Peatükk 1

Meetrilised ruumid

1.1 Meetrilise ruumi mõiste

Matemaatilise analüüsi üks olulisemaid mõisteid on jada koonduvus. Arvjadade, aga ka näiteks tasandi või ruumi punktidest moodustatud jadade koonduvuse mõiste tugineb asjaolule, et arvsirgel, tasandil või ruumis on olemas punktide vaheline kaugus. Idee defineerida elementidevaheline kaugus suvaliste hulkade jaoks viib meetrilise ruumi mõisteni.

Definitsioon. Hulka X nimetatakse *meetriliseks ruumiks*, kui igale tema elementide paarile $x, y \in X$ on vastavusse seatud reaalarv $\rho(x, y)$ nii, et on täidetud tingimused:

1° $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,

2° $\rho(x, y) = \rho(y, x)$,

3° $\rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(z, y)$.

Arvu $\rho(x, y)$ nimetatakse elementide x ja y vaheliseks *kauguseks*.

Tingimusi 1°–3° nimetatakse *meetrika aksioomideks*, 1° on *identsuse* ehk *samasuse aksioom*, 2° *sümmeetria aksioom*, 3° *kolmnurga võrratus*. Meetrilise ruumi aksiomaatika võttis kasutusele M. Fréchet 1906. a.

Näide. Olgu $X = \mathbb{R}^n = \{x : x = (\xi_1, \dots, \xi_n),\ \xi_i \in \mathbb{R}\}$. Defineerime elementide $x = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ ja $y = (\eta_1, \dots, \eta_n)$ vahelise kauguse

$$\rho(x, y) = \sqrt{(\xi_1 - \eta_1)^2 + \dots + (\xi_n - \eta_n)^2}.$$

Aksioomide 1° ja 2° kehtivus on vahetult näha, kolmnurga võrratuse tõestame hiljem üldisemal juhul.

Järgnevalt esitame mõned järeldused aksioomidest.

Järeldus 1. *Kaugus on mittenegatiivne, st.* $\rho(x, y) \geqslant 0$.

Tõestuseks märgime, et

$$0 = \rho(x, x) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, x) = 2\rho(x, y). \qquad \square$$

Järeldus 2 (nelinurga võrratus)**.** *Kehtib*

$$|\rho(x,y) - \rho(u,v)| \leqslant \rho(x,u) + \rho(y,v).$$

Tõestus. Võrratusest

$$\rho(x,y) \leqslant \rho(x,u) + \rho(u,y) \leqslant \rho(x,u) + \rho(u,v) + \rho(v,y)$$

saame võrdust $\rho(v,y) = \rho(y,v)$ arvestades

$$\rho(x,y) - \rho(u,v) \leqslant \rho(x,u) + \rho(y,v).$$

Analoogiliselt saame, et

$$\rho(u,v) - \rho(x,y) \leqslant \rho(x,u) + \rho(y,v),$$

mis koos eelmise võrratusega annab nelinurga võrratuse. □

Järeldus 3 (tagurpidi kolmnurga võrratus)**.** *Kehtib*

$$|\rho(x,y) - \rho(x,z)| \leqslant \rho(y,z).$$

Tõestuseks piisab võtta nelinurga võrratuses $u = x$ ja $v = z$. □

Järeldus 4. *Meetrilise ruumi X mistahes osahulk on meetriline ruum, kui osahulgas elementide vaheliseks kauguseks lugeda nendevahelist kaugust ruumis X.*

Meetrilise ruumi osahulka nimetatakse ka *alamruumiks*.

Hulka X nimetatakse *poolmeetriliseks ruumiks*, kui temas kõrvuti aksioomidega 2° ja 3° kehtib aksioomi 1° nõrgendatud variant: $\rho(x,x) = 0$, $x \in X$. Järeldused 1–3 ning järelduse 4 analoog kehtivad ka poolmeetrilises ruumis.

1.2 Koonduvus meetrilises ruumis

Kauguse olemasolu lubab meetrilise ruumi juhule üldistada arvjada koonduvuse mõiste. Koonduvad jadad moodustavad meetriliste ruumide probleemide uurimisel piisavalt üldise vahendi.

Olgu X meetriline ruum.

Definitsioon. Öeldakse, et jada $x_n \in X$ *koondub* elemendiks $x \in X$, kui $\rho(x_n, x) \to 0$ protsessis $n \to \infty$.

Jada x_n koondumine elemendiks x tähendab, et iga arvu $\varepsilon > 0$ korral leidub naturaalarv N nii, et kui $n > N$, siis $\rho(x_n, x) < \varepsilon$.

Jada x_n koondumist elemendiks x tähistatakse $x_n \to x$, $\lim x_n = x$, $x_n \underset{n}{\longrightarrow} x$, $\lim\limits_{n} x_n = x$, $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$ või $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. Jada x_n nimetatakse *statsionaarseks*, kui leidub N nii, et $x_N = x_{N+1} = \ldots$ (mingist kohast alates on kõik jada elemendid võrdsed). Statsionaarne jada koondub alati, sest kui $n > N$, siis $\rho(x_n, y_N) = 0$. Statsionaarne on näiteks mistahes *konstantne jada*, st. selline jada, mille kõik elemendid on võrdsed. Seega on kõik konstantsed jadad koonduvad.

Kui jada ei koondu, siis nimetatakse teda *hajuvaks*.

Lause 1. *Koonduva jada mistahes osajada koondub samaks piirelemendiks.*

Tõestuseks märgime, et kui $x_n \xrightarrow[n]{} x$, st. $\rho(x_n, x) \xrightarrow[n]{} 0$, siis $\rho\left(x_{n_k}, x\right) \xrightarrow[k]{} 0$ (sest koonduva arvjada osajada koondub samaks piirväärtuseks); seega $x_{n_k} \xrightarrow[k]{} x$. □

Lause 2. *Koonduva jada piirelement on ainus.*

Tõestus. Kui $x_n \to x$ ja $x_n \to y$, st. $\rho(x_n, x) \to 0$ ja $\rho(x_n, y) \to 0$, siis

$$\rho(x, y) \leqslant \rho(x, x_n) + \rho(x_n, y) = \rho(x_n, x) + \rho(x_n, y) \to 0,$$

seega $\rho(x, y) \leqslant 0$. Järelikult $\rho(x, y) = 0$ ehk $x = y$. □

Lause 3. *Kaugus on pidev järgmises mõttes: kui $x_n \to x$ ja $y_n \to y$, siis $\rho(x_n, y_n) \to \rho(x, y)$.*

Tõestus. On ilmne, kui kasutada nelinurga võrratust

$$|\rho(x_n, y) - \rho(x, y)| \leqslant \rho(x_n, x) + \rho(y_n, y).$$ □

Erijuhuna saame lausest 3 kauguse pidevuse ühe argumendi järgi: kui $x_n \to x$, siis $\rho(x_n, y) \to \rho(x, y)$. Põhjenduseks tarvitseb vaadelda lauses 3 konstantsest jada, kus $y_n = y$ iga n korral.

1.3 Meetriliste ruumide näiteid (konkreetsed meetrilised ruumid)

Me asume vaatlema meetriliste ruumide näiteid, mis oma mitmekesisusega illustreerivad meetrilise ruumis mõiste suurt üldisust ja mille tundmine aitab paremini mõista järgnevas esitamisele tulevat teooriat. Samal ajal on need konkreetsed meetrilised ruumid tähtsad uurimisobjektid ja vahendid mitmesuguste teoreetiliste probleemide lahendamisel. Näidete esitamisel iseloomustame ka jada koonduvust vaadeldavas meetrilises ruumis.

1. Reaalarvude hulk $\mathbb{R}$ ja kompleksarvude hulk $\mathbb{C}$ on meetrilised ruumid kaugusega $\rho(x, y) = |x - y|$ (absoluutväärtus või moodul arvude x ja y vahest). Meetrika aksioomid on absoluutväärtuse või mooduli tuntud omadused.

Koondumine $x_n \to x$ (st. $|x_n - x| \to 0$) tähendab tavalist arvjada koondumist.

Kuna meetrilise ruumi iga osahulk on meetriline ruum, kui temas säilitada elementide vaheline kaugus, siis on näiteks lõik $[a, b]$ või ratsionaalarvude hulk $\mathbb{Q}$, varustatult ruumi $\mathbb{R}$ kaugusega, meetrilised ruumid. Edaspidi tähistagu $\mathbb{K}$ ruumi $\mathbb{R}$ või ruumi $\mathbb{C}$.

2. Olgu X suvaline hulk. Defineerime kauguse

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{kui } x \neq y, \\ 0, & \text{kui } x = y. \end{cases}$$

Meetrika aksioomide 1° ja 2° kehtivus on ilmne. Uurime kolmnurga võrratust $\rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(z, y)$. Kui $x = y$, siis võrratus kehtib. Kui aga $x \neq y$, siis võrratuse vasakul poolel on $\rho(x, y) = 1$. Samal ajal $x \neq z$ või $y \neq z$ (sest kui $x = z$ ja $y = z$, siis $x = y$), st. $\rho(x, z) = 1$ või $\rho(z, y) = 1$. Seega ka sellel juhul võrratus kehtib.

Vaadeldavat ruumi nimetatakse *diskreetseks* meetriliseks ruumiks.

Lause. *Diskreetses meetrilises ruumis koonduvad ainult statsionaarsed jadad.*

Tõestus. Olgu $x_n \to x$, st. $\rho(x_n, x) \to 0$. Võtame $\varepsilon = 1$ (võib võtta $0 < \varepsilon \leqslant 1$). Siis leidub N nii, et kui $n > N$, siis $\rho(x_n, x) = 0$, st. $x_n = x$, kui $n > N$. □

Diskreetne meetrika antud hulgas X on äärmuslik selles mõttes, et ta on tugevaim võimalike meetrikate seas: ta seab jadade koonduvuseks kõige tugevama tingimuse – jadade statsionaarsuse; meenutame, et statsionaarsed jadad koonduvad igas meetrikas. Seega on ruumi X elementidest moodustatud koonduvate jadade hulk minimaalne just diskreetse meetrika korral. Taolist diskreetse meetrika äärmuslikkust on kasulik meeles pidada näiteks kontranäidete konstrueerimisel.

Alljärgnevas vaatleme kolme olulist näidete rühma – n-komponendiliste vektorite ruume, jadaruume ja funktsionaalruume.

3. Olgu $X = \{(\xi_1, \ldots, \xi_n) : \xi_k \in \mathbb{K}\}$ kõigi n-komponendiliste vektorite hulk. Tähistame hulga X elemente $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, $y = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$, $z = (\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$. Meenutame, et $x = y$ tähendab seda, et $\xi_k = \eta_k$, $k = 1, \ldots, n$. Vaadeldavas hulgas X on olemas mitu üldkasutatavat võimalust kauguse defineerimiseks, vastavalt erinevad ka ruumide tähised.

1) Ruumis m_n defineeritakse kaugus

$$\rho(x, y) = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |\xi_k - \eta_k| \,.$$

Aksioomide 1° ja 2° kehtivuse kontroll on vahetu. Peatume kolmnurga võrratusel. Iga indeksi k korral

$$\begin{aligned} |\xi_k - \eta_k| &= |\xi_k - \zeta_k + \zeta_k - \eta_k| \leqslant \\ &\leqslant |\xi_k - \zeta_k| + |\zeta_k - \eta_k| \leqslant \\ &\leqslant \rho(x, z) + \rho(z, y). \end{aligned}$$

Leides vasakul maksimumi k järgi, saame

$$\rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(z, y).$$

2) Olgu $1 \leqslant p < \infty$. Ruumis ℓ_p^n defineeritakse kaugus

$$\rho(x, y) = \left(\sum_{k=1}^{n} |\xi_k - \eta_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Oluliste erijuhtudena märgime ruume ℓ_1^n, kus $\rho(x, y) = \sum\limits_{k=1}^{n} |\xi_k - \eta_k|$, ja ℓ_2^n, kus $\rho(x, y) = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} |\xi_k - \eta_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$. Viimast ruumi tähistatakse ka $\mathbb{R}^n$ või $\mathbb{C}^n$ (üldiselt $\mathbb{K}^n$). Ruumi $\mathbb{R}^n$ nimetatakse *n-mõõtmeliseks eukleidiliseks ruumiks*.

Kauguse aksioomide 1° ja 2° kehtivuse kontrollimine ei valmista raskusi. Ruumis ℓ_1^n järeldub kolmnurga võrratus 3° vahetult absoluutväärtuse või mooduli omadustest. Üldjuhul on aga aksioomi 3° kehtivuse tõestamine keerulisem. Selle juurde järgnevalt asumegi.

Lemma (Hölderi võrratus)**.** *Kui $a_k, b_k \in \mathbb{K}$, $k = 1, \ldots, n$, ja $1 < p < \infty$ ning arv q on määratud võrdusega $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, siis kehtib võrratus*

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k b_k| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Tõestus. Vaatleme funktsiooni $\varphi(t) = t^{\frac{1}{p}} - \frac{t}{p}$, $t > 0$. Siis $\varphi'(t) = \frac{1}{p}\left(t^{-\frac{1}{q}} - 1\right)$ ning $\varphi'(t) > 0$, kui $0 < t < 1$, ja $\varphi'(t) < 0$, kui $t > 1$. Seepärast $\varphi(t) \leqslant \varphi(1)$, $t > 0$, mis annab võrratuse

$$t^{\frac{1}{p}} - \frac{t}{p} \leqslant 1 - \frac{1}{p} = \frac{1}{q}$$

ehk

$$t^{\frac{1}{p}} \leqslant \frac{t}{p} + \frac{1}{q}.$$

Kui nüüd $a, b > 0$, siis $t = \frac{a^p}{b^q}$ korral saame võrratuse

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, \tag{1}$$

mis kehtib ka siis, kui $a = 0$ või $b = 0$.

