

Съдържание

1	Афинни пространства. Барицентрични координати.	2
2	Афинни изображения.	13
3	Алгоритъм на de Casteljaу.	18
4	Blossom на крива на Bézier.	23
5	Полиноми на Бернщейн.	26
6	Производни на крива на Bézier.	32
7	Връзка между производни на крива на Bézier и алгоритъм на de Casteljaу.	34
8	Blossom и поляра.	36
9	Непараметрично зададени криви и cross plot.	38

1 Афинни пространства. Барицентрични координати.

Дефиниция 1 Векторно (линейно) пространство V над \mathbb{R} е множество от елементи, което е затворено относно линейните комбинации с реални коефициенти, т. е. ако $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n \in V$, то $\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \dots + \alpha_n \vec{v}_n \in V$, където $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. Елементите на V се наричат **вектори**, а коефициентите $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ - **скалари**.

Примери.

- Стандартното векторно пространство \mathbb{R}^n
- Множеството от всички алгебрични полиноми от степен n е векторно пространство.
- Множеството от всички $(n \times n)$ - матрици е векторно пространство
- Полуравнина в \mathbb{R}^2 не е векторно пространство (не е затворена относно линейните комбинации на вектори)

Дефиниция 2 Линейна обвивка S на векторите $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n \in V$ се нарича множеството от всички линейни комбинации $\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \dots + \alpha_n \vec{v}_n$, където $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ са произволни скалари.

Дефиниция 3 Векторите $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n \in V$ са **линейно независими**, ако уравнението

$$\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \dots + \alpha_n \vec{v}_n = 0$$

има единствено решение $\alpha_i = 0$, $i = 1, \dots, n$.¹ Ако $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ са линейно независими, казваме, че те са **базис** на S и S има размерност n ($\dim S = n$).

Ако $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ са базис на S , то всеки вектор $\vec{v} \in S$ може да се представи по единствен начин във вида

$$\vec{v} = \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \dots + \alpha_n \vec{v}_n.$$

Ако $S \equiv V$, казваме, че $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ са **базис** на V и $\dim V = n$.

Пространството \mathbb{R}^3 може да бъде разгледано по два различни начина:

1. като множество от точки
2. като векторно пространство с размерност 3.

Дефиниция 4 Афинно пространство \mathcal{A} се състои от множество от точки \mathcal{P} и векторно пространство V .

¹Еквивалентна дефиниция е следната: Никой от векторите $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ не може да се представи като линейна комбинация на останалите вектори.

В компютърната графика основно понятие е афинното пространство \mathbb{R}^3 . Точките и векторите (наричат се още свободни вектори) са основните обекти за операциите в компютърната графика. Въпреки че и точките, и векторите в \mathbb{R}^3 се описват с наредени тройки реални числа, те са съвсем различни обекти.

- Точката има позиция в \mathbb{R}^3 . Позицията е единствената характеристика, по която различаваме една точка от друга точка.
- Векторът има големина и посока, но няма фиксирана позиция в \mathbb{R}^3 . Използва се за преместване от една точка в друга точка.

Точките и векторите в афинните пространства са свързани чрез следните аксиоми:

1. За всеки две точки a и b съществува единствен вектор \vec{v} с посока от a и b . Записваме $\vec{v} = b - a$.
2. За всяка точка a и вектор \vec{v} съществува единствена точка b , така че

$$\vec{v} = b - a.$$

Последното равенство може да се запише още като $b = a + \vec{v}$. Геометрически това означава, че ако извършим трансляция на точката a на вектор \vec{v} , ще стигнем до точката b .

Нека $\mathcal{A} = (\mathcal{P}, \mathcal{V})$ е афинно пространство, a_0 е фиксирана точка в \mathcal{P} и $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ са базис на V . В случай, че скаларите $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ описват \mathbb{R}^n , то линейната комбинация $\alpha_1 \vec{v}_1 + \dots + \alpha_n \vec{v}_n$ описва векторното пространство V , а точката $a = a_0 + \alpha_1 \vec{v}_1 + \dots + \alpha_n \vec{v}_n$ описва \mathcal{P} .

