ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ ПРИ НЕСТАЦИОНАРНОМ РЕЖИМЕ (Лекция 3)

4.6. РЕГУЛЯРНЫЕ ТЕПЛОВЫЕ РЕЖИМЫ

Для того чтобы ввести понятие регулярного теплового режима, рассмотрим процесс охлаждения (нагрева) в среде с постоянной температурой произвольного по форме однородного и изотропного тела, начальное распределение температур в котором (при $\tau = 0$) задано известной функцией координат $f(x,y,z,0) = T_0$. В целях упрощения записи будем, не уменьшая общности, считать температуру окружающей среды $T_f = const$.

Решение (4.20) представлено в виде бесконечного ряда

$$\Theta = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \varphi_n(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, Bi) \exp(-m_n Fo), \tag{4.39}$$

или

$$\Theta = A_1\varphi_1 \exp(-m_1 Fo) + A_2\varphi_2 \exp(-m_2 Fo) + A_3\varphi_3 \exp(-m_3 Fo) + \ldots, \tag{4.40}$$

Рассматривая поведение ряда (4.40) с ростом времени τ (т.е. критерия Фурье), убедимся, что все члены рядв убывают по времени, хотя и с неодинаковой скоростью. Причем, поскольку $m_1 < m_2 < m_3 < \ldots < m_n < \ldots$, члены высших порядковых номеров убывают быстрее и уже очень скоро становятся пренебрежимо малыми. Поэтому температура какой-либо произвольной точки тела задолго до достижения ею температуры окружающей среды (в нашем случае T_f) будет определяться, по существу, первым членом ряда (4.40), т. е. следовать простому экспоненциальному закону

$$\Theta \approx A_1\varphi_1 \exp(-m_1 Fo). \tag{4.41}$$

Момент, когда изменение температуры всех точек тела можно считать следующим этому простому закону, называют началом регулярного, т. е. упорядоченного режима. Функция $\varphi_1(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, Bi)$ по определению не зависит от начальных условий, а A_1 хотя и определяется из начальных условий, не зависит ни от координаты точки, ни от времени τ. Поэтому при наступлении регулярного режима можно считать, что начальное тепловое состояние тела больше не оказывает влияния на закон изменения температур по времени во всех его точках.

Подставив значение безразмерной избыточной температуры Θ и Fo в (4.41) и прологарифмировав это выражение, получим:

$$\ln(T - T_f) = \ln[(T_0 - T_f)A_1\varphi_1(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, Bi)] - \frac{m_1 a}{L^2}\tau = F_1(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, Bi) - \frac{m_1 a}{L^2}\tau, \tag{4.42}$$

Дифференцируем (4.42) по времени и получаем:

$$\frac{\partial \ln(T - T_f)}{\partial \tau} = -m, \tag{4.43}$$

где $m = \dfrac{m_1 a}{L^2}$ называется темпом охлаждения (нагрева). Из (4.43) следует важный вывод, что зависимость логарифма избыточной времени в области регулярного режима для всех точек тела приобретает линейный характер, причем ее угол наклона одинаков для всех точек и равен $-arctg(m)$ (рис. 4.10).

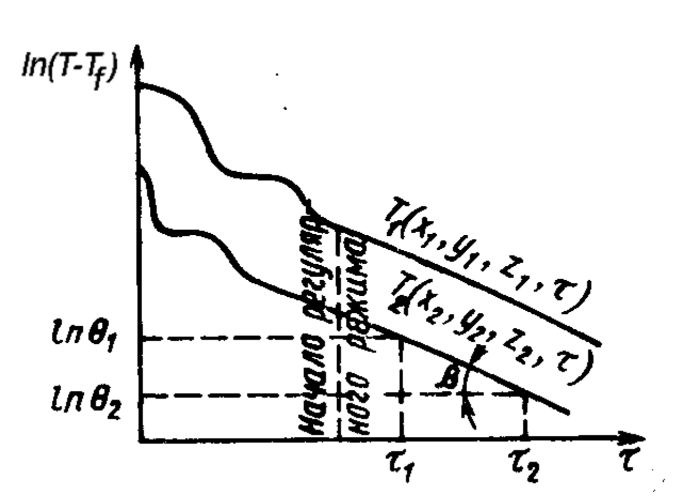

Рис.4.10. Изменение по времени логарифма избыточной температуры для точек произвольного тела.