Märgime, et Hölderi võrratus on ilmne, kui $a_k = 0$, $k = 1, \ldots, n$, või $b_k = 0$, $k = 1, \ldots, n$. Seepärast vaatleme vastupidist olukorda ning võtame võrratuses (1)

$$a = \frac{|a_k|}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}}, \quad b = \frac{|b_k|}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} |b_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}}.$$

Indeksi k väärtustel $1, \ldots, n$ saadud võrratused summeerime, mille tulemusena

$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} |a_k b_k|}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum\limits_{k=1}^{n} |b_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}} \leqslant \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \qquad \square$$

Lemma (Minkowski võrratus)**.** *Kui $a_k, b_k \in \mathbb{K}$, $k = 1, \ldots, n$, ja $1 \leqslant p < \infty$, siis kehtib võrratus*

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |a_k + b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Tõestus. Kui $p = 1$, siis on Minkowski võrratus vahetu järeldus absoluutväärtuse või mooduli tuntud omadustest. Seepärast olgu $p > 1$. Lähtudes võrratustest

$$\begin{aligned} |a_k + b_k|^p &= |a_k + b_k|\,|a_k + b_k|^{p-1} \leqslant \\ &\leqslant |a_k|\,|a_k + b_k|^{p-1} + |b_k|\,|a_k + b_k|^{p-1},\ k = 1, \ldots, n, \end{aligned}$$

saame nende liitmisel ja Hölderi võrratuse abil

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} |a_k + b_k|^p &\leqslant \sum_{k=1}^{n} |a_k|\,|a_k + b_k|^{p-1} + \sum_{k=1}^{n} |b_k|\,|a_k + b_k|^{p-1} \leqslant \\ &\leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k + b_k|^{q(p-1)}\right)^{\frac{1}{q}} + \\ &\quad + \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k + b_k|^{q(p-1)}\right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

Kui $\sum\limits_{k=1}^{n} |a_k + b_k|^p = 0$, siis Minkowski võrratus muidugi kehtib. Kui aga $\sum\limits_{k=1}^{n} |a_k + b_k|^p > 0$, siis arvestame seost $q(p-1) = p$ ning peale viimase võrratuse jagamist avaldisega

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |a_k + b_k|^p\right)^{\frac{1}{q}}$$

jõuame Minkowski võrratuseni. □

Pöördume nüüd tagasi kolmnurga võrratuse juurde ruumis ℓ_p^n. Tema tõestamiseks tarvitseb võtta Minkowski võrratuses $a_k = \xi_k - \zeta_k$ ja $b_k = \zeta_k - \eta_k$, sest siis $a_k + b_k = \xi_k - \eta_k$.

Ülesanne. Näidata, et

$$\lim_{p\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} |\xi_k - \eta_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \max_{1\leqslant k\leqslant n} |\xi_k - \eta_k| \,.$$

Ülesandes esitatud tulemuse põhjal on kaugus ruumis m_n ruumide ℓ_p^n kauguste piirjuht, seepärast on õigustatud mõnikord kasutatav tähistus $m_n = \ell_\infty^n$.

Antud punktis vaadeldud ruumides elementide jada $x_m = (\xi_1^m, \ldots, \xi_n^m)$, $m = 1, 2, \ldots$, koondumine elemendiks $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ (st. $\rho(x_m, x) \underset{m}{\longrightarrow} 0$) on samaväärne sellega, et $\xi_k^m \underset{m}{\longrightarrow} \xi_k$, $k = 1, \ldots, n$. Öeldakse ka, et koondumine on samaväärne komponentide ehk koordinaatide koondumisega. See väide on lihtsalt järeldatav võrratustest

$$|\xi_k^m - \xi_k| \leqslant \max_{1\leqslant k\leqslant n} |\xi_k^m - \xi_k| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |\xi_k^m - \xi_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} .$$

4. Käesolevas punktis vaatleme nn. *jadaruume*, kus meetrilise ruumi X elementideks on arvjadad $(\xi_k) = (\xi_k)_{k=1}^{\infty}$, $\xi_k \in \mathbb{K}$. Tähistame ruumi X elemente $x = (\xi_k)$, $y = (\eta_k)$, $z = (\zeta_k)$. Võrdus $x = y$ tähendab seda, et $\xi_k = \eta_k$ iga $k = 1, 2, \ldots$ korral.

1) *Tõkestatud jadade ruum m* on hulgana kirjeldatav järgmiselt:

$$m = \left\{ (\xi_k) : \xi_k \in \mathbb{K}, \sup_k |\xi_k| < \infty \right\},$$

st. $x = (\xi_k) \in m$ parajasti siis, kui leidub arv M, mis võib sõltuda elemendist x, nii, et $|\xi_k| \leqslant M$, $k = 1, 2, \ldots$. Ruumis m defineeritakse kaugus võrdusega

$$\rho(x, y) = \sup_k |\xi_k - \eta_k| \,.$$

Sellise definitsiooniga seatakse elemendipaarile x, y vastavusse reaalarv, sest kui $x, y \in m$, siis leiduvad arvud M ja N nii, et $|\xi_k| \leqslant M$ ja $|\eta_k| \leqslant N$, $k = 1, 2, \ldots$, ning $|\xi_k - \eta_k| \leqslant |\xi_k| + |\eta_k| \leqslant M + N$, seega $\sup\limits_k |\xi_k - \eta_k| \leqslant M + N$.

Kauguse aksioomide kehtivuse kontroll ruumis m on põhimõtteliselt samasugune nagu ruumis m_n.

Kui $x_n = (\xi_k^n)_{k=1}^\infty$, $n = 1,2,\dots$ ja $x = (\xi_k)$, siis koondumine $x_n \to x$ on samaväärne sellega, et $\sup\limits_k |\xi_k^n - \xi_k| \underset{n}{\longrightarrow} 0$, mis omakorda on väljendatav järgmiselt:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists N\,,\ |\xi_k^n - \xi_k| \leqslant \varepsilon\,,\ n > N\,,\ k = 1,2,\dots\,.$$

Niisiis, koondumine ruumis m tähendab koordinaatide ühtlast koondumist.

Märgime, et kasutatakse ka tähistust $m = \ell_\infty$.

2) *Koonduvate jadade ruum* c on hulk

$$c = \left\{ (\xi_k) : \xi_k \in \mathbb{K}\,,\ \exists \lim_k \xi_k \in \mathbb{K} \right\}.$$

Koonduv jada on tõkestatud, st. $c \subset m$. Kaugus ruumis c defineeritakse nagu ruumis m. Seega on ruum c ruumi m alamruum.

3) *Nulliks koonduvate jadade ruum* c_0 on hulk

$$c_0 = \left\{ (\xi_k) : \xi_k \in \mathbb{K}\,,\ \lim_k \xi_k = 0 \right\}.$$

Kaugus ruumis c_0 defineeritakse nagu ruumis m. On selge, et $c_0 \subset c \subset m$, kusjuures on tegemist üksteise alamruumidega.

4) Olgu $1 \leqslant p < \infty$. Ruum ℓ_p on hulk

$$\ell_p = \left\{ (\xi_k) : \xi_k \in \mathbb{K}\,,\ \sum_{k=1}^\infty |\xi_k|^p < \infty \right\},$$

milles kaugus defineeritakse võrdusega

$$\rho(x,y) = \left(\sum_{k=1}^\infty |\xi_k - \eta_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Kauguse definitsioonis esineva rea koonduvuse põhjendame Minkowski võrratuse abil. Kuna

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=1}^n |\xi_k - \eta_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} &\leqslant \left(\sum_{k=1}^n |\xi_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^n |\eta_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \\ &\leqslant \left(\sum_{k=1}^\infty |\xi_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^\infty |\eta_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty, \end{aligned}$$

siis osasummade jada $\sum\limits_{k=1}^n |\xi_k - \eta_k|^p$, $n = 1,2,\dots$, on tõkestatud ning rida koondub.

Kauguse aksioomide 1° ja 2° kehtivus on näha vahetult. Kolmnurga võrratuse põhjendamiseks saame, kasutades kolmnurga võrratust ruumis ℓ_p^n,

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=1}^n |\xi_k - \eta_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} &\leqslant \left(\sum_{k=1}^n |\xi_k - \zeta_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^n |\zeta_k - \eta_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \\ &\leqslant \left(\sum_{k=1}^\infty |\xi_k - \zeta_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^\infty |\zeta_k - \eta_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \\ &= \rho(x,z) + \rho(z,y), \end{aligned}$$

misjärel võtame vasakul piirväärtuse protsessis $n \to \infty$.

Märgime tõestuseta, et kui $x_n = (\xi_k^n)_{k=1}^{\infty}$, $n = 1, 2, \ldots$, ja $x = (\xi_k)$, siis koondumine $x_n \xrightarrow[n]{} x$ ruumis ℓ_p on samaväärne järgmiste tingimuste samaaegse täidetusega:

1) $\xi_k^n \xrightarrow[n]{} \xi_k$, $k = 1, 2, \ldots$ (koordinaatide koondumine),

2) $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, K$, $\displaystyle\sum_{k=K+1}^{\infty} |\xi_k^n|^p < \varepsilon$, $n = 1, 2, \ldots$ (read $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k^n|^p$ koonduvad ühtlaselt n suhtes).

Kehtivad hulgateoreetilised sisalduvused $\ell_1 \subset \ell_p \subset \ell_q \subset c_0$, kus $1 \leqslant p \leqslant q < \infty$, seejuures siin ei ole tegemist alamruumidega meetriliste ruumide mõttes. Samuti nagu eespool ruumide ℓ_p^n ja m_n kauguste vahekorra kohta, saab ka siin tõestada, et $\displaystyle\lim_{p\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \sup_k |\xi_k|$, $(\xi_k) \in \displaystyle\bigcup_{p \geqslant 1} \ell_p$, seepärast on õigustatud mõnikord kasutatav tähistus $c_0 = \ell_\infty$. Ruumide ℓ_p hulgas märgime tähtsate erijuhtudena ruume ℓ_1 ja ℓ_2.

5) *Kõigi arvjadade ruumis* $s = \{(\xi_k : \xi \in \mathbb{K})\}$ defineeritakse kaugus

$$\rho(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|\xi_k - \eta_k|}{1 + |\xi_k - \eta_k|}.$$

Kuna $\dfrac{|\xi_k - \eta_k|}{1 + |\xi_k - \eta_k|} < 1$, siis kauguse definitsioonis esinev rida koondub. Paneme tähele, et iga elemendipaari x, y korral $\rho(x, y) < 1$ ruumis s.

Identsus ja sümmeetria aksioomide kehtivuses veendumine ei valmista raskusi. Peatume kolmnurga võrratusel. Vaatleme funktsiooni $\varphi(t) = \dfrac{t}{1+t}$, $t \geqslant 0$. Siis $\varphi'(t) = \dfrac{1}{(1+t)^2} > 0$, mistõttu funktsioon φ on kasvav. Seepärast mistahes $a, b \in \mathbb{K}$ korral

$$\begin{aligned} \frac{|a+b|}{1+|a+b|} &\leqslant \frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|} = \frac{|a|}{1+|a|+|b|} + \frac{|b|}{1+|a|+|b|} \leqslant \\ &\leqslant \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}, \end{aligned}$$

mistõttu

$$\begin{aligned} \frac{|\xi_k - \eta_k|}{1 + |\xi_k - \eta_k|} &= \frac{|\xi_k - \zeta_k + \zeta_k - \eta_k|}{1 + |\xi_k - \zeta_k + \zeta_k - \eta_k|} \leqslant \\ &\leqslant \frac{|\xi_k - \zeta_k|}{1 + |\xi_k - \zeta_k|} + \frac{|\zeta_k - \eta_k|}{1 + |\zeta_k - \eta_k|}. \end{aligned}$$

Saadud võrratusi korrutame teguriga $\dfrac{1}{2^k}$ ja summeerime $k = 1, 2, \ldots$ järgi ning tulemuseks saamegi kolmnurga võrratuse ruumis s.

Lause. *Koondumine $x_n \to x$ ruumis s on samaväärne koordinaatide koondumisega, st. $\xi_k^n \xrightarrow[n]{} \xi_k$, $k = 1, 2, \ldots$.*

Tõestus. Kui $x_n \xrightarrow[n]{} x$, siis $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|\xi_k^n - \xi_k|}{1 + |\xi_k^n - \xi_k|} \xrightarrow[n]{} 0$, millest järeldub, et $\frac{1}{2^k} \frac{|\xi_k^n - \xi_k|}{1 + |\xi_k^n - \xi_k|}$, $k = 1, 2, \ldots$, ehk $|\xi_k^n - \xi_k| \xrightarrow[n]{} 0$, $k = 1, 2, \ldots$.

Eeldame vastupidi, et $\xi_k^n \xrightarrow[n]{} \xi_k$, $k = 1, 2, \ldots$. Olgu $\varepsilon > 0$ suvaline arv. Valime m nii suure, et $\sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \frac{\varepsilon}{2}$. Seejärel valime N nii, et kui $n > N$, siis $|\xi_k^n - \xi_k| < \frac{\varepsilon}{2}$, $k = 1, 2, \ldots$ (iga k jaoks leidub oma N, võtame neist suurima). Kui nüüd $n > N$, siis

$$\begin{aligned}\rho(x_n, x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|\xi_k^n - \xi_k|}{1 + |\xi_k^n - \xi_k|} = \\ &= \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2^k} \frac{|\xi_k^n - \xi_k|}{1 + |\xi_k^n - \xi_k|} + \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|\xi_k^n - \xi_k|}{1 + |\xi_k^n - \xi_k|} < \\ &< \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2^k} + \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

□

5. Selles punktis vaatleme funktsioonide ruume ehk nn. *funktsionaalruume*.

1) Ruum $M[a, b]$ on kõigi lõigus $[a, b]$ tõkestatud funktsioonide hulk kaugusega

$$\rho(x, y) = \sup_{a \leqslant t \leqslant b} |x(t) - y(t)| .$$

Nii nagu ruumi m juures saab ka siin näidata, et sellise definitsiooniga seatakse funktsioonipaarile x, y vastavusse reaalarv. Kauguse aksioomide kontroll on põhimõtteliselt sama, mis ruumis m.

Koondumine $x_n \to x$ ruumis $M[a, b]$ on funktsioonide jada x_n ühtlane koondumine funktsiooniks x lõigul $[a, b]$, st. igale arvule $\varepsilon > 0$ leidub N nii, et kui $n > N$, siis $|x_n(t) - x(t)| < \varepsilon$, $t \in [a, b]$.

2) Ruum $C[a, b]$ on kõigi lõigus $[a, b]$ pidevate funktsioonide hulk, kus kaugus defineeritakse nagu ruumis $M[a, b]$. Selline kauguse definitsioon on korrektne, sest teatavasti $C[a, b] \subset M[a, b]$, kusjuures ruum $C[a, b]$ on ruumi $M[a, b]$ alamruum. Kuna lõigus pidev funktsioon saavutab supreemumi, siis võib kirjutada $x, y \in C[a, b]$ korral

$$\rho(x, y) = \max_{a \leqslant t \leqslant b} |x(t) - y(t)| .$$

Märgime, et ruum $C[a, b]$ on üks tähtsamaid rakendustes kasutatavaid ruume.

3) Ruum $C^n[a, b]$ on kõigi lõigus $[a, b]$ n korda pidevalt diferentseeruvate funktsioonide hulk, st. $C^n[a, b] = \left\{ x : x^{(n)} \in C[a, b] \right\}$, kaugusega

$$\rho(x, y) = \sum_{k=0}^{n} \left| x^{(k)}(t) - y^{(k)}(t) \right| ,$$

kus loeme $x^{(0)}(t) = x(t)$. Ruum $C^n[a, b]$ on küll osahulk ruumis $C[a, b]$, aga mitte alamruum, sest tema meetrika erineb ruumi $C[a, b]$ meetrikast.