Дефиниция 5 Нека $a_0 \in \mathcal{P}$ и $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ са базис на V . Това дефинира координатна система $a_0, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$, която наричаме **рамка** на V . Ако $a = a_0 + \alpha_1 \vec{v}_1 + \dots + \alpha_n \vec{v}_n$, коефициентите $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ се наричат **афинни координати** на точката a относно рамката $a_0, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$.

Примери.

- \mathbb{R}^n е афинно пространство
- Множеството от алгебричните полиноми от степен n не е афинно пространство (няма точки).
- Множеството от всички $(n \times n)$ - матрици не е афинно пространство
- Полуравнина в \mathbb{R}^2 не е афинно пространство! (не е векторно пространство).

Точките в \mathbb{R}^3 могат да се изваждат, като разликата им е вектор. Те не могат да се събират - операцията събиране не е дефинирана за точки, а само за вектори. Въпреки това, за точките може да се дефинира операция,

подобна на събирането. Тя се нарича *афинна комбинация на точки*² и е основната операция за точки в компютърната графика.

Дефиниция 6 Афинна комбинация на точките

$a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathcal{A}$ се нарича

$$\alpha_0 a_0 + \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_n a_n, \text{ където } \alpha_0 + \dots + \alpha_n = 1. \quad (1)$$

На пръв поглед операцията изглежда безсмислена, но след като я запишем във вида

$$\begin{aligned} & \alpha_0 a_0 + \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_n a_n \\ &= (1 - \alpha_1 - \dots - \alpha_n) a_0 + \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_n a_n \\ &= a_0 + \alpha_1 (a_1 - a_0) + \dots + \alpha_n (a_n - a_0), \end{aligned}$$

става ясно, че това е напълно законна операция, защото $a_i - a_0, i = 1, \dots, n$, е разлика на точки и следователно е вектор, линейната комбинация на вектори $\alpha_1 (a_1 - a_0) + \dots + \alpha_n (a_n - a_0)$ също е вектор, а сума на точката a_0 и вектор е точка. Следователно $a = \alpha_0 a_0 + \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_n a_n$, където $\alpha_0 + \dots + \alpha_n = 1$, е точка. Коефициентите $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ в (1) се наричат **барицентрични координати**³ на точката a относно точките a_0, a_1, \dots, a_n .

Векторите също имат барицентрични координати. Нека $b = \beta_0 a_0 + \beta_1 a_1 + \dots + \beta_n a_n, \beta_0 + \dots + \beta_n = 1$. Тогава векторът

$$\vec{v} = b - a = (\beta_0 - \alpha_0) a_0 + (\beta_1 - \alpha_1) a_1 + \dots + (\beta_n - \alpha_n) a_n$$

има барицентрични координати $\beta_0 - \alpha_0, \dots, \beta_n - \alpha_n$ относно точките a_0, \dots, a_n .

Н. В. Познаваме дали афинната комбинация на точки

$$\alpha_0 a_0 + \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_n a_n$$

е точка или вектор по сумата от барицентричните координати $\sum_{i=0}^n \alpha_i$. Афинната комбинация е точка, ако сумата е равна на 1 и е вектор, ако сумата е равна на 0. Ще отбележим също, че някои от барицентричните координати $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ може да са отрицателни.

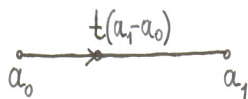
Пример. (фиг. 1) Афинна комбинация на две точки a_0 и a_1 е

$$a = \alpha_0 a_0 + \alpha_1 a_1, \quad \alpha_0 + \alpha_1 = 1,$$

или записано по друг начин (като положим $t := \alpha_1$)

$$a = a(t) = (1 - t) a_0 + t a_1 = a_0 + t(a_1 - a_0), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Очевидно $a(0) = a_0$ и $a(1) = a_1$. Когато $-\infty < t < \infty$, (2) описва правата линия през точките a_0 и a_1 . Ако $0 \leq t \leq 1$, (2) описва отсечката с краища a_0 и a_1 .