Существенно, что поле температур в теле в процессе регулярного охлаждения остается подобным самому себе, поскольку отношение избыточных температур любых точек тела становится постоянным и не зависящим от времени, а определяется лишь координатами этих точек. В этом легко убедиться, поделив полученное из равенства (4.41) значение Θ в точке $(\overline{x}_1, \overline{y}_1, \overline{z}_1)$ на значение Θ в точке $(\overline{x_2}, \overline{y_2}, \overline{z_2})$:

$$\frac{T_1 - T_f}{T_2 - T_f} = \frac{\varphi_1(\overline{x_1}, \overline{y_1}, \overline{z_1})}{\varphi_1(\overline{x_2}, \overline{y_2}, \overline{z_2})}. \qquad (4.44)$$

Темп охлаждения m зависит от формы, размеров и материала тела, а также от граничных условий задачи. Значение m можно определить, замеряя в эксперименте изменение температуры какой-либо точки охлаждаемого тела по времени. Для этого, построив график зависимости $\ln(T - T_f)$, следует взять на прямолинейном его участке (область регулярного режима) две точки и тогда

$$m = \frac{\ln[T(\tau_1) - T_f] - \ln[T(\tau_2) - T_f]}{\tau_1 - \tau_2}. \qquad (4.45)$$

Наглядную интерпретацию становления регулярного режима охлаждения можно дать, рассмотрев распределение температуры по толщине плоской стенки, помещенной в среду с постоянной температурой (рис. 4.11). Если вначале (τ = 0) распределение температуры имело вид, изображенный кривой *A'A,* то в ближайшие за начальным моменты времени τ_1 и τ_2 изменения температуры отдельных точек по времени во многом еще определяются не внешними условиями, а самим начальным распределением. Так, в некоторых сечениях (близких к x_1) температура сначала начинает даже возрастать. Но постепенно влияние начальных условий ослабевает, и, начиная с $\tau \approx \tau_4$, температура всех точек тела начинает падать по одинаковому экспоненциальному закону, т.е. наступает регулярный режим.

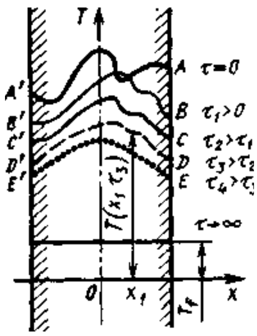

Рис. 4.11. Распределение температуры по толщине плоской стенки (граничные условия 3-го рода) для различных моментов времени при произвольном начальном распределении *A'A*

Выше было дано представление о регулярном режиме охлаждения (нагрева) тела в среде с постоянной температурой

Понятие регулярности режима может быть обобщено и на случай изменения T_f во времени по таким простейшим законам, как линейный и гармонический. (При рассмотрении регулярных режимов здесь не делается различия между задачами с граничными условиями 1-го и 3-го рода, поскольку ранее было показано, что при $\lambda / \alpha \to 0$ обе задачи эквивалентны ($T_f = T_w$), а значит и все выводы, полученные из рассмотрения задачи с граничными условиями 3-го рода, легко обобщаются на случай граничных условий 1-го рода.)

В соответствии с названными выше тремя типичными законами изменения T_f во времени различают регулярные режимы трех родов. Рассмотренный в начале этого раздела $T_f = const$ называется регулярным режимом 1-го рода. Признак регуляризации режима 1-го рода состоит в том, что изменение температуры в каждой точке системы происходит по экспоненте, одинаковой для всех точек:

$$T - T_f = C_1 \vartheta_1 e^{-m\tau}; C_1 = const; \vartheta_1 = \vartheta_1(x, y, z) . \tag{4.46}$$

Регулярный режим 2-го рода

$$\frac{\partial T_f}{\partial \tau} = const = b$$

наступает, когда скорость изменения температуры становится, во-первых, постоянной, общей для всех точек тела, и, во-вторых, равной скорости изменения температуры внешней среды:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\partial T_f}{\partial \tau} = b , \tag{4.47}$$

т.е. $T = T_f + M(x, y, z)$

Для регулярного режима 3-го рода, когда

$$T_f = T_{f0} + A\cos(\omega\tau) ,$$

характерно, что температура любой точки тела колеблется около своего среднего значения с тем же периодом, что и температура окружающей среды, т. е. с периодом, одинаковым для всех точек тела:

$$T_f = P\sin(\omega\tau) + Q\cos(\omega\tau) = T_0' + A'\cos(\omega\tau - \varphi) , \tag{4.48}$$

где P, Q, T_0', A', φ - функции координат. (Очевидно, эти колебания происходят с иной амплитудой, а также могут быть смещены по фазе по сравнению с колебаниями температуры окружающей среды.)