4) Olgu $1 \leqslant p < \infty$. Ruum $L_p(a, b)$ on kõigi funktsioonide $x = x(t)$ hulk, mille korral eksisteerib lõplik Lebesque'i integraal

$$\int_a^b |x(t)|^p \, dt,$$

kaugusega

$$\rho(x,y) = \left(\int_a^b |x(t) - y(t)|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Võrdus $x = y$ tähendab ruumis $L_p(a,b)$ seda, et $x(t) = y(t)$ peaaegu kõikjal lõigus $[a,b]$.

Identsuse aksioom on siin täidetud just seetõttu, et me samastame peaaegu kõikjal ühtivad funktsioonid (seega $L_p(a,b)$ elementideks on peaaegu kõikjal ühtivate funktsioonide klassid). Kolmnurga võrratuse tõestamiseks ruumis $L_p(a,b)$ lähtume võrratusest (1) ja ruumi ℓ_p juhuga analoogiliste ideede abil jõuame Hölderi võrratuse integraalkujuni

$$\int_a^b |x(t)y(t)| \, dt \leqslant \left(\int_a^b |x(t)|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |y(t)|^q \, dt \right)^{\frac{1}{q}},$$

millest omakorda saame Minkowski võrratuse integraalkuju

$$\left(\int_a^b |x(t) + y(t)|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\int_a^b |x(t)|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |y(t)|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Sellest järeldub aga vahetult kolmnurga võrratus ruumi $L_p(a,b)$ kauguse jaoks. Samuti tuleneb viimasest võrratusest kauguse definitsiooni korrektsus, st. $\rho(x,y) \in \mathbb{R}$ iga $x, y \in L_p(a,b)$ korral.

Tähtsate erijuhtudena märgime integreeruvate funktsioonide ruumi $L_1(a,b)$, mida tähistatakse ka $L(a,b)$, ja integreeruva ruuduga funktsioonide ruumi $L_2(a,b)$. Koondumist ruumis $L_1(a,b)$ nimetatakse *keskmiseks koondumiseks* (st. $\int_a^b |x(t) - y(t)| \, dt \to 0$), koondumist ruumis $L_2(a,b)$ aga *ruutkeskmiseks koondumiseks* ($\int_a^b |x(t) - y(t)|^2 \, dt \to 0$).

Järgmise näite tarvis meenutame, et lõigul $[a,b]$ määratud funktsiooni x nimetatakse *absoluutselt pidevaks*, kui iga arvu $\varepsilon > 0$ korral leidub $\delta > 0$ nii, et mistahes omavahel mittelõikuvate vahemike süsteemi $(a_i, b_i) \subset [a,b]$, $i = 1, \ldots, n$, $n \in \mathbb{N}$, puhul tingimusest $\sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i) < \delta$ järeldub, et $\sum_{i=1}^{n} |x(b_i) - x(a_i)| < \varepsilon$. Absoluutselt pidev funktsioon x on diferentseeruv peaaegu kõikjal lõigus $[a,b]$ ning tema tuletis $x' \in L(a,b)$

5) Olgu $1 \leqslant p < \infty$ ja $n \in \mathbb{N}$. Ruum $W_p^n(a,b)$ on kõigi funktsioonide x hulk, mille korral $x^{(n-1)}$ on absoluutselt pidev lõigus $[a,b]$ ja $x^{(n)} \in L_p(a,b)$, kaugusega

$$\rho(x,y) = \left(\sum_{k=0}^{n} \int_a^b \left| x^{(k)}(t) - y^{(k)}(t) \right|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Ruumi $W_p^n(a,b)$ nimetatakse *Sobolevi ruumiks*.

Identsuse aksioomi kontrollimiseks paneme tähele, et kui $\rho(x,y) = 0$, siis võrdus $x = y$ järeldub funktsiooni $x - y$ pidevuse tõttu juba sellest, et $\int_a^b |x(t) - y(t)|^p \, dt = 0$. Kolmnurga võrratuse põhjendamiseks ruumis $W_p^n(a,b)$ kasutame kolmnurga võrratust ruumis $L_p(a,b)$

ning Minkowski võrratust, saades

$$\begin{aligned}
\rho(x,y) &= \left(\sum_{k=0}^{n}\int_a^b \left|x^{(k)}(t)-y^{(k)}(t)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \\
&\leqslant \left(\sum_{k=0}^{n}\left(\left(\int_a^b \left|x^{(k)}(t)-z^{(k)}(t)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} + \right.\right. \\
&\qquad \left.\left. + \left(\int_a^b \left|z^{(k)}(t)-y^{(k)}(t)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \\
&\leqslant \left(\sum_{k=0}^{n}\int_a^b \left|x^{(k)}(t)-z^{(k)}(t)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} + \\
&\qquad + \left(\sum_{k=0}^{n}\int_a^b \left|z^{(k)}(t)-y^{(k)}(t)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} = \\
&= \rho(x,z)+\rho(z,y).
\end{aligned}$$

Lõpetuseks märgime, et vaadeldud kolme näidete rühma ruumide puhul kasutatakse mõisteid „reaalne ruum“ ja „kompleksne ruum“. Näiteks räägitakse reaalsest ruumist $C[a,b]$, kui vaadeldakse reaalarvuliste väärtustega funktsioone, ning kompleksest ruumist $C[a,b]$, kui vaadeldakse kompleksarvuliste väärtustega funktsioone.

1.4 Hulgad meetrilistes ruumides

1. Kerad. Lahtised ja kinnised hulgad. Olgu X meetriline ruum.

Definitsioon. Olgu $a \in X$ ja $r > 0$. Hulka

$$B(a,r) = \{x \in X : \rho(x,a) < r\}$$

nimetatakse *lahtiseks keraks* ning hulka

$$\overline{B}(a,r) = \{x \in X : \rho(x,a) \leqslant r\}$$

kinniseks keraks. Elementi a nimetatakse kera *keskpunktiks* ja arvu r *raadiuseks*.

Näited. 1. Kui $X = \mathbb{R} = m_1 = \ell_p^1$ (viimased kaks ruumi reaalsed), siis $B(a,r) = \{x : |x-a| < r\} = (a-r, a+r)$ ja $\overline{B}(a,r) = [a-r, a+r]$.

2. Kui $X = \mathbb{C} = m_1 = \ell_p^1$ (viimased kaks ruumi komplekssed), siis $B(a,r) = \{x \in \mathbb{C} : |x-a| < r\}$ ja $\overline{B}(a,r) = \{x \in \mathbb{C} : |x-a| \leqslant r\}$.

3. Reaalses ruumis m_2, kui $a = (a_1, a_2)$, siis $B(a,r) = \{(\xi_1,\xi_2) : \max\{|\xi_1 - a_1|, |\xi_2 - a_2|\} < r\} = \{(\xi_1,\xi_2) : |\xi_1 - a_1| < r, |\xi_2 - a_2| < r\}$.

Ülesanne. Kirjeldada kerasid (teha joonised) reaalsetes ruumides $\ell_1^2, \ell_2^2, \ell_p^2$, $p > 2$.

4. Ruumis $C[a,b]$ koosneb kera $\overline{B}(a,r) = \left\{x \in C[a,b] : \max\limits_{a\leqslant t\leqslant b} |x(t) - a(t)| \leqslant r\right\}$ lõigul $[a,b]$ määratud pidevatest funktsioonidest, mille graafikud paiknevad viirutatud ribas.

Ülesanne. Kirjeldada kerasid $B(a,1)$ ja $\overline{B}(a,1)$ diskreetses meetrilises ruumis.

Vahetult definitsioonist järeldub

Lause. *Kui $r_1 \leqslant r_2$, siis $B(a,r_1) \subset B(a,r_2)$ ja $\overline{B}(a,r_1) \subset \overline{B}(a,r_2)$.*

Ülesanne. Leida näide meetrilisest ruumist, milles leiduvad kerad $B(a,r_1)$ ja $B(a,r_2)$ nii, et $B(a,r_1) \subset B(a,r_2)$, aga $r_1 > r_2$.

Definitsioon. Punkti $a \in X$ *ümbruseks* nimetatakse suvalist hulka $U \subset X$, mille puhul leidub lahtine kera $B(a,r)$ (teisiti öeldes, leidub $r > 0$) nii, et $B(a,r) \subset U$.

Punkti a ümbrusteks on näiteks kõik lahtised kerad $B(a,r)$, $r > 0$, aga ka kinnised kerad $\overline{B}(a,r)$, sest $\overline{B}(a,r) \supset B(a,r)$.

Definitsioon. Hulka $G \subset X$ nimetatakse *lahtiseks*, kui hulga G igale punktile leidub teda ümbritev lahtine kera, mis sisaldab hulgas G.

Vahetult definitsioonist tuleneb

Lause. *Hulk G on lahtine parajasti siis, kui hulga G igal punktil leidub ümbrus, mis sisaldub hulgas G.*

Lause. *Lahtine kera on lahtine hulk.*

Tõestus. Vaatleme kera $B(a,r)$ suvalist punkti b, siis $\rho(b,a) < r$. Olgu $r_1 = r - \rho(b,a)$. Kui $x \in B(b,r_1)$, st. $\rho(x,b) < r_1$, siis

$$\rho(x,a) \leqslant \rho(x,b) + \rho(b,a) < r_1 + \rho(b,a) = r,$$

seega $x \in B(a,r)$, millega oleme näidanud, et $B(b,r_1) \subset B(a,r)$. □

Definitsioon. Hulga A punkti a nimetatakse hulga A *sisepunktiks*, kui punktil a leidub ümbrus, mis sisaldub hulgas A.

Järeldus. *Hulk on lahtine parajasti siis, kui kõik tema punktid on sisepunktid.*

Esitame järgnevas lahtiste hulkade põhilisi omadusi.

Lause 1. *Hulgad $\emptyset$ ja X on lahtised.*

Tõestus. Märgime, et kui mingi punkt nendes hulkades sisaldub, siis ta on sisepunkt. □

Lause 2. *Mistahes hulga lahtiste hulkade ühend on lahtine.*

Tõestus. Olgu hulgad G_α lahtised. Valime vabalt $x \in \bigcup\limits_\alpha G_\alpha$. Siis leidub selline indeks α_0, et $x \in G_{\alpha_0}$. Hulk G_{α_0} on lahtine, mistõttu leidub $B(x,r) \subset G_{\alpha_0}$. Siis aga $B(x,r) \subset \bigcup\limits_\alpha G_\alpha$, millega oleme näidanud, et x on hulga $\bigcup\limits_\alpha G_\alpha$ sisepunkt. Seega $\bigcup\limits_\alpha G_\alpha$ on lahtine. □

Lause 3. *Lõpliku hulga lahtiste hulkade ühisosa on lahtine.*

Tõestus. Olgu hulgad G_i, $i = 1, \dots, n$, lahtised. Valime vabalt $x \in \bigcap_{i=1}^{n} G_i$, siis $x \in G_i$, $i = 1, \dots, n$. Hulkade G_i lahtisuse tõttu leiduvad kerad $B(x, r_i) \subset G_i$. Olgu $r = \min\{r_1, \dots, r_n\}$; on selge, et $r > 0$. Seejuures $B(x,r) \subset B(x, r_i) \subset G_i$, $i = 1, \dots, n$, mistõttu $B(x,r) \subset \bigcap_{i=1}^{n} G_i$. Hulga $\bigcap_{i=1}^{n} G_i$ lahtisus on näidatud. □

Üldiselt ei saa väita, et lõpmatu hulga lahtiste hulkade ühisosa oleks lahtine. Näiteks ruumis $\mathbb{R}$, kus vahemikud on lahtised hulgad, $\bigcap_{i=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \{0\}$, aga hulk $\{0\}$ ei ole lahtine, sest $B(0,r) \not\subset \{0\}$ mitte ühegi arvu $r > 0$ korral.

Ülesanne. Tõestada lauset 2 kasutades, et diskreetses meetrilises ruumis on kõik hulgad lahtised.

Definitsioon. Ruumi X punkti nimetatakse hulga $A \subset X$ *rajapunktiks*, kui tema iga ümbrus sisaldab nii hulga A punkte kui ka tema täiendhulga $X \setminus A$ punkte.

Järeldus 1. *Hulkade A ja $X \setminus A$ rajapunktid ühtivad.*

Järeldus 2. *Kui $a \in A$, siis a on kas hulga A sisepunkt või tema rajapunkt.*

Tõestus. Märgime, et kui $a \in A$ ei ole hulga A sisepunkt, siis punkti a iga ümbrus sisaldab $X \setminus A$ punkte. □

Näide. Kui $X = \mathbb{R}^2$, siis kera $B(a,r)$ rajapunktid on sellised punktid $x \in \mathbb{R}^2$, kus $\rho(x,a) = r$. Igas sellisele punktile x valitud ümbruses on kera $B(x, \varepsilon)$, mis sisaldab hulkade $B(a,r)$ ja $\mathbb{R}^2 \setminus B(a,r)$ punkte.

Ülesanne. Leida näide meetrilisest ruumist, tema kerast $B(a,r)$ ja punktist x nii, et $\rho(x,a) = r$, kuid x ei ole kera $B(a,r)$ rajapunkt.

Definitsioon. Hulka nimetatakse *kinniseks*, kui ta sisaldab kõik oma rajapunktid.

Teoreem. *Hulk on kinnine parajasti siis, kui tema täiend on lahtine.*

Tõestus. 1) Olgu hulk A kinnine. Vaatleme suvalist punkti $x \in X \setminus A$. See punkt saab olla hulgale $X \setminus A$ sise- või rajapunkt. Oletame, et ta on rajapunkt. Siis on ta rajapunkt ka hulgale A ja A kinnisuse tõttu $x \in A$. Vastuolu sisalduvusega $x \in X \setminus A$ ütleb, et x on hulgale $X \setminus A$ sisepunkt. Seega $X \setminus A$ on lahtine.

2) Olgu hulk $X \setminus A$ lahtine. Vaatleme hulga A rajapunkti x. Kui oletada, et $x \notin A$, siis $x \in X \setminus A$ ja $X \setminus A$ lahtisuse tõttu leidub $B(x,r) \subset X \setminus A$, st. x ei ole rajapunkt hulgale A. Saadud vastuolu tõttu $x \in A$, millega on näidatud hulga A kinnisus. □

Kinniste hulkade põhiomadusi väljendavad järgmised laused.