фиг. 1

Важен частен случай на афинните комбинации на точки е изпъкналата комбинация на точки.

Дефиниция 7 Афинната комбинация $\alpha_0 a_0 + \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_n a_n$, $\alpha_0 + \dots + \alpha_n = 1$, се нарича **изпъкнала комбинация** на точките a_0, \dots, a_n , ако $0 \leq \alpha_i \leq 1$, $i = 0, \dots, n$.

Ако $n = 1$, множеството от всички изпъкнали комбинации на точките a_0 и a_1 е отсечката с краища a_0 и a_1 .

Дефиниция 8 Едно множество се нарича **изпъкнало**, ако съвкупността от всички изпъкнали комбинации на произволни две точки от множеството (т. е. отсечката с краища двете произволни точки) също принадлежи на множеството.

На фиг. 2 е показан пример на изпъкнало множество и множество, което не е изпъкнало.

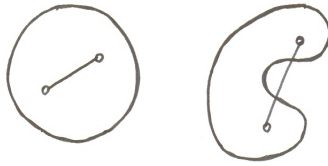
Дефиниция 9 Изпъкнала обвивка на точките a_0, \dots, a_n се нарича множеството от всички изпъкнали комбинации на a_0, \dots, a_n .

Това е минималното изпъкнало множество, което съдържа всичките точки (т. е. сечението на всички изпъкнали множества, съдържащи всичките точки). Ако $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}^2$, изпъкналата им обвивка е изпъкнал многоъгълник, чиито върхове са някои от точките (вж. фиг. 3).

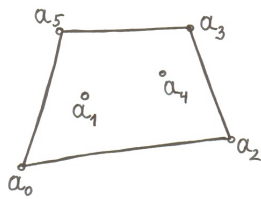
Дефиниция 10 Точките a_0, \dots, a_n са **афинно независими**, ако векторите $a_1 - a_0, \dots, a_n - a_0$ са линейно независими.

²Нарича се още и *барицентрична комбинация* на точки.

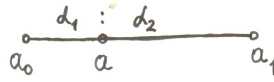
³Наименованието барицентър идва от физиката и означава център на тежестта. Ако a_j са центрове на тежестта на обекти с маси m_j , то центърът на тежестта на системата от обекти е $a = \sum m_j a_j / \sum m_j$. Понеже общ множител за всички m_j не оказва влияние на центъра на тежестта, можем да считаме, че $\sum m_j = 1$.



фиг. 2



фиг. 3



фиг. 4

От дефиниция 10 следва, че от всеки $n + 1$ афинно независими точки в \mathbb{R}^n може да се направи рамка.

Изпъкналата обвивка на $n + 1$ афинно независими точки в \mathbb{R}^n се нарича **симплекс**. Например симплекс в \mathbb{R}^1 е отсечка, в \mathbb{R}^2 е триъгълник, а в \mathbb{R}^3 е тетраедър.

Приложения.

- (фиг. 4 На картинката вместо α_2 трябва да пише α_0 .) Нека $n = 1$. Да означим $\text{ratio}(a_0, a, a_1) := \frac{a - a_0}{a_1 - a}$, където $b - a$ означава ориентираната дължина на отсечката с краища точките a и b . Тъй като $a = a_0 + \alpha_1(a_1 - a_0)$, то $a - a_0 = \alpha_1(a_1 - a_0) \Rightarrow$

$$\frac{a - a_0}{a_1 - a_0} = \frac{\alpha_1}{1} = \frac{\alpha_1}{\alpha_0 + \alpha_1}.$$

