Veja-se Legendre "Elem. de Geom." Liv. VI. Prop. VI: Corol., e Not. 1.

pelo plano AGHC das diagonais AG, CH dos planos opostos ALGF, CBHD, o mesmo sólido AH ficará dividido em duas partes iguais *(Pr. 28.11.)*. Logo, o sólido AK é o dôbro do prisma, que tem os triângulos opostos ALG, CBH. Pela mesma razão por que o sólido AK é cortado pelo plano LGHB, que passa pelas diagonais LG, BH dos planos opostos ALNG, CBKH, será o sólido AK o dôbro do mesmo prisma compreendido entre os triângulos opostos ALG, CBH. Logo, o sólido AH é igual ao sólido AK.

Não tenham agora os paralelogramos DM, EN algum lado comum (Figs. 36 e 37.). Como as figuras CH, CK são paralelogramos, será o lado CB igual *(Pr. 34.1.)* tanto ao lado DH, como ao lado EK. Logo, será DH = EK. Ajunte-se, ou tire-se de uma e outra parte a mesma reta RE. Será DE = HK, e o triângulo CDE igual *(Pr. 38.1.)* ao triângulo BHK, e o paralelogramo DG igual *(Pr. 36.1.)* ao paralelogramo HN. Pela mesma razão será o triângulo AFG igual ao triângulo LMN. Mas os paralelogramos CF, CG são respectivamente iguais (Pr. 24.11.) aos paralelogramos BM, BN, por estarem opostos entre si. Logo, o prisma formado pelos triângulos AFG, CDE, e pelos paralelogramos AD, DG, GC é igual *(Pr. C .11.)* ao prisma compreendido pelos triângulos LMN, BHK, e pelos paralelogramos BM, MK, KL. Tirando :pois o prisma LMNBHK do sólido, que está entre a base AB o plano oposto FDKN, e também tirando do mesmo sólido o outro prisma AFGCDE, os restos que ficarem, isto é os sólidos AH, AK, serão iguais entre si.

PROP. XXX. TEOR.

Os sólidos paralelepípedos postos sôbre a mesma base, e que têm a mesma altura, e cujos lados, isto é, aquêles que se levantam sôbre a base, não se, terminam nas mesmas linhas. retas, são iguais (Fig. 38.).

Estejam postos sôbre a mesma base AB, e tenham a mesma altura os paralelepípedos CM, CN; e nã9 se terminem nas mesmas retas os lados dêles, que se levantam sôbre a base comum AB, isto é, os lados AF, AG, LM, LN, CD, CE, BH, BK. Digo que também neste caso são iguais entre si os paralelepípedos CM, CN.

Produzam-se as retas FD, MH, NG, KE, até se encontrarem nos pontos O, P, Q, R, e tirem-se as retas AO, LP, BQ, CR. Como o plano LBHM é paralelo ao plano oposto ACDF, e no plano LBHM existem as duas retas paralelas LB, MHPQ juntamente com a figura BLPQ, e no plano ACDF existem as outras paralelas AC, FDOR, e também a figura CAOR, as figuras BLPQ, CAOR devem existir em dois planos paralelos entre si. Do mesmo modo por que o plano ALNG é paralelo ao plano oposto CBKE, e no plano ALNG existem as paralelas AL, OPGN juntamente com a figura AOPL, e no plano CBKE existem as outras paralelas CB, QREK, e também a figura CRQB, as figuras AOPL, CRQB existirão em planos, paralelos entre si. Mas, os planos ACBL, ORQP são paralelos. Logo, o sólido CP será um paralelepípedo. Mas o sólido CM, existente entre a base ACBL e o paralelogramo oposto FDHM, é igual *(Pr. 29.11.)* ao sólido CP existente entre a mesma base ACBL, e o paralelogramo oposto ORQP, por estarem ambos êstes sólidos sôbre a mesma base ACBL, e se terminarem nas mesmas retas FR, MQ, os lados dêles AF, AO, CD, CR, e LM, LP, BH, BQ, que são os lados, que se levantam sôbre a base ACBL; e também o sólido CP é igual ao sólido CN, porque ambos êstes sólidos estão sôbre a mesma base ACBL, e os lados dêles AO,AG, LP, LN, e CR, CE, BQ, BK, levantados sôbre a mesma base ACBL, se terminam nas mesmas retas ON, RK. Logo, o sólido CM será igual ao sólido CN.

PROP. XXXI. TEOR.

Os sólidos paralelepípedos postos sôbre bases iguais, e igualmente altos são iguais (Figs. 39 e 40.).

Sejam os paralelepípedos AE, CF, os quais estejam postos: sôbre as bases iguais AB, CD, e ambos tenham a mesma altura. Digo que os paralelepípedos AE, CF são iguais.

Sejam primeiramente (Fig. 39.) perpendiculares aos planos das bases AB, CD aquêles lados, os quais em ambos os sólidos ficam levantados sôbre as mesmas bases AB, CD. Ponham-se entre si os sólidos de maneira que as bases dêles existam no mesmo plano, e os lados CL, LB destas mesmas bases estejam em direitura um com outro. A reta LM, que se termina no ponto L, será comum *(Pr, 13.11.)* aos sólidos AE, CF. Sejam AG, HK, BE; e DF, OP, CN os outros lados dos sólidos, sôbre cujas bases ficam levantados, e primeiramente seja o ângulo ALB = CLD. Estará o lado AL em direitura do lado LD.

Produzam-se os lados OD, HB, os quais concorram no ponto Q, e complete-se o paralelepípedo LR, cuja base é o paralelogramo LQ, e LM é um dos lados que se levantam sôbre a mesma base LQ. Sendo pois o paralelogramo AB igual ao paralelogramo CD, será AB:LQ::CD:LQ *(Pr. 7.5.)*; e como o sólido AR é cortado pelo plano LMEB paralelo aos planos opostos AK, DR, será a base AB para a base LQ, como o sólido AE é para o sólido LR *(Pr. 25.11.)*. Pela mesma razão, sendo o sólido CR cortado pelo plano LF paralelo aos planos opostos CP, BR, será a base CD para a base LQ, como o sólido CF é para o sólido LR. Mas temos visto ser AB:LQ::CD:LQ. Logo, será também AE:LR::CF:LR. Logo, os sólidos AE, CF são iguais *(Pr. 9.5.)*.

Estejam agora pastos os sólidos (Fig. 39.) SE, CF igualmente altos sôbre as bases iguais SB, CD sôbre as quais sejam perpendiculares os lados das mesmas sólidos; e postas as ditas bases no mesmo plano, de maneira que os lados delas CL, LB façam uma só linha reta, não seja o ângulo SLB = CLD. Digo que será o sólido SE igual ao sólido CF.

Produzam-se os lados DL, TS de modo que se encontrem no ponto A. Tire-se pelo ponto B a reta BH paralela a DA, e as retas. HB, OD produzidas concorram no ponto Q, e finalmente completem-se os sólidos AE, LR. O sólido AE, cuja base é o paralelogramo LE, e o plano oposto a esta base o paralelogramo AK, é igual *(Pr. 29.11.)* ao sólido SE, cuja base é o paralelogramo LE, e o plano oposto a esta base o paralelogramo SX; porque ambos êstes sólidos estão postos sôbre a mesma base LE, e têm a mesma altura, e os lados dêles LA, LS, BH, BT; MG, MV, EK, EX se terminam nas mesmas retas AT, GX. Sendo pois o paralelogramo AB igual *(Pr. 35.1.)* ao paralelogramo SB, por terem ambos a mesma base LB, e por estarem entre as mesmas paralelas LB, AT, e também sendo pela hipótese o paralelogramo SB igual ao paralelogramo CD; será o paralelogramo AB igual ao paralelogramo CD. Mas é o ângulo ALB= CLD. Logo, pelo que temos já demonstrado, será o sólido AE igual ao sólido CF. Mas temos também provado, que o sólido AE é igual ao sólido SE. Logo, será o sólido SE igual ao sólido CF.

Suponhamos, finalmente, não serem perpendiculares às bases iguais AB, CD (Fig. 40.) as lado AG, HK, BE, LM; CN, RS, DF, OP dos sólidos AE, CF. Digo também que são iguais entre si os sólidos AE, CF.

Caiam dos pontos G, K, E, M; N, S, F, P, sôbre os planos das bases LH, OR as perpendiculares *(Pr. 11.11.)* GQ, KT, EV, MX; NY, SZ, FI, PU, que encontrem os planos nos pontos Q, T, V, X; Y, Z, I; U. Tirem-se as retas QT, TV, VX, XQ; YZ, ZI, lU, UY. Como as duas retas GQ, KT são perpendiculares ao mesmo plano, serão paralelas *(Pr. 6.11.)* entre si. Mas também as duas MG, EK são paralelas. Logo, também serão paralelos *(Pr. 15.11.)* entre si os planos MQ, ET, passando o primeiro pelas retas MG, GQ; e passando o outro pelas retas EK, KT. Pela mesma razão são paralelos os planos MV, GT. Logo, o sólido QE é um paralelepípedo. Do mesmo modo se demonstra que o sólido YF é também um paralelepípedo. Mas pelo que temos dito, o sólido EQ é igual ao sólido FY, por serem iguais as bases MK, PS, e também iguais as alturas dêles, e por se levantarem os lados perpendicularmente sôbre as mesmas bases: e o sólido EQ é igual *(Pr. 29. ou 30.11.)* ao sólido AE, e o sólido FY é igual ao sólido CF, por terem tanto uns como os outros a mesma base e a mesma altura. Logo, será o sólido AE igual ao sólido CF.

PROP. XXXII. TEOR.

Os sólidos paralelepipedos, que têm a mesma altura, estão entre si como as bases (Fig. 41.).

Sejam os paralelepípedos igualmente altos AB, CD. Digo que, como a base AE é para a base CF, assim também o sólido AB é para o sólido CD.

Faça-se sôbre a reta FG o paralelogramo FH igual ao paralelogramo AE, de maneira que seja o ângulo FGH = LCH *(Cor. 45.1.)*. Complete-se o sólido paralelepípedo GK, cuja base seja o paralelogramo FH, e um dos lados sôbre a mesma base seja a reta FD. Serão iguais *(Pr. 31.11.)* entre si os sólidos AB, GK, por serem iguais tanto as bases AE, FH, como as alturas dêles. E como o paralelepípedo CK é cortado pelo plano DG, paralelo aos planos opostos, será a base HF para a base FC, como o sólido HD é para o sólido DC *(Pr. 25.11.)*.

Mas a base FH é igual à base AE, e o sólido HD é igual ao sólido AB. Logo, será a base AE para a base CF, como o sólido AB é para o sólido CD.

COROL. *Disto se infere, que os prismas de bases triangulares, e que são igualmente altos, têm entre si a razão das mesmas bases*.

Sejam os prismas igualmente altos (Fig. 41.), cujas bases são os triângulos AEM, CFG, e os planos opostos os triângulos NBO, PDQ. Sejam completados os paralelogramos AE, CF, e os sólidos paralelepípedos AB, CD, e seja MO um lado do sólido AB, e GQ um lado do sólido CD daqueles que se levantam sôbre as bases. Os paralelepípedos AB, CD, visto terem a mesma 'altura, estão entre si na razão das bases AE, CF. Logo, também os prismas, que são as metades, (Pr. 28.11.) dêstes paralelepípedos, devem estar na mesma razão das ditas bases AE, CF, isto é, na razão dos triângulos AEM, CFG.

PROP. XXXIII. TEOR.

Os sólidos paralelepípedos semelhantes estão entre si na razão triplicada dos lados homólogos (Fig, 42.).

Sejam os paralelepípedos semelhantes AB, CD, e sejam os homólogos os lados AE, CF. Digo que o sólido AB tem para o sólido CD a razão triplicada daquela, que o lado AE tem para o lado. CF.

Produzam-se os lados AE, GE, HE, fazendo EK = CF, EL = FN, e EM = FR. Complete-se o paralelogramo KL, e também o sólido KO. Visto serem os lados KE, EL iguais aos lados CF, FN, e o ângulo KEL = CFN, sendo pela semelhança dos sólidos AB, CD o ângulo AEG = CFN, será o paralelogramo KL semelhante e igual ao paralelogramo CN. Pela mesma razão o paralelogramo MK é igual e semelhante ao paralelogramo CR, e o paralelogramo OE é igual e semelhante ao paralelogramo FD. Logo, três paralelogramos do sólido KO são iguais e semelhantes respectivamente a três paralelogramos do sólido CD. Mas também os paralelogramos opostos a êstes são iguais *(Pr. 24..11.)* e semelhantes. Logo, o sólido KO é semelhante e igual *(Pr. C. 11.)* ao sólido CD. Complete-se o paralelogramo GK, e sôbre as bases GK, KL considerem-se formados os paralelepípedos EX, LP, que tenham a mesma altura que o sólido AB, de sorte que a reta ER seja um lado comum, e daqueles que se levantam sôbre as bases GK, KL. Sendo pela semelhança dos sólidos AB, CD, e permutando, AE:CF::EG:FN, e também AE:CF::EH:FR, e sendo FC = EK, e FN = EL, e FR = EM, será AE:EK::EG:EL, e também AE:EK::HE:EM. Mas é AE para EK, como o paralelogramo AG para o paralelogramo GK *(Pr. 1.6.)*, e GE para EL, como o paralelogramo GK para o paralelogramo KL, e finalmente HE para EM, como o paralelogramo PE para o paralelogramo KM. Logo, será o paralelogramo AO para o paralelogramo GK, como êste paralelogramo GK é para o paralelogramo KL, e também como o paralelogramo PE é para O paralelogramo KM. Mas o paralelogramo AG é para o paralelogramo GK como o sólido AB é para o sólido EX *(Pr. 25.11.)*; e o paralelogramo GK é para o paralelogramo KL como o sólido EX é para o sólido PL, e também o paralelogramo PE é para o paralelogramo KM como o sólido PL é para o sólido KO. Logo, será o sólido AB para o sólido EX, como êste sólido EX é para o sólido PL, e também como êste mesmo sólido PL é para o sólido KO. Mas, de quatro grandezas continuamente proporcionais, a primeira se diz que tem para a quarta razão triplicada daquela, que a mesma primeira tem para a segunda. Logo, a razão do sólido AB para o sólido KO será a triplicada da razão do sólido AB para o sólido EX. Mas o sólido AB é para o sólido EX, como o paralelo gramo AG é para o paralelogramo GK, ou como o lado AE para o lado EK. Logo, a razão do sólido AB para o sólido KO será a triplicada da razão do lado AE para o lado EK. Mas o sólido KO é igual ao sólido CD, e o lado EK é igual ao lado CF. Logo, a razão do sólido AB para o sólido CD é a tr1plicada da razão do lado homólogo AE para o lado homólogo CF.

COROL. *Disto se colige que, se forem quatro retas continuamente proporcionais, será a primeira para a quarta, como o paralelepípedo formado sôbre a primeira reta. é para o paralelepípedo feito sôbre a segunda, no caso que ambos êstes sólidos sejam semelhantes entre si, e semelhantemente descritos; e isto por ser a razão da primeira reta para a quarta triplicada (Def. 11.5.) da razão que a primeira tem para a segunda.*

PROP. D. TEOR.

Os sólidos paralelepípedos, que são formados com paralelogramos eqüiângulos entre si, cada um a cada um, isto é, cujos ângulos sólidos são respectivamente iguais, estão entre si na mesma razão que a composta das razões dos lados (Fig. 43.).

Sejam os paralelepípedos AB, CD, e seja o sólido AB formado pelos paralelogramos AE, AF, AG eqüiângulos, cada um a cada um, aos paralelogramos CH, CK, CL, pelos quais fica compreendido o sólido CD. Digo que a razão do sólido AB para o sólido CD é a mesma que a composta das três razões seguintes: da razão do lado AM para o lado DL, da razão de AN para DK, e da razão de AO para DH.

Sejam produzidos os lados MA, NA, OA para P, Q, R, de maneira que seja AP = DL, AQ = DK, e AR = DH. Complete-se o paralelepípedo AX compreendido pelos paralelogramos AS, AT, AV, semelhantes e iguais aos paralelogramos CH, CK, CL, cada um a cada um. Será o sólido AX igual *(Pr.C.11.)* ao sólido CD. Complete-se também o sólido AY, cuja base é o paralelogramo AS, e à reta AO é um lado dos que se levantam sôbre ela. Posta qualquer reta a, faça-se MA:AP::*a*:*b*, e N.A:AQ::*b*:*c*, e OA:AR::*c*:*d*. Sendo eqüiângulos entre si os paralelogramos AE, AS, será AE:AS::a:c *(Pr. 23.6)*, Mas os sólidos AB, AY, por estarem entre os planos paralelos BOY, EAS, são igualmente altos. Logo, será o sólido AB para o sólido AY, como a base AE para a baseAS *(Pr. 33.22.),* ou como a reta *a* é para reta *c*. Mas o sólido AY é para o sólido AX, como o paralelogramo OQ para paralelogramo QR *(Pr. 25.11.)*, ou como a reta a o lado AO para o lado AR, isto é, como a reta *c* para a reta *d*. Sendo pois o sólido AB para o sólido AY, como a reta *a* para a reta *c*; igual será o sólido AY para o sólido AX, ou para o sólido CD, como a reta *a* é para a reta *d*. Mas a razão de a para *d* chama-se razão composta *(Def. A. 5.)* das razões de *a* para *b*, de *b* para *c* e de *c* para *d*; e estas são iguais, cada uma a cada uma, às razões do lao MA para o lado AP, de NA para AQ e de AO para AR; e os lados AP, AQ, AR são iguais aos lados DL, DK, DH, cada um a cada um. Logo o sólido AB tem para o sólido CD a razão composta das razões do lado AM para o lado DL do lado DN para o lado DK e do lado AO para o lado DH.

PROP XXIV. TEOR.

As bases dos sólidos paralelepípedos iguais são reciprocamente proporcionais às alturas; e sendo as bases reciprocamente proporcionais às alturas, os sólidos paralelepípedos são iguais (Figs. 44, 45 e 46.).

Sejam iguais entre si os paralelepípedos AB, CD. Digo que a base EH é para a base NP, como a altura do sólido CD para a altura do sólido AB.

Sejam primeiramente (Fig. 44.) perpendiculares às bases EH, NP os lados AG, EF, LB, KH; CM, NX, OD, PR. Digo que a base EH do sólido AB é para a base NP do sólido CD, comp a altura CM do sólido CD é para a altura AG do sólido AB.

Se as bases EH, NP forem iguais, sendo o sólido AB igual ao sólido CD, também será CM = AG. Porque de outra sorte, sendo a base EH igual à base NP, o sólido AB não poderia ser igual ao sólido CD, contra o que temos suposto. Logo, deve ser CM = AG, e por conseqüência deve ser a base EH para a base NP, como a altura CM é para a altura AG.

Mas não sejam iguais entre si as bases (Fig. 45.) EH, NP, e seja EH>NP. Como o sólido AB é igual ao sólido ÇD, será CM>AG; porque suposto não ser assim, seriam desiguais, contra a hipótese, os sólidos AB, CD. Tome-se CT = AG, e sôbre a base NP e com a altura CT complete-se o paralelepípedo CV. Logo, sendo o sólido AB igual ao sólido CD, será o sólido AB para o sólido CV, como o sólido CD é para o sólido CV *(Pr. 7.5.)*, Mas o sólido AB é para o sólido DV, como a base EH é pará a base NP *(Pr. 32.11.)*, por serem êstes sólidos igualmente altos; e também o. sólido CD é para o sólido CV, como a base MP é para a base PT *(Pr. 25.11.)*, ou como a reta MC para a reta CT *(Pr. 1.6.)*. Logo, será a base EH para a base NP, como a reta MC é para a reta CT. Mas é CT = AG. Logo, será a base EH para a base NP, como a altura MC é para a altura ÁG.

Estejam agora as bases dos paralelepípedos (Fig. 44.) AB; CD na razão recíproca das alturas, isto é, seja a base EH do sólido AB para a base NP do sólido CD, como a altura dêste sólido CD é para a altura do sólido AB. Digo, que os sólidos AB, CD são iguais. Suponham-se em ambos os sólidos serem perpendiculares às bases os lados, que se levantam sôbre as mesmas bases. E, primeiramente, se fôr a base EH igual à base NF, tendo nós suposto ser a base EH para a base NP, como a altura do sólido CD é para a altura do sólida AB, serão estas alturas também iguais *(Pr. A.5.).* Mas os sólidos paralelepípedos postos sôbre bases iguais, e igualmente altos são entre si iguais *(Pr. 31.11.)*. Logo, será o paralelepípedo AB igual ao paralelepípedo CD.

Mas não sejam iguais as bases EH, NP, e seja EH>NP. (Fig. 45,). Sendo a base EH para a base NP, como a altura CM é para a altura AG, será CM>AG *(Pr. .A.5.)*. Ponha-se CT = AG, e complete-se o sólido CV. Logo, será a base EH para a base NP, como a reta MC é Para a reta CT. Mas a base EH é para a base NP, como o sólido AB para o sólido CV *(Pr. 32 .11.)*, por serem êstes sólidos igualmente altos; e a reta MC é para a reta CT, como a base MP para a base PT, isto é, como o sólido CD para o sólido CV (Pr. 25.11.). Logo, será o sólido AB para o sólido CV, como é o sólido CD para o sólido CV, e por conseqüência serão iguais os sólidos AB, CD.

Não sejam agora os lados (Fig. 46.) FE, BL, GA, KH; XN, DO, MC, RP perpendiculares sôbre as bMes EH, NP. Tirem-se dos pontos F, B, E, G; X, D, R, M outras tantas retas perpendicularmente sôbre os planos das bases EH, NP, as quais encontrem os ditos planos nos pontos S, Y, V, T; Q, l, U, Z. Completem-se os sólidos FV, XU, que devem ser paralelepípedos, como se tem demonstrado no último caso da prop. 31 dêste Livro. Digo que, sendo iguais entre si os sólidos AB, CD, as bases são reciprocamente proporcionais às alturas, isto é, a base EH do sólido AB é para a base NP do sólido CD, como a altura dêste sólldo CD é para a altura do sólido AB. Visto ser o sólido AB igual ao sólido CD, pela suposição, e o sólido BT igual *(Pr. 29. ou 30.11.)* ao sólido AB, por estarem sôbre a mesma base FK, e terem a mesma altura, e também, pela mesma razão, o sólido DC igual ao sólido DZ; será o sólido BT igual ao sólido DZ. Mas as bases de paralelepípedos iguais, e sôbre as quais se levantam perpendicularmente os lados, são reciprocamente proporcionais às alturas, como já se tem demonstrado. Logo, será a base FK do sólido BT para a base XR do sólido DZ, como a altura dêste sólido DZ é para a altura do sólido BT. Mas as bases FK, ÉH são iguais, como também são iguais as bases XR, NP. Logo, será a base EH para a base NP, como a altura do sólido DZ é para a altura do sólido BT. Mas os sólidos DZ, DC têm a mesma altura, como também os sólidos BT, BA. Logo, será a base EH do sólido AB para a base NP do sólido CD, como a altura do sólido DC é para a altura do sólido BA, e assim as bases dos sólidos paralelepípedos AB, CD são também neste caso reciprocamente proporcionais às alturas.

Tenham finalmente as bases, (Fig. 46.) dos paralelepípedos entre si a razão recíproca das alturas, isto é, seja a base EH do sólido AB para a base NP do sólido CD, como a altura do sólido CD é para a altura do sólido AB. Digo que os sólidos AB, CD são iguais. Feita a mesma construção que acima, sendo a base EH para a base NP, como a altura do sólido CD para a altura do sólido AB; e sendo a base EH igual à base FK, e a base NP igual à base XR, será a base FK para a base XR, como a altura do sólido CD é para a altura do sólido AB. Mas os sólidos AB, BT, como também os sólidos CD, DZ, são igualmente altos. Logo, será a base FK para a base XR como a altura do sólido DZ é para a altura do sólido BT. Logo, as bases dos paralelepípedos BT, DZ são reciprocamente proporcionais às alturas. Mas os lados, que se levantam sôbre as bases nestes sólidos, sãoperpendiculares às mesma bases. Logo, os sólidos BT, DZ devem ser iguais, como há pouco ficou demonstrado. Mas o sólido BT é igual *(Pr. 29 ou 30.11)* ao sólido BA, e o sólido DZ é igual ao Sólido DC, por estarem postos, tanto os primeiros , como os segundos sobre a mesma base e por terem alturas iguais. Logo, os sólidos AB, Cd são iguais.

PROP. XXV. TEOR.

Se dos vértices de dois ângulos planos iguais se levantarem sôbre, os planos deles duas linhas retas, que com os lados dos ditos ângulos planos façam ângulos também iguais, isto é, os formados sobre os lados de um ângulo iguais aos formados sôbre os lados do outro ângulo, cada um a cada um; e se de ambas as retas levantadas, tomados quaisquer dois pontos, um em cada *uma, se fizerem cair duas retas perpendiculares aos planos, em que existem os ângulos dados; e finalmente se dos pontos, onde as ditas perpendiculares encontram os planos, forem conduzidas para os vértices dos ângulos dados outras duas retas; estas retas com as outras, que estão levantadas, compreenderão ângulos também iguais (Fig. 47.).*

Dos vértices A, D dos ângulos planos e iguais BAC, EDF considerem-se levantadas sôbre os planos dêles as retas AG, DM, que façam ângulos respectivamente iguais com os lados dos ângulos BAC, EDF, isto é, o ângulo GAB = MDE, e GAC = MDF; e tomados nas retas AG, DM os pontos G, M, como quisermos, dêstes pontos G, M sejam conduzidas as duas retas GL, MN perpendicularmente sôbre os planos dos ângulos propostos BAC, EDF. Dos pontos L, N, nos quais as perpendiculares encontram os planos, tirem-se para os vértices A, D dos ângulos BAC, EDF as retas LA, ND. Digo que o ângulo GAL é igual ao ângulo MDN.

Ponha-se AH = DM, e pelo ponto H conduza-se a reta HK, paralela a GL. Sendo GL perpendicular ao plano BAC, também HK será perpendicular *(Pr. 8.11.)* ao mesmo plano BAC. Dos pontos K, N tirem-se sôbre as retas AB, AC, DE, DF as perpendiculares KB, KC, NE, NF . Tirem-se também as retas HB, BC, ME, EF. Como HK é perpendicular ao plano BAC, também o plano HBK, que passa pela reta HK, será perpendicular *(Pr. 18.11.)* ao mesmo plano BAC. Mas neste plano existe a reta AB, perpendicular a BK, que é a seção comum dos planos BAC, HBK. Logo, será a reta AB *(Def. 4.11.)* perpendicular ao plano HBK, e juntamente a tôdas as retas, que existindo no mesmo plano a tocarem *(Def. 3.11.)*. Mas BH existe no plano HBK, e toca a reta AB. Logo, será AB perpendicular a BH, e assim reto o ângulo ABH. Do mesmo modo deve ser reto também o ângulo DEM, e por conseqüência ABH = DEM. Mas é HAB = MDE. Logo, os dois triângulos HAB, MDE, havendo dois ângulos iguais a dois ângulos, cada um a cada um, e sendo iguais entre si os lados HA, DM, e opostos aos ângulos iguais HBA, MED; os demais lados serão iguais *(Pr. 26.1.)* aos outros, cada um a cada um, segundo, ficam opostos a ângulos iguais, e por consêqüência será AB = DE. Com a mesma demonstração, tiradas as retas HC, MF, se prova ser AC = DF. Sendo pois AB = DE, e AC = DF, e também sendo o ângulo BAC = EDF; será a base BC igual *(Pr. 4.1.)* à base EF, e o ângulo ABC = DEF. Mas os ângulos ABK, DEN, por serem retos são iguais. Logo, tirando de ABK o ângulo ABC, e do ângulo DEN tirando DEF, ficará CBK = FEN. Pela mesma razão são iguais os ângulos BCK, EFN. Logo, nos triângulos BCK; EFN há dois ângulos iguais a outros dois, cada um a cada um, e o lado BC do, triângulo BCK igual ao lado EF do triângulo EFN, sendo êstes lados adjacentes a ângulos iguais. Logo, serão os outros lados do primeiro triângulo iguais *(Pr. 26.1.)* aos outros lados do segundo, cada um a cada um, segundo ficam opostos a ângulos iguais, e por conseqüência será BK = EN. Mas é AB = DE, e o ângulo reto ABK = DEN outro ângulo reto. Logo, será AK = DN. Sendo pois AH = DM, será o quadrado da reta AR igual ao quadrado da reta DM.

Mas os quadrados de AK e de KH *(Pr. 47.1.)* são iguais ao quadrado de AH, por ser reto o ângulo AKH; e os quadrados de DN e de NM são iguais ao quadrado de DM, porque é reto também o ângulo DNM. Logo, serão os quadrados de AK, e KH iguais aos quadrados de DN, e de NM. Logo, tirando dos primeiros o quadrado, de AK, e tirando dos segundos o quadrado de DN, que é igual ao quadrado de AK, ficará o quadrado de KH igual ao quadrado de NM; e assim será KH = NM. E como as duas HA, AK são iguais às duas MD, DN, cada uma a cada uma, e temos provado ser a base HK igual à base MN, será o ângulo HAK= MDN *(Pr.8.1,)*.

COROL. *Desta Proposição se infere que, s,e tivermos dois ângulos planos iguais, e se dos vértices dêstes ângulos levantarmos duas retas também iguais, que façam ângulos iguais com os lados dos ditos ângulos planos, do modo que temos dito, as perpendiculares, que das extremidades das retas levantadas caírem sôbre os planos dos ditos ângulos, serão também iguais.*

OUTRA DEMONSTRAÇÃO DESTE COROLARIO

Sejam iguais entre si os dois ângulos planos BAC, EDF (Fig. 47.), e sendo também iguais as retas AH, DM; que dos vértices dos ângulos se levantam sôbre os planos dêles, façam com os lados BA, AC, ED, DF os ângulos HAB, MDE iguais, e os ângulos HAC, MDF também iguais. Dos pontos H, M sejam conduzidas sôbre os planos BAC, EDF as perpendiculares HK, MN. Digo que será HK =MN.

Visto ser formado o ângulo sólido, A pelos três ângulos planos BAC, BAH, HAC, que, são iguais, cada um a cada um, aos três ângulos planos EDF, EDM, MDF que fazem o ângulo sólido D; serão iguais entre si os ângulos sólidos A, D, de maneira, que um dêles se poderá ajustar sôbre o outro exatamente. Porque, sendo o ângulo plano BAC aplicado ao, ângulo plano EDF, poderemos demonstrar, como já fizemos na Proposição B dêste Livro, que a reta AH se deve ajustar com a reta DM, e sendo AH = DM, o ponto H deve cair sôbre o ponto M. Do que depois se segue que a reta HK, perpendicular ao plano BAC, virá a ser a mesma *(Pr. 13.11.)* que a reta MN, perpendicular ao plano EDF, por se ajustarem entre, si também êstes planos. Fica pois evidente ser HK = MN.

PROP. XXXVI. TEOR.

Se forem três linhas retas proporcionais, o sólido paralelepípedo formado com estas três retas como lados, será Igual ao sólido paralelepípedo eqüilátero, descrito sôbre a média das ditas três proporcionais; sendo um ângulo sólido dêste paralelepípedo formado por três ângulos planos iguais cada um a cada um, aos três ângulos planos, que compreendem um ângulo sólido do outro paralelepípedo (Fig. 48.).

Sejam as retas proporcionais A, B, C, isto é, seja A:B::B:C. Digo que o sólido paralelepípedo formado pelas três retas A, B, C, como lados, é igual ao sólido paralelepípedo eqüilátero descrito sôbre a média B, e ao mesmo tempo eqüiângulo ao primeiro.