Lause 4. *Hulgad $\emptyset$ ja X on kinnised.*

Lause 5. *Mistahes hulga kinniste hulkade ühisosa on kinnine.*

Lause 6. *Lõpliku hulga kinniste hulkade ühend on kinnine.*

Laused 4–6 järelduvad lausetest 1–3, äsjatõestatud teoreemist ja hulgateoreetilistest võrdustest

$$X \setminus \left(\bigcup_\alpha A_\alpha \right) = \bigcap_\alpha (X \setminus A_\alpha) ,$$

$$X \setminus \left(\bigcap_\alpha A_\alpha \right) = \bigcup_\alpha (X \setminus A_\alpha) .$$

Leidub hulki, mis ei ole ei lahtised ega kinnised, näiteks poollõik $(0,1]$ ruumis $\mathbb{R}$. Enamasti kasutatakse järgmist jadade keeles väljendatavat hulga kinnisuse tunnust.

Teoreem. *Hulk meetrilises ruumis on kinnine parajasti siis, kui iga tema elementidest moodustatud koonduva jada piirelement kuulub sellesse hulka.*

Tõestus. 1) Olgu hulk A kinnine. Olgu $x_n \to x$, $x_n \in A$. Kui oletada, et $x \in X \setminus A$, siis hulga $X \setminus A$ lahtisuse tõttu leidub kera $B(x,r) \subset X \setminus A$. Teiselt poolt, koondumise $\rho(x_n, x) \to 0$ tõttu leidub N nii, et kui $n > N$, siis $\rho(x_n, x) < r$ ehk $x_n \in B(x,r) \subset X \setminus A$, mis on vastuolus sisalduvusega $x_n \in A$. Seepärast $x \in A$.

2) Olgu x hulga A rajapunkt. Siis iga $n \in \mathbb{N}$ korral $B(x, \frac{1}{n})$ sisaldab A punkte. Valime $x_n \in B(x, \frac{1}{n}) \cap A$. Sellega oleme saanud, et $\rho(x_n, x) < \frac{1}{n} \to 0$, st. $x_n \to x$. Kuna samal ajal $x_n \in A$, siis $x \in A$. Järelikult on näidatud, et A on kinnine. □

Järeldus 1. *Kinnine kera on kinnine hulk.*

Tõestus. Olgu $x_n \to x$, kusjuures $x_n \in \overline{B}(a,r)$, st. $\rho(x_n, a) \leqslant r$. Kauguse pidevuse tõttu $\rho(x_n, a) \to \rho(x, a)$ seega $\rho(x,a) \leqslant r$, mis ütleb, et $x \in \overline{B}(a,r)$. □

Analoogiliselt tõestatakse

Järeldus 2. *Sfäär $S(a,r) = \{x \in X : \rho(x,a) = r\}$ on kinnine hulk.*

Ülesanne. Tõestada, et ühepunktiline hulk on kinnine ning järeldada sellest, et mistahes lõplik hulk on kinnine.

2. Hulga sisemus, raja ja sulund. Olgu A meetrilise ruumi X osahulk.

Definitsioon. Hulga A *sisemuseks* nimetatakse hulga A sisepunktide hulka, sisemust tähistatakse A° (ka int$A$).

Definitsioon. Hulga A *rajaks* nimetatakse hulga A rajapunktide hulka, raja tähistatakse ∂A.

Definitsioon. Hulga A *sulundiks* nimetatakse hulga A ja tema raja ∂A ühendit, sulundit tähistatakse $\overline{A}$.

Ülesanne. Tõestada, et kui $A \subset X$, siis $A^\circ = X \setminus \overline{X \setminus A}$.

Ülesanne. Leida näide meetrilisest ruumist ja tema kerast $B(a,r)$ nii, et $\overline{B(a,r)} \neq \overline{B}(a,r)$.

Teoreem. *Hulk on kinnine parajasti siis, kui ta ühtib oma sulundiga.*

Tõestuseks märgime, et hulga A kinnisus on samaväärne sisalduvusega $\partial A \subset A$, mis aga võrduse $\overline{A} = A \cup \partial A$ tõttu on samaväärne sellega, et $A = \overline{A}$. $\square$

Hulga sulundit meetrilises ruumis kirjeldab järgmine

Teoreem. *Kui $A \subset X$ ja $x \in X$, siis järgmised tingimused on samaväärsed:*

1) $x \in \overline{A}$;

2) $\exists\, y_n \in A,\, y_n \to x$;

3) $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, y \in A,\, \rho(x, y) < \varepsilon$.

Tõestus. 1) $\Rightarrow$ 2). Olgu $x \in \overline{A} = A \cup \partial A$. Kui $x \in A$, siis võib võtta $y_n = x$, $n \in \mathbb{N}$. Kui aga $x \in \partial A$, siis iga $n \in \mathbb{N}$ korral leidub $y_n \in B\left(x, \frac{1}{n}\right) \cap A$. Kuna $\rho(y_n, x) < \frac{1}{n}$, siis $y_n \to x$.

2) $\Rightarrow$ 3). Kuna $y_n \to x$, $y_n \in A$, siis suvalisele arvule $\varepsilon > 0$ leidub N nii, et $\rho(y_N, x) < \varepsilon$. Ning elemendiks y sobib y_N.

3) $\Rightarrow$ 1). Kui oletada, et $x \notin \overline{A}$, siis $x \in X \setminus A$ ja $x \notin \partial A$ ning seepärast leidub $\varepsilon > 0$ nii, et kera $B(x, \varepsilon)$ ei sisalda hulga A elemente, mis on aga vastuolus tingimusega 3). $\square$

Järeldus 1. *Hulga sulund on kinnine hulk.*

Tõestus. Kasutame hulga kinnisuse tunnust jadade keeles. Olgu $x_n \in \overline{A}$ ja $x_n \to x$. Näitame, et $x \in \overline{A}$. Tingimuse 3) kohaselt leiduvad elemendid $y_n \in A$ nii, et $\rho(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$. Kuna

$$\rho(y_n, x) \leqslant \rho(y_n, x_n) + \rho(x_n, x) \to 0,$$

siis $y_n \to x$ ning implikatsiooni 2) $\Rightarrow$ 1) tõttu $x \in \overline{A}$. $\square$

Kuna hulga sulund on kinnine ja kinnine hulk ühtib oma sulundiga, siis kehtib

Järeldus 2. $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

Samaväärsusele 1) $\Leftrightarrow$ 2) toetudes on ilmne

Järeldus 3 (sulundi monotoonsus)**.** *Olgu $A, B \subset X$. Kui $A \subset B$, siis $\overline{A} \subset \overline{B}$.*

Järeldus 4 (sulundi aditiivsus)**.** *Olgu $A, B \subset X$. Siis $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.*

Tõestus. Kuna $A, B \subset A \cup B$, siis $\overline{A}, \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$. Järelikult

$$\overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}.$$

Teiselt poolt, $A \cup B \subset \overline{A} \cup \overline{B}$, mistõttu $\overline{A \cup B} \subset \overline{\overline{A} \cup \overline{B}}$. Kuid $\overline{\overline{A} \cup \overline{B}} = \overline{A} \cup \overline{B}$, sest kinniste hulkade $\overline{A}$ ja $\overline{B}$ ühend on kinnine. Seega ka

$$\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}.$$

$\square$

Ülesanne. Tõestada võrdust $A^\circ = X \setminus \overline{X \setminus A}$ kasutades, et

1) A° on lahtine;

2) $(A^\circ)^\circ = A^\circ$;

3) kui $A \subset B$, siis $A^\circ \subset B^\circ$;

4) $(A \cup B)^\circ = A^\circ \cup B^\circ$.

1.5 Separaablid meetrilised ruumid

Olgu X meetriline ruum.

Definitsioon. Öeldakse, et hulk $A \subset X$ on *kõikjal tihe* (ehk *kõikjal tihe ruumis* X), kui $\overline{A} = X$.

Eelmises paragrahvis tõestatud teoreemist, mis kirjeldab hulga sulundit, järeldub vahetult

Lause. *Kui $A \subset X$, siis järgmised väited on samaväärsed:*

1) A on kõikjal tihe;

2) $\forall\, x \in X \quad \exists\, y_n \in A,\, y_n \to x$;

3) $\forall\, x \in X, \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, y \in A,\, \rho(x,y) < \varepsilon$.

Definitsioon. Meetrilist ruumi nimetatakse *separaabliks*, kui temas leidub kõikjal tihe ülimalt loenduv hulk.

Separaablid ruumid on olulised matemaatika rakenduslikes harudes.

Järgnevas peatume konkreetsete ruumide separaablusel.

Ruumid m_n ja ℓ_p^n on separaablid, kusjuures kõikjal tihedaks loenduvaks hulgaks A võib võtta kõigi ratsionaalsete komponentidega vektorite hulga. Täpsemalt, kui on tegemist reaalsete ruumidega, siis $A = \{(\eta_1, \dots, \eta_n) : \eta_k \in \mathbb{Q}\}$, kompleksel juhul aga $A = \{(\eta_1, \dots, \eta_n) : \eta_k = \alpha_k + i\beta_k,\ \alpha_k, \beta_k \in \mathbb{Q}\}$. Nende hulkade A kõikjal tihedus ruumides m_n ja ℓ_p^n üldistab matemaatilise analüüsi kursusest tuntud võrdust $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

Jadaruumidest, mida vaatlesime, pole separaabel üksnes tõkestatud jadade ruum m.

Näitame, et ruum ℓ_p^n on separaabel. Kõigepealt märgime, et hulgad $A_n = \{(\eta_1, \dots, \eta_n, 0, \dots) : \eta_k \in \mathbb{Q}$ (või $\eta_k = \alpha_k + i\beta_k, \alpha_k, \beta_k \in \mathbb{Q}$)$\}$ on loenduvad. Seega ka hulk $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ on loenduv. Valime vabalt $x = (\xi_k) \in \ell_p$ ja $\varepsilon > 0$. Olgu arv n selline, et $\sum_{k=n+1}^{\infty} |\xi_k|^p < \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p$. Tähistame $x_n = (\xi_1, \dots, \xi_n, 0, \dots)$. Siis $\rho(x, x_n) = \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} |\xi_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \frac{\varepsilon}{2}$. Seejärel valime $y = (\eta_1, \dots, \eta_n, 0, \dots) \in A_n \subset A$ nii, et $\rho(x_n, y) = \left(\sum_{k=1}^{n} |\xi_k - \eta_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \frac{\varepsilon}{2}$. Kuna $\rho(x,y) \leqslant \rho(x, x_n) + \rho(x_n, y) < \varepsilon$, siis A on kõikjal tihe ruumis ℓ_p.

Sama mõttekäiguga saab tõestada, et ka ruumid c_0, c ja s on separaablid.

Tõestame, et ruum m ei ole separaabel. Oletame vastuväiteliselt, et m on separaabel. Olgu $A = \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ temas kõikjal tihe hulk. Valime arvu $\varepsilon > 0$ nii, et $2\varepsilon \leqslant 1$. Siis iga element $x \in m$ satub vähemalt ühte kerasse $B(y_n, \varepsilon)$, st. $m = \bigcup_{n=1}^{\infty} B(y_n, \varepsilon)$. Vaatleme nüüd ruumi m elemente $x = (\xi_k)$, kus $\xi_k = 0$ või $\xi_k = 1$. Niisuguseid omavahel erinevaid elemente on mitteloenduv hulk. Seepärast satub vähemalt ühte kerasse $B(y_{n_0}, \varepsilon)$ kaks elementi x_1, x_2 sellest hulgast. Ühelt poolt $\rho(x_1, x_2) = 1$, teiselt poolt $\rho(x_1, x_2) \leqslant \rho(x_1, y_{n_0}) + \rho(y_{n_0}, x_2) < 2\varepsilon \leqslant 1$, millega oleme jõudnud vastuoluni.

Märgime tõestuseta, et funktsionaalruumidest, mida vaatlesime, pole separaabel ainult ruum $M[a,b]$. Ülejäänud ruumid $C[a,b]$, $C^n[a,b]$, $L_p(a,b)$ ja $W_p^n(a,b)$, $1 \leqslant p < \infty$, on separaablid. Näiteks saab Weierstrassi lähendusteoreemile toetudes üsna lihtsalt tõestada, et ruumis $C[a,b]$ on kõikjal tihedaks loenduvaks hulgaks ratsionaalsete kordajatega polünoomide hulk $\{\xi_0 + \xi_1 t + \dots + \xi_n t^n : n = 0, 1, \dots,\ \xi_k \in \mathbb{Q}\}$.

Ülesanne. Näidata, et diskreetne meetriline ruum on separaabel parajasti siis, kui tema elementide hulk on ülimalt loenduv.

Ülesanne. Tõestada, et separaabli ruumi alamruum on separaabel.

1.6 Täielikud meetrilised ruumid

Täielikkus on meetrilise ruumi üks olulisemaid omadusi. Paljud funktsionaalanalüüsi fundamentaalsed tulemused kehtivad just täielikes ruumides

Definitsioon. Meetrilise ruumi elementide jada x_n nimetatakse *Cauchy jadaks* ehk *fundamentaaljadaks*, kui $\rho(x_n, x_m) \to 0$ protsessis $n, m \to \infty$, st. iga arvu $\varepsilon > 0$ korral leidub N nii, et kui $n, m > N$, siis $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$. *Jada fundamentaalsust* saab väljendada ka järgmiselt: igale arvule $\varepsilon > 0$ leidub N nii, et kui $n > N$, siis $\rho\left(x_n, x_{n+p}\right) < \varepsilon$ iga $p = 1, 2, \ldots$ korral.

Arvjada x_n puhul tähendab fundamentaalsus seda, et $|x_n - x_m| \to 0$, kui $n, m \to \infty$. Seega arvjadade korral Cauchy jada on just niisugune jada, mis rahuldab *Cauchy kriteeriumi*, st. koonduv jada. Üldisel juhul kehtib

Lause. *Iga koonduv jada on Cauchy jada.*

Tõestus. Olgu $x_n \to x$, st. $\rho(x_n, x) \to 0$. Kuna $\rho(x_n, x_m) \leqslant \rho(x_n, x) + \rho(x, x_m) \to 0$, kui $n, m \to \infty$, siis ka $\rho(x_n, x_m) \to 0$ protsessis $n, m \to \infty$. □

Definitsioon. Meetrilist ruumi nimetatakse *täielikuks*, kui temas iga Cauchy jada koondub.

Kuna reaalarvude ruumis $\mathbb{R}$ iga Cauchy jada koondub, siis on $\mathbb{R}$ täielik.

Vaatleme ratsionaalarvude ruumi $\mathbb{Q}$ tavalise kaugusega (st. vaatleme ruumi $\mathbb{Q}$ kui ruumi $\mathbb{R}$ alamruumi). Valime $x_n \in \mathbb{Q}$ nii, et $x_n \to \pi$ (st. $|x_n - \pi| \to 0$). Siis x_n on Cauchy jada (ta koondub ruumis $\mathbb{R}$), aga ta ei koondu ruumis $\mathbb{Q}$, sest $\pi \notin \mathbb{Q}$. Seega ei ole ruum $\mathbb{Q}$ täielik.