От друга страна

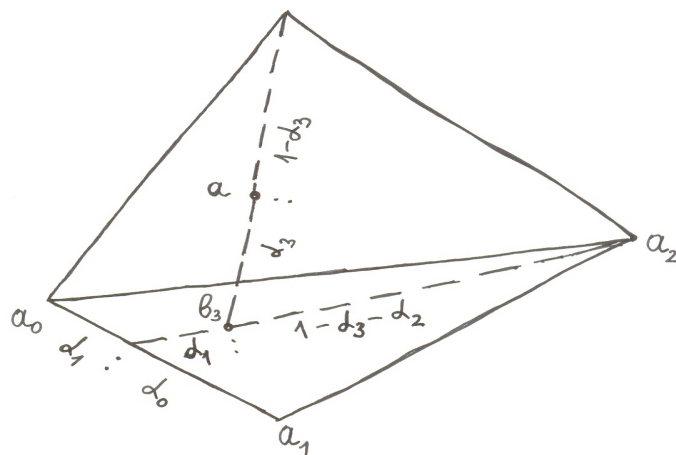
$$\frac{a - a_0}{a_1 - a_0} = \frac{a - a_0}{(a_1 - a) + (a - a_0)} = \frac{\alpha_1}{\alpha_0 + \alpha_1},$$

откъдето получаваме

$$\text{ratio}(a_0, a, a_1) = \frac{a - a_0}{a_1 - a} = \frac{\alpha_1}{\alpha_0}.$$

- (фиг. 5 На картинката във вътрешността на $\Delta a_0 a_1 a_2$ вместо α_1 трябва да пише α_2 .) Нека $a = \alpha_0 a_0 + \dots + \alpha_n a_n$, $\alpha_0 + \dots + \alpha_n = 1$. Нека $\alpha_n \neq 1$. Понеже $1 - \alpha_n = \alpha_0 + \dots + \alpha_{n-1}$, точката a може да я запишем във вида

$$\begin{aligned} a &= (1 - \alpha_n) \frac{\alpha_0 a_0 + \dots + \alpha_{n-1} a_{n-1}}{1 - \alpha_n} + \alpha_n a_n \\ &= (1 - \alpha_n) b_n + \alpha_n a_n, \end{aligned}$$

фиг. 5 ($n=3$)

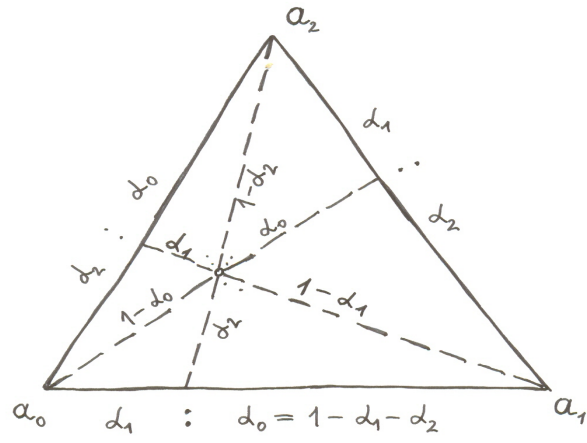
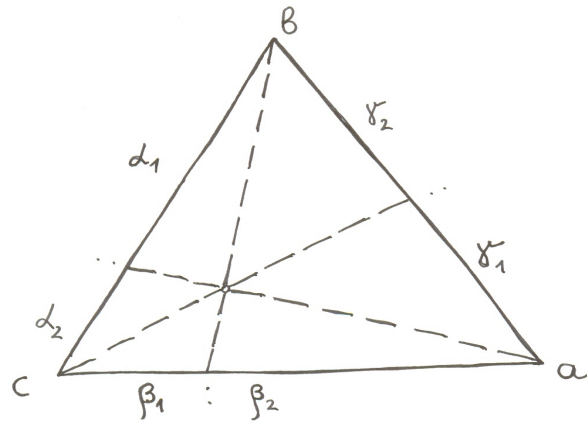
където $b_n = \beta_0 a_0 + \dots + \beta_{n-1} a_{n-1}$ и $\beta_i = \frac{\alpha_i}{1 - \alpha_n}$, $i = 0, \dots, n-1$. Тъй като $\beta_0 + \dots + \beta_{n-1} = 1$, то $\beta_0, \dots, \beta_{n-1}$ са барицентрични координати на точката b_n относно a_0, \dots, a_{n-1} . Понеже $a = (1 - \alpha_n)b_n + \alpha_n a_n$, то b_n е проекцията на a_n върху хиперравнината⁴, съдържаща точките a_0, \dots, a_{n-1} . Изпълнено е, че