4.6.1. Регулярный режим 1-го рода

Остановимся подробно на регулярном режиме 1-го рода. В некоторых случаях регулярный режим может наступать сразу после начала процесса охлаждения или нагрева тела.

Пусть тело произвольной формы, с объемом *V* и поверхностью *F* обладает высокой теплопроводностью к, а коэффициент теплоотдачи у поверхности *α* мал. Это означает, что критерий $Bi = \alpha L / \lambda << 1$, и можно считать, что температура внутри тела очень быстро выравнивается и в каждый данный момент времени близка к постоянной, равной температуре его поверхности T_w. Тогда уравнение теплового баланса, приравнивающее количество тепла, поступившее через поверхность тела, к изменению его энтальпии, запишем в виде

$$\alpha(T_f - T)F = \rho c V \frac{dT}{d\tau}. \qquad (4.49)$$

В этом уравнении T - температура тела – не зависит от координат (x, y, z) в силу предположения, что $Bi << 1$.

Считая теплофизические характеристики системы постоянными и вводя новую переменную $\theta = T_f - T$, легко проинтегрировать это выражение:

$$\frac{d\ln\theta}{d\tau} = -\frac{\alpha F}{\rho c V} = -m, \qquad (4.50)$$

или

$$\theta = \theta_0 \exp(-m\tau), \qquad (4.51)$$

где $\theta_0 = T_f - T_0$, $m = const$

Таким образом, при $Bi << 1$ регулярный режим устанавливается сразу после начала процесса. Уравнение, аналогичное уравнению (4.51), можно составить и для случая, когда Bi произвольно, т. е. температура в различных точках тела в данный момент времени различна. Только при этом пришлось бы воспользоваться понятиями средней по объему избыточной температуры

$$\theta_V = \frac{1}{V}\iiint\limits_V \theta \cdot dV$$

и средней по поверхности температуры

$$\theta_w = \frac{1}{F}\iint\limits_F \theta \cdot dF,$$

где $\theta = T_f - T(x, y, z)$ - местная избыточная температура в данный момент времени.

В этом произвольном случае темп охлаждения *m* отличался бы от выражения (4.50) при $Bi << 1$ на коэффициент

$$\psi = \frac{\theta_w}{\theta_V} = \frac{V\iint\limits_F \theta \cdot dF}{F\iiint\limits_V \theta \cdot dV}, \qquad (4.52)$$

представляющий собой отношение средней поверхностной температуры к средней по объему.

Очевидно, что при $Bi << 1$, когда $T(x, y, z) = T_w$:

$$\psi = 1$$

В другом предельном случае, когда $Bi \to \infty$, соответствует $\psi = 0$, т.е. максимальной неравномерности температурного поля внутри тела.

Уравнения (4.49) – (4.51) имеют в общем случае вид:

$$\alpha\theta_w F = -\rho c V \frac{d\theta_V}{d\tau} \text{ или с учетом (4.52) } \alpha\psi\theta_V F = -\rho c V \frac{d\theta_V}{d\tau} \qquad (4.53)$$

или с учетом (4.52)

$$\alpha\psi\theta_V F = -\rho c V \frac{d\theta_V}{d\tau} \qquad (4.54)$$

$$\frac{d\ln\theta_V}{d\tau} = -\psi\frac{\alpha F}{\rho c V} = -m, \qquad (4.55)$$

или

$$\theta_V = \theta_0 \exp(-m\tau), \tag{4.55}$$

Итак, при произвольном Bi темп охлаждения

$$m = \psi \frac{\alpha F}{\rho c V} \tag{4.56}$$

4.6.2. Регулярный режим 1-го рода при $Bi \to 0$ и его использование для экспериментального определения коэффициента теплоотдачи

Исходя из вышесказанного, укажем на некоторые практические приложения теории регулярного режима 1-го рода.