Võib öelda, et jada fundamentaalsus on jada sisemine omadus, jada koonduvus on aga seotud tingimata mingi kindla ruumiga.

Ülesanne. Näidata, et kui fundamentaaljada x_n mingi osajada koondub elemendiks x, siis ka jada x_n koondub samaks elemendiks x.

Teoreem. *Meetrilise ruumi täielik alamruum on kinnine. Täieliku meetrilise ruumi kinnine alamruum on täielik.*

Tõestus. 1) Olgu A meetrilise ruumi täielik alamruum. Vaatleme jada $x_n \in A$, $x_n \to x$. Kuna x_n on Cauchy jada ruumis A, siis ta koondub ruumis A. Seega $x \in A$.

2) Olgu X täielik meetriline ruum ja A tema kinnine alamruum. Vaatleme Cauchy jada $x_n \in A$. Jada x_n koondub ruumis X. Kuna A on kinnine, siis jada x_n piirelement kuulub alamruumi A. Seega koondub x_n ruumis A. Niisiis, ruum A on täielik. □

Eespool (alaptk. 1.3) vaadeldud konkreetsed ruumid on kõik täielikud. Tõestame järgnevas nendest mõnede täielikkuse.

Vaatleme ruume m_n ja ℓ_p^n. Olgu $x_m = (\xi_1^m, \ldots, \xi_n^m)$, $m = 1, 2, \ldots$, Cauchy jada. Nendes ruumides $\left|\xi_i^m - \xi_i^k\right| \leqslant \rho(x_m, x_k) \to 0$, kui $m, k \to \infty$. Seega koordinaatide jadad $(\xi_i^m)_{m=1}^{\infty}$, $i = 1, \ldots, n$, on Cauchy arvjadad, mis koonduvad, st. $\xi_i^m \underset{m}{\longrightarrow} \xi_i$. Ruumides m_n ja ℓ_p^n on aga koondumine samaväärne koordinaatide koondumisega, mistõttu

$$x_m = (\xi_1^m, \ldots, \xi_n^m) \underset{m}{\longrightarrow} (\xi_1, \ldots, \xi_n) .$$

Põhimõtteliselt samuti saab kontrollida ruumi s täielikkust, sest ka seal on koondumine samaväärne koordinaatide koondumisega.

Asume tõestama ruumi m täielikkust. Olgu $x_n = (\xi_1^n, \xi_2^n, \ldots)$ Cauchy jada, st. $\rho(x_n, x_m) = \sup_k |\xi_k^n - \xi_k^m| \underset{n,m}{\longrightarrow} 0$. Kuna iga fikseeritud k korral $|\xi_k^n - \xi_k^m| \leqslant \sup_k |\xi_k^n - \xi_k^m|$, siis on jadad $(\xi_k^n)_{n=1}^{\infty}$, $k = 1, 2, \ldots$, Cauchy arvjadad, mis koonduvad, st. $\xi_k^n \underset{n}{\longrightarrow} \xi_k$, $k = 1, 2, \ldots$. Vaatleme jada $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots)$. Näitame, et $x \in m$ ja $x_n \to x$ ruumis m. Jada x_n fundamentaalsuse tõttu võime öelda, et vabalt valitud $\varepsilon > 0$ korral leidub N nii, et $\rho(x_n, x_m) = \sup_k |\xi_k^n - \xi_k^m| < \varepsilon$, kui $n, m \geqslant N$. Siit järeldame, et $|\xi_k^n - \xi_k^m| < \varepsilon$, kui $n, m \geqslant N$ ja $k = 1, 2, \ldots$. Nendest võrratustest saame protsessis $m \to \infty$ (lugedes n ja k fikseerituks)

$$|\xi_k^n - \xi_k| \leqslant \varepsilon, \text{kui } n \geqslant N,\ k = 1, 2, \ldots,$$

millest omakorda

$$\sup_k |\xi_k^n - \xi_k| \leqslant \varepsilon, \text{kui } n \geqslant N. \tag{1}$$

Võrratusest $|\xi_k| \leqslant \left|\xi_k - \xi_k^N\right| + \left|\xi_k^N\right|$ saame tingimust (1) kasutades

$$\sup_k |\xi_k| \leqslant \sup_k \left|\xi_k - \xi_k^N\right| + \sup_k \left|\xi_k^N\right| < \infty,$$

sest $x_N \in m$, millega on näidatud, et $x \in m$. Ühtlasi võime (1) põhjal väita, et $x_n \to x$ ruumis m.

Ruumi c täielikkuse tõestame sel teel, et näitame tema kinnisust ruumis m. Eeldame, et $x_n = (\xi_1^n, \xi_2^n, \ldots) \to x = (\xi_1, \xi_2, \ldots)$ ruumis m, kusjuures $x_n \in c$, $n = 1, 2, \ldots$. Näitame järgnevas, et $x \in c$, st. (ξ_k) on koonduv arvjada. Valime vabalt $\varepsilon > 0$. Koondumise $x_n \to x$ tõttu leidub n_0 nii, et

$$\left|\xi_k^{n_0} - \xi_k\right| \leqslant \rho(x_{n_0}, x) < \frac{\varepsilon}{3}, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Kuna x_{n_0}, olles koonduv arvjada, on ühtlasi fundamentaalne, siis leidub N nii, et $\left|\xi_k^{n_0} - \xi_l^{n_0}\right| < \frac{\varepsilon}{3}$, kui $k, l > N$. Seega kui $k, l > N$, siis

$$|\xi_k - \xi_l| \leqslant \left|\xi_k - \xi_k^{n_0}\right| + \left|\xi_k^{n_0} - \xi_l^{n_0}\right| + \left|\xi_l^{n_0} - \xi_l\right| < \varepsilon,$$

mis tähendab arvjada $x = (\xi_k)$ fundamentaalsust, järelikult ka koonduvust.

Ruumi c_0 täielikkuse põhjendab

Ülesanne. Näidata, et ruum c_0 on kinnine ruumis m.

Ruumi $M[a, b]$ täielikkust saab kontrollida sama tõestusskeemi järgi nagu ruumi m puhul.

Ruumi $C[a, b]$ täielikkuse tõestamiseks piisab veenduda selles, et ta on kinnine ruumis $M[a, b]$. Viimane asjaolu tuleneb aga matemaatilise analüüsi kursusest tuntud väitest, et lõigus pidevate funktsioonide ühtlaselt koonduva jada piirfunktsioon on pidev (meenutame, et koondumine ruumis $M[a, b]$ on just ühtlane koondumine lõigul $[a, b]$).

Järgnevalt tõestame kaks täielikke meetrilisi ruume iseloomustavat üldist tulemust, mis on aluseks paljudele fundamentaalsetele väidetele. Esimese tulemuse ajalooliseks lähtekohaks on ruumis $\mathbb{R}$ kehtiv Cantori teoreem üksteisesse sisestatud lõikudest.

Teoreem (teoreem üksteisesse sisestatud keradest)**.** *Meetriline ruum on täielik parajasti siis, kui temas üksteisesse sisestatud kinniste kerade jadas kerade raadiuste nullile lähenemisest järeldub, et neil keradel on ühine punkt.*

Ülesanne. Näidata, et kerade ühine punkt, millest räägib teoreem, on ainus.

Teoreemi tõestus. 1) Eeldame, et täielikus meetrilises ruumis on antud kinniste kerade jada $B_n = \overline{B}\left(a_n, r_n\right)$ nii, et $B_1 \supset B_2 \supset \ldots$ ja $r_n \to 0$. Näitame kõigepealt, et keskpunktide jada a_n on fundamentaalne. Olgu $\varepsilon > 0$ suvaline ja N selline, et $n > N$ korral $r_n < \varepsilon$. Kui nüüd $n, m > N$ ja näiteks $m \geqslant n$, siis $a_m \in B_m \subset B_n = \overline{B}\left(a_n, r_n\right)$, mistõttu $\rho\left(a_m, a_n\right) \leqslant r_n < \varepsilon$, kui $n, m > N$. Ruumi täielikkuse tõttu võime öelda, et $a_n \xrightarrow[n]{} a$. Näitame, et $a \in B_n$ iga $n = 1, 2, \ldots$ korral. Valime vabalt B_n. Kuna $a_n, a_{n+1}, \dots \in B_n$, $a_{n+k} \xrightarrow[k]{} a$ ja B_n on kinnine, siis $a \in B_n$.

2) Vaatleme suvalist fundamentaaljada x_n. Meie eesmärgiks on tõestada tema koonduvus. Selleks tarvitseb jadast x_n eraldada mingi koonduv osajada. Jada x_n fundamentaalsuse tõttu leidub selline liige x_{n_1}, et $\rho\left(x_n, x_{n_1}\right) < \frac{1}{2}$, $n \geqslant n_1$ korral. Kui on valitud liikmed $x_{n_1}, \ldots, x_{n_{k-1}}$, kusjuures $n_1 < n_2 < \cdots < n_{k-1}$, siis leiame x_{n_k} nii, et $n_k > n_{k-1}$ ja $\rho\left(x_n, x_{n_k}\right) < \frac{1}{2^k}$ kõikide $n \geqslant n_k$ korral. Vaatleme kinniste kerade jada $B_k = \overline{B}\left(x_{n_k}, \frac{1}{2^{k-1}}\right)$, $k = 1, 2, \ldots$. Need kerad on üksteisesse sisestatud, sest kui $x \in B_{k+1}$, st. $\rho\left(x, x_{n_{k+1}}\right) \leqslant \frac{1}{2^k}$, siis $\rho\left(x, x_{n_k}\right) \leqslant \rho\left(x, x_{n_{k+1}}\right) + \rho\left(x_{n_{k+1}}, x_{n_k}\right) < \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{k-1}}$, mistõttu $x \in B_k$. Et kerade B_k raadiused $\frac{1}{2^{k-1}}$ lähenevad nullile, siis on neil keradel ühine punkt x. Seejuures $x_{n_k} \xrightarrow[k]{} x$, sest $\rho\left(x_{n_k}, x\right) \leqslant \frac{1}{2^{k-1}} \xrightarrow[k]{} 0$. □

Teoreemi tingimus, et kerade raadiused lähenevad nullile, on oluline nagu näitab

Ülesanne. Leida näide täielikust meetrilisest ruumist ja tema üksteisesse sisestatud kinniste kerade jadast nii, et nendel keradel puuduks ühine punkt.

Näpunäide. Vaadelda ruumis $\mathbb{N}$ kaugusega

$$\rho\left(m, n\right) = \begin{cases} 1 + \dfrac{1}{m+n}, & \text{kui} \quad m \neq n, \\ 0, & \text{kui} \quad m = n, \end{cases}$$

kerasid $\overline{B}\left(n, 1 + \frac{1}{2n}\right)$.

Teoreem (Baire'i teoreem). *Kui täielik meetriline ruum avaldub loenduva hulga kinniste hulkade ühendina, siis vähemalt üks neist hulkadest sisaldab mingit kera.*

Tõestus. Avaldugu täielik meetriline ruum X ühendina $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, kus hulgad F_n on kinnised. Oletame väitevastaselt, et ükski hulkadest F_n ei sisalda ühtegi kera.

Anname ette positiivse arvjada $\varepsilon_n \to 0$. Kuna X sisaldab kerasid, siis $F_1 \neq X$, st. $X \setminus F_1 \neq \emptyset$. Hulk $X \setminus F_1$ on lahtine, järelikult sisaldab ta mingit kinnist kera $B_1 = \overline{B}(x_1, r_1)$ (kui $x_1 \in X \setminus F_1$, siis leidub kera $B(x_1, r_0) \subset X \setminus F_1$; võtame näiteks $r_1 = \frac{1}{2} r_0$, siis $\overline{B}(x_1, r_1) \subset B(x_1, r_0)$), kusjuures me võime eeldada, et $r_1 < \varepsilon_1$. Hulk F_2 ei sisalda kerasid, ta ei sisalda ka kera $B(x_1, r_1)$. Seega $(X \setminus F_2) \cap B(x_1, r_1) \neq \emptyset$ (kui $(X \setminus F_2) \cap B(x_1, r_1) = \emptyset$, siis $B(x_1, r_1) \subset X \setminus (X \setminus F_2) = F_2$). Kuna hulk $(X \setminus F_2) \cap B(x_1, r_1)$ on lahtine, siis sisaldab ta mingit kinnist kera $B_2 = \overline{B}(x_2, r_2)$, $r_2 < \varepsilon_2$. Analoogiliselt jätkates saame, et $(X \setminus F_n) \cap B(x_{n-1}, r_{n-1})$ sisaldab mingit kera $B_n = \overline{B}(x_n, r_n)$, $r_n < \varepsilon_n$, ning niiviisi moodustub üksteisesse sisestatud kinniste kerade jada $B_1 \supset \cdots \supset B_n \supset$

$\dots$, kusjuures $B_n \subset X \setminus F_n$ ja kerade raadiused lähenevad nullile. Eelmise teoreemi põhjal on keradel B_n ühine punkt a. Seega $a \in B_n \subset X \setminus F_n$, $n = 1, 2, \dots$, millest järeldub, et $a \notin F_n$ ühegi n korral. See aga tähendab, et $a \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, mis on vastuolus võrdusega $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$. □

1.7 Meetrilise ruumi täielikkustamine

Matemaatilise analüüsi kursuses laiendatakse ratsionaalarvude hulk reaalarvude hulgani. Selle tulemusena saadakse arvuhulk, mis on meetrilise ruumina täielik. Me näeme käesolevas paragrahvis, et iga meetrilise ruumi korral on võimalik analoogiline laiendus täieliku meetrilise ruumini, kusjuures laiendamise tulemusena saadav meetriline ruum on oma struktuuri poolest üheselt määratud.

Definitsioon. Meetrilisi ruume X_0 ja X_1 vastavalt kaugustega ρ_0 ja ρ_1 nimetatakse *isomeetrilisteks*, kui leidub sürjektsioon (st. pealekujutus) $\varphi : X_0 \to X_1$, mis säilitab elementidevahelise kauguse, st.

$$\rho_1(\varphi(x), \varphi(y)) = \rho_0(x, y) \qquad \forall x, y \in X_0.$$

Elementidevahelist kaugust säilitavat sürjektsiooni[1] φ nimetatakse *isomeetriaks*.

Definitsioon. Meetrilise ruumi X_0 *täieldiks* nimetatakse niisugust täielikku meetrilist ruumi X, mille puhul X_0 on isomeetriline ruumi X mingi kõikjal tiheda alamruumiga.

Näiteks $\mathbb{Q}$ täieldiks on $\mathbb{R}$, mis on ka selge alljärgnevast lihtsast tulemusest.