$$\frac{1 - \beta_{n-1}}{\beta_{n-1}} = \frac{\beta_0 + \dots + \beta_{n-2}}{\beta_{n-1}} = \frac{\alpha_0 + \dots + \alpha_{n-2}}{\alpha_{n-1}} = \frac{1 - \alpha_n - \alpha_{n-1}}{\alpha_{n-1}}.$$

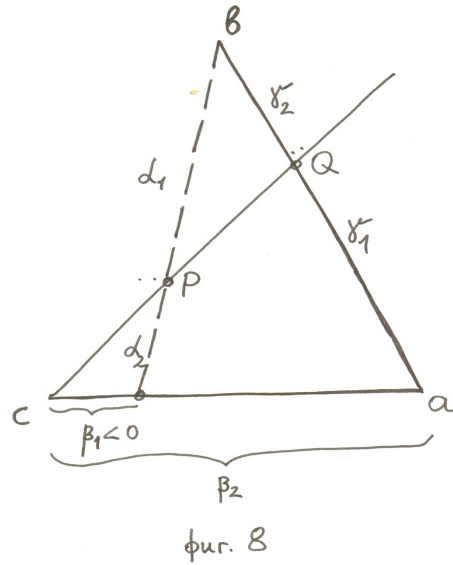
Горните разсъждения, приложени за $n = 2$ (вж. фиг. 6), довеждат до две добре известни геометрични теореми:

Теорема на Чѐва. (фиг. 7) *Трите пунктирани линии на чертежа се пресичат в една точка* $\iff \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \cdot \frac{\beta_1}{\beta_2} \cdot \frac{\gamma_1}{\gamma_2} = 1$.

⁴Афинното подпространство $B \subset A = \{P \cup V\}$ се нарича **хиперравнина**, ако $B = \{b \cup V\}$, където точката $b \in P$, а $B \subset V$ е подпространство, за което $\dim B = \dim V - 1$.

фиг. 6 ($n=2$)

фиг. 7



Теорема на Менелай. (фиг. 8) Точката Q лежи на правата $CP \iff$
 $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} \cdot \frac{\beta_1}{\beta_2} \cdot \frac{\gamma_1}{\gamma_2} = -1$.
Доказателство. Следва от фиг. 6 като забележим, че в случая (фиг. 8) е изпълнено

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} \cdot \frac{\beta_1}{\beta_2} \cdot \frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \frac{1 - \alpha_2}{\alpha_2} \cdot \frac{-\alpha_1}{\alpha_0 + \alpha_1} \cdot \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = -1.$$

Теоремата на Менелай е една от най-важните геометрични теореми в CAGD. Използва се за доказателството на много конструктивни алгоритми. По-долу теоремата е формулирана в термините на CAGD.

Теорема на Менелай (CAGD версия). Нека е изпълнено, че (вж. фиг. 9)