В теплофизическом эксперименте часто необходимо экспериментально найти коэффициент теплоотдачи α на каком-то участке поверхности. В этом случае удобно воспользоваться тем обстоятельством, что при $Bi \to 0$ коэффициент $\psi \to 1$, и следовательно, из формулы (4.56) следует:

$$\alpha = m \frac{\rho c V}{F} \tag{4.57}$$

Заделав в интересующей части поверхности тела датчик в виде тонкой пластины из теплопроводного материала (медь, серебро) и подсоединив в нему термопару, связанную с регистрирующим устройством (например осциллографом), можно получить зависимость температуры датчика от времени, после того как тело, на поверхности которого установлен датчик, поместили в поток или среду с постоянной температурой T_f .

Вследствие малости $Bi = \alpha\delta / \lambda$ (толщина датчика δ мала, а коэффициент λ велик) температуру в данный момент времени можно считать одинаковой по всему датчику и равной измеренной с помощью термопары.

Перестраивая полученную зависимость в полулогарифмических координатах [$\ln(T_f - T) = f(\tau)$], определим *m* на участке регулярного режима по формуле (4.45) (см. рис. 4.10). А затем, пользуясь выражением (4.57), легко найти α . В этом случае в качестве F должна браться лишь та площадь поверхности датчика, которая воспринимает конвективный тепловой поток. Остальную часть его поверхности при установке датчика стремятся тщательно теплоизолировать, поскольку важно быть уверенным, что за время измерений $f(\tau)$ утечки тепла от датчика в корпус или иным путем пренебрежимо малы в сравнении с конвективным потоком
$Q = \alpha F(T_f - T)$

Основное преимущество данного метода регулярного режима состоит в том, что при очень малых, а следовательно, малоинерционных датчиках время измерения можно сократить до 1 с и менее, что важно в экспериментальных установках кратковременного действия, таких, например, как аэродинамические трубы больших скоростей.

4.6.3. Регулярный режим 1-го рода при $Bi \to \infty$ и его использование для экспериментального определения коэффициента температуропроводности

Другой пример практического использования регулярного режима относится к экспериментальному определению теплофизических констант материала.

При $Bi \to \infty$ ($\alpha \to \infty$) ψ стремится к нулю. Однако в этом предельном случае, который очевидно сводит задачу с граничными условиями 3-го рода к задаче с граничными условиями 1-го рода

($T_f = T_w$), темп охлаждения стремится к определенному конечному пределу, не зависящему от Bi и прямо пропорциональному коэффициенту температуропроводности тела *a*

$$a = Km_\infty \tag{4.58}$$

Это утверждение называют 1-й теоремой Кондратьева.

В выражении (4.58) коэффициент пропорциональности *K* зависит лишь от формы и размеров тела и для задач с граничными условиями 1-го рода, где доступно аналитическое решение (пластина, шар, цилиндр, параллелепипед и др.), может быть получен из показателя экспоненты первого члена ряда, представляющего соответствующее решение.

Так, для шара радиусом *R*

$$K = R^2 / \pi^2,$$

для цилиндра радиусом *R* и длиной *l*

$$K = \frac{1}{(2.4048/R)^2 + (\pi/l)^2},$$

для параллелепипеда со сторонами l_1, l_2, l_3

$$K = \frac{1}{\sum_{i=1}^{3} (\pi / l_i)^2}$$

Размерность K — $м^2$.

Важным с точки зрения практики является то обстоятельство, что с увеличением Bi темп охлаждения *m* очень быстро приближается к своему предельному значению m_∞, соответствующему $Bi \to \infty$.

Найдя экспериментально темп охлаждения и зная коэффициент формы К (если образцу придана простая геометрическая форма), можно определить коэффициент температуропроводности материала а. Как уже говорилось, m быстро приближается к m_∞ с ростом Bi (или α). Поэтому с достаточно высокой точностью при больших, но конечных Bi можно принять $m = m_\infty$. Поместив образец в водяной термостат, где температура поддерживается постоянной и идет интенсивное вынужденное перемешивание, обеспечивающее высокое значение коэффициентов теплоотдачи α, измеряют заделанной внутрь образца термопарой величину Т через определенные промежутки времени. Из построенной для участка регулярного режима зависимости

$$\ln(T_f - T) = f(\tau)$$

находят $m = m_\infty$ и, зная коэффициент формы K, вычисляют коэффициент температуропроводности a по формуле (4.58).