Lause. *Täieliku meetrilise ruumi alamruumi täieldiks on tema sulund.*

Tõestus. Olgu X_0 täieliku meetrilise ruumi alamruum. Tema sulund $\overline{X_0}$, olles täieliku meetrilise ruumi kinnine osahulk, on täielik meetriline ruum, milles X_0 on kõikjal tihe. Isomeetriaks on aga ühikteisendus $I : X_0 \to X_0$, $Ix = x$, $x \in X_0$. □

Teoreem. *Igal meetrilisel ruumil leidub täield, mis on isomeetria täpsuseni üheselt määratud.*

Tõestus. Olgu X_0 meetriline ruum kaugusega ρ_0. Konstrueerime ruumile X_0 täieldi.

Vaatleme ruumi X_0 elementidest moodustatud Cauchy jadade hulka. Cauchy jadad (x_n) ja (y_n) loeme ekvivalentseteks, kui $\rho_0(x_n, y_n) \to 0$. Tegemist on tõepoolest ekvivalentsiseosega, sest Cauchy jada (x_n) on iseendaga ekvivalentne (refleksiivsus); kui (x_n) ja (y_n) on ekvivalentsed, siis kauguse ρ_0 sümmeetrilisuse tõttu on ka (y_n) ja (x_n) ekvivalentsed (sümmeetrilisus); lõpuks, kui (x_n) ja (y_n), samuti (y_n) ja (z_n) on ekvivalentsed, siis kolmnurga võrratusest $\rho_0(x_n, z_n) \leqslant \rho_0(x_n, y_n) + \rho_0(y_n, z_n)$ järeldub, et $\rho_0(x_n, z_n) \to 0$, st. (x_n) ja (z_n) on ekvivalentsed (transitiivsus). Seega tekib kõigi ruumi X_0 elementidest moodustatud Cauchy jadade hulgas klassijaotus, st. iga Cauchy jada kuulub parajasti ühte omavahel mittelõikuvatest klassidest. Loeme hulga X elementideks omavahel ekvivalentsete Cauchy jadade klassid (st. X on kõigi Cauchy jadade hulga faktorhulk vaadeldava ekvivalentsiseose järgi).

Järgnevalt muudame hulga X meetriliseks ruumiks. Kui $x, y \in X$, siis valime suvalised Cauchy jadad $(x_n) \in x$ ja $(y_n) \in y$ ning defineerime

$$\rho(x, y) = \lim_n \rho_0(x_n, y_n).$$

[1] Kuna isomeetria säilitab kauguse, siis on ta injektsioon. Seega on isomeetria bijektsioon. Märgime, et lugeja, kes ei tunne injektsiooni, sürjektsiooni ja bijektsiooni mõisteid, võib nendega tutvuda järgmises peatükis.

Veendume kõigepealt sellise definitsiooni korrektsuses. Nelinurga võrratusest

$$|\rho_0(x_n, y_n) - \rho_0(x_m, y_m)| \leqslant \rho_0(x_n, x_m) + \rho_0(y_n, y_m)$$

järeldub, et jada $\rho_0(x_n, y_n)$ on Cauchy arvjada, järelikult ta koondub ning $\lim_n \rho_0(x_n, y_n)$ eksisteerib. Kui me valiksime klassidest x ja y teised Cauchy jadad $\left(x'_n\right) \in x$ ja $\left(y'_n\right) \in y$, siis nelinurga võrratusest

$$\left|\rho_0\left(x'_n, y'_n\right) - \rho_0\left(x_n, y_n\right)\right| \leqslant \rho_0\left(x'_n, x_n\right) + \rho_0\left(y'_n, y_n\right)$$

saaksime, et $\lim_n \rho\left(x'_n, y'_n\right) = \lim_n \rho\left(x_n, y_n\right)$. Seega on ρ definitsioon korrektne: igale elemendipaarile $x, y \in X$ seatakse vastavusse kindel arv $\rho(x, y)$.

Näitame, et ρ rahuldab meetrika aksioome. Kui $x = y$, siis $\rho(x, y)$ arvutamiseks vajalikud Cauchy jadad on ekvivalentsed, st. $\rho(x, y) = 0$. Vastupidi, kui $\rho(x, y) = 0$, siis Cauchy jadad $(x_n) \in x$ ja $(y_n) \in y$ on ekvivalentsed, mistõttu nad peavad kuuluma samasse klassi, seega $x = y$. Kauguse ρ sümmeetrilisuse põhjendame võrdusega

$$\rho(x, y) = \lim_n \rho_0(x_n, y_n) = \lim_n \rho_0(y_n, x_n) = \rho(y, x).$$

Lõpuks, kui $(x_n) \in x$, $(y_n) \in y$ ja $(z_n) \in z$, siis võrratus

$$\rho_0(x_n, y_n) \leqslant \rho_0(x_n, z_n) + \rho_0(z_n, y_n)$$

annab piiril, kui $n \to \infty$, kolmnurga võrratuse kauguse ρ jaoks.

Vaatleme ruumi X osahulka X_1, mis koosneb niisugustest ekvivalentsiklassidest, mis sisaldavad mingit ruumi X_0 elementide konstantset jada. Defineerime kujutuse $\varphi : X_0 \to X_1$, seades elemendile $x_0 \in X_0$ vastavusse konstantset jada $(x_0, x_0, \dots)$ sisaldava ekvivalentsiklassi. Ruumi X_1 ja kujutuse φ definitsioonidest on selge, et φ on sürjektsioon. Olgu $x_0, y_0 \in X_0$, siis $(x_0, x_0, \dots) \in \varphi(x_0)$ ja $(y_0, y_0, \dots) \in \varphi(y_0)$, mistõttu

$$\rho(\varphi(x_0), \varphi(y_0)) = \lim \rho_0(x_0, y_0) = \rho_0(x_0, y_0).$$

Sellega oleme näidanud, et $\varphi : X_0 \to X_1$ on isomeetria.

Tõestame alamruumi X_1 kõikjal tiheduse ruumis X. Valime vabalt $x \in X$ ja $\varepsilon > 0$. Olgu $(x_n) \in x$. Siis leidub N nii, et $\rho_0(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}$, kui $n, m \geqslant N$. Olgu y ekvivalentsiklass, mis sisaldab konstantset jada $(x_N, x_N, \dots)$. Siis $y \in X_1$ ja

$$\rho(x, y) = \lim_n \rho_0(x_n, x_N) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Oleme tõestanud, et $\overline{X_1} = X$.

Veendume ruumi X täielikkuses. Olgu $x^{(n)} \in X$ Cauchy jada. Ruumi X_1 kõikjal tiheduse tõttu saame leida elemendid $y^{(n)} \in X_1$ nii, et $\rho\left(y^{(n)}, x^{(n)}\right) < \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Iga klass $y^{(n)}$ sisaldab mingi konstantse jada $(y_n, y_n, \dots)$, kus $y_n \in X_0$. Seejuures jada (y_n) ise on Cauchy jada ruumis X_0, sest

$$\begin{aligned}
\rho_0(y_n, y_m) &= \rho\left(y^{(n)}, y^{(m)}\right) \leqslant \\
&\leqslant \rho\left(y^{(m)}, x^{(n)}\right) + \rho\left(x^{(n)}, x^{(m)}\right) + \rho\left(x^{(m)}, y^{(m)}\right) \leqslant \\
&\leqslant \rho\left(x^{(n)}, x^{(m)}\right) + \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \to 0, \qquad \text{kui } n, m \to \infty.
\end{aligned}$$

Niisiis leidub $x \in X$, kuhu kuulub jada (y_n). Seejuures

$$\rho\left(x^{(n)}, x\right) \leqslant \rho\left(x^{(n)}, y^{(n)}\right) + \rho\left(y^{(n)}, x\right) \leqslant \frac{1}{n} + \lim_{m\to\infty} \rho_0(y_n, y_m).$$

Jada (y_n) fundamentaalsuse tõttu leidub antud $\varepsilon > 0$ korral N nii, et kui $n, m > N$, siis $\rho_0(y_n, y_m) < \varepsilon$. Seega, kui $n > N$, siis $\lim\limits_{m\to\infty} \rho_0(y_n, y_m) \leqslant \varepsilon$, mis ütleb, et $\lim\limits_{m\to\infty} \rho_0(y_n, y_m) \to 0$. Järelikult

$$\rho\left(x^{(n)}, x\right) \xrightarrow[n]{} 0.$$

Ruumi X täielikkus on näidatud.

Praeguseks oleme tõestanud ruumi X_0 täieldi olemasolu.

Lõpuks veendume täieldi ühesuses isomeetria täpsuseni. Olgu X ja Y ruumi X_0 täieldid vastavalt kaugustega ρ ja ρ', kusjuures $\overline{X_1} = X$, $\overline{Y_1} = Y$ ning $\varphi : X_0 \to X_1$ ja $\psi : X_0 \to Y_1$ on isomeetriad. Meil tuleb tõestada, et X ja Y on isomeetrilised. Kohe võib öelda, et $\psi\varphi^{-1} : X_1 \to Y_1$ on isomeetria. Laiendame $\psi\varphi^{-1}$ isomeetriani $\chi : X \to Y$. Olgu $x \in X$. Leiame $x_n \in X_1$ nii, et $x_n \to x$. Et $\psi\varphi^{-1}$ on isomeetria, siis $\psi\varphi^{-1}(x_n)$ on Cauchy jada ruumis Y, mis ruumi Y täielikkuse tõttu koondub. Defineerimegi

$$\chi(x) = \lim_n \psi\varphi^{-1}(x_n).$$

Seejuures, kui veel $x'_n \to x$ (kus $x'_n \in X_1$), siis $\rho\left(x'_n, x_n\right) \to 0$, samuti $\rho'\left(\psi\varphi^{-1}\left(x'_n\right), \psi\varphi^{-1}(x_n)\right) \to 0$, st. $\lim\limits_n \psi\varphi^{-1}\left(x'_n\right) = \lim\limits_n \psi\varphi^{-1}(x_n)$ ning $\chi(x)$ ei sõltu jada x_n valikust. Kujutuse $\chi : X \to Y$ sürjektiivsuse tõestamiseks valime vabalt $y \in Y$ ja leiame $y_n \in Y_1$ nii, et $y_n \to y$. Siis $x_n = \varphi\psi^{-1}(y_n) \in X_1$ on Cauchy jada, mis koondub mingiks elemendiks $x \in X$. Seejuures $\chi(x) = \lim\limits_n \psi\varphi^{-1}(x_n) = \lim\limits_n y_n = y$. Jääb veel näidata, et χ säilitab kauguse. Kui $x, x' \in X$ ja $x_n, x'_n \in X_1$ nii, et $x_n \to x$ ja $x'_n \to x$, siis tuginedes kauguse pidevusele, saame

$$\begin{aligned} \rho'\left(\chi(x), \chi\left(x'\right)\right) &= \lim_n \rho'\left(\psi\varphi^{-1}(x_n), \psi\varphi^{-1}\left(x'_n\right)\right) = \\ &= \lim_n \rho\left(x_n, x'_n\right) = \rho\left(x, x'\right). \end{aligned}$$

Sellega on lõpetatud X ja Y isomeetrilisuse tõestus. $\square$

Tihti samastatakse (loetakse võrdseks) täielikustatav ruum X_0 ja temaga isomeetriline täieldi X alamruum $\varphi(X_0)$. Seda väljendatakse lühidalt sisalduvusega $X_0 \subset X$. Nii tuleb mõista ka näiteks ratsionaal- ja reaalarvude vahekorda $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Peatükk 2

Pidevad operaatorid meetrilistes ruumides

2.2 Pidevad operaatorid meetrilistes ruumides

Meenutame, et matemaatilises analüüsis nimetatakse funktsiooni f pidevaks punktis a, kui iga $\varepsilon > 0$ korral leidub $\delta > 0$ nii, et kui $|x - a| < \delta$, siis $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Olgu X ja Y meetrilised ruumid.

Definitsioon. Operaatorit $f : X \to Y$ nimetatakse *pidevaks punktis* $a \in X$, kui iga $\varepsilon > 0$ korral leidub $\delta > 0$ nii, et kui $\rho(x, a) < \delta$, siis $\rho(f(x), f(a)) < \varepsilon$. Operaatorit $f : X \to Y$ nimetatakse *pidevaks*, kui ta on pidev ruumi X igas punktis.

On selge, et operaatori f pidevus punktis a tähendab järgmist: iga $\varepsilon > 0$ korral leidub $\delta > 0$ nii, et $f(B(a, \delta)) \subset B(f(a), \varepsilon)$, ehk, mis on selle sisalduvusega samaväärne, $B(a, \delta) \subset f^{-1}(B(f(a), \varepsilon))$.

Teoreem. *Operaator $f : X \to Y$ on pidev punktis $a \in X$ parajasti siis, kui mistahes koonduva jada $x_n \to a$ korral $f(x_n) \to f(a)$.*

Tõestus. 1) Olgu operaator f pidev punktis a. Siis iga $\varepsilon > 0$ korral leidub $\delta > 0$ nii, et võrratusest $\rho(x, a) < \delta$ järeldub võrratus $\rho(f(x), f(a)) < \varepsilon$. Vaatleme koonduvat jada $x_n \to a$. Koonduvuse tõttu leidub N nii, et kui $n > N$, siis $\rho(x_n, a) < \delta$. Kuid siis $\rho(f(x_n), f(a)) < \varepsilon$. Seega $f(x_n) \to f(a)$.

2) Eeldame, et $x_n \to a$ korral $f(x_n) \to f(a)$. Oletame vastuväiteliselt, et operaator f ei ole pidev punktis a. Siis leidub $\varepsilon > 0$ nii, et iga $\delta > 0$ korral leidub x_δ, mille puhul $\rho(x_\delta, a) < \delta$, kuid $\rho(f(x_\delta), f(a)) \geqslant \varepsilon$. Valime jada $\delta_n \to 0$ (näiteks $\delta_n = \dfrac{1}{n}$) ning vastavad elemendid x_n, mille korral $\rho(x_n, a) < \delta_n$, aga $\rho\left(f(x_n), f(a)\right) \geqslant \varepsilon$. Siis $x_n \to a$, aga $f(x_n) \not\to f(a)$. □

Teoreem. *Operaator on pidev parajasti siis, kui lahtiste hulkade originaalid on lahtised.*

Tõestus. 1) Olgu $f : X \to Y$ pidev. Olgu hulk $G \subset Y$ lahtine. Vaatleme suvalist elementi $a \in f^{-1}(G)$. Siis $f(a) \in G$ ning hulga G lahtisuse tõttu leidub kera $B(f(a), \varepsilon) \subset G$. Operaatori f pidevuse tõttu leidub kera $B(a, \delta)$ nii, et $B(a, \delta) \subset f^{-1}(B(f(a), \varepsilon))$. Seepärast $B(a, \delta) \subset f^{-1}(G)$, st. element a sisaldub hulgas $f^{-1}(G)$ koos teda ümbritseva keraga. Seega $f^{-1}(G)$ on lahtine.