Considere-se o ângulo sólido D formado pelos três ângulos planos EDF, FDG, GDE; e posta cada uma das três retas ED, DF, DG igual à reta B, complete-se o paralelepípedo DH. Tome-se LK = A, e faça-se no ponto K um ângulo sólido *(Pr. 26.11.)* com os três ângulos planos LKM, MKN, NIKL, que sejam iguais aos três EDF, FDG, GDE, cada um a cada um. Tome-se KN = B, e KM = C, e complete-se o paralelepípedo KO. Sendo pois A:B::B:C, e sendo A = LK, e B = DE = DF, e C = KM; será LK:ED::DF:KM. Logo, nos paralelogramos LM, EF, sendo reciprocamente proporcionais os lados, que formam ângulos iguais, serão os mesmos paralelogramos, LM, EF iguais *(Pr. 14.6.)*. E como dos vértices dos ângulos planos e iguais EDF, LKM estão levantadas as retas DG, KN também iguais, e que fazem com os lados ED, DF, LK, KM ângulos respectivamente iguais; as retas, que dos pontos G, N forem lançadas perpendicularmente sôbre os planos EDF, LKM, do mesmo modo serão iguais *(Cor. 35.11.)*, e por conseqüência serão igualmente altos os sólidos KO, DH. Mas os sólidos paralelepípedos, que estão postos sôbre bases iguais, e que têm alturas iguais, são entre si iguais *(Pr.31.11.)*. Logo, o sólido paralelepípedo KO, que tem três lados iguais às três retas proporcionais A, B, C, é igual ao sólido paralelepípedo DH, que é eqüilátero, por ser cada um dos lados dêle igual à reta média B, e que ao mesmo tempo é eqüiângulo ao sólido do paralelepípedo KO.

PROP. XXXVII. TEOR.

Se forem quatro linhas retas proporcionais, os sólidos paralelepípedos, semelhantes e semelhantemente descritos sôbre elas, serão também proporcionais. E se os sólidos paralelepípedos, semelhantes e semelhantemente descritos sôbre quatro retas, forem proporcionais, também as retas serão proporcionais. (Fig. 49.).

Sejam as quatro retas proporcionais AB, CD, EF, GR, isto é, seja AB:CD::EF:GR. Estejam postos sôbre estas retas proporcionais os paralelepípedos AK, CL, semelhantes e semelhantemente descritos; e do mesmo modo os outros EM, GN. Digo que será o sólido AK para o sólido CL, como o sólido EM é para o sólido GN.

Ponham-se as retas O, P, Q, R, de maneira que as quatro AB, CD, O, P, como também as quatro EF, GR, Q, R, sejam continuamente proporcionais *(Pr. 11.6.)*. Sendo pois pela hipótese, AB:CD::EF:GR; será também CD:O::GH:Q; e O:P::Q:R *(Pr. 11.5.)*. Logo, será por igual AB:P::EF:R *(Pr. 22.5.)*. Mas é AB para P, como o sólido AK para o sólido CL *(Cor. 33.11.)*, e EF para R, como o sólido EM para o sólido GN. Logo, será o sólido AK para o sólido CL, como o sólido EM é para o sólido GN.

Suponhamos agora ser o sólido AK para o sólido CL, como o sólido EM é para o sólido GN. Digo que será AB:CD::EF:GH.

Faça-se AB:CD::EF:ST, e sôbre a reta ST descreva-se *(Pr. 27.11.)* o paralelepípedo SV, semelhante e semelhantemente pôsto a respeito do paralelepípedo EM, ou GN. Como é AB:CD::EF:ST, e sôbre as retas AB, CD estão feitos os paralelepípedos AK, CL, semelhantes e semelhantemente ostos; e sôbre as retas EF, ST, os paralelepípedos EM, SV, também semelhantes e semelhantemente postos, será AK:OL::EM:SV. Mas pela suposição é também AK:CL::EM:GN. Logo, será o paralelepípedo GN igual *(Pr. 9.5.)* ao paralelepípedo SV. Mas êstes sólidos são semelhantes entre si, e semelhantemente descritos. Logo, os planos, que formam os sólidos GN, SV, devem ser semelhantes e iguais, e por conseqüência também iguais os lados homólogos dêles GR, ST. Logo, sendo AB:CD::EF:ST e sendo ST = GH, será finalmente AB:CD::EF:GH.

PROP. XXXVIII. TEOR.

Se fôr um plano perpendicular a outro plooo, e se de qualquer ponto de um dos ditos planos fôr conduzida uma linha reta perpendicular ao outro plano, estas reta cairá sôbre a seção comum dêstes - planos (Fig. 50.).

Seja o plano CD perpendicular ao plano AB, e seja a reta a AD a seção comum dos planos AB, CD. Do ponto E tomado, como quisermos, no plano CD, considere-se tirada uma reta, que seja perpendicular ao plano AB. Digo que esta reta deve cair sôbre a seção comum AD.

Se a dita perpendicular não fôr terminada na seção comum AD, cairá fora dela, como a reta EF. Seja F o ponto, no qual a reta EF encontra o plano AB. Do ponto F, no mesmo plano AB, tire-se a reta FG, perpendicular *(Pr. 12.1.)* a DA. Será a reta FG também perpendicular *(Def. 4.11.)* ao plano. CD. Tire-se EG. Sendo a reta FG perpendicular ao plano CD, e a reta EG existente nó mesmo plano CD, tocando a reta FG no ponto G, será reto *(Def. 3.11.)* o ângulo FGE. Mas também é reto o ângulo EFG, porque se tem Suposto ser a reta EF perpendicular ao plano AB. Logo, no triângulo EFG, há dois ângulos retos, o que é absurdo. Logo, a perpendicular, que do ponto E fôr conduzida sôbre o plano AB, não pode cair fora da seção comum AD, mas sim deve cair sôbre ela.

PROP. XXXIX. TEOR.

Se, em um sólido paralelepípedo, os ladas de dois planos opostos forem divididos em partes iguais, e pelas seções dêstes lados se fizerem passar dois planos, a seção comum dêstes dois planos, e o diâmetro do sólido paralelepípedo se cortarão reciprocamente em partes iguais (Fig. 51.).

Sejam divididos em partes iguais os lados dos planos opostos CF, AH do paralelepípedo AF, nos pontos K, L, M, N, X, O, R, P. Tirem-se as retas KL, MN, OX, RP. Sendo as duas DK, CL iguais entre si e paralelas, serão também paralelas *(Pr. 33.1.)* as duas KL, DC. Pela mesma razão, serão paralelas as duas MN, BA. Mas BA é paralela a DC. Logo, sendo KL, BA paralelas ambas a DC, ainda que existentes em diferentes planos, será KL paralela *(Pr. 9.11.)* a BA. E, também, sendo KL, MN paralelas à mesma reta BA, e não existentes no plano da reta BA, será KL paralela a MN, e por conseqüência as duas retas KL, MN. existirão em um mesmo plano. Do mesmo modo se demonstra existirem, no mesmo plano, as duas retas OX, RP. Seja pois a reta YS à seção comum dos planos KN, XR e seja DG: o diâmetro do paralelepípedo AF. Digo que as duas retas YS, DG se encontram, e se cortam -reciprocamente em partes iguais.

Tirem-se as retas DY, YE, BS, SG. Sendo DX paralela a OE, os ângulos alternos DXY, YOE serão iguais *(Pr. 29.1:)*. E sendo DX = OE, e XY = YO, e o ângulo DXY == YOE; será a base DY igual à base YE, e o ângulo XYD = OYE *(Pr. 4.1.)*, e assim será DYE uma só linha reta *(Pr. 14.1,)*. Do mesmo modo se provará, que BSG é uma só linha reta, e que BS é igual a SG. E como a reta CA é igual e paralela a DB, e ao mesmo tempo igual e paralela a EG, será DB igual *(Pr. 9.11.)* e paralela a EG. Mas entre as extremidades das retas iguais e paralelas DB, EG, estão tiradas as outras DE, BG. Logo, também estas duas DE,BG serão iguais, *(Pr. 33.1.)* entre si e paralelas, e por conseqüência as retas DG, YS devem existir no mesmo plano, por estarem tiradas entre os pontos D, G, Y, S das duas paralelas DE, BG. Logo, as retas DG, YS hão de se encontrar em algum ponto. Encontrem-se pois no ponto. T. Sendo paralelas entre si as duas retas DE, BG, os ângulos alternos EDT, BGT serão iguais. Mas é DTY = GTS *(Pr. 15.1.)*. Logo, nos triângulos DTY, GTS há dois ângulos iguais a outros dois ângulos, cada um a cada um; e um lado igual a outro lado, isto é, o lado DY igual ao lado GS, por ser DY a metade de DE, e GS a metade de BG, e por ser DE = BG; e além disto os mesmos lados DY, GS ficam opostos a ângulos iguais. Logo, os outros lados dos ditos triângulos serão entre si,. respectivamente, iguais *(Pr. 26.1.)*, e por conseqüência será DT = TG, e YT = TS.

PROP. XL. TEOR.

Se forem dois prismas triangulares igualmente altos, e um dêles estiver pôsto sôbre uma base paralelograma e outro sôbre uma base triângular, sendo esta base a metade daquela, os dois prismas serão iguais (Fig. 52.).

Sejam os dois prismas igualmente altos ACDEF, GHKLMN, dos quais o primeiro é formado pelos dois triângulos ABE, CDF, e pelos três paralelogramos AD, DE, EC; e o outro pelos dois triângulos GHK, LMN, e pelos três paralelogramos LH, HN, NG. Seja o paralelogramo AF a base do primeiro; e o triângulo GHK a base do segundo; e suponhamos ser o paralelogramo AF o dôbro do triângulo GHK. Digo que prisma ABCDEF é igual ao prisma GHKLMN.

Completem-se os sólidos AX, GO. Sendo pois, pela suposição, o paralelogramo AF o dôbro do triângulo GHK, e o paralelogramo HK também o dôbro *(Pr. 34.1.)* do mesmo triângulo GHK; será o paralelogramo AF igual ao paralelogramo HK. Mas os paralelepípedos postos sôbre as bases iguais, e igualmente altos, são iguais *(Pr. 31.11.)*. Logo, o paralelepípedo AX é igual ao paralelepípedo GO. Mas o prisma ABCDEF é a metade do paralelepípedo AX, e o prisma GHKLMN é a metade do paralelepípedo GO *(Pr. 28.11.)*. Logo, o prisma ABCDEF é igual ao prisma GHKLMN.

LIVRO XII

LEMA I.

Necessário para a demonstração de algumas Proposições dêste Liyro. Êste Lema é a Proposição I. do Livro X.

Postas duas grandezas desiguais, se da grandeza maior se tirar mais da sua metade, e da grandeza que resta se tirar também mais de metade, e isto se continuar sempre assim; ficará finalmente uma grandeza, a. qual será mais pequena que a grandeza menor das duas acima postas (Fig. 1.).

Sejam as duas grandezas desiguais AB, C, e seja AB a maior. Digo que, se de AB se tirar mais de metade, e do que resta se tirar também mais de metade, e isto se continuar sempre assim, ficará finalmente uma grandeza menor que a grandeza C.

A grandeza menor C, tomada certo número de vêzes, poderá exceder a grandeza maior AB. Tome-se pois, e seja DE uma grandeza multíplice de C, e maior que a grandeza AB. Divida-se DE nas partes DF, FG, GE, sendo cada uma destas igual a C. Tire-se da grandeza AB a parte BR maior do que a metade de AB; do resto AH tire-se a parte HK, também maior dó que a metade de AH; continue-se isto assim até que as divisões, que se vão fazendo na grandeza AB, sejam outras tantas quantas são aquelas, que se têm feito na grandeza DE. Seja pois o número das divisões AK, KH, HB igual ao número das divisões DF, FG, GE. Sendo DE>AB, e tirando-se da grandeza DE a parte GE, menor do que a metade da mesma DE; e tirando-se da grandeza AB a parte BH, maior que a metade da mesma AB; o resto GD será maior que o resto HA. Também, sendo GD>HA, se da grandeza GD fôr tirada a sua metade GF, e se da grandeza HA fôr tirada a parte HK, maior do que a metade da mesma HA, o resto FD será maior que o resto AK. Mas é FD = C. Logo, será C>AK, e por conseqüência AK<C. Logo, da grandeza maior AB fica o resto AK, menor que a grandeza mais pequena C.

PROP. I. TEOR.

Os polígonos semelhantes inscritos em círculos estão entre si, como os quadrados dos diâmetros dos mesmos círculos (Fig. 2.).

Sejam os círculos ABCDE, FGHKL, cujos diâmetros sejam as retas BM, GN.Estejam inscritos nestes círculos os polígonos semelhantes ABCDE, FGHKL. Digo que assim como o quadrado de BM é para o quadrado de GN, assim também o polígono ABCDE é para o polígono FGHKL.

Tirem-se as retas BE, AM, GL, FN. Sendo semelhantes entre si os polígonos ABCDE, FGHKL, será o ângulo B AE = GFL. *(Def. 1.6.)*, e também será BA:AE::GF:FL. Logo, os dois triângulos BAE, GFL têm um ângulo igual a outro ângulo, isto é, o ângulo BAE = GFL; e têm proporcionais os lados, que formam os ditos ângulos iguais. Logo, são eqüiângulos *(Pr. 6.6.)*, e por conseqüência deve ser o ângulo AEB = FLG. Mas também são iguais *(Pr.*

21.3.) os ângulos AEB, AMB, porque ambos assentam sôbre o mesmo arco AB, e pela mesma razão é FLG = FNG. Logo, será AMB = FNG. Mas o ângulo reto BAM é igual ao reto GFN *(Pr. 31. 3.)*. Logo, será também o terceiro ABM igual ao terceiro GFN, e assim serão eqüiângulos os triângulos ABM, FGN. Logo, deve ser BM:GN::BA:GF *(Pr. 4.6.)*, e por conseqüência a razão duplicada da de BM para GN é igual *(Def. 10.5. e Pr. 22.5.)* à duplicada da razão de BA para GF. Mas a razão do quadrado de BM para o quadrado de GN é duplicada *(Pr. 20.6.)* da razão de BM para GN; e a razão do polígono ABCDE para o polígono FGHKL é a duplicada da razão de BA para GF.

Logo, assim como o quadrado de BM é para o quadrado de GN, assim também será o polígono ABCDE para o polígono FGHKL.

PROP. II. TEOR.

Os círculos estão entre si como os quadrados dos seus diâmetros (Figs. 3, 4 e 5.).

Sejam os círcúlos ABCD, EFGH, cujos diâmetros sejam BD, FH. Digo que assim como o quadrado de BD é para o quadrado de FH, assim também o círculo ABOD é para o círculo EFGH*.

Suposto não ser assim, o quadrado de BD será para o .quadrado de FH, como o círculo ABCD é para um espaço menor, ou maior que o círculo EFGH

Seja, primeiramente, para um espaço menor, e seja S êste espaço (Figs. 3.4.). Inscreva-se, no círculo EFGH, o quadrado EFGH. Digo que êste quadrado, inscrito no círculo EFGH, é maior que a metade do mesmo círculo EFGH. Porque, se pelos pontos E, F, G, H, forem tiradas outras tantas tangentes ao círculo, o quadrado inscrito EFGH virá a ser a metade *(Pr. 41.1.)* do quadrado circunscrito ao mesmo círculo.

Mas o círculo é menor do que o quadrado circunscrito. Logo, o quadrado EFGH é maior que a metade do círculo EFGH. Divida-se cada um dos arcos EF, FG, GH, HE em partes iguais nos pontos K, L, M, N, e tirem-se as retas EK, KF, FL, LG, GM, MH, HN, NE. Cada um dos triângulos EKF, FLG, GMH, HNE será maior que a metade do segmento circular, em que fica compreendido, porque, se pelos pontos K, L, M, N forem conduzidas ao círculo outras tantas tangentes, e sôbre as retas EF, FG, GH, HE se completarem outros tantos paralelogramos; cada um dos triângulos EKF, FLG, GMH, HNE, será a metade do paralelogramo, que lhe corresponde. Mas cada segmento é menor que o paralelogramo que lhe pertence. Logo, cada um dos triângulos EKF, FLG, GMH, HNE é maior do que a metade do segmento circular em que fica descrito. E divididos outra vez êstes arcos nas suas metades, e tiradas as

---

* A razão disto é porque há de haver um quadrado igual ao circulo ABCD. Chamando P o lado dêste quadrado, ê manifesto, que postas as três retas BD, FH, P, se lhes poderá achar a quarta proporcional, à qual chamo Q. Logo, os quadrados feitos sôbre as retas BD, FH, P, Q, serão também proporcionais, que ê o mesmo que dizer, que supostos os quadrados das retas BD, FH, e suposto o circulo ABCD, poderá haver um espaço, que seja uma quarta grandeza proporcional a respeito dos mesmos quadrados de BD, e de FH, e do círculo ABCD. Seja S esta quarta grandeza proporcional. Do mesmo modo se hão de entender alguns lugares semelhantes, que há nas proposições seguintes.

cordas correspondentes, e continuando isto sempre assim; hão de restar finalmente uns segmentos circulares, os quais tomados juntos hão de ser menores que o excesso, em que o círculo EFGH excede o espaço S. Porque já se tem demonstrado no Lema precedente que, postas duas grandezas desiguais, Se da grandeza maior se tirar mais do que a sua metade, e do que fica também se tirar mais do que a metade, e isto se continuar sempre assim; por fim havemos de ter uma grandeza menor que a mesma grandeza mai~ pequena das duas propostas. Sejam pois os segmentos EK, KF, FL, LG, GM, MH, HN, NE, os que ficam, de maneira que tomados juntos venham a ser menores que o excesso, em que o círculo EFGH excede o espaço S. Logo, o polígono EKFLGMHN, que resta, será maior que o espaço S. Inscreva-se no círculo ABCD o polígono AXBOCPDR, semelhante ao polígono EKFLGMHN. Logo, assim como o quadrado de BD é para o quadrado de FH, assim também o polígono AXBOCPDR será para o polígono EKFLGMHN *(Pr. 1.12.)*. Mas assim como o quadrado de BD é para o quadrado de FH, assim o círculo ABCD é para o espaço S. Logo, como o círculo ABCD é para o espaço S, assim o polígono AXBOCPDR deve ser para o polígono EKFLGMHN (Pr. 11.5.). Mas o círculo ABCD é maior que o polígono, a que o mesmo círculo é circunscrito. Logo, também o espaço S deve ser maior *(Pr. 14.5.)* que o polígono EKFLGMHN. Mas temos já demonstrado, que o espaço S é menor que o mesmo polígono EKFLGMHN. Logo, o espaço S é maior e menor ao mesmo tempo que o polígono EKFLGMHN, o que não é possível. Logo, é falso que assim como o quadrado de BD é para o quadrado de FH, assim também o círculo ABCD é para um espaço menor que o círculo EFGH. Do mesmo modo se pode demonstrar que assim como o quadrado de FH é para o quadrado de BD, assim o círculo EFGH não pode ser para um espaço menor que o círculo ABCD.

Digo também que nem pode ser, que assim como o quadrado de BD é para o quadrado de FH, assim também o círculo ABCD seja para um espaço maior que o círculo EFGH (Figs. 3 e 5.). Se isto é possível, assim como o quadrado de BD é para o quadrado de FH, seja também o círculo ABCD para o espaço T, maior que o círculo EFGH. Invertendo, será o espaço T para o círculo ABCD, como o quadrado de FH para o quadrado de BD. Mas também pode ser o espaço* para o círculo ABCD, como o círculo EFGH para outro espaço, que será menor (Pr. 14.5.) que o círculo ABCD, visto ser o espaço T maior que o círculo EFGH. Logo, assim como o quadrado de FH é para o quadrado de BD, assim o círculo EFGH será para um espaço menor que o círculo ABCD; o que já se tem demonstrado que é impossível. Logo, não pode ser que assim como o quadrado de BD é para o quadrado de FH, assim seja o círculo ABCD para um espaço maior que o círculo EFGH. Mas também temos provado que, assim como o quadrado de BD é para o quadrado de FH, assim não pode ser o círculo ABCD para um espaço menor que o círculo EFGH. Logo, assim como o quadrado de BD é para o quadrado de FH, assim é o círculo ABCD para o

* Porque temos demonstrado, na Nota precedente, que postos os quadrados das retas BD, FH, e pôsto o círculo ABCD, pode haver um espaço, que foi marcado com a letra S, o qual seja a quarta grandeza proporcional. Da mesma sorte, postos o espaço T, e os círculos ABCD, EFGH,poderá haver um espaço, que seja a quarta grandeza proporcional.

círculo[*] EFGR Logo, os círculos estão entre si como os quadrados dos seus diâmetros.

PROP. III. TEOR.

Tôda a pirâmide, que tem a base triangular, se divide em duas pirâmides iguais, semelhantes entre si, e semelhantes à pirâmide total, e com bases também triangulares; e mais em dois prismas iguais, que tomados juntos são maiores que a metade da pirâmide total (Fig. 6.).

Seja pirâmide ABCD, cuja base é o triângulo ABC, e o vértice o ponto D: Digo que a pirâmide ABCD se divide em outras duas pirâmides iguais, semelhantes entre si, e com bases triangulares, e também semelhantes à pirâmide ABCD; e em dois prismas iguais, os quais tomados juntos são maiores que a metade da pirâmide ABCD.

Divididos pelo meio os lados AB, BC, CA, AD, BD, DC nos pontos E, F, G, R, K, L, tirem-se as retas EH, EG, GH, HK, KL, LH, EK, KF, FG. Sendo AE = EB, e AH = HD, será RE paralela *(Pr. 2.6.)* a DB. Pela mesma razão HK é paralela a AB. Logo, a figura HEBK é um paralelogramo, e assim é HK = EB *(Pr. 34.1.)*. Mas temos EB = AE. Logo, deve ser AE = HK. Mas é AH = HD, e juntamente são iguais (Pr*. 29,1.)* os ângulos EAH, KHD. Logo, será EH = KD, e o triângulo AEH igual *(Pr. 4.1.)* e semelhante ao triângulo HKD. Pela mesma razão, também o triângulo AGH é igual e semelhante ao triângulo HLD. E como as duas retas EH, HG, existentes em um plano e que se tocam, são paralelas respectivamente às outras duas KD, DL, existentes em outro plano e que também se tocam, os ângulos compreendidos por estas retas serão iguais *(Pr. 10.11.)* entre si, isto é, será EHG = KDL. Também sendo as duas retas EH, HG iguais às duas KD, DL, cada uma a cada uma, e sendo o ângulo EHG = KDL; será a base EG igual a base KL, e o triângulo EHG igual *(Pr. 4.1.)* e semelhante ao triângulo KDL. Do mesmo modo, o triângulo AEG deve ser igual e semelhante ao triângulo HKL. Logo, a pirâmide, cuja base é o triângulo AEG, e o vértice o ponto H, é igual *(Pr. C .11.)* e semelhante à pirâmide, cuja base é o triângulo KHL, e o vértice o ponto D. E como no triângulo ADB está tirada a reta HK, paralela ao lado AB, os triângulos ADB, HDK serão eqüiângulos, e assim terão proporcionais *(Pr. 4.6.)* os lados, e por conseqüência serão semelhantes. Pela mesma razão são semelhantes os triângulos ABC, DKL, e os triângulos ADC, RDL, e também os triângulos ABC, AEG. Mas temos demonstrado ser o triângulo AEG semelhante ao triângulo HKL. Logo, será também o triângulo ABC semelhante *(Pr. 21.6.)* ao triângulo HKL. Logo, a pirâmide, cuja base é o triângulo ABC, e o vértice o ponto D, é semelhante *(Pr. B .11., e Def. 11.11.)* à pirâmide, cuja base é o triângulo HKL, e o vértice o ponto D. Mas a pirâmide da base triangular HKL e do vértice D é semelhante

---

[*] Porque, postos os quadrados das retas BD, FH, e o circulo ABCD, podendo haver um espaço que seja a quarta grandeza proporcional, e não podendo ser êste espaço nem menor, nem maior que o circulo EFGH, como já se tem demonstrado, segue-se que o mesmo espaço há de ser igual ao circulo EFGH.

à pirâmide da base triangular AEG e do vértice R, como temos demonstrado. Logo, a pirâmide da base triangular ABC e do vértice D é semelhante à pirâmide da base triangular AEG e do vértice H. Logo, cada uma das pirâmides AEGH, HKLD é semelhante à pirâmide total ABCD.

Sendo pois BF = FC, o paralelogramo EBFG será o dôbro *(Pr. 41.1.)* do triângulo GFC. E como dois prismas são iguais entre si, quando, sendo igualmente altos, a base paralelograma de um é o dôbro *(Pr. 40.11.)* da base triângular do outro; o prisma, cuja base é o paralelogramo EBFG, e que tem o lado KH oosto à mesma base EBFG, será igual ao prisma, cuja base é o triângulo GFC, e o plano oposto o triângulo HKL, visto serem êstes prismas igualmente altos, por estarem postos entre os planos paralelos *(Pr. 15,11.)* ABC, HKL,

Também é manifesto que cada um dêstes dois prismas é maior que cada uma das duas pirâmides, cujas bases são os triângulos AEG,. RKL, e os vértices os pontos H, D. Porque, tirada a reta EF, o prisma da base paralelograma EBFG, e do lado oposto KH é maior que a pirâmide da base triangular EBF e do vértice K. Mas esta pirâmide é igual à outra, que tem por base o triângulo AEG, e por vértice o ponto H, por serem ambas compreendidas por planos iguais entre si e semelhantes. Logo, também o prisma, cuja base é o paralelogramo EBFG, e o lado oposto a esta base a reta HK, é maior que a pirâmide da base triangular AEG e do vértice H. Mas o prisma, cuja base é o paralelogramo EBFG, e que tem o lado HK oposto a esta base, é igual ao prisma cuja base é o triângulo GFC, e o plano oposto o triângulo HKL; e a pirâmide da base triangular AEG e do vértice R é igual à pirâmide da base triangular RKL e do vértice D. Logo, os ditos dois prismas tomados juntos são maiores que as duas pirâmides,cujas bases são os triângulos AEG, HKL, e os vértices os pontos H, D, também tomadas juntas. Logo, a pirâmide total, que tem por base o triângulo ABC, e por vértice o ponto D, está dividida em duas pirâmides iguais e semelhantes entre si, e também semelhantes à pirâmide total; e mais em dois prismas iguais, os quais tomados juntos são maiores que a metade da mesma pirâmide total.

PROP. IV.TEOR.

Dadas duas pirâmides de alturas iguais, e que tenham bases triangulares, se cada uma delas fôr dividida em duas outras pirâmides iguais entre si, e semelhantes à pirâmide total, e mais em dois prismas também iguais, e se cada uma das pirâmides assim feitas fôr dividida do mesmo modo, e isto se fôr continuando sempre da mesma maneira; assim como a base de uma pirâmide total é para a base da outra pirâmide total, assim todos os prismas, compreendidos na primeira pirâmide total, serão para todos os prismas compreendidos em número igual na outra pirâmide total (Fig. 7.).

Sejam as duas pirâmides igualmente altas com as bases triangulares ABC, DEF, e os vérticés G, H, cada uma das quais se considere dividida em outras duas pirâmides iguais entre si, e semelhantes à pirâmide total, e mais em dois prisma também iguais; e cada uma das pirâmides assim feitas se considere do mesmo modo dividida que as pirâmides totais, e continue-se isto sempre assim. Digo que assim como a base ABC é para a base DEF, assim também todos os prismas, que estiverem compreendidos na pirâmide ABCG, serão para todos os prismas compreendidos em igual número - na pirâmide DEFH.

Faça-se a mesma construção, que se fez na proposição precedente. Sendo pois BX = XC, e AL = LC, será XL paralela *(Pr. 2.6.)* a AB, e o triângulo ABC semelhante ao triângulo LXC. Pela mesma razão, também o triângulo DEF é semelhante ao triângulo RVF. E como a reta BC é o dôbro da reta CX, e EF o dôbro de FV, será BC:CX::EF:FV. Mas sôbre as retas BC, CX estão descritos os retilíneos ABC, LXC, semelhantes e semelhantemente postos; e sôbre as retas EF, FV os retilíneos DEF, RVF, também semelhantes e semelhantemente postos. Logo, assim como o triângulo ABC é para o triângulo LXC, assim também o triângulo DEF será para o triângulo RVF *(Pr. 22.6.)*, e permutando, será ABC:DEF::LXC:RVF. Visto pois serem paralelos *(Pr. 15.11.)* entre si tanto. os planos ABC, OMN, como os planos DEF, STY; as perpendiculares, , que dos vértices G, H se podem conduzir sôbre as bases ABC, DEF, e que são iguais entre si pela suposição, ficarão divididas em partes também iguais *(Pr. 17.11.)* pelos planos OMN, STY, sendo do mesmo modo divididas em partes iguais as retas GC,HF nos pontos N, Y, pelos mesmos planos OMN, STY. Logo, os prismas LXCOMN, RVFSTY são igualmente altos, e por conseqüência a base LXC é para a base RVF, isto é, o triângulo ABC é para o triângulo DEF, como o prisma LXCOMN é para o prisma RVFSTY *(Cor. 32.11.)*. E como os dois prismas, que ficam compreendidos na pirâmide ABCG, são iguais entre si, como também os outros dois, que estão na pirâmide DEFH; o prisma, cuja base e o paralelogramo KBXL, e o lado oposto a reta MO, será para o prisma, cuja base é o triângulo LXC, e o plano oposto o triângulo OMN, como *(Pr. 7.5.)* o prisma, cuja base é o paralelogramo PEVR, e o lado oposto a reta TS, é para o prisma, cuja base é o triângulo RVF, e o plano oposto o triângulo STY. Logo, compondo, serão os prismas KBXLMO, LXCOMN para o prisma LXCOMN, como os prismas PEVRTS, RVFSTY são para o prisma RVFSTY. E permutando, serão os prismas KBXLMO, LXCOMN para os prismas PEVRST, RVFSTY, como o prisma LXCOMN é para o prisma RVFSTY. Mas assim como o prisma LXCOMN é para o prisma RVFSTY, assim temos demonstrado ser a base ABC para a base DEF. Logo, assim como a base ABC é para a base DEF, assim também os dois prismas compreendidos na pirâmide ABCG são para os dois prismas compreendidos na pirâmide DEFH. Também, se as pirâmides, que ficam feitas pela primeira divisão, por exemplo as pirâmides OMNG, STYH, forem divididas do mesmo modo que as primeiras pirâmides propostas, será a base OMN para a base STY, como os dois prismas compreendidos na pirâmide OMNG são para os dois prismas compreendidos na pirâmide STYH. Mas assim como a base OMN é para à base STY, assim também a base ABC é para a base DEF. Logo, assim como a base ABC é para a base DEF, assim os dois prismas, existentes na pirâmide ABCG, são para os dois que existem na pirâmide DEFH; e do mesmo modo os dois, que existem na pirâmide OMNG para os dois existentes na pirâmide STYH, e assim os quatro para os quatro. Demonstra-se o mesmo também a respeito dos prismas; que ficam formados pela divisão das pirâmides AKLO, DPRS, e de tôdas as mais formadas em número igual em ambas as pirâmides propostas.

PROP. V. TEOR.

As pirâmides, que são igualmente altas, e que têm bases triangulares, estão entre si como as bases (Figs. 7, 8 e 9.).

Sejam as pirâmides igualmente altas, cujas bases são os triângulos ABC, DEF, e os vértices os pontos G, H. Digo que assim como a base ABC é para a base DEF, assim a pirâmide ABOG será para a pirâmide DEFH.

Não sendo isto assim, do mesmo modo que a base ABC é para a base DEF, assim será a pirâmide ABCG para um sólido ou menor, ou maior[*] que. a pirâmide DEFH. Seja primeiramente (Figs. 7. e 8.) a pirâmide ABCG para o sólido Q menor que a pirâmide DEFH, como a base ABC é para a base DEF. Divida-se a pirâmide DEFH em duas pirâmides iguais entre si, e semelhantes à pirâmide total, e mais dois prismas iguais. Serão os dois prismas, tomados juntos, maiores (*Pr. 3.12.*) do que a metade da pirâmide inteira. Divida-se do mesmo modo cada uma das pirâmides, que assim ficam feitas por esta primeira divisão, e assim se continue sempre com outras e outras divisões, até ficarem feitas na pirâmide DEFH umas pirâmides, as quais tôdas juntas sejam menores que o excesso, que a mesma pirâmide DEFH tem sôbre o sólido Q (*Lema I*). Sejam estas pirâmides as duas DPRS, STYH. Logo, os prismas que restam na pirâmide DEFH, serão todos juntos maiores que o sólido Q. Considere-se agora estar dividida a pirâmide ABCG semelhantemente e em outras tantas partes, como a pirâmide DEFH. Logo, assim como a base ABC é para a base DEF, assim os prismas existentes na pirâmide ABCG serão para os prismas existentes na pirâmide DEFH (*Pr. 4.12.*). Mas assim temos suposto ser a pirâmide ABCG para o sólido Q. Logo, assim como a pirâmide ABCG é para o sólido Q, assim também os prismas existentes na pirâmide ABCG serão para os prismas existentes na pirâmide DEFH. Mas a pirâmide ABCG é maior que os prismas nela compreendidos. Logo, será o sólido Q também maior (*Pr. 14.5.*) que os prismas existentes na pirâmide DEFH. Mas isto não pode ser, porque já temos provado que os prismas, compreendidos na pirâmide DEFH, são todos juntos maiores que o sólido Q. Logo, não é a base ABC para a base DEF, como a pirâmide ABCG para um sólido menor que a pirâmide DEFH. Pelo mesmo método demonstraremos que nem pode ser a base DEF para a base ABC, como a pirâmide DEFH para um sólido menor que a pirâmide ABCG.

Digo também que assim como a base ABC é para a base, DEF, assim não pode ser a pirâmide ABCG para um sólido, maior que a pirâmide DEFH (Figs.7. e 9.). Seja Z, se é possível, o sólido suposto. Logo, invertendo, assim como a base DEF é para a base ABC, assim também o sólido Z será para a pirâmide ABCG. Mas assim como o sólido Z é para a pirâmide ABCG, assim a pirâmide DEFH deve ser para um sólido[*] menor que a pirâmide ABCG (*Pr.*

---

[*] Pode isto demosntrar pelo mesmo método, por que demonstrams uma coisa semelhante a respeito da proposição II. Nota (a).

[*] Demonstra-se isto do mesmo modo que nas a:nterrores N otas_

14.5.), por ser o sólido Z maior que a pirâmide DEFH. Logo, assim como a base DEF é para a base ABC, assim a pirâmide DEFH será para um sólido menor que a pirâmide ABCG, o que é absurdo. Logo, não é a base ABC para a base DEF, como a pirâmide ABCG para um sólido maior que a pirâmide DEFH. Mas já se tem demonstrado que não pode ser a base ABC para a base DEF, como a pirâmide ABCG para um sólido menor que a pirâmide DEFH. Logo, assim como a base ABC é para a base DEF, assim também a pirâmide ABCG será para a pirâmide DEFH.

PROP. VI. TEOR.

As pirâmides igualmente altas, e que têm bases polígonas, estão entre si como as bases (Fig. 10.).

Sejam as pirâmides igualmente altas, cujas bases são os polígonos ABCDE, FGHKL, e os vértices os pontos M, N. Digo que assim como a base ABODE é para a base FGHKL, assim também a pirâmide ABCDEM será para a pirâmide FGHKLN.

Divida-se a base ABCDE nos triângulos ABCD, ACD ADE, e a base FGHKL nos triângulos FGH, FHK, FKL Considere-se posta uma pirâmide sôbre cada um dêstes triângulos; e seja o ponto N o vértice comum das pirâmides, que assentam sôbre as bases ABC, ACD, ADE, e o ponto N o vértice comum das outras, que assentam sôbre as bases FGH, FHK, FKL. Sendo pois o triângulo ABC para o triângulo FGH, como a pirâmide ABCM é ,para a pirâmide FGHN (*Pr. 5.12.*); e o triângulo ACD para o triângulo FGH, como a pirâmide ACDM para a pirâmide FGHN, e finalmente o triângulo AED para o triângulo FGH, como a pirâmide ADEM para a pirâmide FGHN; serão todos os antecedentes primeiros para o conseqüente comum, como todos os antecedentes segundos para o conseqüente também comum (*2. Cor. 24.5.*), isto é, será a base ABCDE para a base FGH, como a pirâmide ABCDEM é para a pirâmide FGHN. Pela mesma razão deve ser a base FGHKL para a base FGH, como a pirâmide FGHKLN é para a pirâmide FGHN; e, por conseqüência invertendo, será a base FGH para a base FGHKL, como a Pirâmide FGHN é para a pirâmide FGHKLN. Logo, sendo a base ABCDE para a base FGH, como a pirâmide ABCDEM é para a pirâmide FGHN; e sendo também a base FGH para a base FGHKL, como a pirâmide FGHN é para a pirâmide FGHKLN, será por igual (*Pr. 22.5.*) a base ABCDE para a base FGHKL, como a pirâmide ABCDEM para a pirâmide FGHKLN.

PROP. VII. TEOR.

Todo o prisma, que tem a base triangular, se pode dividir em três pirâmides iguais entre si, e com bases também triangulares (Fig. 11.).

Seja o prisma com a base triangular ABC, à qual fica oposto o triângulo DEF. Digo que o prisma ABCDEF se pode dividir em três pirâmides iguais entre si, e com bases também triangulares.

Tirem-se as retas BD, EC, CD. Como a figura ABED é um paralelogramo, cuja diagonal é a reta BD, os triângulos ABD, EBD serão iguais (*Pr. 34.1.*). Logo, a pirâmide, que tem por base o triângulo ABD, e por vértice o ponto C, será igual (*Pr. 5.12.*) à pirâmide, que tem por base o triângulo EBD, e, por vértice o ponto C. Mas a pirâmide, cuja base é o triângulo EBD, e o vértice o ponto C, é a mesma pirâmide que tem a base triangular EBC, e o vértice D, por serem ambas formadas com os mesmos planos. Logo, a pirâmide, cuja base é o triângulo ABD, e, o vértice o ponto C, será igual à pirâmide, cuja base é o triângulo EBC, e o vértice o ponto D. Também sendo a figura FCBE um paralelogramo, cuja diagonal é a reta CE, os triângulos ECF, ECB devem ser iguais. Logo, a pirâmide, cuja base é o triângulo ECB, e o vértice o ponto D, será igual à pirâmide, cuja base é o triângulo ECF, e o vértice o ponto D. Mas a pirâmide da base triangular ECB, e do vértice D, é igual à pirâmide, cuja base é o triângulo ABD, e o vértice o ponto C, como se tem já demonstrado. Logo, a pirâmide, cuja base é o triângulo ECF, e o vértice o ponto D, será igual à pirâmide, cuja base é o triângulo ABD, e o vértice o ponto C. Logo, o prisma ABCDEF está dividido em três pirâmides iguais entre si, e com bases triangulares, isto é, está dividido nas pirâmides ABCD, EBDC, ECFD. E como a pirâmide da base triangular ABD, e do vértice C é a mesma que a pirâmide cuja base é o triângulo ABC, e o vértice o ponto D, por serem ambas compreendidas pelos mesmos planos; e a pirâmide da base triangular ABD, e do vértice C é a terceira parte do prisma, cuja base é o triângulo ABC, e o plano oposto o triângulo DEF, como já temos demonstrado; a pirâmide, cuja base é o triângulo ABC, e o vértice o ponto D, será também a terceira parte do prisma, que tem a mesma base triangular ABC, e o plano oposto o triângulo DEF.

COROL. 1. *Disto se segue que qualquer pirâmide é a terceira parte do prisma, que tem a mesma base da pirâmide e altura igual. Porque, se a base do prisma fôr outra qualquer figura retilínea, o prisma se poderá sempre dividir em outros prismas, que tenham bases triangulares, e assim terá lugar a mesma demonstração que acima.*

COROL. 2. *Os prismas igualmente altos estão entre si como as bases; porque as pirâmides, que têm a mesma altura, e que assentam sôbre as mesmas bases dos prismas, têm entre si aquela mesma razão que têm as bases (Pr. 6.12.).*

PROP. VIII. TEOR.

As pirâmides semelhantes, cujas bases são triângulos, estão entre si na razão triplicada da dos lados homólogos (Fig. 12.).

Sejam as pirâmides semelhantes entre si, e semelhantemente postas, cujas bases são os triângulos ABC, DEF, e os vértices os pontos G, H. Digo, que a razão da pirâmide ABCG para a pirâmide DEFH é, a triplicada daquela, que o lado BC tem para o lado homólogo EF.

Completem-se os paralelogramos ABCM, GBCN, ABGK, e o sólido paralelepípedo BGML, que fica formado por êstes planos e pelos opostos. Complete-se também o paralelepípedo EHPO, compreendido pelos três paralelogramos DEFP, HEFR, DEHX, e pelos outros três opostos. Sendo pois a pirâmide ABCG semelhante à pirâmide DEFH, será o ângulo ABC = DEF (*Def. 11.11.*), e GBC = HEF, e ABG = DEH. Mas é AB:BC::DE:EF (*Def. 1.6.*), isto é, são proporcionais os lados, que formam ângulos iguais. Logo, o paralelogramo BM é semelhante ao paralelogramo EP. Pela mesma razão, também o paralelogramo BN é semelhante ao paralelogramo ER, e o paralelogramo BK semelhante ao paralelogramo EX; e assim os três paralelogramos BM, BN, BK são semelhantes a.os três EP, ER, EX. Mas os três BM, BN, BK são iguais e semelhantes (*Pr. 24.11.*) aos outros três opostos; como também os três EP, ER, EX são iguais e semelhantes aos três opostos. Logo, as sólidos BGML, EHPO, são formados por planos respectivamente semelhantes e em número igual. Mas os ângulos sólidos dêles são também respectivamente iguais (*Pr. B.11.*). Logo, o sólido BGML é semelhante (*Def. 11.11.*) ao sólido EHPO. Mas os sólidos paralelepípedos semelhantes: estão entre si na razão triplicada da das lados homólogos (*Pr. 33.11.*). Lago, a razão da sólida BGML para o sólido EHPO é a triplicada daquela, que o lado homóloga BC tem para o lado homólogo EF. Mas o sólido BGML e para o sólido EHPO como a pirâmide ABCG é para a pirâmide DEFH; parque cada uma destas pirâmides é a sexta parte do sólido paralelepípedo correspondente (*Pr. 15.5.*), visto ser o prisma a metade' (*Pr. 28.11.*) do paralelepípedo, juntamente triplo (*Pr. 7.12.*) da pirâmide que lhe corresponde. Logo, também a pirâmide ABCG tem para a pirâmide DEFH a razão triplicada daquela, que o lado homólogo BC tem para o lado homólogo EF.

COROL. *Pelo que se tem demonstrado fica evidente que as pirâmides, semelhantes, e com bases multiláteras, estão também entre si na razão triplicada dos lados homólogos. Porque, divididas estas pirâmides em outras que tenham bases triangulares, as bases das pirâmides propostas, as quais base pela suposição são polígonos semelhantes, ficando também divididas em triângulos semelhantes, e em número igual e homólogos às mesmas bases, será uma pirâmide triangular das que ficam compreendidas na primeira pirâmide proposta, para outra pirâmide também triangular, e correspondente das compreendidas na segunda pirâmide proposta, como tôdas as pirâmides triangulares, existentes na primeira (pirâmide proposta são para tôdas as pirâmides triangulares existentes na segunda pirâmide proposta; isto 'é, como a primeira. pirâmide proposta, cujo, base é um polígono, é para a segunda pirâmide proposta, cuja base é outro polígono. Mas uma pirâmide com base triangular tem para outra pirâmide semelhante, a razão triplicada da dos lados homólogos. Logo, a pirâmide, cuja base é um polígono, tem para outra pirâmide, cuja base é outro polígono semelhante ao primeiro, ai razão também triplicado, daquela que um lado homólogo tem para outro lado homólogo.*

PROP. IX. TEOR.

Nas pirâmides iguais, cujas bases são triângulos, as bases e alturas são reciprocamente proporcionais. E as pirâmides de base triangular, cujas bases são reciprocamente proporcionais às alturas, são iguais (Fig. 13.).

Sejam as pirâmides iguais, cujas bases são os triângulos ABC, DEF, e os vértices os pontos G, H. Digo que as bases e alturas das pirâmides ABCG, DEFH sã.o reciprocamente proporcionais, isto é, que assim como a base ABC é para a base DEF, assim também a altura da pirâmide DEFH é para a altura da pirâmide ABCG.

Completem-se os pralelogramos AC, AG, GC, como também os paralelogramos DF, DH, HF. Complete-se do mesmo modo os sólidos paralelepípedos BGML, EHPO, que ficam formadas pelos ditos paralelogramos e pelos opostos. Como pela hipótese a pirâmide ABCG é igual à pirâmide DEFH, e o sólida BGML é o sêxtupla da pirâmide ABCG, e o sólida EHPO é o sêxtuplo da pirâmide DEFH, será o sólido BGML igual (*Ax. 1.5.*) ao sólido EHPO. Mas as bases e alturas dos sólidos paralelepípedos iguais são reciprocamente proporcionais (*Pr. 34.11.*). Logo, será a base BM para a base EP como a altura da sólido EHPO é para a altura da sólida BGML. Mas a base BM é para a base EP, como o triângulo ABC é para o triângulo DEF. Logo, será o triângulo ABC para o triângulo DEF como a altura do sólido EHPO é para a altura do sólido BGML. Mas a altura do sólido EHPO é a mesma que a altura da pirâmide DEFH, e a altura do sólido BGML é a mesma que a altura da pirâmide ABCG. Logo, assim como a base ABC é para a base DEF, assim também a altura da pirâmide DEFH será para a altura da pirâmide ABCG. Fica pois demonstrado que as bases e alturas das pirâmides iguais ABCG, DEFH são reciprocamente proporcionais.

Suponham-se agora reciprocamente proporcionais as bases e alturas das pirâmides ABCG, DEFH, isto é, suponha-se que a base ABC é para a base DEF, como a altura da pirâmide DEFH é para a altura da pirâmide ABCG. Digo que as pirâmides ABOG, DEFH são iguais.

Feita a mesma construção que acima, sendo a base ABC para a base DEF, como a altura da pirâmide DEFH é para a altura da pirâmide ABCG; e também sendo a base ABC para. a base DEF, como o paralelo gramo BM é para o paralelogramo EP, será o paralelogramo BM para o paralelogramo EP, como a .altura da pirâmide DEFH é ,para a altura da pirâmide ABCG. Mas a altura da pirâmide DEFH é a mesma que a do sólido paralelepípedo EHPO; e a altura da pirâmide ABCG é a mesma que a do sólido paralelepípedo BGML. Logo, será a base BM para a base EP, como a altura do paralelepípedo EHPO é para a altura do paralelepípedo BGML. Mas os sólidos paralelepípedos são iguais (*Pr. 34.11.*) quando as bases e alturas dêles são reciprocamente proporcionais. Logo, os paralelepípedos BGML, EHPO são iguais. Mas a pirâmide ABCG é a sexta parte do sólido BGML; e a pirâmide DEFH é a sexta parte do sólido EHPO. Logo, também as pirâmides ABCG, DEFH são iguais.

PROP. X. TEOR.

Toda a pirâmide cônica é a têrça parte do cilindro, que tem a mesma base e altura igual (Figs. 14 e 15.).

Seja o círculo ABCD a base comum de uma pirâmide cônica e de um cilindro, e tenham êstes dois sólidos altura igual. Digo que a pirâmide cônica é a têrça parte do cilindro, ou que o cilindro é o triplo da pirâmide cônica.

Se o cilindro não fôr o triplo da pirâmide cônica, será ou maior, ou menor que o triplo dela. Seja primeiramente maior que o triplo. Inscreva-se no círculo ABCD o quadrado ABCD. Será o quadrado ABCD maior que a metade do círculo ABCD. Considere-se descrito sôbre o quadrado ABCD um prisma de altura igual à do cilindro. Será êste prisma maior que a metade do cilindro, porque, se fôr circunscrito um quadrado ao círculo ABCD, e fôr construído sôbre êste quadrado um prisma tão alto como o cilindro, sendo o quadrado inscrito a metade do circunscrito, o prisma feito sôbre o quadrado ABCD, que é inscrito ao círculo, será a metade do prisma formado sôbre o quadrado circunscrito ao mesmo círculo, por serem êstes prismas igualmente altos, e assim estarem entre si como as bases (*Pr. 32.11.*). Mas o cilindro é menor que o prisma, formado sôbre o quadrado circunscrito ao círculo ABCD. Logo, o prisma feito sôbre o quadrado inscrito ABCD, e que tem a mesma altura do cilindro, é maior que a metade do mesmo cilindro. Dividam-se os arcos AB, BC, CD, DA em partes iguais nos pontos E, F, G, H; e tirem-se as cordas AE, EB, BF, FC, CG, GD, DH, HA. Será cada um dos triângulos AEB, BFC, CGD, DHA maior que a metade do segmento do círculo em que existe, como se tem já demonstrado na Proposição II deste Livro. Sôbre cada um dos triângulos AEB, BFC, CGD, DHA considere-se formado um prisma de altura igual à do cilindro. Será cada um dêstes prismas também maior que a metade da porção do cilindro, na qual fica compreendido; porque, se pelos pontos E, F, G, H forem conduzidas retas paralelas às retas AB, BC, CD, DA, e sôbre estas retas estiverem completados outros tantos paralelogramos, sôbre os quais como bases forem descritos outros tantos sólidos paralelepípedos, de altura igual à do cilindro, cada um dos prismas, que assentam sôbre os triângulos AEB, BFC, CGD, DHA, será a metade (*2. Cor. 7.12.*) do sólido paralelepípedo que lhe corresponde. Mas cada uma das porções do cilindro é menor que o paralelepípedo que lhe pertence. Logo, cada um dos prismas feitos sôbre os triângulos AEB, BFC, CGD, DHA deve ser maior que a metade da porção do cilindro, na qual fica compreendido. Divididos também pelo meio os arcos AB, EB, BF, FC, CG, GD, DH, HA, e tiradas pelos pontos das divisões retas como acima, e descritos sôbre cada um dos triângulos, que assim ficam feitos, outros, tantos prismas todos de altura igual à do cilindro; e repetida a mesma construção por mais e mais vêzes, chegaremos finalmente a tais porções do cilindro as quais tôdas juntas serão menores (*Lema. I*) que o excesso do cilindro sôbre o triplo da pirâmide cônica. Sejam êstas porções as que assentam sôbre os segmentos de círculo AE, EB, BF, FC, CG, GD, DH, HA. Logo, o prisma tão alto como o cilindro, e que tem por base o polígono AEBFCGDH, é maior que o triplo da pirâmide cônica. Mas êste prisma é triplo da pirâmide, cuja base é o polígono AEBFCGDH, e o vértice o mesmo que o da pirâmide cônica (*1. Cor. 7.12.*). Logo, também a pirâmide, cuja base é opolígono AEBFCGDH, e o vértice o mesmo que o da pirâmide cônica, será maior que a mesma pirâmide cônica, cuja base é o círculo ABCD; o que não pode ser porque a dita pirâmide, sendo compreendida na pirâmide cônica, necessàriamente deve ser menor que a mesma pirâmide cônica.

Digo também que o cilindro não pode ser menor do que o triplo da pirâmide cônica; Seja, se é possível, o cilindro menor que o triplo da pirâmide cônica. Invertendo, será a pirâmide cônica maior que a têrça parte do cilindro. Inscreva-se, no círculo ABCD, o quadrado ABCD. Será o quadrado ABCD maior que a metade do círculo ABCD. Sôbre o quadrado ABCD considere-se formada uma pirâmide, que tenha o mesmo vértice que a pirâmide cônica. Será esta pirâmide maior que a metade da pirâmide cônica; porque, como temos demonstrado, se ao círculo fôr circunscrito um quadrado, o quadrado inscrito ABCD será a metade do quadrado circunscrito; e se sôbre êstes quadrados forem levantados dois sólidos paralelepípedos, de altura igual à da pirâmide cônica, os quais também são prismas, o sólido feito sôbre o quadrado ABCD será a metade do outro formado sôbre o quadrado circunscrito ao círculo, por estarem entre si êstes sólidos como as bases (*Pr. 32.11.*); e o mesmo também será à respeito das têrças partes dêstes sólidos. Logo, a pirâmide, cuja base é o quadrado ABCD, é a metade da pirâmide, cuja base é o quadrado circunscrito ao círculo ABCD. Mas a pirâmide, formada sôbre o quadrado circunscrito, é maior que a pirâmide cônica, porque esta fica compreendida naquela. Logo, a pirâmide, cuja base é o quadrado ABCD, e o vértice o mesmo que o da pirâmide cônica, é maior que a metade da mesma pirâmide cônica. Sejam divididos em partes iguais os arcos AB, EC, CD, DA, nos pontos E, F, G, H, e sejam conduzidas as cordas AE, EB, BF, FC, CG, GD, DH, HA. Cada um dos triângulos AEB, BFC, CGD, DRA é maior que a metade do segmento circular em que existo. Sôbre cada um dêstes triângulos considere-se formada uma pirâmide, que tenha o mesmo vértice da pirâmide cônica. Será cada uma destas pirâmides maior que a metade daquela porção da. pirâmide cônica na qual fica compreendida; o que do mesmo modo se pode demonstrar, como já se demonstrou a respeito dos prismas e dos segmentos do cilindro. Também dividindo os arcos AE, EB, BF etc., nas suas metades, e tirando as cordas, e levantando sôbre cada um dos triângulos, que dêste modo ficam feitos, umas pirâmides, que tenham o mesmo vértice que tem a pirâmide cônica, e continuando isto sempre assim; viremos finalmente a ter umas porções da pirâmides cônica, as quais tôdas juntas serão menores que o excesso da mesma pirâmide cônica sôbre a têrça parte do cilindro (*Lema I.*). Sejam pois estas porções as que assentam sôbre os segmentos circulares AE, EB, BF, FC, CG, GD, DH, HA. Logo, a pirâmide resídua, cuja base é o polígono AEBFCGDH, e o vértice o mesmo que o da pirâmide cônica, é maior que a têrça parte do cilindro. Mas esta pirâmide é a têrça parte do prisma, cuja base é o mesmo polígono AEBFCGDH, e a altura a mesma que a do cilindro. Logo, êste prisma é maior que o cilindro, que tem por base o círculo ABCD, o que é absurdo; porque, sendo o prisma compreendido no cilindro, deve ser menor que o mesmo cilindro. Não é pois o cilindro menor que o triplo da pirâmide cônica. Mas temos demonstrado que o mesmo cilindro não pode ser maior que o triplo da pirâmide cônica. Logo, o cilindro deve ser o triplo da pirâmide cônica, e por conseqüência a pirâmide cônica é a têrça parte do cilindro.

PROP. XI. TEOR.

Tanto as pirâmides cônicas, como os cilindros que têm a mesma altura, estão entre si como as bases (Figs. 16, 17 e 18.).

Sejam as pirâmides cônicas e os cilindros de altura igual: e com as bases circulares ABCD, EFGH. Sejam, as retas KL, MN os eixos dêstes sólidos, e AC, EG os diâmetros das bases. Digo que assim como o círculo ABCD é para o círculo EFGH, assim também a pirâmide cônica AL é para a pirâmide cônica EN.

Suponhamos não ser isto assim; será o círculo ABCD para o círculo EFG H, como a pirâmide cônica AL para um sólido menor, ou maior que a pirâmide cônica EN. Seja, primeiramente, (Figs. 16 e 17.) para um sólido menor, e seja X êste sólido. Seja também o sólido Z igual ao defeito, que o sólido X tem de menos que a pirâmide cônica EN. Será a pirâmide cônica EN igual aos sólidos X, Z juntamente tomados. Inscreva-se no círculo EFGH o quadrado EFGH. Será êste quadrado maior que a metade do círculo. Sôbre o quadrado EFGH imagine-se construída uma pirâmide, que tenha a mesma altura* da pirâmide cônica. Esta pirâmide assim levantada deve ser maior que a metade da pirâmide cônica. A razão é porque, se ao círculo se considerar circunscrito um quadrado, e sôbre êste quadrado estiver levantada outra pirâmide de altura igual à da pirâmide cônica, a pirâmide inscrita será a metade da pirâmide circunscrita, por estarem entre si estas pirâmides na razão das bases (*Pr. 6.12.*). Mas a pirâmide cônica é menor que a pirâmide circunscrita. Logo, a pirâmide, cuja base é o quadrado EFGH, e o vértice o mesmo que o da pirâmide cônica, é maior que a metade da. mesma pirâmide cônica. Dividam-se os arcosEF, FG, GH, HE, nas suas metades, nos pontos O, P, R, S; e tirem-se as cordas EO, OF, FP, PG, GR, RH, HS, SE. Será cada um dos triângulos EOF, FPG, GRH, HSE maior que a metade do segmento circular, em que fica compreendido. Considere-se formada sôbre cada um dos triângulos EOF, FPG, GRH, HSE uma pirâmide de altura igual à da pirâmide cônica. Será cada uma destas pirâmides maior que a metade da porção da pirâmide cônica, que lhe pertence. E, dividindo outra vez pelo meio os arcos EO, OF, FP, etc.; e tirando as cordas, e levantando sôbre cada um dos triângulos, que assim ficam formados, outras pirâmides tôdas de altura igual à da pirâmide cônica; e repetindo por mais e mais vêzes a mesma construção, viremos finalmente a ter umas porções da pirâmide cônica, as quais tôdas juntas serão menores (*Lema I.*) que o sólido Z. Sejam as ditas porções as que E do mesmo modo em alguns lugares seguintes. assentam sôbre os segmentos circulares EO, OF, FP, PG, GR, RH, HS, SE. Logo, a pirâmide que resta, e que tem por base o polígono EOFPGRHS, e que é de altura igual à da pirâmide cônica, é maior que o sólido X. Inscreva-se no círculo ABCD o polígono ATBYCVDQ semelhante ao polígono EOFPGRHS; e sôbre o polígono inscrito imagine-se construída uma pirâmide de altura igual à, da pirâmide cônica AL. Sendo o quadrado de AC para o quadrado de EG, como o polígono ATBYCVDQ é para o polígono EOFPGRHS (*Pr. 1.12.*); e sendo o quadrado de AC para o quadrado de EG, como o círculo ABCD é para o círculo EFGH (*Pr. 2.12.*), será o círculo ABCD para o círculo EFGH, como o polígono ATBYCVDQ é para o polígono EOFPGRHS (*Pr. 11.5.*). Mas o círculo ABCD é para o círculo EFGH, como a pirâmide cônica AL é para o sólido X; e o polígono ATBYCVDQ é para o polígono EOFPGRRS, como a pirâmide da base ATBYCVDQ, e do vértice L é para a pirâmide da base

* Melhor é dizer, que tenha o mesmo vértice da piréimide cônica

EOFPGRHS e do vértice N. Logo, será a pirâmide cônica AL para o sólido X, como a pirâmide da base ATBYCVDQ, e do vértice L é para a pirâmide da ba~,e EOFPGRHS e do vértice N. Mas a pirâmide cônica AL é maior que a pirâmide, que nela fica compreendida. Logo, o sólido X será maior que a pirâmide existente na pirâmide cônica EN (*Pr. 14.5.*); o que é absurdo, porque temos suposto ser o sólido X menor que a mesma pirâmide cônica EN. Logo, é falso que assim como o círculo ABCD é para o círculo EFGH, assim seja também a pirâmide cônica AL para um sólido menor que a pirâmide cônica EN. Do mesmo modo se demonstrará que, assim como o círculo EFGH é para o círculo ABCD, assim não pode ser a pirâmide cônica EN para um sólido menor que a pirâmide cônica AL.

Digo mais que assim como o círculo ABCD (Figs. 16 e 18.) é para o círculo EFGH, assim a pirâmide cônica AL não será para um sólido maior que a pirâmide cônica EN. Seja, se é possível, para o sólido maior I. Logo, invertendo, assim como o círculo EFGH é para o círculo ABCD, assim também o sólido I será para a pirâmide cônica AL. Mas assim como o sólido I é para a pirâmide cônica AL, assim a pirâmide cônica EN será para outro sólido menor que a pirâmide cônica AL (*Pr. 14.5.*), por ser o sólido I maior que a pirâmide cônica EN. Logo, assim como o círculo EFGH é para o círculo ABCD, assim a ,pirâmide cônica EN será para um sólido menor que a pirâmide cônica AL, o que já se tem demonstrado ser impossível. Logo, não pode ser que assim como o círculo ÃBCD é para o círculo EFGH, assim seja a pirâmide cônica AL para um sólido maior que a pirâmide cônica EN. Mas já se tem provado que, assim como o círculo ABOD é para o círculo EFGH, assim não pode ser a pirâmide cônica AL para um sólido menor que a pirâmide cônica EN. Logo, assim como o círculo ABCD é para o círculo EFGH, assim também a pirâmide cônica AL ,deve ser para a pirâmide cônica EN.

Mas assim como a pirâmide cônica é para a pirâmide cônica, assim também o cilindro é para o cilindro (*Pr. 15.5.*), visto ser o cilindro o triplo (*Pr. 10.12.*) da pirâmide cônica. Logo, assim como o círculo ABCD é para o círculo EFGH, assim o cilindro cuja base é o círculo ABCD, será para o cilindro igualmente alto, e cuja base é o círculo EFGH. Logo, tanto as pirâmides cônicas como os cilindros, que têm a mesma altura, estão entre si como as bases.

PROP. XII. TEOR.

Tanto as pirâmides cônicas como os cilindros semelhantes estão entre si na razão triplicada dos diâmetros das bases (Fígs. 19, 20 e 21.).

Sejam as pirâmides cônicas, e os cilindros semelhantes, cujas bases são os círculos ABCD, EFGH, e os diâmetros das bases as retas AC, EG. Sejam também as retas KL, MN os eixos das pirâmides cônicas, ou dos cilindros. Digo que a pirâmide cônica, cuja base é o círculo ABCD, e o vértice o ponto L, tem para a pirâmide cônica, cuja base é o círculo EFGH, e o vértice o ponto N, a razão triplicada daquela, que o diâmetro AC tem para o diâmetro EG.