2) Eeldame, et $f^{-1}(G)$ on lahtine alati, kui $G \subset Y$ on lahtine. Valime vabalt $a \in X$ ja $\varepsilon > 0$. Kuna $B(f(a),\varepsilon) \subset Y$ on lahtine, siis $f^{-1}(B(f(a),\varepsilon))$ on lahtine. Järelikult leidub punktil $a \in f^{-1}(B(f(a),\varepsilon))$ ümbrus $B(a,\delta)$ nii, et $B(a,\delta) \subset f^{-1}(B(f(a),\varepsilon))$, mis tähendab operaatori f pidevust punktis a. Kuna $a \in X$ oli suvaline punkt, siis f on pidev. □

Teoreem. *Operaator on pidev parajasti siis, kui kinniste hulkade originaalid on kinnised.*

Tõestus. Vaadeldes kõiki kinniseid hulki $F \subset Y$, paneme tähele, et hulgad $Y \setminus F$ esindavad parajasti kõiki lahtiseid hulki ruumis Y. Hulk $f^{-1}(F) \subset X$ on kinnine parajasti siis, kui hulk $X \setminus f^{-1}(F) = f^{-1}(Y \setminus F)$ on lahtine. Eelmise teoreemi põhjal aga on f pidev parajasti siis, kui hulga $Y \setminus F$ lahtisusest järeldub $f^{-1}(Y \setminus F)$ lahtisus. □

Teoreem. *Järgmised väited on samaväärsed:*

1) *operaator $f : X \to Y$ on pidev,*

2) *iga $A \subset X$ korral $f\left(\overline{A}\right) \subset \overline{f(A)}$,*

3) *iga $B \subset Y$ korral $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\overline{B})$,*

4) *iga $B \subset Y$ korral $f^{-1}(B^\circ) \subset \left(f^{-1}(B)\right)^\circ$.*

Tõestus. 1) $\Rightarrow$ 2). Eeldame, et f on pidev. Sisalduvusest $f(A) \subset \overline{f(A)}$ järeldub, et $f^{-1}(f(A)) \subset f^{-1}\left(\overline{f(A)}\right)$ ning $A \subset f^{-1}(f(A))$ tõttu $A \subset f^{-1}\left(\overline{f(A)}\right)$. Et aga $\overline{f(A)}$ kinnisuse ja f pidevuse tõttu $f^{-1}\left(\overline{f(A)}\right)$ on kinnine, siis $\overline{A} \subset f^{-1}\left(\overline{f(A)}\right)$, millest järeldub, et $f(\overline{A}) \subset f\left(f^{-1}\left(\overline{f(A)}\right)\right) \subset \overline{f(A)}$.

2) $\Rightarrow$ 3). Valime vabalt $B \subset Y$ ning rakendame hulgale $A = f^{-1}(B)$ tingimust 2). Siis $f\left(\overline{f^{-1}(B)}\right) \subset \overline{f\left(f^{-1}(B)\right)} \subset \overline{B}$, mille abil saame $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}\left(f\left(\overline{f^{-1}(B)}\right)\right) \subset f^{-1}\left(\overline{B}\right)$.

3) $\Rightarrow$ 4). Kui $B \subset Y$, siis tingimuse 3) põhjal $\overline{f^{-1}(Y \setminus B)} \subset f^{-1}\left(\overline{Y \setminus B}\right)$. Arvestades võrdust $B^\circ = Y \setminus \overline{Y \setminus B}$ (mille esitasime sulundi ja sisemuse mõistega tutvudes), saame nüüd

$$\begin{aligned} f^{-1}\left(B^\circ\right) &= f^{-1}\left(Y \setminus \overline{Y \setminus B}\right) = X \setminus f^{-1}\left(\overline{Y \setminus B}\right) \subset \\ &\subset X \setminus \overline{f^{-1}(Y \setminus B)} = X \setminus \overline{X \setminus f^{-1}(B)} = \left(f^{-1}(B)\right)^\circ . \end{aligned}$$

4) $\Rightarrow$ 1). Kui $G \subset Y$ on lahtine, siis $G = G^\circ$. Tingimuse 4) põhjal $f^{-1}(G) \subset \left(f^{-1}(G)\right)^\circ$, mistõttu $f^{-1}(G)$ on lahtine. Seega on tõestatud, et f on pidev. □

Märkus.* Olgu X ja Y topoloogilised ruumid. Operaatorit $f : X \to Y$ nimetatakse pidevaks punktis $a \in X$, kui punkti $f(a)$ iga ümbruse $\mathcal{V}$ korral leidub punkti a ümbrus $\mathcal{U}$ nii, et $f(\mathcal{U}) \subset \mathcal{V}$. Kui X ja Y on meetrilised ruumid, siis see definitsioon on samaväärne paragrahvi algul toodud operaatori f pidevuse definitsiooniga punktis a: iga $\varepsilon > 0$ korral leidub $\delta > 0$ nii, et $f(B(a,\delta)) \subset B(f(a),\varepsilon)$. Operaatori pidevus topoloogilises ruumis defineeritakse samuti nagu pidevus meetrilises ruumis – pidevusena ruumi igas punktis. Märgime, et topoloogilistes ruumides jäävad kehtima kõik selle paragrahvi teoreemid ja nende tõestused, kusjuures kõikjal, kus esineb jadasid, tuleb need asendada peredega.

2.3 Banachi püsipunkti printsiip

Olgu X meetriline ruum.

Definitsioon. Operaatori $f : X \to X$ *püsipunktiks* nimetatakse sellist elementi $x^* \in X$, et $f(x^*) = x^*$.

Teisiti väljendudes võime öelda, et operaatori $f : X \to X$ püsipunktid on parajasti võrrandi $x = f(x)$ lahendid.

Käesolevas paragrahvis tõestame püsipunkti olemasolu ja ühesuse nn. ahendava operaatori korral.

Definitsioon. Öeldakse, et operaator $f : X \to X$ on *ahendav* (ehk *lähenemisoperaator* ehk *suruv operaator*), kui leidub $q < 1$ nii, et

$$\rho(f(x), f(y)) \leqslant q\rho(x, y) \qquad \forall x, y \in X.$$

Ahendavatest operaatoritest laiem klass on *Lipschitzi tingimust* rahuldavad operaatorid: leidub arv L nii, et

$$\rho(f(x), f(y)) \leqslant L\rho(x, y) \qquad \forall x, y \in X.$$

Lipschitzi tingimust rahuldav ning seega ka ahendav operaator on pidev, sest kui $x_n \to a$, st. $\rho(x_n, a) \to 0$, siis tingimuse $\rho(f(x_n), f(a)) \leqslant L\rho(x_n, a) \to 0$ tõttu $f(x_n) \to f(a)$.

Teoreem (Banachi püsipunkti printsiip)**.** *Kui X on täielik meetriline ruum, siis ahendaval operaatoril $f : X \to X$ on parajasti üks püsipunkt.*

Tõestus. Valime vabalt $x_0 \in X$. Olgu $x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1), \ldots, x_n = f(x_{n-1}), \ldots$. Näitame, et jada x_n on Cauchy jada. Kuna

$$\begin{aligned} \rho\left(x_n, x_{n+1}\right) &= \rho\left(f(x_{n-1}), f(x_n)\right) \leqslant q\rho(x_{n-1}, x_n) \leqslant \\ &\leqslant q^2\rho(x_{n-2}, x_{n-1}) \leqslant \ldots \leqslant q^n\rho(x_0, x_1), \end{aligned}$$

siis

$$\begin{aligned} \rho\left(x_n, x_{n+p}\right) &\leqslant \rho(x_n, x_{n+1}) + \cdots + \rho\left(x_{n+p-1}, x_{n+p}\right) \leqslant \\ &\leqslant q^n\rho(x_0, x_1) + \cdots + q^{n+p-1}\rho(x_0, x_1) \leqslant \\ &\leqslant \sum_{k=0}^{\infty} q^{n+k}\rho(x_0, x_1) = \frac{q^n}{1-q}\rho(x_0, x_1) \xrightarrow[n]{} 0. \end{aligned}$$

Siit on näha, et iga $\varepsilon > 0$ korral leidub N nii, et kui $n > N$, siis $\rho(x_n, x_{n+p}) < \varepsilon$ iga $p = 1, 2, \ldots$ korral. Ruumi X täielikkuse tõttu $x_n \to x^*$. Ning operaatori f pidevusest järeldub nüüd, et

$$f(x^*) = \lim_n f(x_n) = \lim_n x_{n+1} = x^*,$$

st. x^* on operaatori f püsipunkt.

Tõestame veel püsipunkti ainsuse. Kui lisaks püsipunktile $x^* = f(x^*)$ leidub $x^{**} = f(x^{**})$, siis

$$\rho(x^*, x^{**}) = \rho(f(x^*), f(x^{**})) \leqslant q\rho(x^*, x^{**}),$$

mis tingimuse $q < 1$ tõttu kehtib parajasti siis, kui $\rho(x^*, x^{**}) = 0$. Kuid sel juhul $x^* = x^{**}$. □

Märgime, et ülaltoodud teoreemis püsipunkti olemasolu tõestus on konstruktiivne – temas näidatakse ära konkreetne tee püsipunkti leidmiseks. Nimelt tõestatakse, et kui x_0 on suvaline punkt ruumis X, siis eeskirja $x_n = f(x_{n-1})$, $n = 1, 2, \ldots$, järgi moodustatud jada x_n koondub püsipunktiks x^*.

Kui $f : X \to X$, siis tähistame $f^n = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n}$.

Teoreem. *Kui X on täielik meetriline ruum ja leidub n nii, et operaator f^n on ahendav, siis operaatoril f on parajasti üks püsipunkt.*

Tõestus. Banachi püsipunkti printsiibi põhjal leidub operaatoril f^n parajasti üks püsipunkt $x^* = f^n(x^*)$. Kuna $f(x^*) = f(f^n(x^*)) = f^n(f(x^*))$, siis ka $f(x^*)$ on operaatori f^n püsipunkt. Seepärast $f(x^*) = x^*$. Kui veel $x^{**} = f(x^{**})$, siis $x^{**} = f^n(x^{**})$, seega $x^{**} = x^*$. $\square$

Peatükk 3

Normeeritud ruumid

3.2 Normeeritud ruumi ja Banachi ruumi mõiste

Definitsioon. Vektorruumi X nimetatakse *normeeritud ruumiks*, kui igale tema elemendile $x \in X$ on vastavusse seatud kindel reaalarv $\|x\|$, mida nimetatakse elemendi x *normiks*, nii, et on täidetud tingimused:

1° $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,

2° $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$,

3° $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

Tingimusi 1°–3° nimetatakse normi aksioomideks, 1° on *samasuse aksioom*, 2° *homogeensuse aksioom* ning 3° on *kolmnurga võrratus*.

Lause. *Normeeritud ruum on meetriline ruum kaugusega*

$$\rho(x, y) = \|x - y\| .$$

Tõestus. Lause põhjendavad järgmised võrduste ja samaväärsuste ahelad:

1° $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow \|x - y\| = 0 \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y$,

2° $\rho(x, y) = \|x - y\| = \|(-1)(x - y)\| = \|y - x\| = \rho(y, x)$,

3° $\rho(x, y) = \|x - y\| = \|(x - z) + (z - y)\| \leqslant \|x - z\| + \|z - y\| = \rho(x, z) + \rho(z, y)$. □

Lause järeldusena märgime (see järeldub ka vahetult normi aksioomidest), et $\|x\| \geqslant 0$, sest $\|x\| = \rho(x, 0)$ ja kahe elemendi vaheline kaugus on alati mittenegatiivne.

Et normeeritud ruum on meetriline ruum, siis on temas olemas ka kõik meetrilises ruumis vaadeldavad mõisted. Näiteks lahtine kera $B(a, r) = \{x : \|x - a\| < r\}$, kinnine kera $\overline{B}(a, r) = \{x : \|x - a\| \leqslant r\}$, kinnised ja lahtised hulgad, sisemus, raja, sulund, separaablus, täielikkus.

Definitsioon. Täielikku normeeritud ruumi nimetatakse *Banachi ruumiks*.

Paneme normide abil kirja mõned mõisted ja omadused, mis osaliselt esinesid juba meetriliste ruumide käsitlemisel.

1) Koondumine $x_n \to x$ tähendab, et $\|x_n - x\| \to 0$.

2) Jada x_n on fundamentaalne parajasti siis, kui $\|x_n - x_m\| \underset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

3) Tagurpidi kolmnurga võrratus omandab kuju $\big|\, \|x\| - \|y\| \,\big| \leqslant \|x - y\|$. Põhjenduseks tarvitseb võrratuses $|\rho(x,z) - \rho(y,z)| \leqslant \rho(x,y)$ võtta $z = 0$.

4) Normi pidevus tähendab, et kui $x_n \to x$, siis $\|x_n\| \to \|x\|$. Põhjenduseks kasutame kauguse pidevust ühe argumendi järgi: kui $x_n \to x$, siis $\rho(x_n, 0) \to \rho(x, 0)$.

5) Algebralised tehted – liitmine ja arvuga korrutamine – on pidevad, st. kui $x_n \to x$, $y_n \to y$ ja $\lambda_n \to \lambda$, siis $x_n + y_n \to x + y$ ja $\lambda_n x_n \to \lambda x$. Tõestuseks märgime, et

$$\begin{aligned} \|(x_n + y_n) - (x + y)\| &= \|(x_n - x) + (y_n - y)\| \leqslant \\ &\leqslant \|x_n - x\| + \|y_n - y\| \to 0 \end{aligned}$$

ning

$$\begin{aligned} \|\lambda_n x_n - \lambda x\| &= \|(\lambda_n x_n - \lambda_n x) + (\lambda_n x - \lambda x)\| \leqslant \\ \leqslant |\lambda_n|\, \|x_n - x\| + |\lambda_n - \lambda|\, \|x\| &\to |\lambda|\, 0 + \|x\| = 0. \end{aligned}$$

Tehete pidevuse (omadus 5)) kohta öeldakse ka, et normeeritud ruumis on topoloogiline struktuur (meetrika) ja algebraline struktuur omavahel kooskõlas.