Se a pirâmide cônica ABCDL (Figs. 19 e 20.) não tiver para a pirâmide cônica EFGHN a razão triplicada da de AC para EG, poderá haver um sólido ou menor, ou maior que a pirâmide cônica EFGHN, para o qual sólido a pirâmide cônica ABCDL tenha a, dita razão triplicada. Seja X êste sólido, o qual se suponha, primeiramente, ser menor que a pirâmide cônica EFGHN. Feita a mesma construção, que fizemos na Proposição precedente, poder-se-á demonstrar, que a ao pirâmide da base polígona EOFPGRHS, e do vértice N é maior que o sólido X. Inscreva-se no círculo ABCD o polígono ATBYCVDQ; semelhante ao polígono EOFPGRHS; e sôbre o polígono ATBYCVDQ seja formada uma pirâmide, que tenha o mesmo vértice da pirâmide cônica. Seja LAQ um dos triângulos, que compreendem a pirâmide da base ATBYCVDQ; e do vértice L, e seja NES outro triângulo daqueles, que compreendem a pirâmide da base EOFPGRHS e do vértice N. Tirem-se os semidiâmetros KQ, MS. Como as pirâmides cônicas ABCDL, EFGHN são semelhantes, será AC:EG::KL:MN (*Def. 24.11.*). Mas é AC:EG::AK:EM (*Pr. 15.5.*). Logo, será AK:EM::KL:MN, e permutando AK:KL::EM:MN. Mas, sendo retos os ângulos AKL, EMN, são também iguais. Logo, sendo proporcionais os lados que formam os ângulos iguais, os triângulos AKL, EMN serão semelhantes (*Pr. 6.6.*); Do mesmo modo, sendo AK:KQ::EM:MS, e sendo iguais entre si também Os ângulos AKQ, EMS, feitos pelos lados AK, KQ, EM, MS, por ser cada um dos ditos ângulos a mesma parte de quatro ângulos retos, que existem ao redor tanto do centro K, como do centro M, será o triângulo AKQ semelhante ao triângulo EMS. E como se tem já demonstrado ser AK:KL::EM:MN, e temos AK = KQ, e EM = MS, será QK:KL::SM:MN. Logo, são proporcionais os lados que formam os ângulos retos, e por conseqüência iguais QKL, SMN. Logo, o triângulo LKQ é semelhante ao triângulo NMS. Sendo pois, pela semelhança dos triângulos AKL, EMN, LA:AK::NE:EM, e pela semelhança dos triângulos AKQ, EMS, sendo também KA:AQ::ME:ES, será por igual (*Pr. 22.5.*) LA:AQ::NE:ES. Do mesmo modo, sendo semelhantes os triângulos LQK, NSM, será LQ:QK::NS:SM; e sendo também semelhantes os triângulos KAQ, MES, será KQ:QA::MS:SE. Logo, será por igual LQ:QA::NS:SE. Mas temos visto ser LA:AQ::NE:ES, isto é, invertendo, QA:AL::SE:EN. Logo, será outra vez por igual QL:LA::SN:NE. Logo, sendo proporcionais entre si os lados dos triângulos LQA, NSE, êstes triângulos serão eqüiângulos, e por conseqüência também semelhantes (*Pr. 5.6.*). Logo, a pirâmide, cuja base é o triângulo AKQ, e o vértice o ponto L, será semelhante à pirâmide, cuja base é o triângulo EMS, e o vértice o ponto N, por serem iguais (*Pr. B .11.*) entre si, respectivamente, os ângulos sólidos de ambas as pirâmides; e por serem ambas as mesmas pirâmides formadas por planos semelhantes e em número igual. Mas as pirâmides semelhantes, e com bases triangulares, estão entre si na razão triplicada dos lados homólogos (*Pr. 8.12.*). Logo, a pirâmide AKQL tem para a pirâmide EMSN a razão triplicada da de AK para EM. Da mesma maneira, tirados os semidiâmetros entre os pontos T, B, Y, C, V, D, e o centro K, e também entre os pontos O, F, P, G, R, H, e o centro M; formadas sôbre os triângulos, que assim ficam feitos, outras tantas pirâmides, que tenham os mesmos vértices, que as pirâmides cônicas, demonstraremos que cada uma das pirâmides da primeira série tem para a sua correspondente, na segunda série, a razão triplicada daquela, que AK tem para o seu lado homólogo EM, isto é, da razão que AC tem para EG. Mas assim como um dos antecedentes é para um dos conseqüentes, assim também todos os antecedentes são para todos os conseqüentes (*Pr. 12.5.*). Logo, assim como a pirâmide AKQL é para a pirâmide EMSN, assim a pirâmide total, cuja base é o polígono ATBYCVDQ, e o vértice o ponto L, será para a pirâmide total, cuja base é o polígono EOFPGRHS, e o vértice o ponto N. Logo, a pirâmide da base ATBYCVDQ, e do vértice L, terá para a pirâmide da base EOFPGRHS, e do vértice N, a razão triplicada daquela que AC tem para EG. Mas temos suposto que a pirâmide cônica, cuja base é o círculo ABCD, e o vértice o ponto L, tem para o sólido X a razão triplicada da de AC para EG. Logo, será a pirâmide cônica, cuja base é o círculo ABCD, e o vértice o ponto L, para o sólido X, como a pirâmide, cuja base é o polígono ATBYCVDQ, e o vértice o ponto L, é para a pirâmide, cuja base é o polígono EOFPGRHS, e o vértice o ponto N. Mas a dita pirâmide cônica é maior do que a pirâmide, que nela fica compreendida. Logo, será o sólido X maior que a pirâmide, que tem por base o polígono EOFPGRHS; e por vértice o ponto N (*Pr. 14.5.*); o que não pode ser, porque pela suposição o sólido X é menor que a pirâmide cônica EFGHN. Logo, a pirâmide cônica, cuja base é o círculo ABCD, e o vértice o ponto L, não pode ter para um sólido menor que a pirâmide cônica, cuja base é o círculo EFGH, e o vértice o ponto N, a razão triplicada daquela que AC tem para EG. Com demonstração semelhailte se prova também, que a pirâmide cônica EFGHN não pode ter, para um sólido menor que a pirâmide cônica ABCDL, a razão triplicada daquela que EG tem para AC.

Digo agora que a pirâmide cônica ABCDL (Figs. 19 e 21.) não pode ter, para um sólido maior que a pirâmide cônica EFGHN, a razão triplicada da de AC para EG. Suponhamos ser isto possível, e seja Z o dito sólido maior. Logo invertendo, tem o sólido Z para a pirâmide cônica ABCDL a razão triplicada da de EG para AC. Mas assim como o sólido Z é para pirâmide cônica ABCDL, assim também a pirâmide cônica EFGHN será para outro sólido menor (*Pr. 14.5.*) que é a pirâmide cônica ABCDL, visto ser o sólido Z maior que a pirâmide cônica EFGHN. Logo, a pirâmide cônica EFGHN terá para um sólido, menor que a pirâmide cônica ABCDL, a razão triplicada daquela que EG tem para AC; o que já se tem demonstrado ser impossível. Logo, a pirâmide cônica ABCDL não pode ter, para um sólido maior que a pirâmide cônica EFGHN, a razão triplicada da de AC para EG. Mas temos demonstrado ser isto do mesmo modo impossível a respeito de um sólido menor. Logo, a pirâmide cônica ABCDL tem para a pirâmide cônica EFGHN a razão triplicada daquela que o diâmetro AC tem para o diâmetro EG.

Mas a pirâmide cônica é para a pirâmide cônica, como o cilindro é para o cilindro (*Pr. 15.5.*), porque temos já provado que qualquer pirâmide cônica é a têrça parte do cilindro, que tem a mesma base, e altura igual. Logo, também o cilindro tem para outro cilindro semelhante a razão triplicada da de AC para EG. Fica pois demonstrado que tanto as pirâmides cônicas, como os cilindros semelhantes, estão entre si na razão triplicada dos diâmetros das bases.

PROP. XIII. TEOR.

Se um cilindro fôr dividido em outros dois cilindros por um plano paralelo aos planos opostos, será um dêstes cilindros para o outro, como o eixo do primeiro para o eixo do segundo (Fig. 22.).

Considere-se dividido o cilindro AD nas duas partes AH, HC pelo plano GH, paralelo aos planos opostos AB, CD, e o eixo EF do cilindro AD fique também dividido no ponto K pelo mesmo plano GH. Seja a linha curva GH a seção comum do plano GH, e da superfície do cilindro AD. Seja AEFC o paralelogramo retângulo, por cuja revolução ao redor do lado EF fica formado o cilindro proposto AD. Seja finalmente a reta GK a seção comum do plano GH e do paralelogramo AEFC. Como os planos paralelos AB, GH são cortados pelo plano AEKG, serão também paralelas (*Pr. 16.11.*) as seções comuns AE, GK, e assim será AK um paralelogramo, e será a reta KG igual à reta EA, que é um semidiâmetro do círculo AB. Com o mesmo discurso se prova que tôdas as retas, tiradas do ponto K para a linha curva GH, são iguais aos semidiâmetros correspondentes do círculo AB; e assim se faz manifesto que são tôdas iguais entre si, e que a linha curva GH é a circunferência de um círculo (*Def. 15.1.*), cujo centro é o ponto K. Logo, o plano GH divide o cilindro AD em outros dois cilindros AH, GD, os quais vêm a ser os mesmos que aquêles, que ficariam descritos pela revolução dos paralelogramos AK, GF ao redor dos lados EK, KF. Digo pois que o cilindro AR é para o cilindro HC, como o eixo EK é para o eixo KF.

Seja produzido o eixo EF de uma e outra parte para os pontos L, M. Tomem-se as partes EN, NL, em qualquer número, e seja cada uma delas igual ao eixo EK; tomem-se também as partes FX, XM, em outro qualquer número, e seja cada uma delas iguais ao eixo FK. Considerem-se conduzidos pelos pontos L, N, X, M outros tantos planos paralelos aos planos AB, CD. Pelo que temos demonstrado a respeito do plano GH, as seções comuns dos ditos planos, e da superfície do cilindro produzida, serão círculos cujos centros serão os pontos L, N, X, M; e entre os mesmos planos ficarão existindo os cilindros PR, RB, DT, TQ. Sendo pois iguais os eixos LN, NE, EK, os cilindros PR, RB, BG estarão entre si como as bases (*Pr. 11.12.*). Mas as bases são iguais. Logo, os .mesmos cilindros PR, RB, BG serão também iguais. E como tanto os eixos LN, NE, EK, como os cilindros PR, RB, BG são iguais, e o número dos eixos é igual ao número dos cilindros; assim como o eixo KL é multíplice do eixo KE, assim também o cilindro PG será multíplice do cilindro GB. Pela mesma razão, assim como o eixo MK é multíplice do eixo KF, do mesmo modo o cilindro QG deve ser multíplice do cilindro GD. E, se o eixo KL fôr maior, ou igual, ou menor que o eixo KM, também o cilindro PG será maior, ou igual, ou menor que o cilindro QG. Logo, será o eixo EK para o eixo KF, como o cilindro BG é para o cilindro GD (*Def. 5.5.*).

PROP. XIV. TEOR.

Tanto as pirâmides cônicas, corno os cilindros existentes sôbre bases iguais, estão entre si como as alturas (Fig. 23.).

Estejam postos sôbre as bases iguais AB, CD os cilindros. BE, DF. Digo que o cilindro BE é para o cilindro DF, como o eixo GH é para o eixo KL.

Produza-se o eixo KL até o ponto N, de maneira que seja LN = GH, que é o eixo do cilindro BE. Considere-se, descrito o cilindro CM ao redor do eixo LN. Como pela construção são igualmente altos os dois cilindros EB, CM, estarão entre si como as bases (*Pr. 11.12.*). Mas estas bases são iguais. Logo, os cilindros EB, CM são também iguais. E sendo o cilindro FM cortado pelo plano CD. paralelo aos planos opostos, será o cilindro CM para o cilindro DF, C9IDO o eixo LN é para o eixo KL (Pr. 13.12.). Más o cilindro CM é igual ao cilindro EB, e o eixo LN é igual ao eixo GH. Logo, será o cilindro BE para o cilindro DF, como o eixo GH é para o eixo KL.

Mas o cilindro BE é para o cilindro DF, como a pirâmide cônica ABG é para a pirâmide cônica CDK (*Pr. 15.5.*) porque o cilindro é o triplo (*Pr. 10.12.*) da pirâmide cônica, que tem a mesma base e altura igual. Logo, será também a pirâmide cônica ABG para a pirâmide cônica CDK, como o eixo GH é para o eixo KL. Mas os eixos GH, KL são as alturas tanto das pirâmides cônicas, como dos cilindros existentes sôbre as bases AB, CD. Logo, tanto as pirâmides cônicas como os cilindros, que existem sôbre bases iguais, estão entre si como as alturas.

PROP. XV. TEOR.

As bases e alturas tanto das pirâmides cônicas, como dos cilindros iguais, são reciprocamente proporcionais; e tanto as pirâmides cônicas, como os cilindros, que têm as bases e alturas reciprocamente proporcionais, são entre si iguais (Fig. 24.).

Sejam as pirâmides cônicas iguais ALC, ENG, e os cilindros também iguais AX, EO. Sejam os circulos ABCD, EFGH cujos diâmetros são as retas AC, EG, as bases tanto das pirâmides cônicas como dos cilindros; e os seus eixos KL, MN, que são as alturas de uns e das outras. Digo que as bases e alturas dos cilindros AX, EO são entre si reciprocamente proporcionais, isto é, que a base ABCD é para a base EFGH, como a altura MN é para a altura KL.

As alturas KL, MN são ou iguais, ou desiguais. Sejam primeiramente iguais. O cilindro AX se supõe igual ao cilindro EO. Mas tanto as pirâmides cônicas como os cilindros, que têm a mesma altura, estão entre si como as bases (*Pr. 11.12.*). Logo, será a base ABCD igual (*Pr. A.5.*) à base EFGH, e por conseqüência será a base ABCD para a base EFGH, como a altura MN é para a altura KL.

Não sejam iguais as alturas KL, MN, mas seja MN>KL. Tire-se da altura MN a parte MP = KL, e faça-se passar pelo ponto P o plano TYS, paralelo aos planos opostos EFGH, RO. A seção comum do plano TYS, e do cilindro EO será um círculo; e o sólido ES será um cilindro, cuja base é o círculo EFGH, e a altura o eixo MP. Sendo pela hipótese iguais entre si os cilindros AX, EO, será o cilindro AX para o cilindro ES, como o cilindro EO é para o mesmo cilindro ES (*Pr. 7.5.*). Mas o cilindro AX é para o cilindro ES, como a base ABCD é para a base EFGH, visto serem igualmente altos os cilindros AX, ES; e o cilindro EO é para o cilindro ES, como a altura MN para a altura MP (*Pr. 13.12*), por estar cortado o cilindro EO pelo plano TYS, paralelo aos planos opostos. Logo, deve ser a base ABCD para a base EFGH, como a altura MN é para a altura MP. Mas é MP = KL. Logo, será a base ABCD para a base EFGH, como a altura MN é para a altura KL. Logo, as bases e alturas dos cilindros iguais AX, EO são reciprocamente proporcionais.

Suponham-se agora reciprocamente proporcionais as bases e alturas dos cilindros AX, EO; isto é, suponha-se ser a base ABCD para a base EFGH, como a altura MN é para a altura KL. Digo que os cilindros AX, EO serão iguais.

Sejam, primeiramente, iguais as bases ABCD, EFGH. Porque temos suposto ser a base ABCD para a base EFGH, como a altura MN é para a altura KL; e agora se supõem, iguais entre si as bases ABCD, EFGH, será MN = KL (*Pr. A. 5.*), por conseqüência serão iguais (Pr. 11.12.) os cilindros AX, EO.

Suponham-se agora desiguais as bases ABCD, EFGH, e seja ABCD>EFGH. Sendo a base ABCD para a base EFGH, como a altura MN é para a altura KL, será MN>KL (*Pr. A.5.*). Feita pois a mesma construção, que fizemos anteriormente, sendo a base ABCD para a base EFGH, como a altura MN é para a altura KL, e tendo nós KL = MP; será a base ABCD para a base EFGH, como o cilindro AX é para o cilindro ES, por terem êstes cilindros alturas iguais. Mas a altura MN é para a altura MP, ou KL, como o cilindro EO é para o cilindro ES. Logo, será o cilindro AX para o cilindro ES, como o cilindro EO é para o mesmo cilindro ES; e assim serão iguais entre si os cilindros AX, EO.

A mesma demonstração, e pelo mesmo método, se pode fazer também a respeito das pirâmides cônicas.

PROP. XVI. PROB.

Dados dois círculos concêntricos, inscrever no círculo maior um polígono de lados iguais, e de número par, de maneira que não toque o círculo menor (Fig. 25.).

Sejam dados os círculos ABCD, EFGH, cujo centro comum seja o ponto K. Deve-se inscrever, no círculo maior ABCD, um polígono de lados iguais, e de número par, de sorte que não toque o círculo menor EFGH.

Tire-se o diâmetro BD, sôbre o qual se levante do ponto G a perpendicular GA. Produza-se esta até o ponto C. Será a reta AC uma tangente (*Pr. 16.3.*) do círculo EFGH no ponto G; Se a semicircunferência BAD fôr dividida pelo meio, e uma das metades fôr também dividida em partes iguais, ê isto se continuar sempre assim, finalmente viremos a ter um arco menor (*Lema I.*) que o arco AD. Seja LD êste arco menor do que o arco AD. Caia do ponto L perpendicularmente sôbre o diâmetro BD e reta LM, a qual seja produzida até o ponto N. Tirem-se as cordas LD, DN. Será LD = DN (*Pr. 3.3. e 4.1.*). E como LN é paralela a AC, que toca o círculo EFGH no ponto G;

a reta LN não poderá tocar o mesmo círculo EFGH, e por conseqüência muito menos o poderão tocar as cordas LD, DN. Logo, se formos inscrevendo no círculo ABCD outras e outras retas, das quais cada uma seja igual à corda LD, é evidente que ficará inscrito, no mesmo círculo ABCD, um polígono de lados iguais e de número par, o qual polígono não tocará o círculo menor EFGH.

LEMA II

Se dois trapézios ABOD, EFGH estiverem inscritos nos círculos, cujos centros são os pontos K, L; e se forem paralelos entre si tanto os lados AB, DO, como também os lados EF, HG; e finalmente se forem todos iguais entre si os outros quatro lados dos mesmos trapézios, isto é, os lados AD, BO, EH, FG, sendo o lado AB maior que o lado EF, e o lado DO maior que o lado HG; o semidiâmetro KA do círculo, em que estão inscritos os lados maiores, será maior que o semidiâmetro do outro círculo, em que estão inscritos os lados menores, (Fig. 26.).

Se não fôr KA>LE, será KA = LE, ou KA<LE. Seja em primeiro lugar KA = LE. Serão iguais os círculos ABCD, EFGH. E como nestes círculos as cordas AD, BC, são iguais às cordas EH, FG, serão também os arcos AD, BC iguais (*Pr. 28.3.*) aos arcos EH, FG. Mas sendo as cordas AB, DC respectivamente maiores que as cordas EF, HG, também os arcos AB, DC devem ser respectivamente maiores que os arcos EF, HG. Logo, tôda a circunferência ABCD será maior que a circunferência tôda EFGH, o que é absurdo, porque pela suposição estas circunferências são iguais. Logo, não pode ser KA = LE.

Mas seja KA<LE. Posta LM = KA, descreva-se com o centro L, e o semidiâmetro LM o círculo MNOP, que corte os raios LF, LG, LH, LE nos pontos N, O, P, M.

Tirem-se as retas MN, NO, OP, PM, as quais hão de ser respectivamente paralelas (*Pr. 2.6.*) aos lados EF, FG, GH, HE, e também menores que os mesmos lados. Sendo pois EH>MP, será AD>MP. Mas os círculos ABCD, MNOP são iguais, por ser KA = LM. Logo, será o arco AD maior que, o arco MP. Pela mesma razão, o arco BC será maior que o arco NO. Sendo pois o lado AB maior que o lado EF, e êste maior que MN; será AB>MN, e por conseqüência o arco AB será maior que o arco MN. Do mesmo modo o arco CD deve ser maior que o arco OP. Logo, a circunferência inteira ABCD é maior que a circunferência inteira MNOP; o que é absurdo, porque sendo os semidiâmetros AK, ML iguais, também as circunferências ABCD, MNOP devem ser iguais. Logo, não pode ser KA<LE. Mas nem é KA = LE. Logo será KA>LE.

COROL. *Se se der um triângulo isósceles, cujos lados sejam iguais às cordas AD, BO, e a base menor que a corda AB, já suposta maior que a corda, DC, com demonstração semelhante se pode provar, que o semidiâmetro KA deve ser maior que o semidiâmetro do círculo circunscrito, ao dito triângulo.*

PROP. XVII. PROB.

Dadas duas esferas concêntricas, inscrever na esfera maior um sólido poliedro, cuja superfície não toque a esfera menor, (Fig. 27.).

Suponham-se duas esferas concêntricas, e seja o ponto, A o centro comum de ambas. Deve-se inscrever na esfera maior um sólido poliedro, cuja superfície não toque a esfera menor.

Pelo centro comum A de ambas as esferas considere-se passar um plano, que corte as mesmas esferas. As seções comuns do dito plano e das superfícies esféricas devem ser círculos; porque, ficando uma esfera descrita pela revolução inteira de, um semicírculo ao redor do diâmetro considerado como imóvel, qualquer que fôr a situação em que esteja o dito semicírcuio, o plano que passar por êle, sendo produzido para tôdas as partes, necessàriamente marcará na superfície esférica: a circunferência de um círculo:, e é manifesto que êste deve ser um círculo máximo, porque o diâmetro da esfera, que é o mesmo que o diâmetro dêste círculo, é a reta maior de quantas se podem conduzir (*Pr. 15.3.*) dentro de um círculo, ou dentro de uma esfera. Seja êste pois o círculo BCDE na esfera maior, e na menor o círculo FGH. Tirem-se os diâmetros BD, CE, reciprocamente perpendiculares entre si. Inscreva-se (*Pr. 16.12.*) no círculo maior BCDE um polígono de lados iguais, e de número par e que não toque o círculo menor FGH. Sejam as retas BK, KL, LM, ME. os lados dêste polígono, pertencentes ao quadrante BE do mesmo círculo BCDE. Tire-se o diâmetro KN. Levante-se do ponto A a reta AX perpendicularmente sôbre o plano do círculo BCDE. A reta AX encontrará a superfície da esfera em um ponto X. Pela reta AX e pelos diâmetros BD, KN façam-se passar dois planos os quais, pelo que temos dito, farão na superfície esférica dois círculos máximos. Sejam os semicírculos dêstes círculos máximos os dois BXD, KXN, que estão postos sôbre os diâmetros BD, KN. Como a reta XA é perpendicular ao plano do círculo BCDE, todos os planos, que passarem pela reta XA, serão perpendiculares (*Pr. 18.11.*) ao mesmo plano do círculo BCDE. Logo, os semicírculos BXD, KXN são perpendiculares ao plano do dito círculo BCDE. E como os semicírculos BED, BXD, KXN são iguais entre si, por serem iguais os diâmetros dêles BD, KN; também os quadrantes BE, BX, KX, que são as metades dos ditos semicírculos, serão iguais. Logo, em cada um dos quadrantes BX, KX poderá haver um número de lados inscritos igual ao número dos lados BK, KL, LM, ME inscritos no quadrante BE, de maneira que sejam iguais entre si todos êstes lados inscritos nos ditos três quadrantes. Inscrevam-se pois, e sejam os lados BO, OP, PR, RX os lados inscritos no quadrante BX; e no quadrante KX os lados KS, ST, TY, e YX, e tiradas as retas OS, PT, RY dos pontos O, S, sejam conduzidas as perpendiculares OV, SQ sôbre os raios AB, AK.

Como o plano BOXD é perpendicular ao plano BCDE, e no plano BOXD existe a reta OV perpendicular ao semidiâmetro AB, que é a seção comum dos ditos planos, será a reta OV perpendicular (*Def. 4.11.*) ao plano BCDE. Pela mesma razão, a reta SQ é perpendicular ao mesmo plano BCDE, por ser o plano KSXN perpendicular ao plano BCDE. Tire-se VQ. Sendo iguais os arcos BO, KS tomados nos semicírculos também iguais BXD, KXN, e sendo as retas OV, SQ perpendiculares aos diâmetros DB, NK, será OV = SQ, e BV = KQ. Mas é BA = KA. Logo, tirando BV de BA, e KQ de KA, ficará V A = QA. Logo, será BV:VA::KQ:QA, e assim VQ paralela (*Pr. 2.6.*) a BK. E como as retas OV, SQ são perpendiculares ao plano do círculo BCDE, serão as mesmas OV, SQ também paralelas (*Pr. 6.11.*) entre si. Mas já se tem provado ser OV = SQ. Logo, as duas QV, SO são iguais e ao mesmo tempo paralelas (*Pr. 33; 1.*). Sendo pois QV paralela a cada uma das duas SO, KB, também estas duas devem ser paralelas, (*Pr. 9.11.*) entre si. Logo, as retas BO, KS, que estão tiradas entre as extremidades das duas SO, KB, existem no mesmo plano em que existem as paralelas OS, BK, e assim o quadrilátero KBOS existe em um só e o mesmo plano. Agora, se estivessem tiradas as retas PB, TK; e dos pontos P, T fôssem conduzidas umas perpendiculares sôbre os diâmetros DB, NK, do mesmo modo se poderia demonstrar que a reta TP é paralela à reta KB, como já temos demonstrado que SO é paralela a KB. Logo, TP é paralela a SO, e por conseqüência o quadrilátero SOPT existe em um mesmo plano. Pela mesma razão também o quadrilátero TPRY deve existir em um só plano. Mas a figura YRX existe em um mesmo plano (*Pr. 2.11.*). Logo, se imaginarmos que dos pontos O, S, P, T, R, Y estão conduzidas outras tantas retas para o mesmo ponto A, ficará formada uma figura sólida poliedra entre os quadrantes ABX, AKX, composta de pirâmides, cujas bases serão os quadriláteros KBOS, SOPT, TPRY e o triângulo YRX, e o vértice comum o ponto A. E se a respeito de cada um dos lados KL, LM, ME se fizer a mesma construção, que temos feito a respeito do lado BK, e o mesmo se fizer nos outros três quadrantes, e também no outro hemisfério que resta: é evidente que, ficará inscrita na esfera uma figura sólida poliedra composta de pirâmides, cujas bases serão os quadriláteros já ditos e o triângulo YRX, e os outros quadriláteros e triângulos da mesma maneira construídos; e o vértice comum de tôdas estas pirâmides será o centro A.

Digo que a superfície desta figura sólida poliedra não toca a esfera menor, na qual existe o círculo FGH. Tire-se do ponto A uma reta perpendicular (*Pr. 11.11.*) ao plano do quadrilátero KBOS, e seja Z o ponto em que esta perpendicular encontra o plano. Tirem-se também as retas BZ, ZK. Como AZ é perpendicular ao plano do quadrilátero KBOS, será também perpendicular a tôdas as retas que a tocarem, existentes no mesmo plano. Logo, será AZ perpendicular a cada uma das duas BZ, ZK. E porque temos AB = AK, e os quadrados de AZ e de ZB são iguais (*Pr. 47.1.*) ao quadrado de AB, como também os quadrados de AZ e de ZK são iguais ao quadrado de AK, serão os quadrados de AZ e de ZB iguais aos quadrados de AZ e de ZK. Logo, tirado o quadrado comum de AZ, ficará o quadrado de BZ igual ao quadrado de ZK, e por conseqüência será a reta BZ igual à reta ZK. Com o mesmo discurso demonstraremos que cada uma das retas, que do ponto Z forem conduzidas para os pontos O, S, será igual a cada uma das duas BZ, ZK. Logo, o círculo descrito com o centro Z, e o intervalo ZB deve passar pelos pontos K, O, S, e assim o quadrilátero KBOS ficará inscrito no mesmo círculo. Sendo pois KB>QV, e QV = SO; será KB>SO. Mas KB é igual a cada uma das duas BO, KS. Logo, no círculo KBOS cada um dos arcos iguais, cujas cordas são as retas KB, BO, KS, é maior que o arco, cuja corda é a reta OS; e assim aquêles três arcos, e mais outro igual a um dêles, todos juntos são maiores que aquêles mesmos três arcos juntamente com o arco, cuja corda é a reta OS, isto é, são maiores que tôda a circunferência. Logo, no círculo KBOS o arco KB é maior que a quarta parte da circunferência do círculo KBOS e por conseqüência o ângulo BZK no centro é maior que um ângulo reto. Logo, sendo obtuso o ângulo BZK, será o quadrado de BK maior (*Pr. 12.2.*) que os quadrados de BZ e de ZK, isto é, será maior que o dôbro do quadrado de BZ. Tire-se a reta KV. Como nos triângulos KBV, OBV os lados KB, BV são iguais aos lados OB, BV, e êstes lados compreendem ângulos iguais, será o ângulo KVB = OVB (*Pr. 4.1.*). Mas OVB é um ângulo reto. Logo, será KVB também reto. Sendo pois BD menor que o dôbro de DV, será o retângulo compreendido pelas retas DB, BV menor que o dôbro do retângulo compreendido pelas retas DV, VB, isto é, será o quadrado de KB menor (*Pr. 8.6.*) que o dôbro do quadrado de KV. Mas o quadrado de KB é maior que o dôbro do quadrado de BZ. Logo, o quadrado de KV é maior que o quadrado de BZ. E porque temos AB = AK, e os quadrados de BZ e de ZA, são iguais ao quadrado de BA, como também os quadrados de KV e de V A são iguais ao quadrado de AK, serão os quadrados de BZ e de ZA iguais aos quadrados de KV e de V A. Logo, sendo o quadrado de KV maior que o quadrado de BZ, será o quadrado de V A, menor que o quadrado de ZA, e por conseqüência será a reta AZ maior que a reta AV. Logo, AZ é ainda maior que AG, por têrmos demonstrado na proposição precedente, que a, reta KV cai fora do círculo FGH. Mas a reta AZ é perpendicular ao plano KBOS, e assim é a mínima de tôdas as retas, que do centro da esfera se podem conduzir para o dito plano. Logo, o plano KBOS existe todo fora da esfera menor, e assim não a toca.

Deve-se agora demonstrar que também os outros planos, existentes entre os quadrantes BX, KX, caem fora da esfera menor, e por conseqüência não a tocam. Seja conduzida do ponto A a reta AI perpendicularmente sôbre o plano do quadrilátero SOPT, e tire-se a reta IO. O que fica demonstrado a respeito do plano KBOS e do ponto Z, o mesmo se demonstra e do mesmo modo a respeito do plano SOPT e do ponto I, isto é, que o ponto I é o centro do círculo circunscrito ao quadrilátero SOPT, e que a reta OS é maior que a reta PT. Mas já temos provado que as retas PT, OS são paralelas. Logo, nos trapézios KBOS, SOPT inscritos em círculos, sendo tanto os lados BK, OS, como os lados OS, PT paralelos entre si, e sendo iguais os outros lados BO, KS, OP, ST, e sendo o lado BK>OS, e o lado OS>PT; será ZB>IO (*Lema II.*). Tire-se a reta AO, que é igual à reta AB. Sendo retos os ângulos AIO, AZB, serão os quadrados de AI e, de IO iguais ao quadrado de AO ou de AB, isto é, serão iguais aos quadrados de AZ e de ZB. Mas o quadrado de ZB é maior que o quadrado de IO. Logo, o quadrado de AZ é menor que o quadrado de AI, e assim é AZ<AI. Mas temos demonstrado ser AZ>AG. Logo, a reta AI é ainda maior que a reta AG. Logo, o plano SOPT cai fora da esfera menor. Do mesmo modo se prova que o plano TPRY existe fora da mesma esfera menor, como também o plano do triângulo YRX, fazendo uso do corolário do Lema II. Isto mesmo se pode demonstrar também a respeito de todos os mais planos, que formam o sólido poliedro. Logo, dadas duas esferas concêntricas, temos inscrito na esfera maior um sólido poliedro, cuja superfície não toca a esfera menor.

De outro modo, e mais brevemente e sem fazermos uso da proposição XVI, podemos demonstrar que a reta. AZ é maior que a reta AG. Seja do ponto G conduzida a reta GU perpendicular à reta AG. Tire-se também a reta AU. Dividindo pois o arco BE em partes iguais, e dividindo uma destas metades também em partes iguais, e continuando isto sempre assim, chegaremos finalmente a um arco menor que o arco, cuja corda é igual à reta GU. Seja KB êste arco. Logo, a reta KB é menor que a reta GU. E como o ângulo BZK é obtuso, pelo que temos demonstrado acima, será BK>BZ. Mas é GU>BK. Logo, será GU ainda maior que BZ, e por conseqüência será o quadrado de GU maior que o quadrado de BZ. Mas é AU = AB. Logo, o quadrado de AU é igual ao quadrado de AB. Mas o quadrado de AU é igual aos quadrados de AG e de GU; e o quadrado de AB é igual aos quadrados de AZ e de ZB. Logo, os quadrados de AG e de GU são iguais aos quadrados de AZ e de ZB. Mas o quadrado de BZ é menor que o quadrado de GU. Logo, o quadrado de AZ deve ser maior que o quadrado de AG, e assim a reta AZ é maior que a reta AG.

COROL. *Se fôr inscrito na esfera menor um sólido poliedro tirando retas entre os pontos, onde os semidiâmetros, que do centro da esfera se conduzirem para todos os ângulos do sólido poliedro inscrito na esfera maior, encontram a superfície da esfera menor, e pela mesma ordem que forem tiradas as retas entre os pontos, onde os mesmos semidiâmetros encontram a superfície da esfera maior; o sólido poliedro inscrito na esfera maior BCDE terá, para o sólido poliedro inscrito na esfera menor FGH, a razão triplicada daquela que o diâmetro da esfera BCDE tem para o diâmetro da esfera FGH. Porque dividido um e oudro sólido em igual número de pirâmides, e pela mesma ordem de correspondência, estas pirâmides serão respectivamente semelhantes, por terem comuns os ângulos sólidos no vértice, isto é, no centro das esferas e iguais (Pr.B .11.) entre si os mais ângulos sólidos sôbre as bases; o que se faz manifesto, visto serem êstes ângulos sólidos formados por três ângulos planos, iguais entre si os correspondentes em cada duas pirâmides, e além disto estas mesmas pirâmides são compreendidas por igual número de planos respectivamente semelhantes; por consequência as ditas pirâmides são semelhantes (Def. 11.11); mas as pirâmides semelhantes estão entre si na razão triplicada da dos seus lados homólogos (Cor. 8.12.). Logo, a pirâmide, cuja base é o quadrilátero KBOS, e o vértice o ponto A, tem para a pirâmide correspondente, que existe na outra esfera, a razão triplicada daquela que um lado homólogo tem para outro lado homólogo, isto é, daquela que o semidiâmetro AB da esfera maior tem para o semidiâmetro da esfera menor. Do mesmo modo cada uma das pirâmides, que existem na esfera maior, tem para cada uma correspondente das outras, existentes na esfera menor, a razão triplicada daquela que o semidiâmetro AB da esfera maior tem para o semidiâmetro da esfera menor. Mas assim como um antecedente é para um conseqüente, assim também todos os antecedentes tomados juntos são para todos os conseqüentes também tomados juntos. Logo, o sólido* *poliedro inscrito na esfera maior tem para o sólido poliedro, inscrito na esfera menor, a razão triplicada da que o semidiâmetro AB da esfera maior tem para o semidiâmetro da esfera menor, isto é, da que o diâmetro BD da esfera maior tem para o diâmetro da esfera menor.*

PROP. XVIII. TEOR.

As esferas têm entre si a razão triplicada dos seus diâmetros (Figs. 28, 29 e 30.),

Sejam as esferas ABC, DEF, cujos diâmetros são as retas. BC, EF. Digo que a esfera ABC tem para a esfera DEF a razão triplicada da de BC para EF.

Suponhamos não ser isto assim; a esfera ABC terá para outra esfera, ou menor, ou maior que a esfera DEF, a razão triplicada da de BC para EF*. Tenha, primeiramente, a esfera ABC para a esfera GHK menor que a esfera. DEF (Figs. 28, 29.) a dita razão triplicada de BC para EF; e o centro da esfera GHK seja o mesmo que o centro da esfera DEF. Considere-se inscrito (*Pr. 17.12.*) nesta esfera DEF um sólido poliedro, cuja superfície não toque a esfera menor GHK. Seja também inscrito na esfera ABC outro sólido poliedro, semelhante ao que está inscrito na esfera DEF. Terá o sólido poliedro inscrito na esfera ABC. para o sólido poliedro inscrito na esfera DEF a razão triplicada (*Cor. 17.12.*) daquela que BC tem para EF. Mas a esfera ABC, pela hipótese, tem para a esfera GHK a razão triplicada de BC para EF. Logo, será a esfera ABC para a esfera GHK, como o sólido poliedro existente na esfera ABC é para o sólido poliedro existente na esfera DEF. Mas a esfera ABC é maior que o sólido poliedro inscrito nela. Logo, também a esfera GHK será maior (*Pr. 14.5.*) que o poliedro inscrito na esfera DEF. Mas isto é impossível, porque a esfera GHK existindo dentro do poliedro inscrito na esfera DEF, é necessariamente menor que o mesmo poliedro. Logo, a esfera ABC não pode ter para a esfera GHK, menor que a esfera DEF, a razão triplicada da de BC para EF. Do mesmo modo demonstraremos que a esfera DEF não pode ter para outra esfera, menor que a esfera ABC, a razão triplicada daquela que EF tem para BC.

Digo também que a esfera ABC (Figs. 28, 29 e 30.) não tem para outra, maior que a esfera DEF a razão triplicada da de BC para EF. Seja, se é possível, LMN esta esfera maior. Logo, invertendo, a esfera LMN terá para a esfera ABC a razão triplicada da do diâmetro EF para o diâmetro BC. Mas assim como a esfera LMN é para a esfera ABC, assim a esfera DEF deve ser para outra menor que a esfera ABC, por têrmos suposto ser LMN maior que DEF. Logo, também a esfera DEF terá para uma esfera menor que ABC a razão triplicada da de EF para BC, o que temos demonstrado ser impossível. Logo, a esfera ABC não pode ter para a outra, maior que a esfera DEF, a razão triplicada daquela que BC tem para EF. Logo, tendo-se demonstrado o mesmo a respeito de outra esfera menor que a esfera DEF, a esfera ABC deve ter para a esfera DEF a razão triplicada daquela que o diâmetro BC tem para o diâmetro EF.

---

* Veja-se a Nota a prop. 2. dêste liv. pág. 310., as mais Notas. segs.

FIM DOS ELEMENTOS DE EUCLIDES

NOTAS ESCOLHIDAS
DAS DE
ROBERTO SIMSON,
A ALGUMAS PROPOSIÇÕES.
DOS ELEMENTOS DE EUCLIDES.

PROP. XXII. DO LIV. I.

Alguns querem culpar a EUCLIDES por não ter demonstrado, que os círculos, descritos na construção dêste problema, se hão de encontrar um ao outro, reciprocamente. Mas isto fica sendo evidente depois dêle ter determinado, que, das três retas DF, FG, GH, (Fig. 1.) duas, quaisquer que sejam, tomadas juntas hão de ser maiores que a terceira. Porque qual é o principiante tão rude, que não veja que o círculo descrito com o centro F, e o intervalo DF deve encontrar a reta FH entre os pontos F, H, visto ser DF<FH; e também que o círculo descrito com o centro G, e o intervalo GH, ou GM há de encontrar a reta DG entre os pontos G, D; e finalmente que os ditos círculos se hão de cortar um a outro reciprocamente, por serem as retas DF, GH tomadas juntas maiores que a terceira FG? E esta determinação é mais simples do que a outra deduzi da desta mesma, e em lugar dela posta por THOMAZ SIMPSON, nos seus Elementos de Geometria a pág. 49, com o pretexto de suprir a falta de EUCLIDES, a quem ele condena. Determina pois SIMPSON que cada uma das três retas deve ser menor, que as outras duas tomadas juntamente, e ao mesmo tempo deve ser maior que o excesso das mesmas outras duas. Com êste princípio demonstra êle em um caso, que os círculos se hão de encontrar um ao outro; e ajunta que, em qualquer outro caso, se pode demonstrar a mesma coisa, e do mesmo modo. Mas a reta GM, que êle quer se tire da reta GF, pode ser maior que a mesma GF, como na nossa figura; no qual caso é necessária outra demonstração diferente daquela, que deu o mesmo SIMPSON.

PROP. XXIX. DO LIV. I.

Aquela proposição, que vulgarmente se chama o postulado quinto ou o axioma undécimo, e por outros o axioma duodécimo, e da qual principalmente depende esta proposição 29, não tem dado pouco que fazer aos geômetras, tanto antigos como modernos. E sem dúvida, parece que senão deve pôr entre os axiomas, visto não ser uma verdade por si evidente; por outra parte, não admite uma demonstração rigorosa. Necessita, porém, de alguma explicação para que fique mais intelegível, e isto faremos nós com a maior clareza e facilidade que nos fôr possível.

Primeiramente, cada um sem dificuldade alguma pode ver que as duas retas AB, CD (Fig. 2.), existentes no mesmo plano, e ambas perpendiculares à mesma reta AC, são paralelas. entre si, isto é, que por mais que sejam produzidas as mesmas retas. AB, CD, em parte nenhuma se poderão avizinhar uma à outra, ou se poderão apartar uma de outra; e assim parece, que não haverá pessoa alguma, que julgue de outro modo das ditas duas retas. E, com efeito, não se pode conceber que uma delas, como a reta AB, se incline para a outra CD, por pouco que seja, sem que a mesma reta AB se incline também sôbre a reta AO, para aquela mesma parte onde existe a reta CD, o que não pode suceder assim, por se supor a reta AB perpendicular à reta AC. O mesmo se deve também dizer de quaisquer outras duas retas AB, CD (Fig. 3.), as quais fazem com a reta EAC os ângulos iguais EAB, ECD para a mesma parte da reta EAC, visto que cada uma das ditas retas AB, CD pode ser perpendicular a outra linha reta. E, com efeito, dividida pelo meio a reta AC no ponto F, e tirada a reta FG perpendicularmente. sôbre a reta AB produzida, e produzida também a dita GF até o ponto H da outra reta CD; nos triângulos AFG, CFR, pela hipótese, e, pela proposição 15 do Liv. I, será o ângulo GAE = HCF, e AFG = CFH. Mas o lado AF é igual ao lado FC. Logo, pela proposição 26. do Liv. I deve ser o ângulo AGF = CHF. Logo, sendo reto o ângulo AGF, também será reto o ângulo CHF, e por conseqüência cada uma das retas BG,' DH será perpendicular à mesma reta GH.

É manifesto, em segundo lugar, que duas linhas retas, que saem do mesmo ponto, se vão apartando cada vez mais uma de outra, de maneira que a distância mínima, entre a extremidade de uma delas e a outra reta, pode finalmente vir a ser maior do que qualquer linha reta proposta. Suponhamos, por exemplo, que de duas retas, que saem do mesmo ponto, uma é de dez pés de comprimento; suponhamos também, que a distância mínima, entre a extremidade desta reta de dez pés de comprimento e a, outra, é de um pé. Se a reta de dez pés de comprido fôr produzida até vinte pés, a distância mínima entre a extremidade desta de vinte pés, e a outra reta também produzida, será de dois pés, ficando assim esta distância acrescentada do comprimento de outro pé; e dêste modo se aquelas duas retas, que saem do mesmo ponto, forem cada vez mais produzidas, a mesma distância mínima da extremidade de uma delas, a respeito da outra reta, cada vez virá sendo maior. Esta propriedade depende inteiramente da natureza da linha reta, a qual constantemente conserva a mesma direção; e rigorosamente se não pode demonstrar pelo que acima fica exposto.

Suposto tudo isto, sejam as duas retas AB, FD (Fig. 4.) as quais, com a terceira EFH, façam os ângulos internos e dá mesma parte BEF, EFD, e sejam êstes ângulos tomados juntos menores que dois retos. Digo que as retas AB, FD hão de concorrer para a parte BD, para a qual ficam os ângulos. BEF, EFD.

No ponto F existente na reta FH, para a mesma parte' desta reta, faça-se (*Pr. 23.1.*) o ângulo externo GFH igual ao interno BEF. Logo, pelo que temos declarado acima, as paralelas (*Pr. 28.1.*) EB, FG, por mais que sejam produzidas, hão de conservar sempre entre si a mesma distância. E como os ângulos HFG, GFE, tomados juntos, são iguais a dois retos (*Pr. 13.1.*), também os ângulos BEF, EFG, tomados juntos devem ser iguais a dois retos. Mas os ângulos BEF, EFD, pela hipótese, são menores que dois retos. Logo, será o ângulo EFG>EFD, e por conseqüência .a reta FD cairá entre as retas eqüidistantes, ou paralelas, EB, FG. Mas as retas FG, FD, que partem do mesmo ponto F, produzidas que sejam, hão de vir a ter entre si uma distância maior que o intervalo. das eqüidistantes FG, EB. Logo, a reta FD por fim deve passar para outra parte da reta EB, a respeito do ponto F, e assim deve necessariamente concorrer com a mesma reta EB..

PROP. l. DO LlV. III.

Alguns autores, principalmente dentre os modernos, disputam com grande severidade, e ao mesmo tempo com grande imperícia, contra as demonstrações apagógicas ou indiretas; e não reparam que há algumas coisas, que se não podem demonstrar de outro modo. A proposição presente é um exemplo assaz evidente do que afirmo, visto não ser possível demonstrá-la diretamente. E, com efeito, fora da definição do círculo não há, a respeito do mesmo círculo, outro princípio algum com que se possa fazer uma demonstração, ou direta, ou indireta. Fica pois manifesto que por meio da dita definição do círculo, e das proposições antecedentemente demonstradas, se deve provar que o ponto achado pela construção é o ponto do círculo. Sendo pois necessário o uso dêste princípio, isto é, que as linhas retas tiradas do centro para a circunferência do círculo são tôdas iguais entre si; e por outra parte não sendo lícito tomar como centro do círculo o ponto achado pela construção, porque isto mesmo é o que se deve demonstrar; se faz evidente ser preciso tomar algum outro ponto diferente, e considerá-lo como centro do círculo. E se dêste ponto assim tomado se segue algum absurdo, como EUCLIDES demonstra que com efeito se segue, claro está, que o ponto tomado não é o centro do círculo. E como o dito ponto foi tomado de qualquer modo, legitimamente se pode concluir que nenhum outro ponto, fora do que fica determinado pela construção, pode ser o centro do círculo. E pois evidente a necessidade da demonstração indireta, ou daquela pela qual se chega a concluir algum absurdo.

DEFINIÇÃO II. DO LIV. VI.

Esta definição II. parece que não é de EUCLIDES, mas sim de algum outro pouco perito, porque nem EUCLIDES, nem alguns dos outros geômetras, que eu saiba, fez uma só vez menção de figuras recíprocas. Foi exposta com alguma obscuridade, e por esta razão a demos com maior clareza. Porém, em lugar dela seria melhor substituir a seguinte:

DEFINIÇÃO II.

Duas grandezas se dizem reciprocamente proporcionais a respeito de outras duas, quando uma das primeiras é para uma das segundas, como a outra destas segundas é para a outra das primeiras.

PROPOSIÇÕES XXVIII. E XXIX. DO LIV. VI.

Estes dois problemas, para o primeiro dos quais é necessária a proposição 27, são de quantos há nos “Elementos” os mais gerais, e mais úteis, e de que freqüentemente usam os geômetras antigos na solução de outros problemas. Pelo que o P. ANDRÉ TACQUET, e o P. CLÁUDIO DECHALLES, com bem pouco acêrto, os não quiseram pôr nos “Elementos” que publicaram, com o pretexto de que êstes problemas eram quase de nenhum uso ou utilidade. Porém, os geômetras geralmente fazem um grande uso dos diferentes casos dêstes problemas, isto é, quando a uma linha reta dada se deve aplicar um retângulo igual a um quadrado proposto, e coma falta, ou excesso de um quadrado; e quando a uma linha reta também dada se deve aplicar um retângulo igual a outro retângulo, e com a falta, ou excesso de um quadrado. Nós, a benefício dos que principiam, poremos aqui as construções dos ditos casos na forma seguinte:

I

Aplicar a uma linha reta dada um retângulo igual a um quadrado proposto, e com o defeito de outro quadrado; contanto, porém, que o quadrado proposto não seja maior que o retângulo, que fica descrito sôbre a metade da reta dada (Fig. 5.).

Seja dada a linha reta AB, e o quadrado, ao qual se quer igual o retângulo, que deve ser aplicado à reta AB, seja aquêle que se pode descrever sôbre a reta C, e não maior do que o retângulo que fica formado sôbre a metade da reta AB.

Divida-se a reta AB pelo meio no ponto D. Se o quadrado de AD fôr igual ao quadrado da reta C, ficará feito o que se pede. Mas não sendo o quadrado de AD igual ao quadrado de C, pelo que temos suposto, será AD>C. Tire-se DE perpendicular a AB, e ponha-se DE = C. Produza-se também a reta ED até o ponto F, de maneira que seja EF = AD ou DB; e com o centro E e o intervalo EF se descreva um círculo, que encontre a reta AB no ponto G. Faça-se sôbre GB o quadrado GBKH, e se considere completado o retângulo AGHL. Digo que o retângulo AH é o que se pede. Tire-se a reta EG. Como a reta AB está dividida pelo meio no ponto D, e em partes desiguais no ponto G; o retângulo compreendido pelas retas AG, GB, juntamente com o quadrado de DG, será igual (*Pr. 5.2.*) ao quadrado de DB, isto é, será igual ao quadrado de EF ou de EG, que é o mesmo que dizer igual (*Pr. 47.1.*) aos quadrados de ED e de DG. Tire-se de uma e outra parte o mesmo quadrado de DG. Ficará o retângulo das retas AG, GB igual ao quadrado de ED, isto é, igual ao quadrado da reta C. Mas o retângulo das retas AG, GB é o mesmo retângulo AH, por ser GH = GB. Logo, o retângulo AH é igual ao quadrado proposto da reta C, e por conseqüência temos aplicado à reta AB o retângulo AR, igual ao quadrado da reta C, e com a falta do quadrado GK, que é o que se devia fazer.

II

Aplicar a uma linha reta dada um retângulo igual a um quadrado proposto, e com o excesso de outro quadrado (Fig.6.).

Seja AB a linha reta dada, e o quadrado proposto seja aquêle, que se pode formar sôbre a reta C.

Divida-se a reta AB em duas partes iguais no ponto D e tire-se EB perpendicularmente sôbre a reta AB, de maneira que seja BE = C; e, tirada a reta DE, com o centro D e o semidiâmetro DE se descreva um círculo, que encontre a reta AB no ponto G. Descreva-se finalmente sôbre BG o quadrado BGHK, e complete-se o retângulo AGHL. Será êste retângulo o que se pede. Como a reta AB está dividida em partes iguais no ponto D, e em direitura dela está posta a reta BG; o retângulo compreendido pelas retas AG, GB, juntamente com o quadrado de DB, será igual (*Pr. 6.2.*) ao quadrado de DG, ou de DE, isto é, será igual aos quadrados de EB e de BD. Logo, tirando o quadrado comum da reta DB, o retângulo das retas AG, GB, que resta, será igual ao quadrado de BE, isto é, será igual ao quadrado da reta C. Mas o retângulo das retas AG, GB, é o mesmo retângulo AH, porque temos. GH = GB. Logo, o retângulo é igual ao quadrado da reta C; e assim temos aplicado à reta AB o retângulo AH, igual ao quadrado proposto da reta a, é com o excesso do quadrado GK, que é o que se devia fazer.

III

Aplicar a uma linha reta dada um retângulo igual a outro retângulo dado, e com a falta de um quadrado, contanto que o retângulo proposto não seja maior que o quadrado, que pode ser descrito sôbre a metade da reta dada (Fig. 7.).

Seja dada a reta AB e mais o retângulo, que pode ser compreendido pelas retas C, D, e suponha-se não ser êste retângulo maior do que o quadrado, que se pode descrever sôbre a metade da reta AB. Deve-se aplicar à reta AB um retângulo igual ao retângulo das retas a, D, e com a falta de um quadrado.

Levantem-se dos pontos A, B as retas AE, BF perpendicularmente sôbre AB e para a mesma parte, de maneira que seja AE = C, e BE = D. Tire-se a reta EF, dividida a qual pelo meio no ponto G, com o centro G, e o intervalo GE se descreva um círculo, que encontre segunda vez a reta AE no ponto H. Tire-se RF, e a esta paralela GK, e também GL paralela à reta AE.

Como o ângulo EHF, existente no semicírculo ERF, é igual ao ângulo reto EAB, serão paralelas as retas AB, HF. Mas as retas AH, BF são também paralelas. Logo, será AH = BF, e o retângulo compreendido pelas retas EA, AH será igual ao retângulo compreendido pelas retas EA, BF, isto é, será igual ao retângulo das retas propostas C, D. E como temos EG = GF, e são paralelas entre si as retas AE, LG, BF, será AL = LB. Mas o retângulo das retas C, D, pela suposição não é maior que o quadrado da reta AL, que é a metade da reta proposta AB. Logo, também o retângulo compreendido pelas retas EA, AH, não é maior do que o quadrado da reta AL, isto é, da reta KG. Ajunte-se-lhes o mesmo quadrado de KE. O retângulo das retas EA, AH, juntamente com o quadrado KE, não será maior que os quadrados de KG e de KE. Mas visto serem iguais (*Pr. 3.3.*) entre si as duas EK, KH, o retângulo das retas EA, AH, juntamente com o quadrado de KE, é igual (*Pr. 6.2.*) ao quadrado de AK. Logo, o quadrado de AK não será maior que os dois quadrados de EK e de KG, isto é, não será maior que o quadrado de EG, e por conseqüência a reta AK, ou GL não pode, ser maior que a reta GE. Demonstrado tudo isto assim, se fôr GE = GL, o círculo EHF tocará a reta AB no ponto L, e será o quadrado de AL igual (*Pr. 36.3.*) ao retângulo das retas EA, AR, isto é, das retas dadas C, D; e dêste modo ficará feito o que se queria. Mas se não forem iguais as retas EG, GL, será EG>GL, e por conseqüência o círculo EHF cortará a reta AB. Corte-a pois nos pontos M, N. Faça-se sôbre NB o quadrado NBOP, e complete-se o retângulo ANPQ. Como temos ML = LN (*Pr. 3.5.*), e já se tem provado ser AL = LB,será também AM = NB. Logo, o retângulo compreendido pelas retas AN, NB deve ser igual ao retângulo das retas NA, AM, isto é, ao retângulo (*Cor. 36.3.*) das retas EA, AR, ou das retas dadas C, D. Mas o retângulo compreendido pelas retas AN, NB é o mesmo retângulo AP, visto ser PN= NB.

Logo, o retângulo AP é igual ao retângulo compreendido pelas retas C, D. Logo, à linha reta dada AB temos aplicado o retângulo AP igual ao retângulo das retas propostas C, D, e com a falta do quadrado BP, que é o que se devia fazer.

IV

Aplicar a uma linha reta dada um retângulo igual a outro retângulo. proposto, e com o excesso de uma quadrado (Fig. 8.).

Seja AB a linha reta dada, e seja. o retângulo proposto aquêle, que é compreendido pelas retas C, D. Deve-se aplicar à reta AB um retângulo igual ao retângulo das retas C, D, e com o excesso de um quadrado.

Dos extremos A, B da reta dada sejam lançadas para partes contrárias as retas AE, BF, perpendiculares à mesma reta AB, de maneira que seja AE = C, e BF = D. Tire-se EF, e dividida esta pelo meio no ponto G, com. o centro G, e o semidiâmetro GE se descreva um círculo, o qual encontre outra vez a reta AE produzida no ponto H. Tire-se também a reta HF, e depois a reta GL paralela a AE, Produza-se a reta AB para uma e outra parte, até que encontre a circunferência do círculo nos pontos M, N. Descreva-se sôbre a parte BN o quadrado NBOP, e complete-se o retângulo ANPQ. Será êste retângulo o que se pede. Como o ângulo EHF, existente no semicírculo EHF, é igual ao ângulo reto EAB, serão paralelas entre si as retas AB, HF. Logo, são iguais as retas AH, BF, e por conseqüência o retângulo compreendido pelas retas EA, AH é igual ao retângulo compreendido pelas retas EA, BP, isto é, pelas retas C, D. Sendo pois ML = LN, e AL = LB, será também MA = BN, e assim será o retângulo das retas AN, NB igual ao retângulo das retas MA, AN, isto é, das retas EA, AR (*Pr. 35.3.*), ou das retas C, D. Logo, o retângulo compreendido pelas retas AN, NB, isto é, o retângulo AP é igual ao retângulo compreendido pelas retas dadas C, D. Logo, tem-se aplicado à reta proposta AB o retângulo AP, igual ao retângulo compreendido pelas retas C, D, e com o excesso do quadrado BP, que é o que se devia fazer.

WILLEBRORDO SNELLIO, segundo me parece, foi o primeiro que indicou as construções do terceiro e quarto problema no seu *Apolônio Bótavo*, e depois dêle o célebre HALLEIO no *Escólio* da proposição do livro 8. das *Seções Cônicas de Apolônio*, por êle restituído.

O problema III. pode-se propor dêste modo. Dividir a reta dada AB (Fig. 7.) em um ponto N, de maneira que o retângulo compreendido pelos segmentos dela AN, NB seja igual a um espaço dado. Ou, o que é o mesmo, dada a soma AB dos dois lados, que compreendem um retângulo, e dada a grandeza do mesmo retângulo, achar os ditos lados.

O problema IV. pode-se também propor assim. Achar na linha reta dada AB (Fig. 8.), e produzida, o ponto N, de maneira que o retângulo compreendido pelas retas AN, NB seja igual a um espaço dado. Ou também, o que vem a ser o mesmo, dada a reta AB, como se fôsse a diferença dos dois lados, que compreendem um retângulo, e dada a grandeza do mesmo retângulo, determinar os lados dêste mesmo retângulo.

PROP. XXXII. DO LIV. VI.

A proposição 26. do livro 6. não vem enunciada com tôda aquela generalidade que podia ter. Porque não somente dois paralelogramos semelhantes e semelhantemente postos, e que têm um ângulo comum, existem ao redor da mesma diagonal; mas também dois paralelogramos semelhantes e semelhantemente postos, tôdas as vêzes que um ângulo de um dêles é verticalmente oposto a outro ângulo do outro, têm as diagonais em direitura uma de outra. Parece pois que a demonstração dêste segundo caso devia ser diferente, direta, porém, e deduzida da proposição 32., a qual se pode demonstrar com maior brevidade, e do modo seguinte: .

PROP. XXXII. DO LIV. VI.

Se dois triângulos, nos quais dois lados de um são proporcionais a dois lados do outro, se dispuserem entre si de maneira que, tocando-se com dois ângulos, os lados homólogos sejam respectivamente paralelos; os outros lados dos mesmos triângulos estarão em direitura um com outro (Fig. 9).

Sejam os dois triângulos GAP, HFO, e sejam os lados AG, GF do primeiro proporcionais aos lados FH, HC do segundo, isto é, seja AG:GF::FH:HC. Suponhamos também serem paralelas tanto as retas GA, HF, como as retas GF, HO. Digo que o lado AF está em direitura do lado FC.

Tire-se a reta CK paralela (*Pr. 31.1.*) a FH, e que encontre a outra GF produzida no ponto K. Como cada uma das retas AG, KC é paralela à mesma FH, serão paralelas (*Pr. 30.1.*) entre si também as duas AG, KC, e por conseqüência serão iguais os ângulos AGF, FKC, por serem êstes ângulos alternos. Mas temos suposto ser AG:GF::FH:HC, e é também FH:HC::CK:KF, visto ser FH = CK, e HC = KF (*Pr. 34. 1.*), e assim temos AG:FG::CK :KF; e de mais são iguais os ângulos formados pelos lados AG, GF, e pelos outros CK, KF. Logo, os triângulos AGF, CKF são eqüiângulos (*Pr. 6.6.*), e por conseqüência deve ser o ângulo AFG = CFK. Mas GFK é uma só linha reta. Logo, o lado AF deve estar em direitura (*Pr. 14.1.*) do lado FC.

Pode-se pois demonstrar a proposição 26, pela dita proposição 32, dêste modo.

Se dois paralelogramos semelhantes e semelhantemente postos tiverem um ângulo comum, ou tiverem ângulos verticalmente opostos, as diagonais dos ditos paralelogramos existirão em uma só e a mesma linha reta (Fig. 9).

Tenham em primeiro lugar os paralelogramos ABCD, AEFG o ângulo comum BAD, e sejam os mesmos paralelogramos semelhantes e semelhantemente postos. Digo que as diagonais dos paralelogramos ABOD, AEFG existem em uma mesma linha reta.

Considerem-se produzidos os lados EF, GF até. os pontos H, K, e sejam tiradas as retas FA, FC. Sendo pela hipótese semelhantes os paralelogramos ABCD, AEFG, será DA:AB::GA:AE, e por conseqüência será também DG:EB::GA:AE (*Cor. 19.5.*). Mas é DG = FH, e EB = HC, e AE = GF. Logo, será FH:HC::AG:GF. Mas tanto os lados FH, AG, como os lados HC, GF são paralelos entre si; e os triângulos AGF, FHC se tocam pela parte dos ângulos AFG, CFH no ponto F. Logo, a reta AF está em direitura (*Pr. 32.6.*) da reta FC, e por conseqüência as diagonais dos paralelogramos ABCD, AEFG existem em uma só linha reta.

Tenham em segundo lugar os paralelogramos KFHC, GFEA (Fig. 9) semelhantes, e semelhantemente descritos, os ângulos KFH, EFG, verticalmente opostos entre si. Digo que as diagonais AF, FC dos ditos paralelogramos estão em direitura uma de outra.

Sendo paralelos entre si tanto os lados AG, FH, como os lados GF, HC, e demais sendo AG:GF::FH:HC, a diagonal. AF deve estar em direitura (*Pr. 32.6.*) com a diagonal FC.

DEFINIÇÕES IX. E XI. DO LIV. XI.*

Tratando-se de figuras planas, a semelhança das figuras depende inteiramente da igualdade dos ângulos, e da proporção dos lados que formam os ângulos iguais. Porque, excetuados os triângulos, suposta nas outras figuras planas somente a proporção dos lados, ou suposta somente a igualdade dos ângulos, não podemos concluir a semelhança das mesmas figuras planas. E com efeito a situação ou disposição semelhante dos lados, que compreendem as figuras planas, em parte depende da igualdade dos ângulos, e em parte também da proporção daqueles lados, que fazem ângulos respectivamente iguais. Do mesmo modo as figuras sólidas semelhantes não são senão aquelas, que têm iguais entre si todos os ângulos sólidos correspondentes, e que ao mesmo tempo ficam formadas por igual número de figuras planas e respectivamente semelhantes. Porque há algumas figuras sólidas compreendidas por, figuras planas semelhantes entre si e iguais, e também em igual número, as quais figuras sólidas não são com tudo isto nem semelhantes, nem iguais, como faremos ver na demonstração, que daremos depois das Notas sôbre a definição 10. Devia-se pois emendar a definição das figuras sólidas semelhantes, fazendo que precede~se outra do ângulo sólido., Do que temos dito, e da mesma definição 10, fica bem claro o estrago, que a êstes livros de EUCLIDES têm feito alguns homens pouco peritos.

DEFINIÇÃO X. DO ILIV. XI.*

Sendo o sentido da palavra igual conhecido já antes desta definição, esta mesma definição, que vinha a ser a décima do Livro XI, é um teorema cuja verdade, ou falsidade se deve demonstrar, e não supor. E TEÃO, ou algum outro intérprete de EUCLIDES, obrou com pouco acêrto, quando de uma proposição, que se devia provar, fez a definição das figuras sólidas semelhantes e iguais; porque o serem semelhantes entre si as figuras sólidas se deve demonstrar pela definição das figuras sólidas semelhantes; e o serem iguais as, mesmas figuras sólidas se deve provar pelo axioma, que diz, que as grandezas, as quais se ajustam perfeitamente entre si, são iguais; ou pela proposição A, ou pela 9, ou pela 14 do Livro V. Do dito axioma, ou de alguma das ditas proposições, depende inteiramente a demonstração da igualdade de

* Veja-se LEGENDRE "Elem. de Geom." Nota XII., principalmente na 10ª edição.