Eespool vaadeldud konkreetsetest ruumidest on normeeritud ruumid:

m_n normiga
$$\|x\| = \max_{1\leqslant k\leqslant n} |\xi_k|, \quad x = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in m_n;$$

ℓ_p^n normiga
$$\|x\| = \left(\sum_{k=1}^{n} |\xi_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad x = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \ell_p^n;$$

m, c, c_0 normiga
$$\|x\| = \sup_{1\leqslant k<\infty} |\xi_k|, \quad x = (\xi_k) \in m;$$

ℓ_p, $1 \leqslant p < \infty$, normiga
$$\|x\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad x = (\xi_k) \in \ell_p;$$

$M[a,b]$ normiga
$$\|x\| = \sup_{a\leqslant t\leqslant b} |x(t)|, \quad x = x(t) \in M[a,b];$$

$C[a,b]$ normiga
$$\|x\| = \max_{a\leqslant t\leqslant b} |x(t)|, \quad x = x(t) \in C[a,b];$$

$C^n[a,b]$ normiga
$$\|x\| = \sum_{k=0}^{n} \max_{a\leqslant t\leqslant b} \left|x^{(k)}(t)\right|, \quad x = x(t) \in C^n[a,b];$$

$L_p(a,b)$ normiga
$$\|x\| = \left(\int_a^b |x(t)|^p\, dt\right)^{\frac{1}{p}}, \quad x = x(t) \in L_p(a,b);$$

$W_p^n(a,b)$ normiga
$$\|x\| = \left(\sum_{k=0}^{n} \int_a^b \left|x^{(k)}(t)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}, \quad x = x(t) \in W_p^n(a,b).$$

Normi aksioomide kontroll kõigi nende näidete puhul tugineb samadele ideedele, mida kasutasime meetrika aksioomide põhjendamisel. Seejuures väärib märkimist, et Minkowski võrratus ongi kolmnurga võrratus ruumi ℓ_p^n normi jaoks.

On selge, et kõigi ülaltoodud näidete puhul normi poolt defineeritud kaugus (st. elementide vahe norm) ühtib antud ruumis juba olemasoleva kaugusega. Kuna kõik vaadeldud ruumid on täielikud, siis nad on kõik Banachi ruumid.

Kõigi jadade ruum s on samaaegselt vektorruum ja meetriline ruum. Kuid ruumis s ei eksisteeri sellist normi, mis määraks ruumis s olemasoleva kauguse. Selle kohta öeldakse, et ruum s ei ole normeeruv. Põhjus on siin järgmine. Niipea, kui normeeritud ruumis leidub $x_0 \neq 0$, on seal olemas ka element, mille norm võrdub mistahes etteantud positiivse arvuga λ (selliseks elemendiks on näiteks $\frac{\lambda}{\|x_0\|}x_0$). Seetõttu võib normeeritud ruumis kaugus $\rho(x,0) = \|x\|$ olla kuitahes suur. Aga ruumis s on $\rho(x,y) < 1$ kõikide elementide x ja y korral.

Olgu X samaaegselt vektorruum ja meetriline ruum. Küsime, millal saab ruumi X muuta normeeritud ruumiks (st. temas defineerida normi) nii, et norm määraks ruumis X juba olemasoleva kauguse?

Me teame, et kui X on normeeritud ruum, siis tema kaugus $\rho(x,y) = \|x-y\|$ rahuldab meetrika aksioome 1°–3°. Lisaks kehtivad veel tingimused

4° $\rho(x+z, y+z) = \rho(x,y)$,

5° $\rho(\lambda x, \lambda y) = |\lambda|\, \rho(x,y)$,

mida põhjendame järgmiselt:
$$\rho(x+z, y+z) = \|x+z-(y+z)\| = \|x-y\| = \rho(x,y),$$
$$\rho(\lambda x, \lambda y) = \|\lambda x - \lambda y\| = |\lambda|\, \|x-y\| = |\lambda|\, \rho(x,y).$$

Lause. *Kui vektorruum on meetriline ruum, kus peale kauguse aksioomide 1°–3° kehtivad ka tingimused 4° ja 5°, siis seosega $\|x\| = \rho(x,0)$ defineeritakse norm, mis määrab olemasoleva kauguse.*

Tõestus. Normi aksioomide kehtivuse põhjendavad järgmised samaväärsuse ja võrduste ahelad:

1° $\|x\| = 0 \Leftrightarrow \rho(x,0) = 0 \Leftrightarrow x = 0$, 2° $\|\lambda x\| = \rho(\lambda x, 0) = \rho(\lambda x, \lambda 0) = |\lambda|\, \rho(x,0) = |\lambda|\, \|x\|$,

3° $\|x+y\| = \rho(x+y, 0) \leqslant \rho(x+y, y) + \rho(y, 0) =$
$\rho(x,0) + \rho(y,0) = \|x\| + \|y\|$.

Normi poolt määratud kaugus $\overline{\rho}(x,y) = \|x-y\|$ ühtib olemasolevaga, sest

$$\overline{\rho}(x,y) = \|x-y\| = \rho(x-y, 0) = \rho(x-y+y, 0+y) = \rho(x,y). \qquad \square$$

Märkame, et äsjatoodud lause tõestuses kasutasime kauguse omadusi 1° ja 3°–5°, kuid mitte kauguse sümmeetria aksioomi 2°.

Ülesanne. Näidata, et kauguse sümmeetria aksioom järeldub tingimustest 4° ja 5°.

Meenutame, et hulka A meetrilises ruumis nimetatakse tõkestatuks, kui leidub kera $\overline{B}(a,r) \supset A$.

Lause. *Hulk A normeeritud ruumis on tõkestatud parajasti siis, kui leidub arv M nii, et $\|x\| \leqslant M$ iga $x \in A$ korral.*

Tõestus. 1) Kui $A \subset \overline{B}(a,r)$, siis iga $x \in A$ korral $\|x-a\| \leqslant r$, mistõttu $\|x\| = \|x-a+a\| \leqslant \|x-a\| + \|a\| \leqslant r + a$ ning tõkkeks sobib $M = r + a$.
2) Leidugu $M > 0$ nii, et $\|x\| \leqslant M$ iga $x \in A$ korral. Siis $A \subset \overline{B}(0, M)$. $\square$

On selge, et normeeritud ruumi vektoralamruum on ise ka normeeritud ruum. Teda nimetatakse normeeritud ruumi *alamruumiks*.
Normeeritud ruumi tehete pidevusest järeldub, et normeeritud ruumi vektoralamruumi sulund on (kinnine) alamruum.
Meetriliste ruumide käsitlemisel nägime, et täielikus meetrilises ruumis osahulk on meetrilise ruumina täielik parajasti siis, kui ta on kinnine. Sellega on põhjendatud järgmine

Lause. *Banachi ruumi vektoralamruum on täielik parajasti siis, kui ta on kinnine.*

Sellele lausele tuginedes toome näite mittetäielikust normeeritud ruumist. Vaatleme ruumi $C[-1,1]$ vektoralamruumi $C^1[-1,1]$ ja varustame ta ruumi $C[-1,1]$ normiga. Olgu see normeeritud ruum $\widetilde{C}^1[-1,1]$. Näitame, et $\widetilde{C}^1[-1,1]$ pole kinnine Banachi ruumis $C[-1,1]$. Vaatleme funktsioonide jada

$$x_n(t) = \begin{cases} |t|, & \text{kui} \quad |t| > \dfrac{1}{n}, \\ \dfrac{n}{2}t^2 + \dfrac{1}{2n}, & \text{kui} \quad |t| \leqslant \dfrac{1}{n}. \end{cases}$$

Siis

$$x_n'(t) = \begin{cases} 1, & \text{kui} \quad t > \dfrac{1}{n}, \\ nt, & \text{kui} \quad |t| \leqslant \dfrac{1}{n}, \\ -1, & \text{kui} \quad t < -\dfrac{1}{n}. \end{cases}$$

Vahetu kontroll näitab, et funktsioonid x_n ja x_n' on pidevad lõigus $[-1,1]$, mistõttu $x_n \in \widetilde{C}^1[-1,1]$. Olgu $x_0(t) = |t|$, $t \in [-1,1]$. Et $\|x_n - x_0\| = \max\limits_{-1 \leqslant t \leqslant 1} |x_n(t) - x_0(t)| = \dfrac{1}{2n} \to 0$, siis x_n on Cauchy jada ruumis $\widetilde{C}^1[-1,1]$. Aga ta ei koondu ruumis $\widetilde{C}^1[-1,1]$, sest $x_0 \notin \widetilde{C}^1[-1,1]$.

Paljud autorid, rääkides Banachi ruumi alamruumist, mõtlevad selle all kinnist vektoralamruumi (seega täielikku alamruumi).

Ühes ja samas vektorruumis võib olla rohkem kui üks norm. Ruumis $X = \{x = (\xi_1, \ldots, \xi_n) : \xi_k \in \mathbb{K}\}$ võib vaadelda näiteks norme

$$\begin{aligned} \|x\|_{\ell_1^n} &= \sum_{k=1}^{n} |\xi_k| \, , \\ \|x\|_{\ell_2^n} &= \left(\sum_{k=1}^{n} |\xi_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} . \end{aligned}$$

Definitsioon. Öeldakse, et vektorruumis X antud norm $\|\cdot\|_1$ on *tugevam* samas ruumis antud normist $\|\cdot\|_2$ (norm $\|\cdot\|_2$ on normist $\|\cdot\|_1$ *nõrgem*), kui leidub $c > 0$ nii, et $\|x\|_2 \leqslant c \|x\|_1$ iga $x \in X$ korral.

Definitsioon. Norme $\|\cdot\|_1$ ja $\|\cdot\|_2$ vektorruumis X nimetatakse *ekvivalentseteks*, kui leiduvad positiivsed konstandid c_1 ja c_2 nii, et $c_1 \|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant c_2 \|x\|_1$ iga $x \in X$ korral.

Lause. *Kui jada koondub tugevamas normis, siis koondub ta ka nõrgemas normis.*

Tõestus. Kui $\|x_n - x\|_1 \to 0$ ja $\|\cdot\|_2 \leqslant c_2 \|\cdot\|_1$, siis $\|x_n - x\|_2 \leqslant c \|x_n - x\|_1 \to 0$, millest $\|x_n - x\|_2 \to 0$. □

Järeldus. *Ekvivalentsetes normides jadad koonduvad või hajuvad samaaegselt.*

Näide. Vaatleme ruumis $C[a,b]$ lisaks tavalisele normile $\|x\|_C = \max\limits_{a \leqslant t \leqslant b} |x(t)|$ veel normi $\|x\|_{L_1} = \int_a^b |x(t)| \, dt$. Siis

$$\|x\|_{L_1} = \int_a^b |x(t)| \, dt \leqslant \int_a^b \|x\|_C \, dt = (b-a) \|x\|_C \, ,$$

st. norm $\|\cdot\|_C$ on normist $\|\cdot\|_{L_1}$ tugevam. Need normid ei ole aga ekvivalentsed, sest funktsioonide $x_n(t) = \left(\frac{t-a}{b-a}\right)^n$, $t \in [a,b]$, korral $\|x_n\|_C = 1$, aga $\|x_n\|_{L_1} = \int_a^b \left(\frac{t-a}{b-a}\right)^n dt = \frac{b-a}{n+1} \to 0$, kui $n \to \infty$.

Indeks

ümbrus, 12

absoluutselt
- pidev funktsioon, 10

ahendav operaator, 25
alamruum
- Banachi ruumis, 30
- meetrilises ruumis, 2
- normeeritud ruumis, 30

algebraliste tehete pidevus
- normeeritud ruumis, 28

Baire'i teoreem, 19
Banachi
- püsipunkti printsiip, 25
- ruum, 27

Cantori teoreem, 18
Cauchy
- jada, 17
- kriteerium, 17

diskreetne
- meetrika, 3
- meetriline ruum, 3

ekvivalentsed
- normid, 31

ekvivalentsed jadad, 20

fundamentaaljada, 17
funktsionaalruumid, 9

Hölderi
- võrratus, 4
- võrratuse integraalkuju, 10

hajuv jada, 2
homogeensuse aksioom, 27

isomeetria, 20

jada fundamentaalsus, 17
jadaruumid, 6

kõikjal tihe hulk, 16
kaugus, 1
kauguse pidevus, 3
kera, 11
- keskpunkt, 11
- raadius, 11

keskmine koondumine, 10
kinnine
- hulk, 13
- kera, 11

kolmnurga võrratus
- meetrilises ruumis, 1
- normeeritud ruumis, 27

kompleksne
- ruum, 11

konstantne jada, 2
koonduv
- jada
  - meetrilises ruumis, 2
  - normeeritud ruumis, 28

lähenemisoperaator, 25
lahtine
- hulk, 12
- kera, 11

Lipschitzi tingimus, 25

meetrika, 1
- aksioomid, 1

meetriline ruum, 1
meetriliste ruumide isomeetrilisus, 20
Minkowski
- võrratus, 5
- võrratuse integraalkuju, 10

nõrgem norm, 31
nelinurga võrratus, 2
normeeruv ruum, 29

püsipunkt, 25
pidev operaator, 23
poolmeetriline ruum, 2

raja, 14
rajapunkt, 13
reaalne
  ruum, 11
ruum
  $C[a, b]$, 9, 28
  $C^n[a, b]$, 9, 29
  $L_1(a, b)$, 10
  $L_2(a, b)$, 10
  $L_p(a, b)$, 9, 29
  $M[a, b]$, 9, 28
  $W_p^n(a, b)$, 10, 29
  $\mathbb{C}$, 3
  $\mathbb{K}$, 3
  $\mathbb{R}$, 3
  $\mathbb{R}^n$, 4
  ℓ_p^n, 28
  ℓ_1, 8
  ℓ_2, 8
  ℓ_∞, 7
  ℓ_∞^n, 6
  ℓ_p, 7, 28
  ℓ_p^n, 4
  c, 7, 28
  c_0, 7, 28
  m, 6, 28
  m_n, 4, 28
  s, 8, 29
ruutkeskmine koondumine, 10

sümmeetria aksioom meetrilises ruumis, 1
samasuse e. identsuse aksioom
  meetrilises ruumis, 1
  normeeritud ruumis, 27
separaabel ruum, 16
sisemus, 14
sisepunkt, 12
Sobolevi ruum, 10
statsionaarne jada, 2
sulund, 14
suruv operaator, 25

täield, 20
täielik
  meetriline ruum, 17
tõkestatud hulk
  normeeritud ruumis, 30
tagurpidi kolmnurga võrratus
  meetrilises ruumis, 2
  normeeritud ruumis, 28
teoreem
  üksteisesse sisestatud keradest, 18
tugevam norm, 31

Sisukord

1 Meetrilised ruumid **1**
1.1 Meetrilise ruumi mõiste 1
1.2 Koonduvus meetrilises ruumis 2
1.3 Meetriliste ruumide näiteid
(konkreetsed meetrilised ruumid) 3
1.4 Hulgad meetrilistes ruumides 11
1.5 Separaablid meetrilised ruumid 16
1.6 Täielikud meetrilised ruumid 17
1.7 Meetrilise ruumi täielikkustamine 20

2 Pidevad operaatorid meetrilistes ruumides **23**
2.2 Pidevad operaatorid meetrilistes ruumides 23
2.3 Banachi püsipunkti printsiip 25

3 Normeeritud ruumid **27**
3.2 Normeeritud ruumi ja Banachi ruumi mõiste 27