* Veja-se a Nota da pág. precedente

tôdas as figuras. Em nenhum dos livros precedentes tem EUCLIDES dado a definição das figuras iguais, nem por certo deu esta. E com efeito aquêle, que passa pela primeira definição do Livro III., é um verdadeiro teorema, em que se afirma que são iguais aquêles círculos, cujos semidiâmetros são também iguais, o que manifestamente se colige da mesma definição do círculo; e assim impropriamente a colocou algum dos intérpretes entre as definições daquele livro, porque a igualdade das figuras não se deve definir, mas sim deve...se demonstrar. Disto pois se segue que ainda que fôsse verdade serem iguais entre si as figuras sólidas formadas com planos semelhantes, e em número e grandeza iguais, não ficava por isto livre de culpa aquêle que fez uma definição de uma proposição, à qual absolutamente se havia de demonstrar. Mas que seria, se esta proposição fôsse falsa? Não havíamos de confessar que os geômetras estiveram iludidos e enganados, em uma coisa puramente elementar, pelo decurso de mil e trezentos anos? Disto pois devemos aprender a ser modestos, e confessar que mui fàcilmente podemos cair em erros, que tal é a fraqueza do entendimento humano, ainda a respeito dos princípios daquelas ciências, que justamente têm seu lugar entre as mais certas. Podemos demonstrar, com vários exemplos, que a dita proposição não é sempre verdadeira, bastará o que se segue.

Seja o quadrado ABCD (Fig. 10), cujas diagonais AC, BD se encontram reciprocamente no ponto E. Descreva-se sôbre uma das ditas diagonais, por exemplo, sôbre a diagonal BD, o triângulo isósceles, BFD, e no mesmo plano do quadrado. ABCD. Levante-se do ponto E sôbre o plano ABCD a perpendicular EG, e tomado nesta o ponto G, qualquer que seja, tirem-se dêste ponto G as retas GA, GB, GC, GD, GF. Nos triângulos AEG, CEG, sendo AE = CE, e EG um lado comum, e sendo também o ângulo AEG = CEG, por serem êstes ângulos retos; será a base AG igual à base GC, e por conseqüência nos triângulos AGB, CGB serão iguais os lados AG, GC. Mas a base AB é igual à base BC. Logo, sendo o lado GB comum a ambos os triângulos, será o ângulo AGB = CGB (*Pr. 8.1.*), e será o triângulo AGB igual ao triângulo CGB. Do mesmo modo se pode demonstrar, que são iguais entre si os triângulos. AGD, CGD. Considere-se agora produzida a reta GE para a parte oposbt do plano ABCD, e tomado na mesma reta produzida qualquer ponto H, sejam tiradas as retas HA, HB, HC, HD, HF. Provar-se-á, como acima se tem feito, serem iguais entre si tanto os triângulos AHB, CHB, como os triângulos. AHD, CHD. Temos pois dois sólidos, cada um dos quais fica formado por oito triângulos, isto é, um dêstes sólidos fica formado pelos quatro triângulos, cujo vértice comum é o ponto G, e as bases as retas BA, AD, BF, DF; e também pelos. outros quatro triânguios, que têm por vértice comum o ponto H, e por bases as mesmas retas acima referidas. E o outro sólido é compreendido pelos quatro triângulos, que têm o mesmo vértice G, e as bases BC, CD, BF, DF, e também pelos outros. quatro, cujo vértice comum é o ponto H, e as bases as mesmas. retas BC, CD, BF, DF. Mas os quatro triângulos AGB, AGD, AHB, AHD são iguais aos quatro CGB, CGD, CHB, CHD, cada um a cada um, como já fica demonstrado; e os outros quatro triângulos BGF, DGF, BHF, DHF são comuns a ambos os sólidos. Logo, êstes. dois sólidos são formados por planos semelhantes, e também em número e grandeza iguais. Mas é evidente que os mesmos sólidos não são iguais, visto ficar o primeiro dêles compreendido no outro. Logo, é falso serem sempre iguais entre si dois sólidos, formados por planos semelhantes, e em número e grandeza iguais.

COROL. Disto se segue que dois ângulos sólidos desiguais podem ser formados pelo mesmo número de ângulos planos, e respectivamente iguais.

E por certo o ângulo sólido feito no ponto G pelos quatro ângulos planos AGB, AGD, FGB, FGD não é igual ao outro ângnlo sólido também existente no mesmo ponto G, e formado pelos outros quatro ângulos planos CGB, CGD, OGB, FGD, pois êste segundo ângulo sólido encerra dentro de si aquêle primeiro. Mas cada um dos ditos ângulos sólidos é formado por quatro ângulos planos respectivamente iguais entre si, como temos demonstrado. Logo, dois ângulos sólidos desiguais podem ser formados pelo mesmo número de ângulos planos, e respectivamente iguais. E com efeito pode haver um número infinito de ângulos sólidos desiguais, e ao mesmo tempo formados por ângulos planos respectivamente iguais. Também é manifesto que as duas figuras sólidas, de que acima temos tratado, não são semelhantes, visto não serem iguais entre si os ângulos ,sólidos delas, que se correspondem.

Mas que possa haver, um número infinito de ângulos sólidos desiguais, e ao mesmo tempo feitos por ângulos planos, respectivamente iguais, e ,dispostos entre si com a mesma ordem, se fará evidente por meio das três proposições seguintes.

PROP. I. PROB.

Dadas as três grandezas A, B, C, achar uma quarta grandeza, de maneira que três delas tomadas, juntas, como quisermos, sejam maiores que a grandeza que fica.

Seja D a quarta grandeza que se busca. Será D menor do que as três grandezas A, B, C tomadas juntas. Seja A não menor que qualquer das duas B, C, e primeiramente sejam estas duas B, a tomadas juntas não menores que A. Serão as três B, C, D, juntamente maiores que A. E como a grandeza A não é menor que a grandeza B, as três A, C, D tomadas juntas serão maiores que a grandeza B. Do mesmo modo se demonstra que as três A, B, D tomadas juntamente são maiores que a grandeza C. Logo, na suposição de serem as duas grandezas B, a tomadas juntas não menores que a grandeza A, qualquer outra grandeza D, a qual seja menor que as três .juntas A, B, C, pode servir para o nosso intento.

Mas "se as dum; grandezas B, C tomadas juntas forem menores que a grandeza A, porque se pede que as três B, C, D, também tomadas juntas sejam maiores que a meSma grandeza A, tirando das ditas três B, C, D as duas B, C, ficará a grandeza D maior que o excesso da grandeza A sôbre aS mesmas duas B, C tomadas juntamente. Tome-se pois qualquer grandeza D, de maneira porém que seja menor que as três juntas A, B, a, e ao mesmo tempo seja maior do que o excesso da grandeza A sôbre as duas B, a tomadas juntas. Serão as três grandezas, 'B, a, D juntamente maiores que a grandeza A. E como A é maior que qualquer das duas B, C, ainda mais a mesma grandeza A juntamente com a grandeza D, e com uma das duas B, C, excederá a outra grandeza, que resta; e já pela construção, que fizemos, as três grandezas A, B, C tomadas juntas são maiores que a grandeza D, que é o que se devia fazer.

COROL. *Se depois se quiser qut as duas grandezas A, B tomadas juntamente não sejam menores que as outras duas C, D, também tomadas juntas, o excesso das duas A, B juntas sôbre a grandeza C não deve ser menor que a grandeza D, isto é, a grandeza D não há de ser maior que o dito excesso.*

PROP. II. PROB.

Dadas quatro grandezas A, B, C, D, das quais as duas A, B tomadas juntas não são menores que as duas C, D também tomadas juntas, e das quais quatro grandezas propostas, três juntas tomadas, como quisermos, são sempre maiores que a quarta, que resta; achar uma quinta grandeza E, de maneira que das três grandezas A, B, E duas tomadas como quisermos, sejam maiores que a terceira, que fica, e também duas das outras três grandezas, C, D, E, tomadas como quisermos, sejam maiores que a outra, que resta. E suponha-se a grandeza A não menor que B, e C não menor que D.

Primeiramente, não seja menor o excesso das duas grandezas C, D, quê o excesso das duas A, B. É evidente que se pode tomar uma grandeza E, de maneira que seja menor que as duas juntas C, D, e ao mesmo tempo seja maior que o excesso das mesmas grandezas C, D. Tome-se pois, e será a grandeza E maior que o excesso das duas A, B. Logo, as duas grandezas B, E tomadas juntas serão maiores que a grandeza A. Mas A não é menor que B. Logo, as duas A, E tomadas juntas hão de ser maiores que B. Mas pela hipótese A juntamente com B não é menor do que C juntamente com D, e C juntamente com D é maior que E. Logo A juntamente com B é maior que E.

Seja agora o excesso das grandezas A, B, maior que o excesso das grandezas C, D. Como pela hipótese as três grandezas B, C, D, tomadas juntas, são maiores que a grandeza A, serão as duas C, D juntas maiores que o excesso das duas A, B. Logo, poder-se-á tomar uma grandeza E, de maneira que seja menor que as duas juntas C, D, e ao mesmo tempo seja maior que o excesso das outras A, B. Tome-se pois; e como a grandeza E é maior que o excesso das duas A, B; serão as duas B, E tomadas juntas maiores que a grandeza A. Pode-se agora demonstrar, como no caso precedente, que A juntamente com E é menor do que B, e também que A juntamente com B é maior do que E; Logo, em ambos os casos fica demonstrado, que, das três grandezas A, B, E, duas juntas, e tomadas como quisermos; são sempre maiores que a terceira que resta.

E porque em um e outro caso a grandeza E é maior que o excesso das duas C, D, será E juntamente com D maior do que C. Mas pela suposição a grandeza C não é menor que D. Logo, E juntamente com C será maior que D. Mas pela construção C juntamente com D é maior que E: Logo, duas grandezas juntas, e tomadas como quisermos das três C, D, E, são maiores que a terceira grandeza que resta.

PROP. III. TEOR.

Com quatro âJlgulos planos propostos se podem forma.r inumeráveis ângulos sólidos, e todos desiguais (Figs. 11, 12, 13 e 14).

Tomem-se os três ângulos planos A, B, C, de sorte que o ângulo A não seja menor do que qualquer que quisermos dos dois B, é; e os dois A, B, tomados juntos sejam menores que dois retos. Ache-se pelo problema primeiro, e pelo seu corolário, o quarto ângulo D, de maneira que dos quatro ângulos A, B, C, D, três tomados como quisermos sejam maiores que o quarto que resta; e os dois A, B tomados juntos não sejam menores que os dois C, D, também tomados juntos. Ache-se depois pelo problema segundo o quinto ângulo E, de sorte que tanto dos três ângulos A, B, E, como, dos três C, D,E, dois, quaisquer que sejam, tomados juntos sejam maiores que o terceiro. E como os dois ângulos A, B tomados juntos são menores que dois retos; os mesmos ângulos A, B juntos, e tomados duas vêzes, serão menores que quatro retos. Mas os ângulos A, B Juntamente são maiores que o ângulo E. Logo, os ângulos A, B juntos, e tomados duas vêzes serão maiores que os três A, B, E também tomados juntos, os quais por conseqüência serão menores que os quatro ângulos retos. Mas, dêstes três ângulos A, B, E, dois tornados como quisermos são maiores que o terceiro. Logo, pela proposição 23, do Livro XI, poder-se-á fazer um ângulo sólido com três ângulos planos, que sejam iguais aos ditos três ângulos A, B, E. Faça-se pois, e seja o ângulo sólido formado no ponto F (Fig. 13.) pelos três ângulos planos GFH, HFK, GFK, que sejam iguais aos três A, B, E, cada um a cada um. E como os ângulos C, D tomados juntos não são maiores que os ângulos A, B, também tomados juntos; os três C, D, E juntos não serão maiores que os três A, B, E também juntos. Mas já se tem demonstrado que os três A, B, E, tomados juntos, são menores que quatro ângulos retos. Logo, os três C, D, E juntamente tomados devem ser menores que quatro retos. Mas dois dêles juntos, e tomados como quisermos, são maiores que o terceiro. Logo, pela mesma proposição 23, do Livro XI, poder-se-á formar um ângulo sólido com três ângulos planos, que sejam iguais, cada um a cada um, aos três C, D, E. Mas pela proposição 26 do mesmo Livro XI, no ponto F existente na reta FG se pode fazer outro ângulo sólido, igual ao precedente ângulo sólido, de que temos falado. Faça-se pois, e o ângulo GFK, que é igual ao ângulo E, seja um dos três ângulos planos que compreendem êste ângulo sólido, e sejam os outros dois os ângulos KFL, GFL iguais aos ângulos C; D, cada um a cada um. Logo, no ponto F fica feito um ângulo sólido compreendido pelos quatro ângulos planos GFH, HFK, KFL, GFL, que são iguais aos ângulos A, B, C, D cada um a cada um.

Ache-se agora outro ângulo M (Fig. 12.), de maneira que tanto dos três ângulos A, B, M, como dos três C, D, M, dois tomados juntamente, como quisermos, sejam maiores que o terceiro que fica. Demonstrar-se-á, como acima fizemos, que tanto os ângulos A, B, M, como os ângulos C, D, M tomados juntos são menores que quatro retos. Considere-se (Fig. 14.), pela proposição 23 do Livro XI, um ângulo sólido no ponto N formado pelos ângulos planos ONP, PNQ, ONQ iguais aos ângulos A, B, M, cada um a cada um; e no mesmo ponto N existente na reta ON, pela proposição 26 do mesmo Livro XI; o outro ângulo sólido feito por três ângulos planos, dos quais um seja o ângulo ONQ igual ao ângulo M, e os outros dois sejam os ângulos QNR, ONR iguais aos dois C, D, cada um a cada um. Logo, no ponto N fica formado um ângulo sólido pelos quatro ângulos planos ONP, PNQ, QNR, ONR, que são iguais aos quatro A, B, C, D, cada um a cada um. Mas não serem iguais entre si os dois ângulos sólidos (Figs. 13 e 14,) existentes nos pontos F, N, e cada um formado respectivamente pelos quatro ângulos planos referidos; ou, o que vem a ser o mesmo, não se ajustarem entre si os mesmos ângulos sólidos a respeito de tôdas as suas partes; faz-se evidente visto serem desiguais entre si pela construção os ângulos GFK, ONQ ou os ângulos E, M, e por conseqüência não ser possível ajustarem-se as retas GF, FK sôbre as retas ON, NQ. Não se ajustando pois entre si os ditos ângulos sólidos a respeito de todas as suas partes, necessariamente são desiguais.

E como por meio dos três ângulos propostos, A, B, C se podem achar infinitos outros, os quais juntamente com o ângulo D venham a fazer o mesmo efeito; e também por meio dos ângulos A, B, C, e do ângulo D, ou um, qualquer que seja, dos ditos infinitos ângulos, que se tiverem achado, se podem do mesmo modo achar outros, os quais juntamente com o ângulo E, ou com o ângulo M façam a mesma coisa; é manifesto que com os mesmos quatro ângulos planos se podem formar inumeráveis ângulos sólidos, os quais todos sejam entre si desiguais.

Engana-se pois o padre CLÁUDIO, e com êle todos aquêles autores, que afirmam serem iguais entre si os ângulos sólidos, tôdas as vêzes que ficam formados pelo mesmo número de ângulos planos respectivamente iguais; e assim se faz, manifesto, que a proposição 26 do Livro XI não tinha sido demonstrada legitimamente, porque naquela demonstração a igualdade dos ângulos sólidos, compreendidos por três ângulos planos iguais, cada um a cada um, se tinha suposto e não se tinha demonstrado.

COROLÁRIO DA PROP. III DO LIV. XII.

A demonstração dêste Corolário é imperfeita, porque, contra o que se devia fazer, não se demonstra serem semelhantes entre si aquelas pirâmides, nas quais as outras propostas de bases polígonas ficam divididas, como em semelhante caso se fez na proposição 12 dêste mesmo Livro XII. A demonstração pois do dito Corolário deve ser a seguinte.

Sejam as pirâmides semelhantes (Fig. 15.), e semelhantemente postas, das duas bases polígonas ABCDE, FGHKL, e dos vértices M, N. Digo que a pirâmide ABCDEM tem para a pirâmide FGHKLN a razão triplicada daquela, que o lado AB tem para o lado homólogo F'G.

Considerem-se divididas as bases polígonas das pirâmides propostas nos triângulos ABE, EBC, ECD; FGL, LGH, LHK os quais serão semelhantes (Pr. 20.6.,) respectivamente entre si. E como pela hipótese as pirâmides propostas são também semelhantes; será o triângulo EAM semelhante (*Def. 11.11.*) ao triângulo LFM, e o triângulo ABM semelhante ao triângulo FGN. Logo, será ME:EA::NL:LF (*Pr. 4.6.*). Mas pela semelhança dos triângulos EAB, LFG temos AE:EB::FL:LG. Logo, será por igual ME:EB::NL:LG. Do mesmo modo demonstraremos ser EB:BM::LG:GN. Logo, será outra vez por igual EM:MB::LN:NG. Logo, nos triângulos EMB, LNG são proporcionais os lados, e assim os mesmos triângulos EMB, LNG são eqüiângulos (*Pr. 5.6.*), e também semelhantes. Logo, as pirâmides, cujas bases são os triângulos EAB, LFG, e os vértices os pontos M, N, são semelhantes entre si, visto serem iguais (*Pr. B .11.*) respectivamente os ângulos sólidos delas, e ficarem compreendidas as mesmas pirâmides por igual número de planos semelhantes. Com o mesmo discurso se demonstra ser a pirâmide EBCM semelhante à pirâmide LGHN, e a pirâmide ECDM semelhante à pirâmide LHKN. Sendo pois, semelhantes entre si as pirâmides EABM, LFGN, e tendo cada uma delas um triângulo por base; a pirâmide EABM terá para a pirâmide LFGN a razão triplicada daquela, que o lado EB tem para o lado homólogo LG. Pela mesma razão também a pirâmide EBCM tem para a pirâmide LGHN a razão triplicada da de EB para LG. Logo, assim como a pirâmide EAMB é para a pirâmide LFQN, assim também a pirâmide EBCM será para a pirâmide LGHN. Do mesmo modo será a pirâmide EBCM para a pirâmide LGHN, como a pirâmide ECDN é para a pirâmide LHKN. Mas um dos antecedentes é para um dos conseqüentes, como todos os antecedentes juntos são para todos os conseqüentes também juntos. Logo, assim como a pirâmide EABM é para a pirâmide LFGN, assim tôda a pirâmide ABCDEM será para tôda a pirâmide FGHKLN. Mas a pirâmide EABM tem para a pirâmide LFGN a razão triplicada daquela que AB tem para FG. Logo, também a pirâmide total ABCDEM tem para a pirâmide total FGHKLM a razão triplicada daquela, que o lado AB tem para o lado homólogo FG.

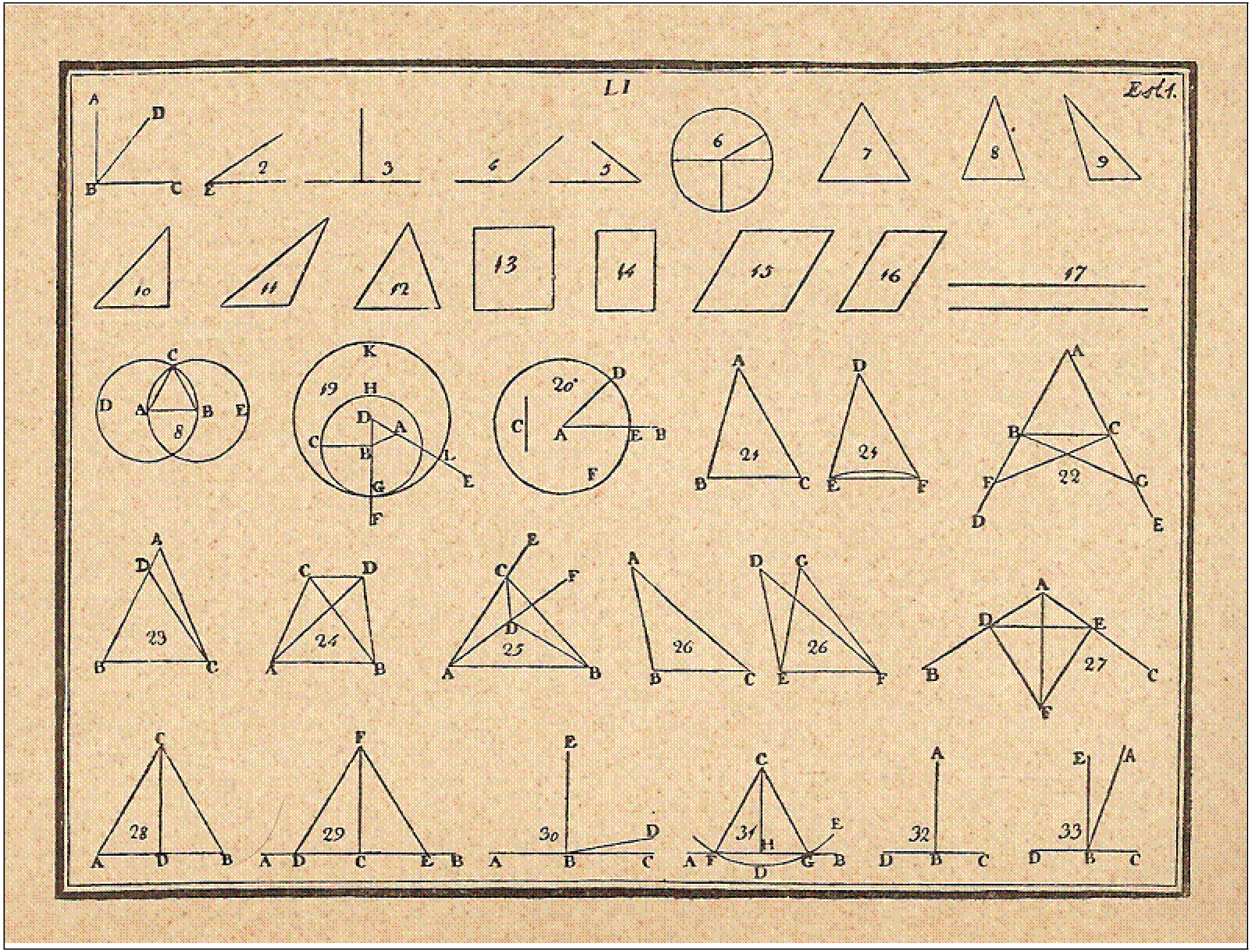
FIM

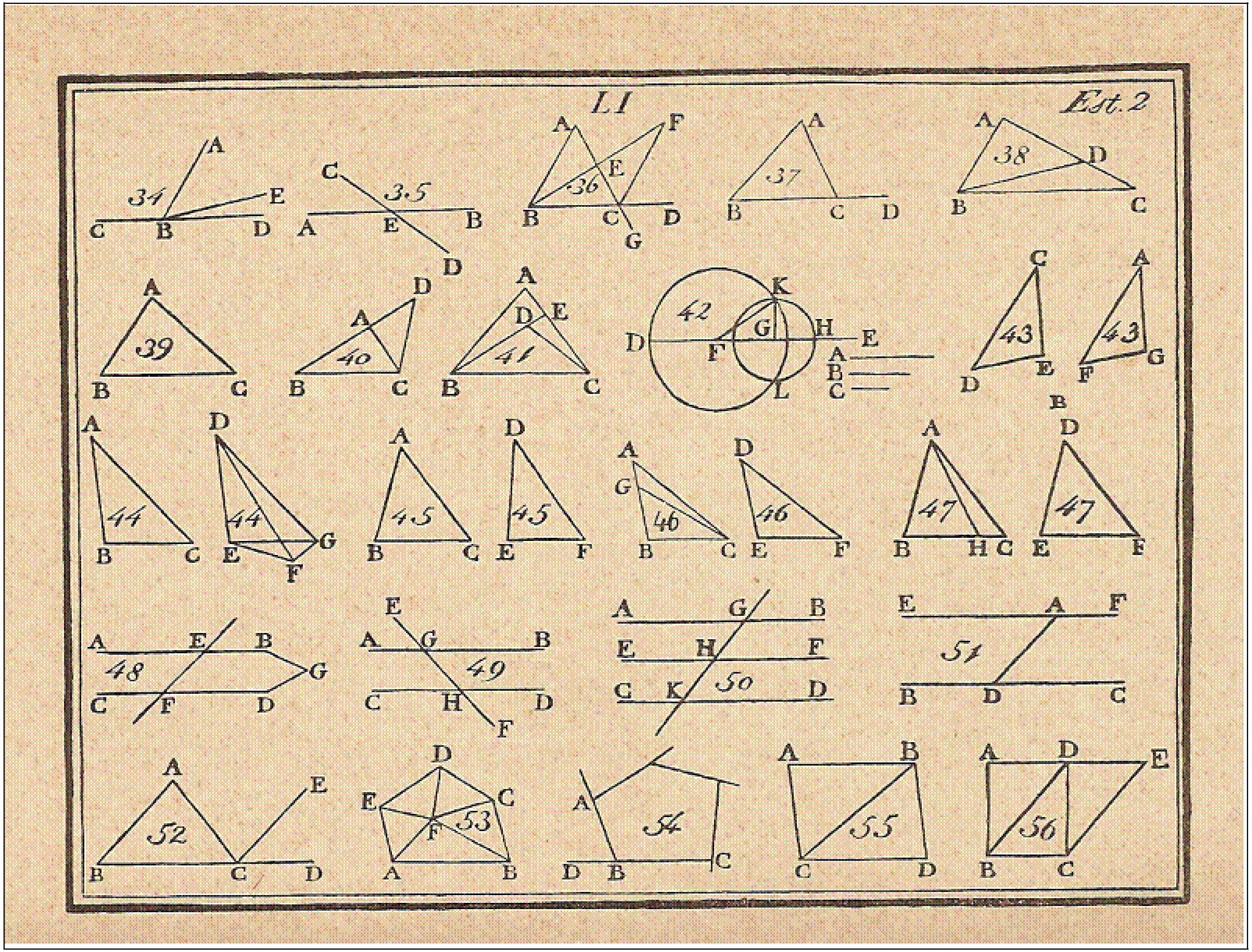
INDEX

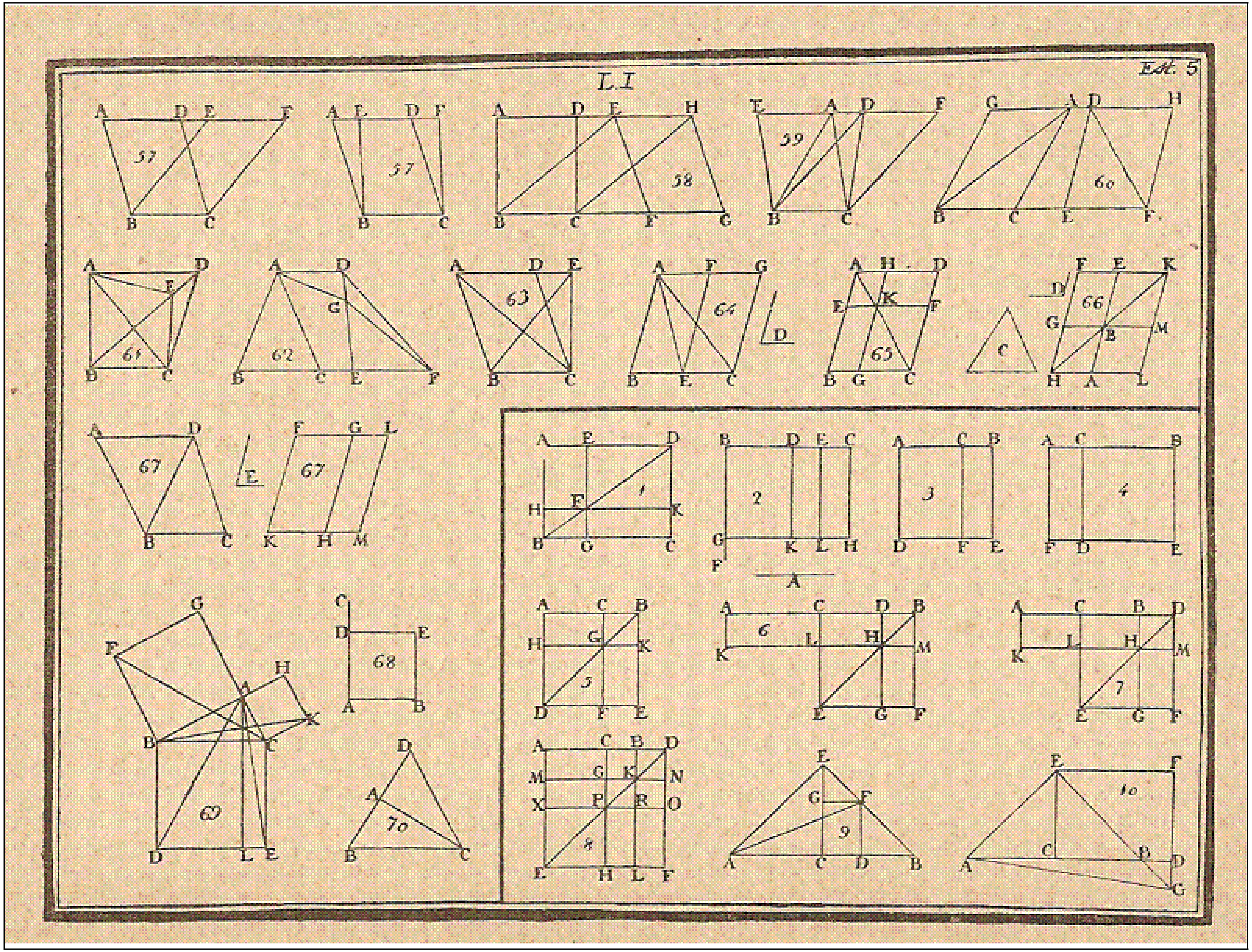
Das Notas a algumas Proposições
e Definições dêstes Elementos.

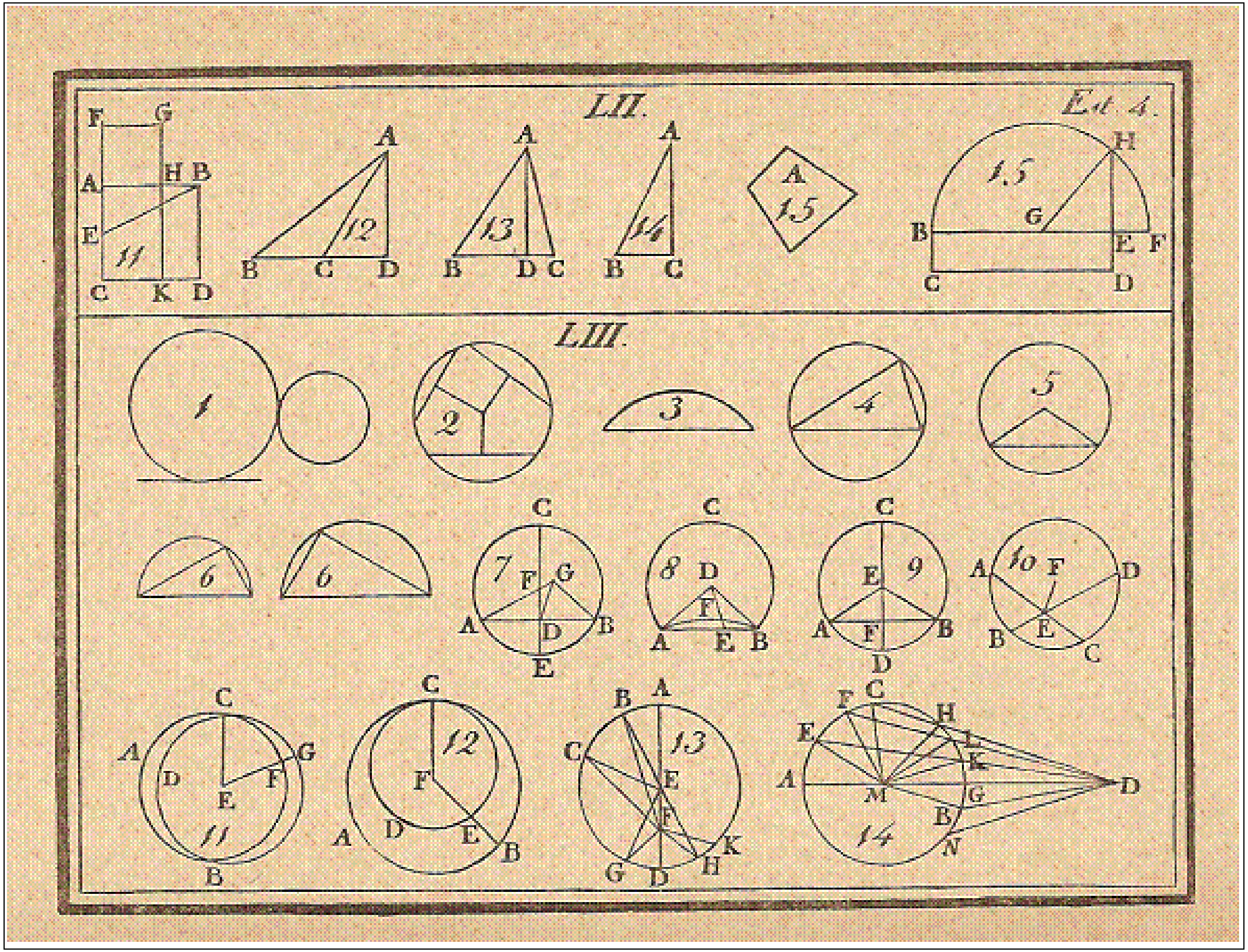
ERRATA

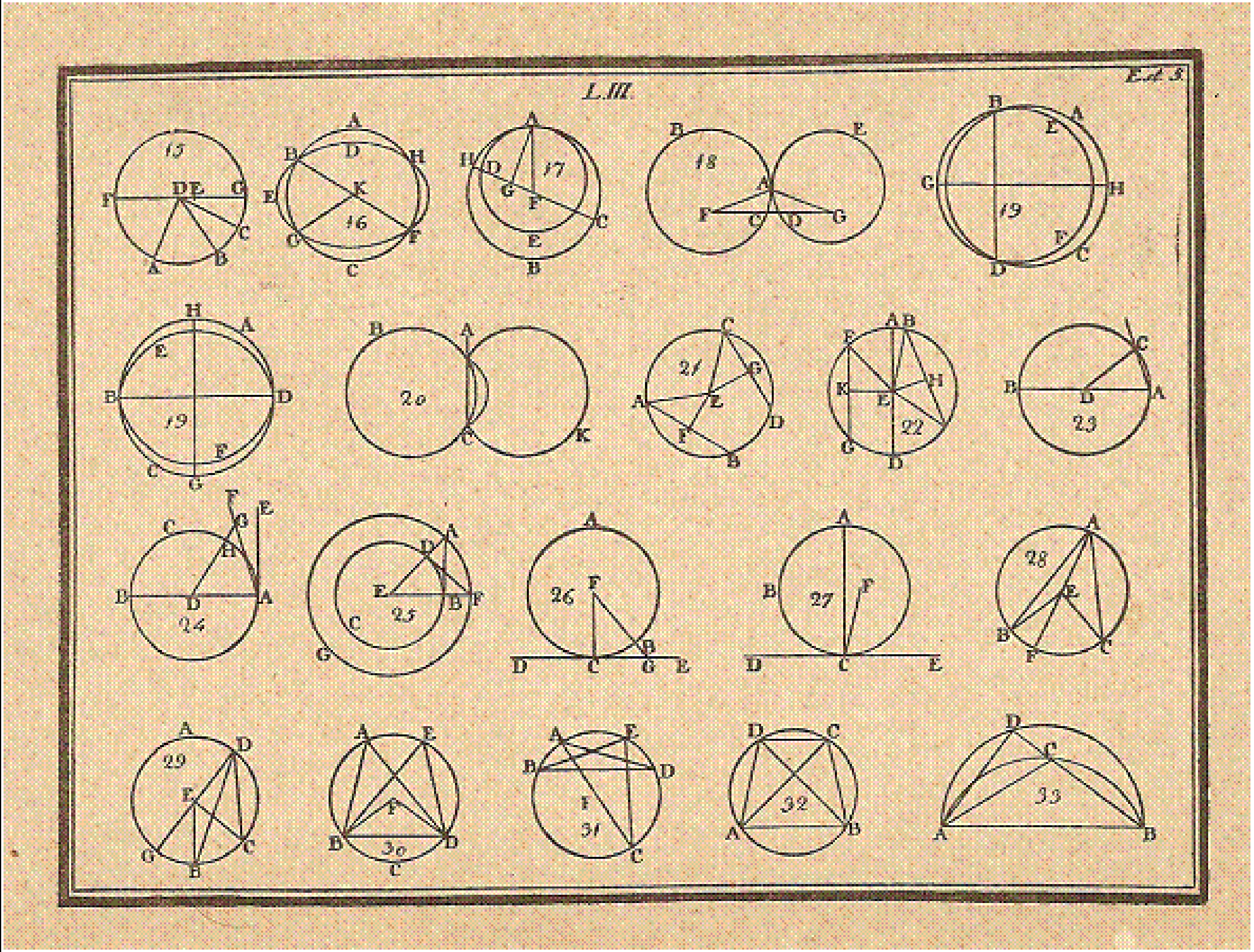
Pag. ???, fig. 7. Na perpendicular G da linha AB, falta um L no ponto aonde toca a mesma linha.

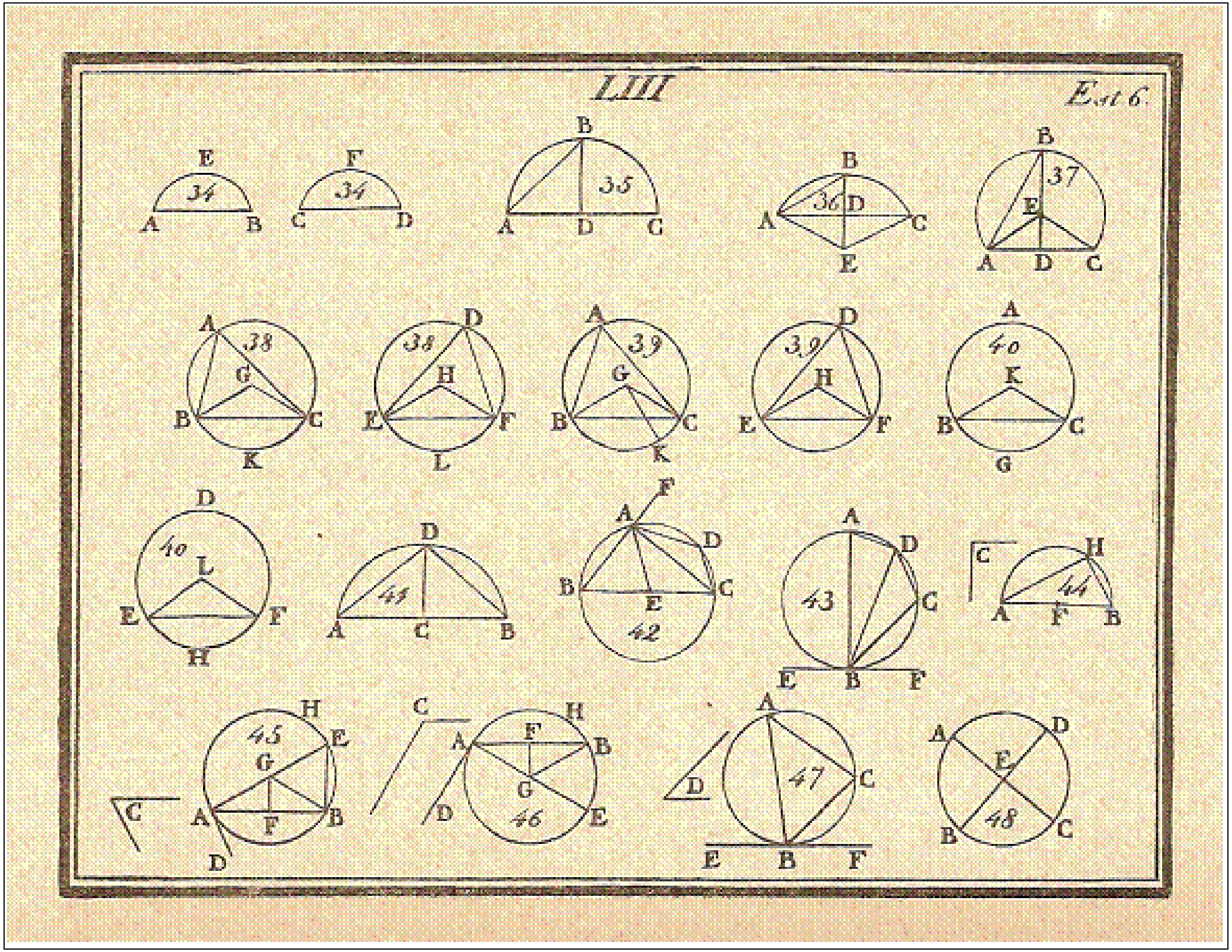

L I
Est.1.

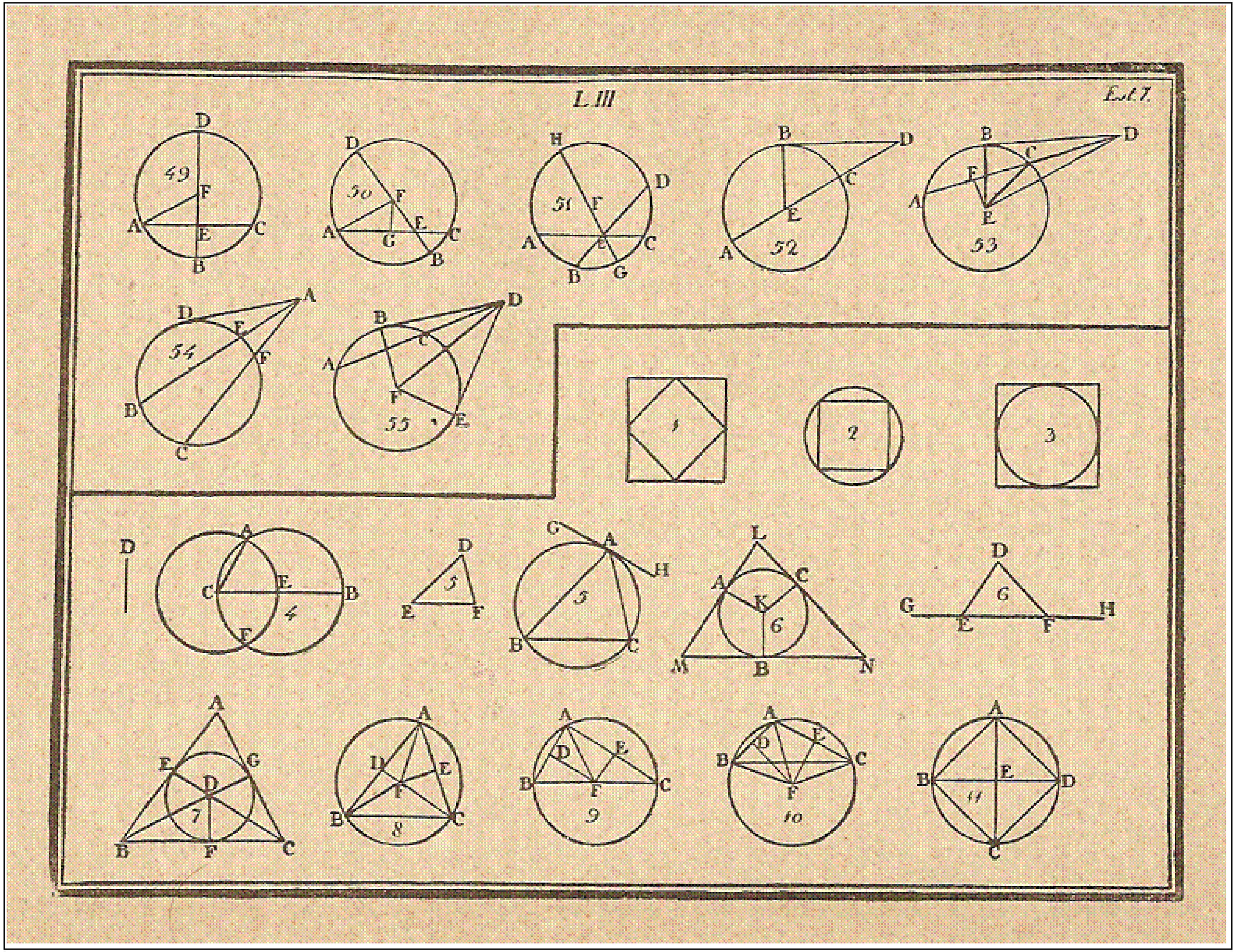

L.I
Est. 2

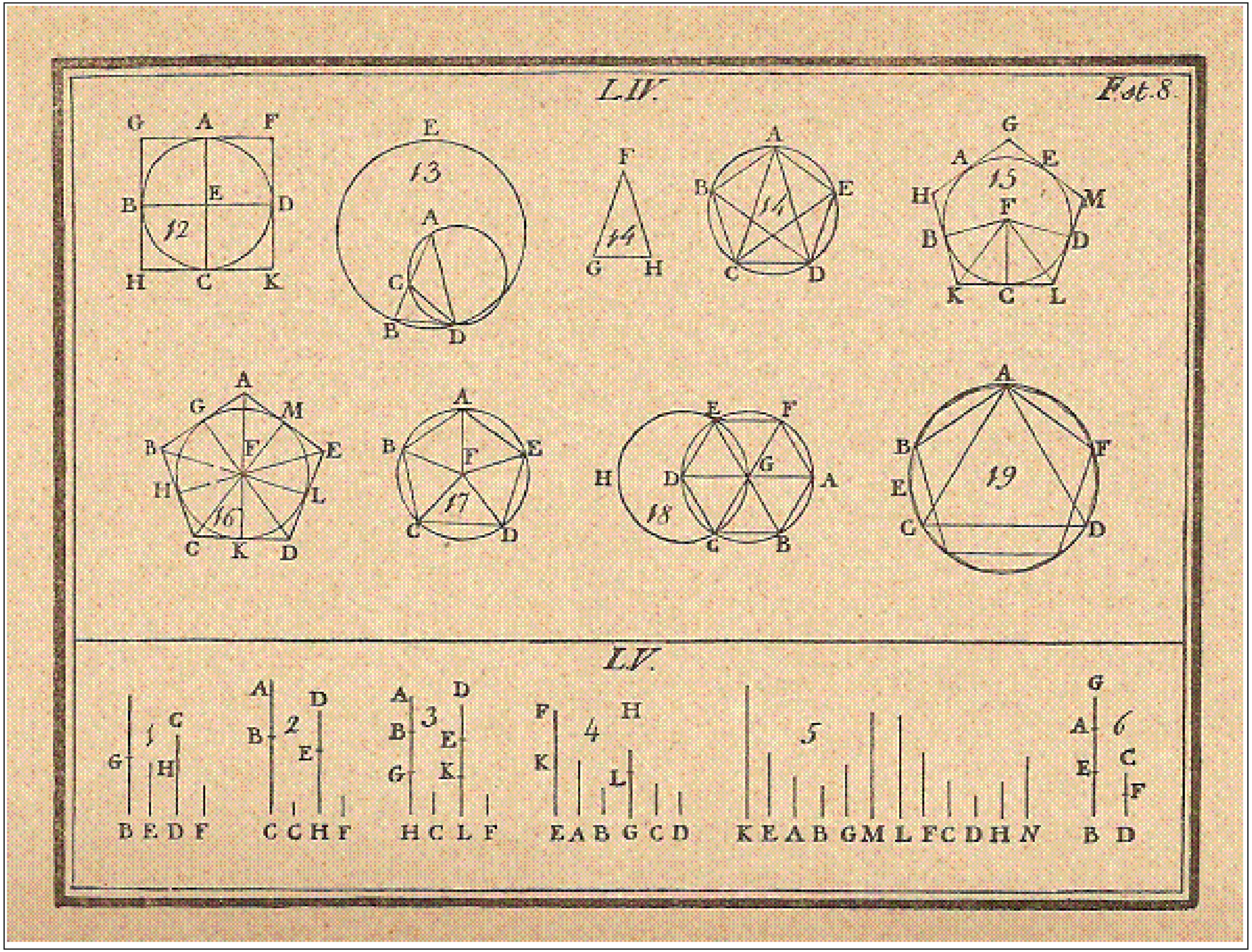

Est. 5
L.I

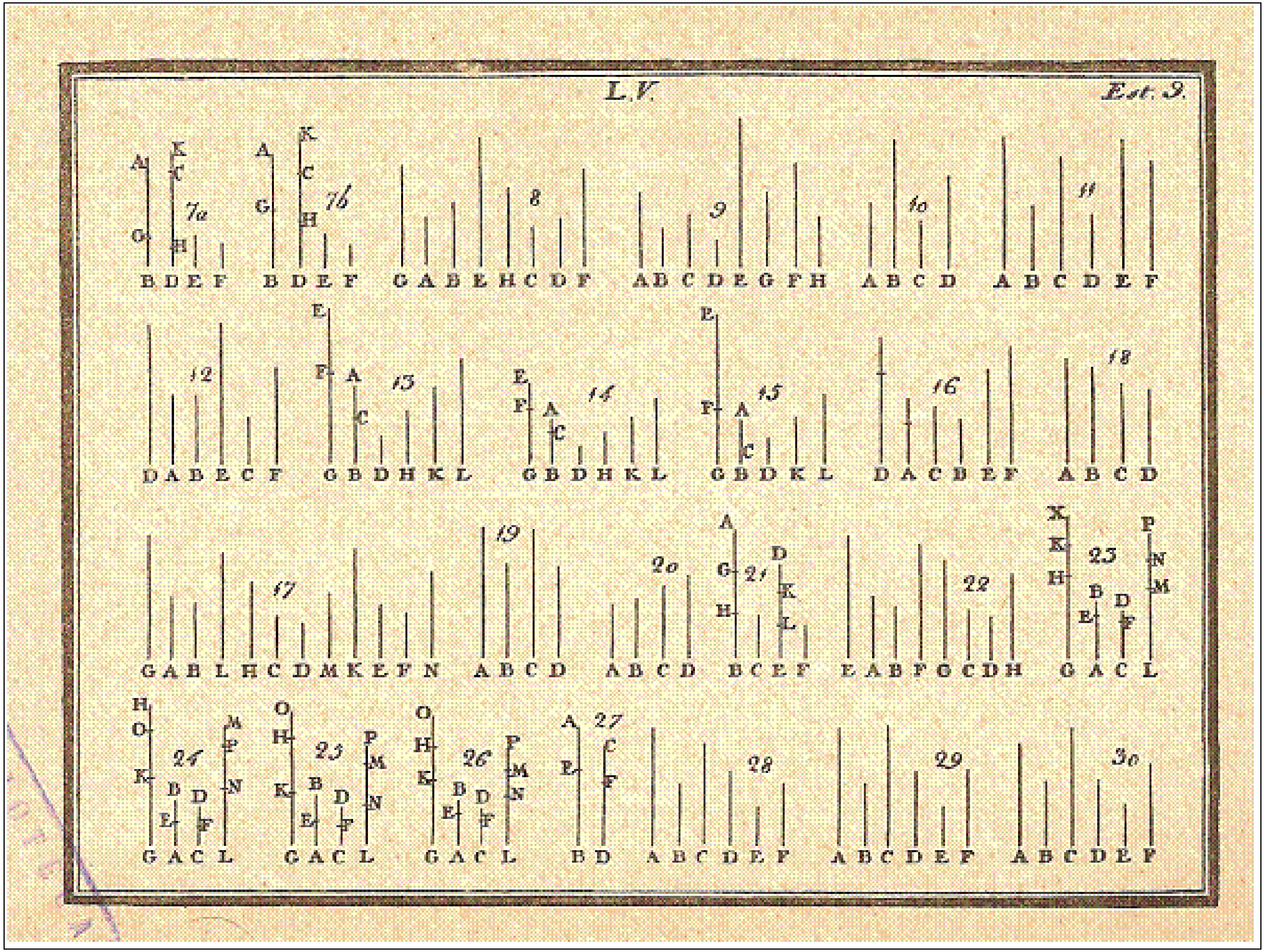

LII.
Est. 4.
LIII.

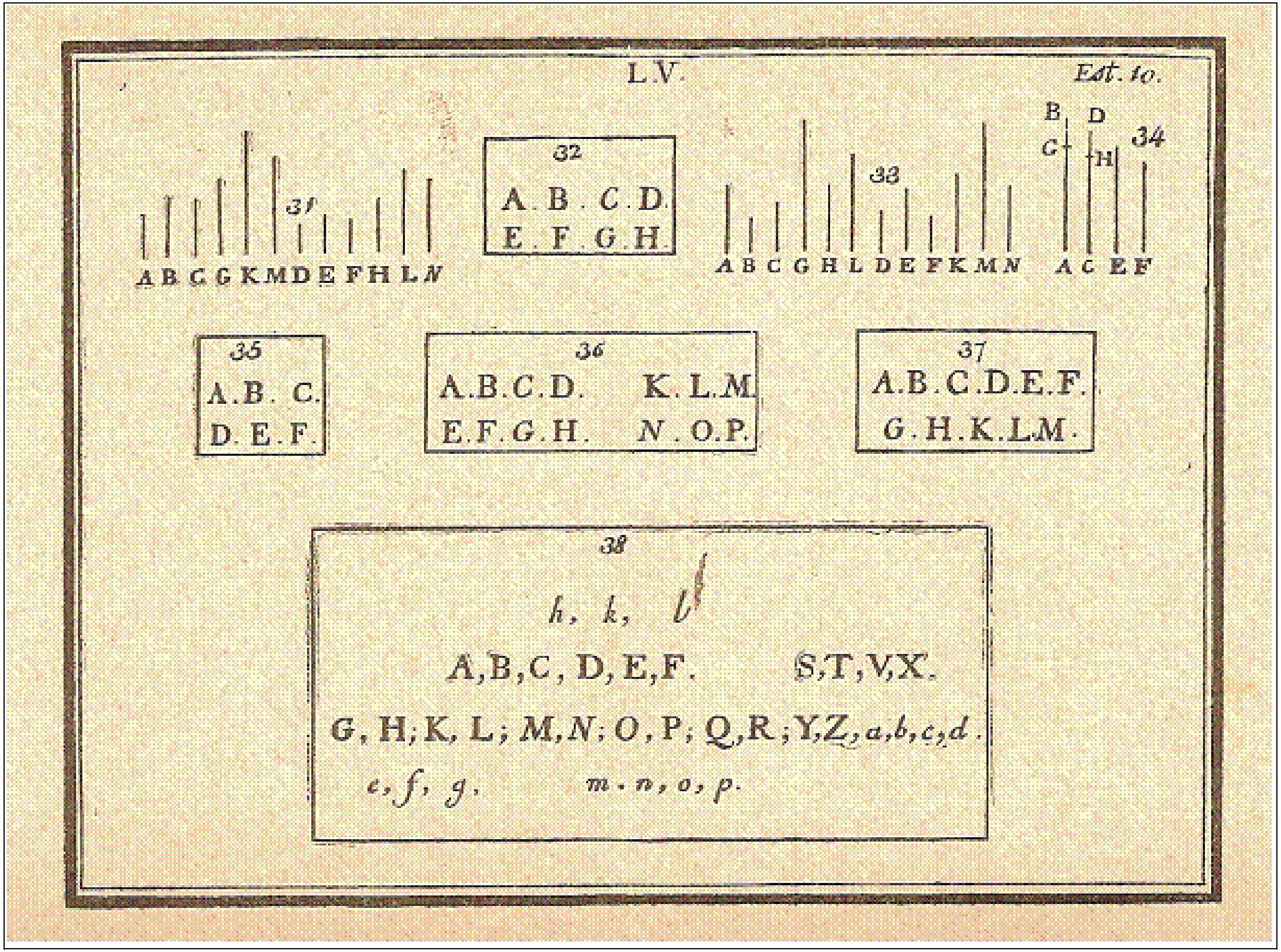

L.III
E.A.3.

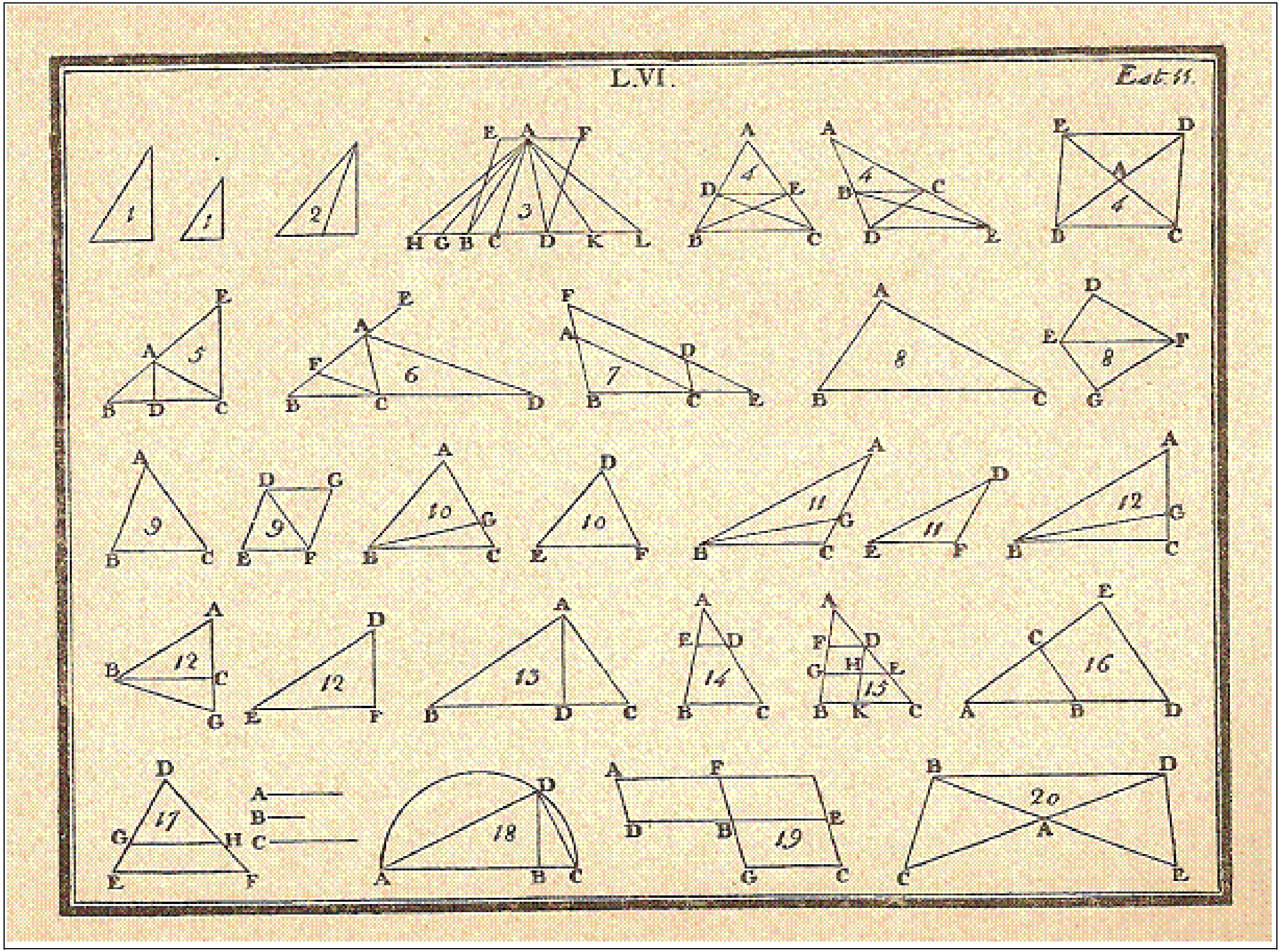

LIII
Est. 6.

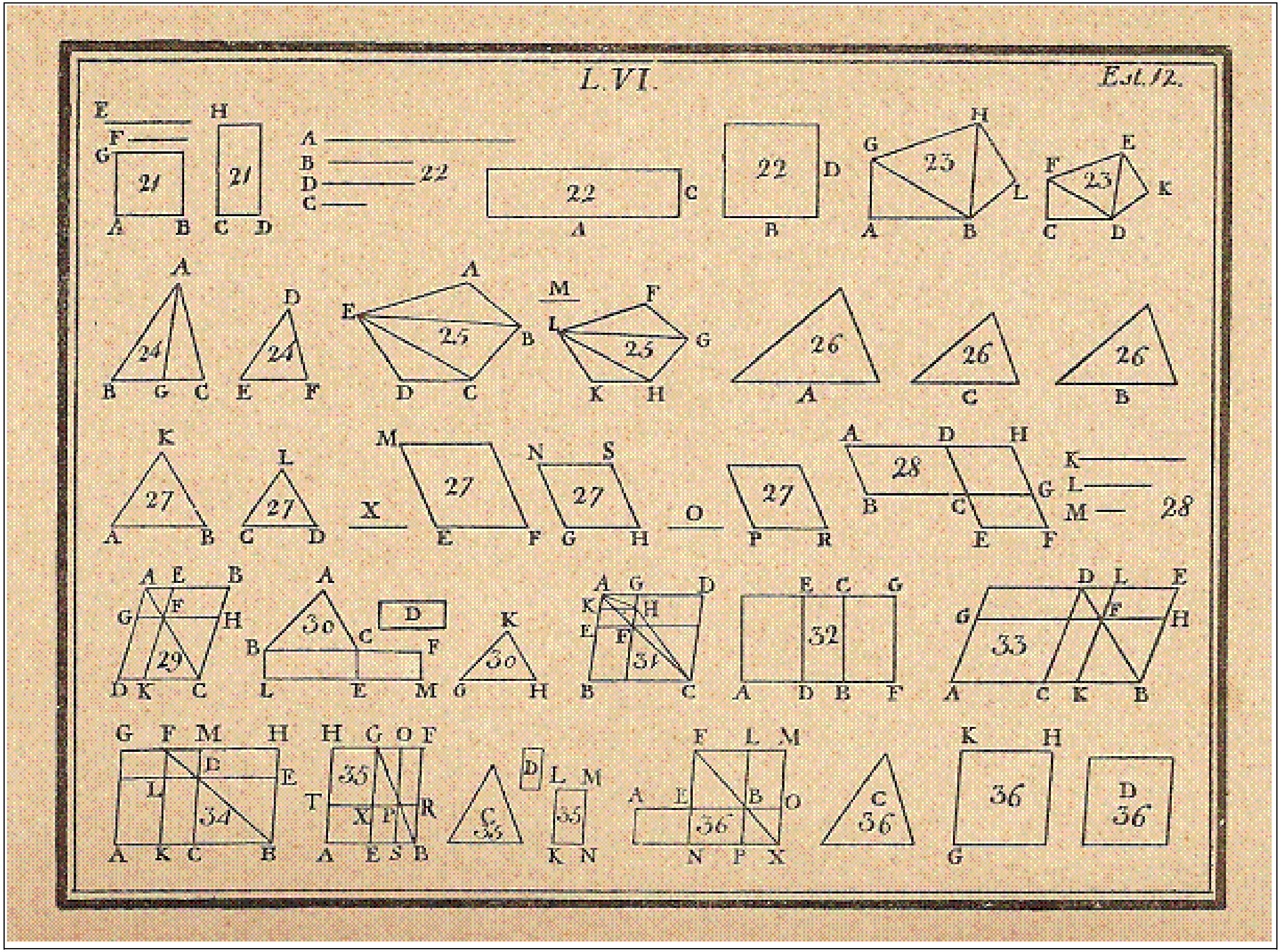

L.III
Est.I.

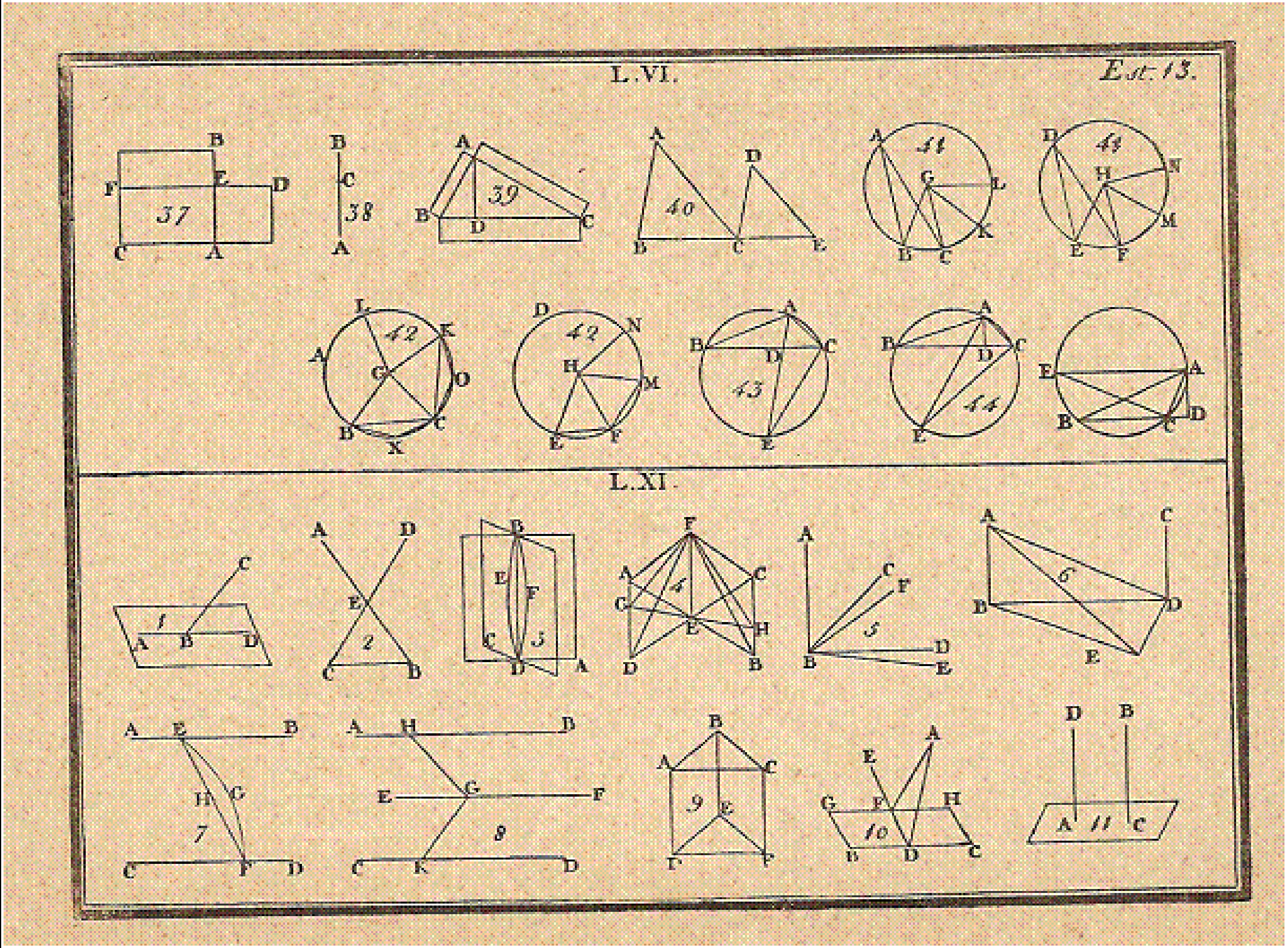

LIV.
Est. 8.
LV.

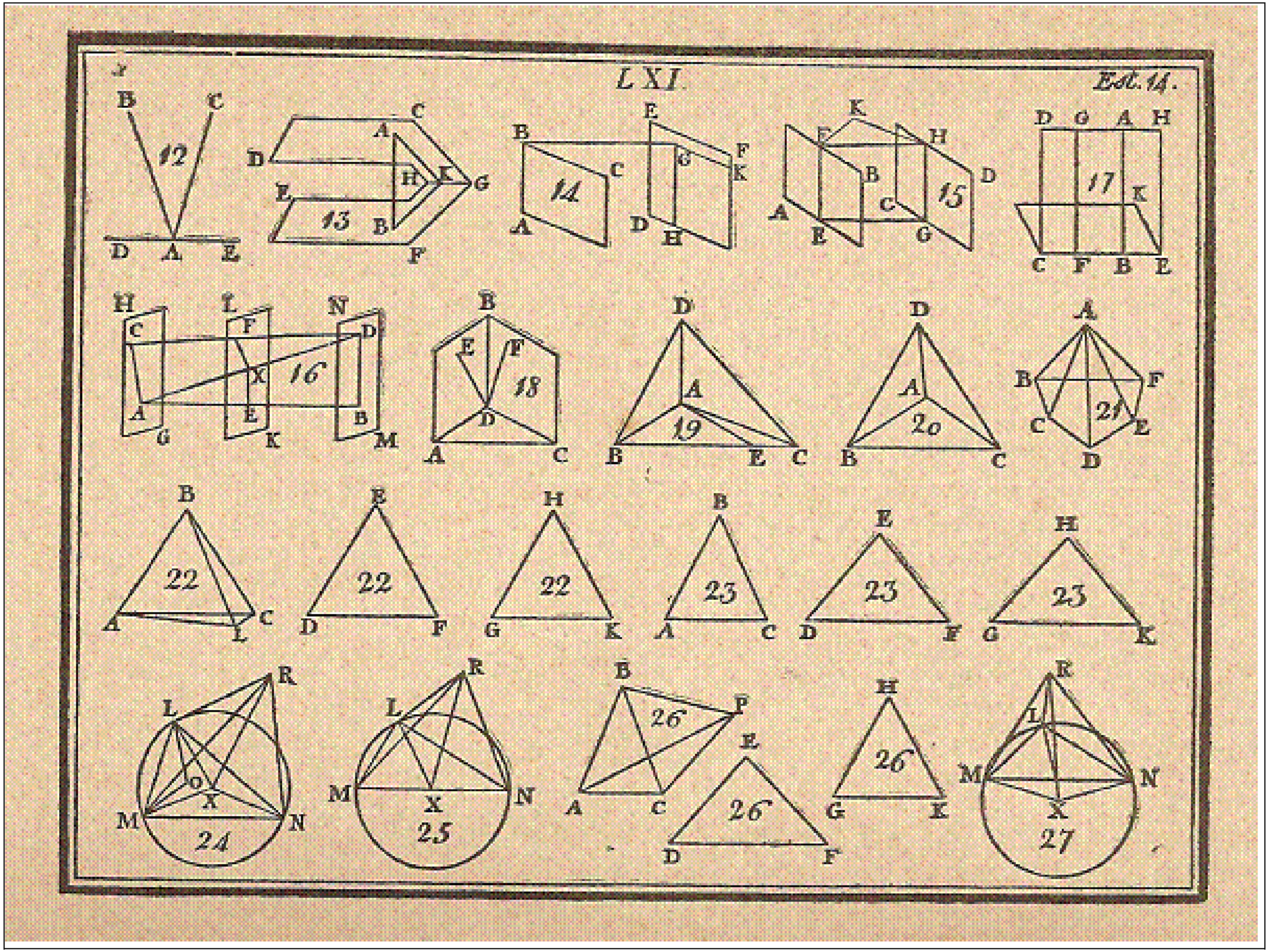

L.V.
Est. 9.

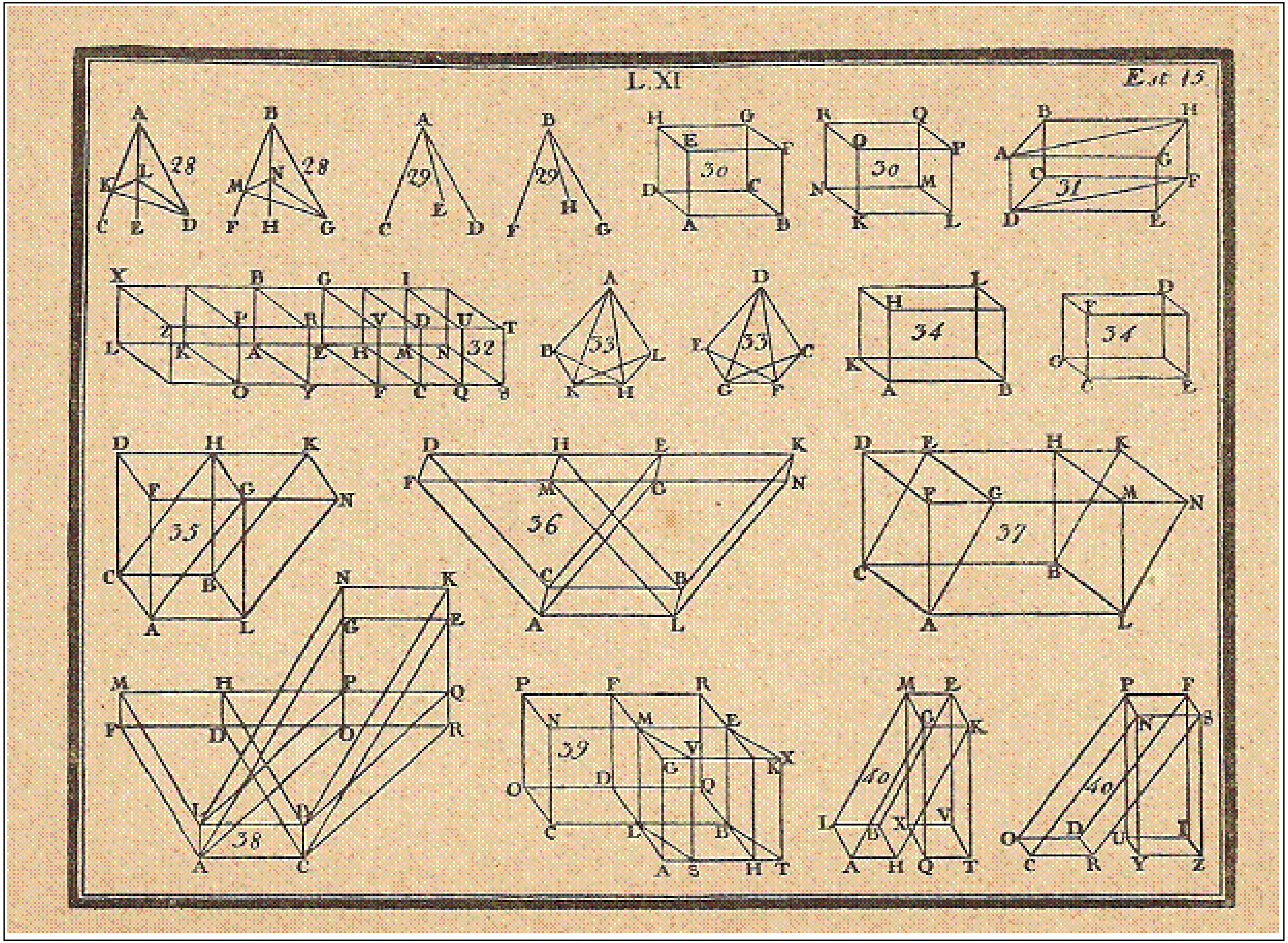

L.V.
Est. 10.
31
A B C G K M D E F H L N
32
A . B . C . D .
E . F . G . H .
33
A B C G H L D E F K M N
34
B D
C H
A C E F
35
A . B . C .
D . E . F .
36
A . B . C . D . K . L . M .
E . F . G . H . N . O . P .
37
A . B . C . D . E . F .
G . H . K . L . M .
38
h, k, l
A, B, C, D, E, F. S, T, V, X.
G, H; K, L; M, N; O, P; Q, R; Y, Z, a, b, c, d.
e, f, g. m . n, o, p.

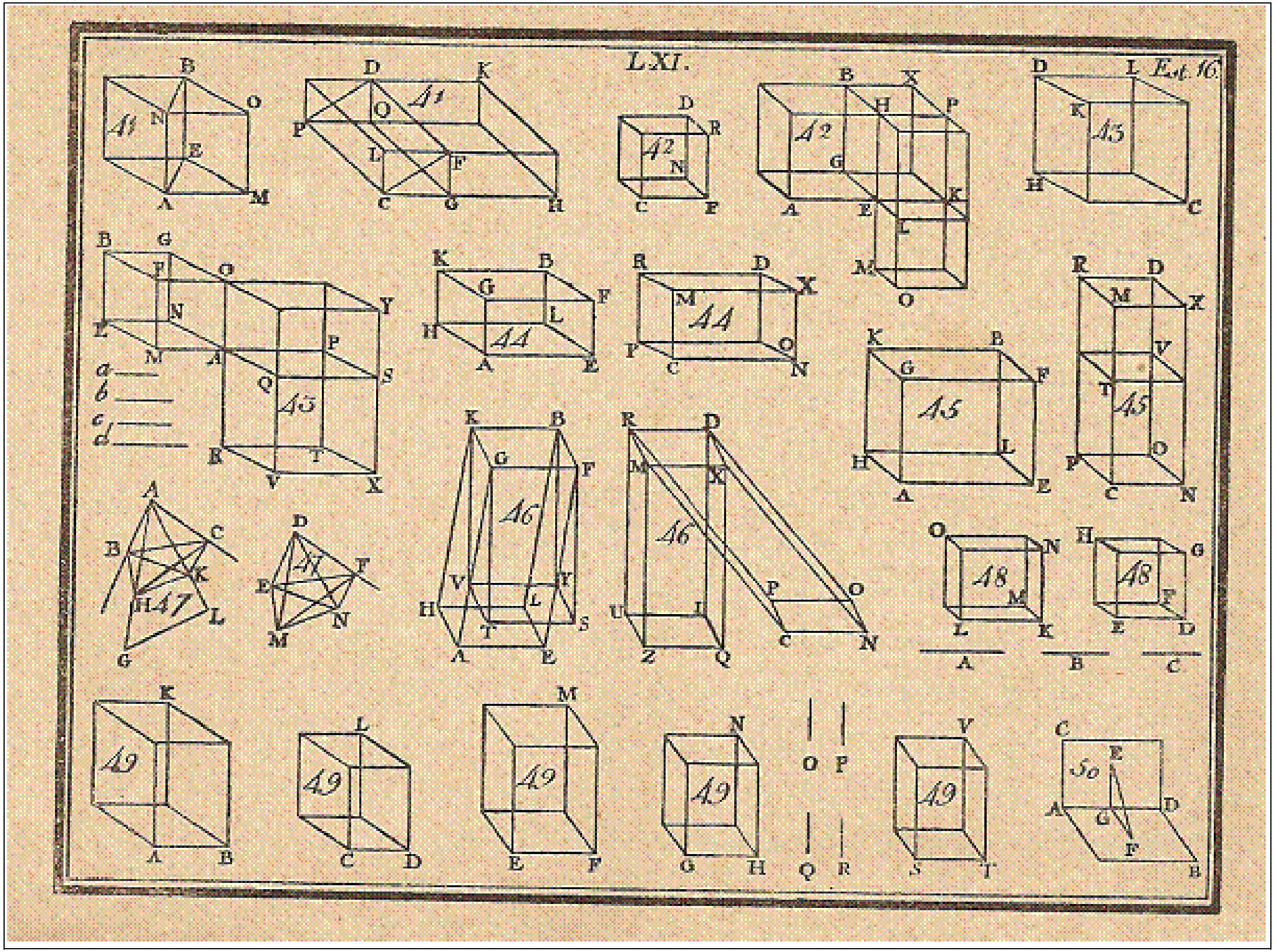

L.VI.
Est. 11.

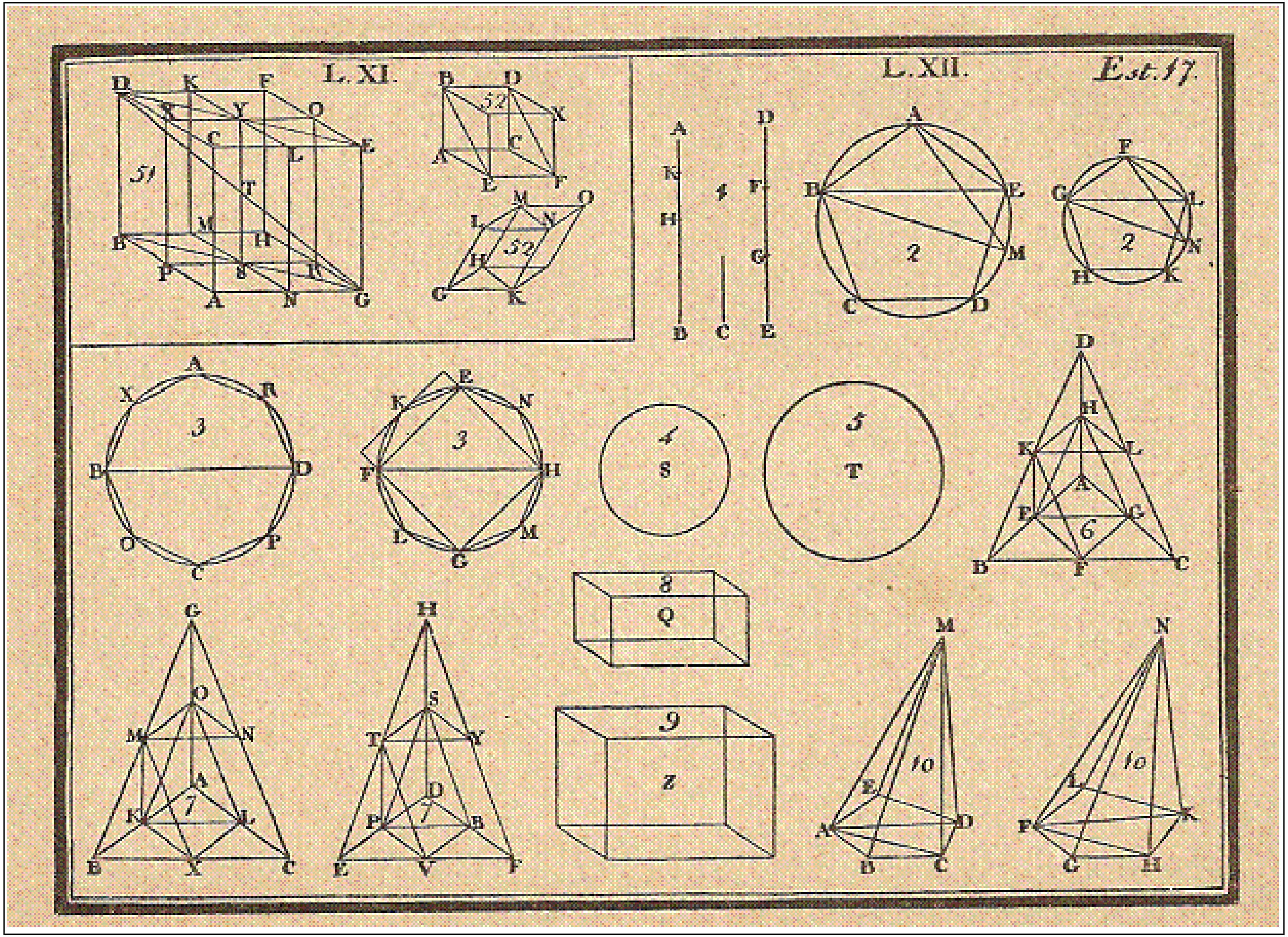

L.VI.
Est. 12.

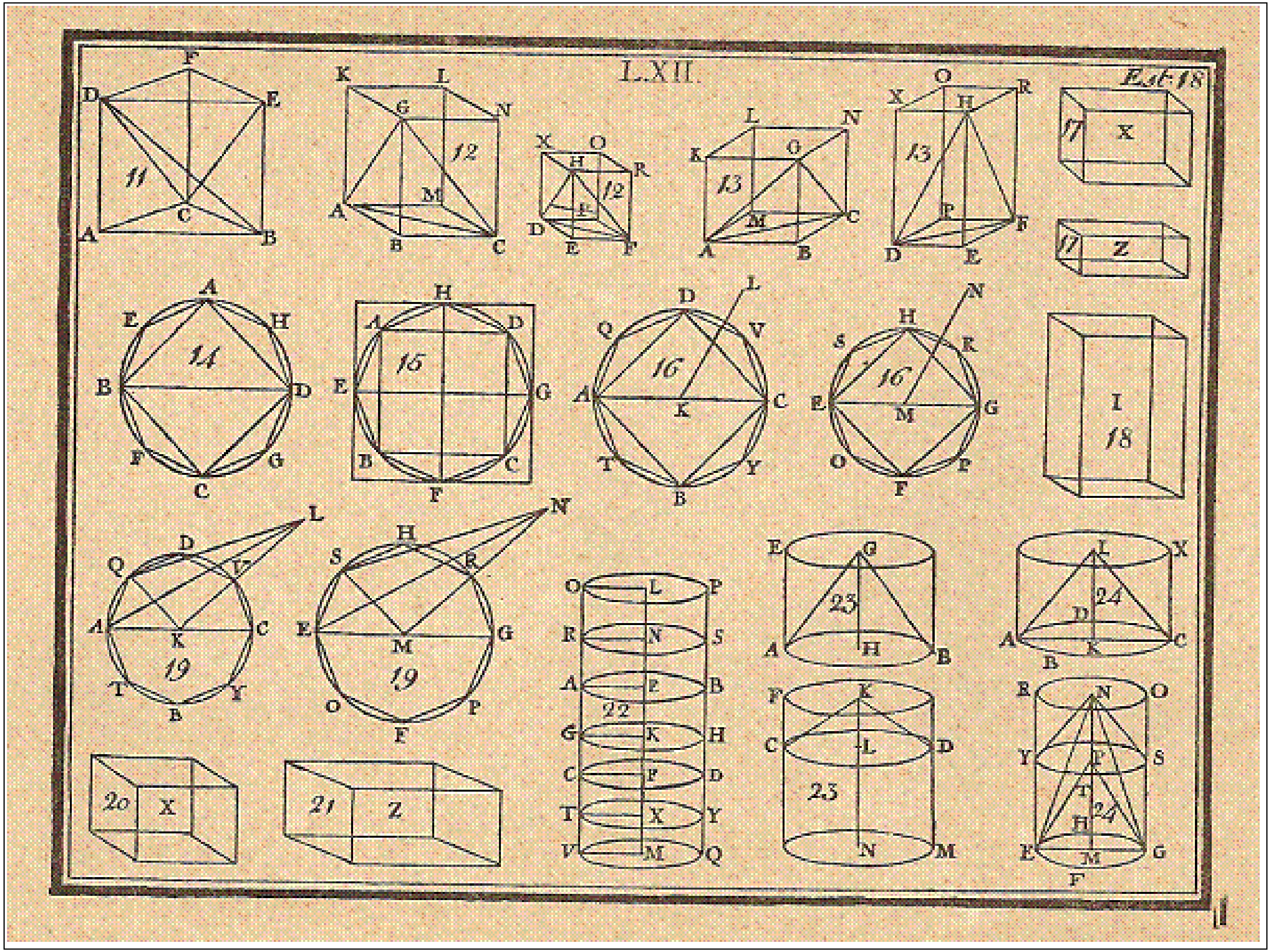

L.VI.
Est: 13.
L.XI.

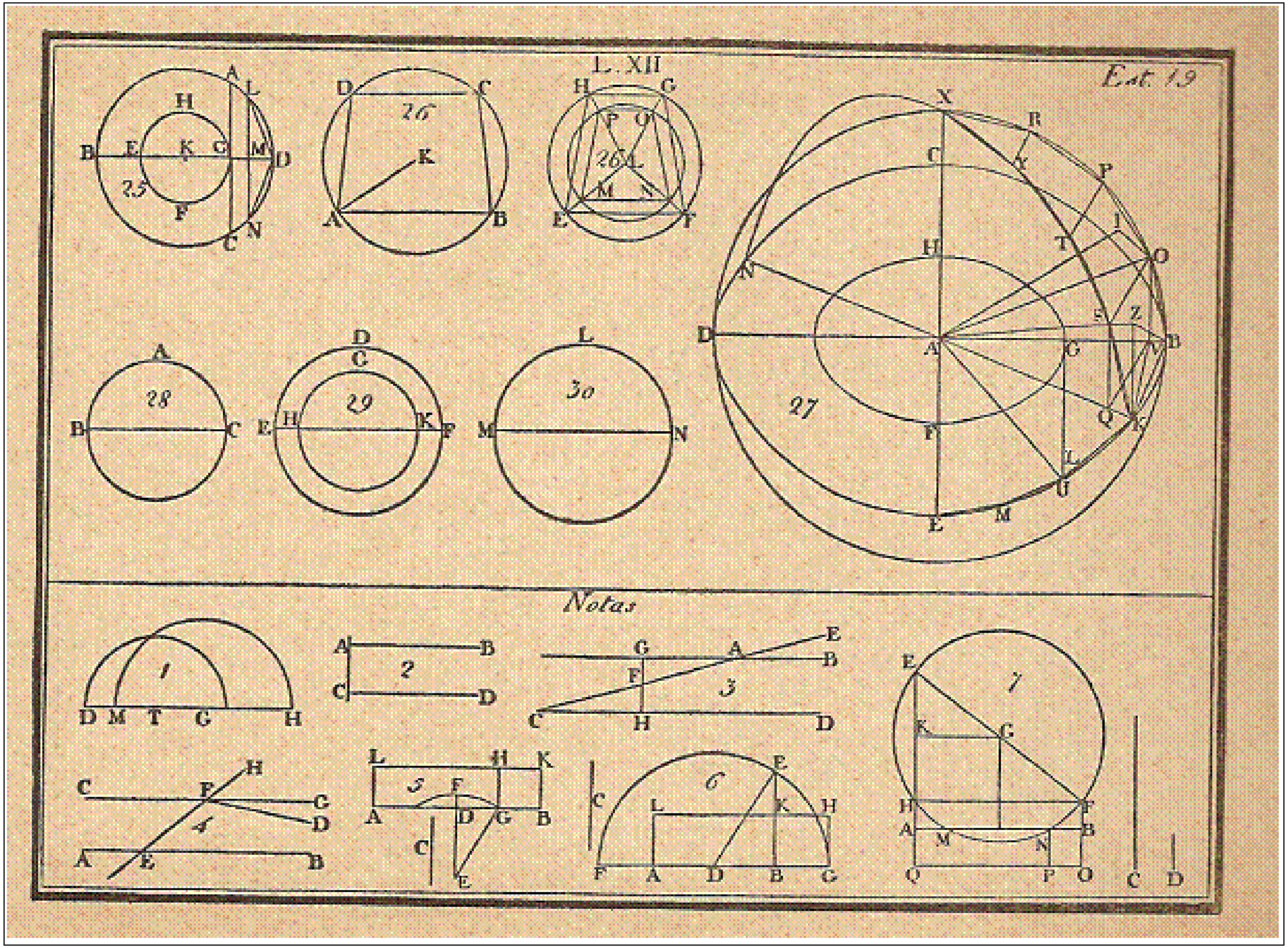

LXI
Est. 14.


L. XI
Est 15

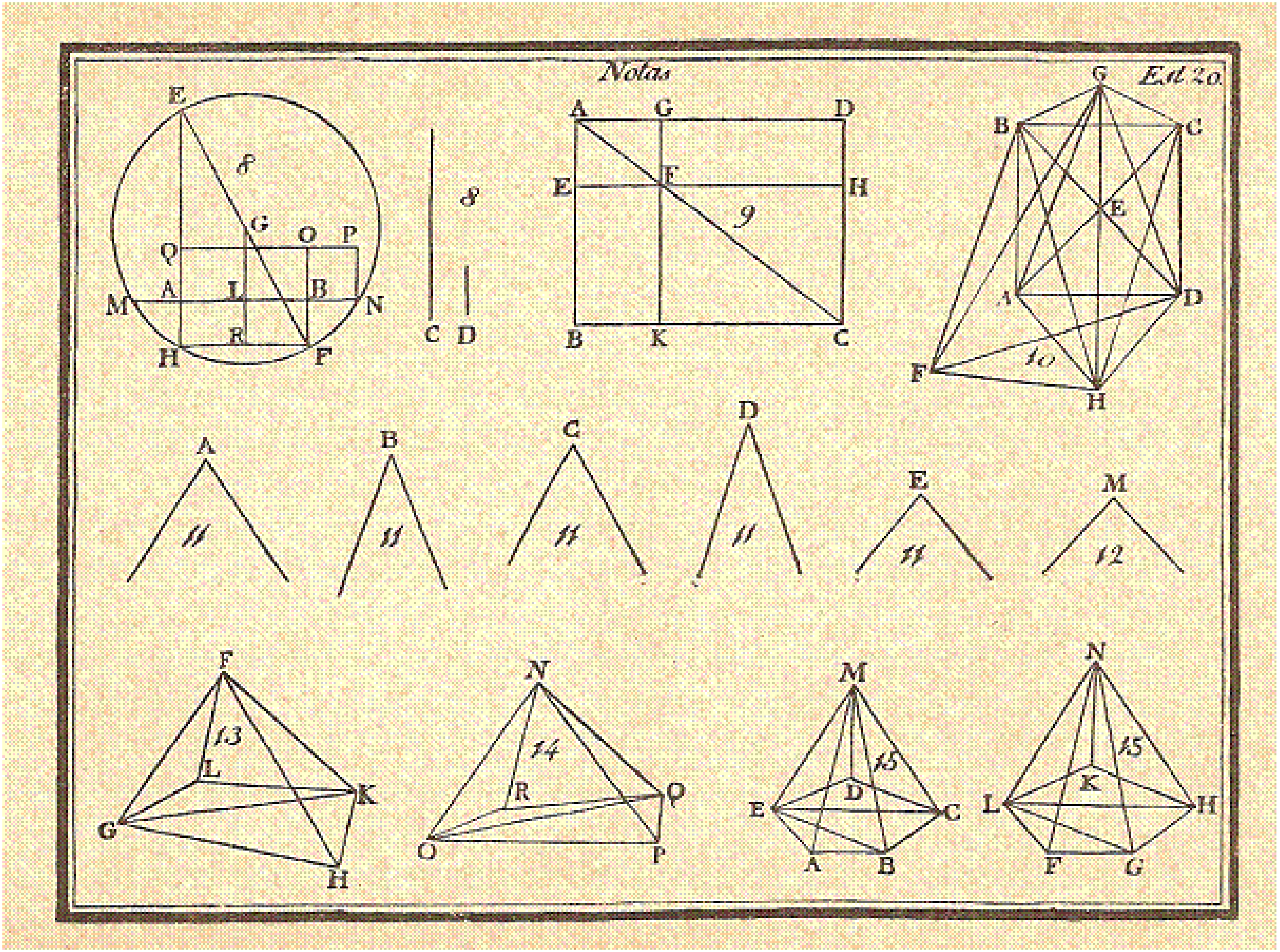

LXI.
Est. 16.


L. XI.
L. XII.
Est. 17.


L.XII.
Est. 18



L. XII
Est. 19
25
26
26
28
29
30
27
Notas
1
2
3
4
5
6
7


Notas
Eucl. 20.
8
9
10
11
12
13
14
15
E
A
G
D
Q
O
P
M
L
B
N
H
R
F
C
K