$$a_t = (1 - t)p_1 + t p_2$$

$$a_s = (1 - s)p_1 + s p_2$$

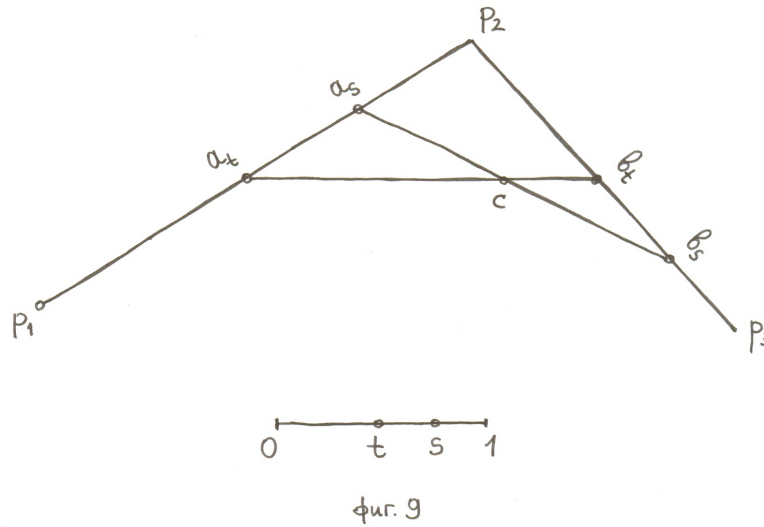
$$b_t = (1 - t)p_2 + t p_3$$

$$b_s = (1 - s)p_2 + s p_3$$

Тогав е в сила, че

$$\text{ratio}(a_s, c, b_s) = \frac{t}{1 - t},$$

$$\text{ratio}(a_t, c, b_t) = \frac{s}{1 - s}.$$



Доказателство. Първо пресмятаме

$$\begin{aligned} \text{ratio}(a_t, a_s, p_2) &= \frac{s-t}{1-s} \text{ и} \\ \text{ratio}(p_2, b_t, b_s) &= \frac{t}{s-t}. \end{aligned}$$

След това прилагаме оригиналната версия на теоремата на Менелай, като в случая имаме $\beta_1 = -(s-t)$, $\beta_2 = 1-t$, $\gamma_1 = t$, $\gamma_2 = s-t$. Получаваме

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \text{ratio}(a_s, c, b_s) = -\frac{\beta_1}{\beta_2} \cdot \frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \frac{s-t}{1-t} \cdot \frac{t}{s-t} = \frac{t}{1-t}.$$

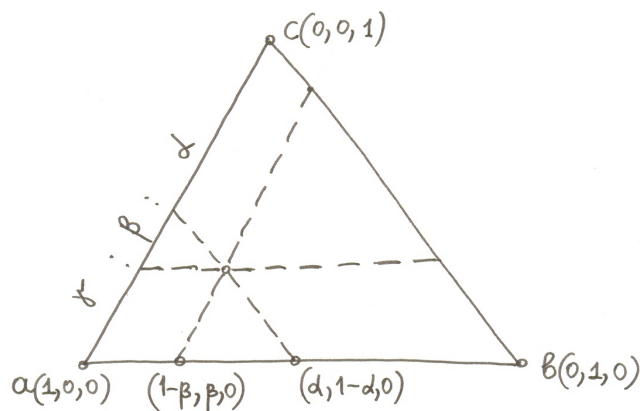
Аналогично получаваме, че $\text{ratio}(a_t, c, b_t) = \frac{s}{1-s}$. ■

Ще докажем още едно геометрично свойство на барицентричните координати. Разглеждаме $\triangle abc$ от фиг. 10 и произволна точка p , като $a, b, c, p \in \mathbb{R}^2$. Нека α, β, γ са барицентричните координати на p относно a, b, c , т. е

$$\begin{cases} p = \alpha a + \beta b + \gamma c \\ 1 = \alpha + \beta + \gamma. \end{cases} \quad (3)$$

Ако четирите точки са зададени с декартови координати $a(a_x, a_y)$, $b(b_x, b_y)$, $c(c_x, c_y)$, $p(p_x, p_y)$, системата (3) се записва във вида

$$\begin{cases} p_x = \alpha a_x + \beta b_x + \gamma c_x \\ p_y = \alpha a_y + \beta b_y + \gamma c_y \\ 1 = \alpha + \beta + \gamma. \end{cases} \quad (4)$$



фиг. 10

Това е система линейни уравнения относно неизвестните α, β, γ . Детерминантата ѝ е

$$\begin{aligned}
 D &= \begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_x - c_x & b_x - c_x & c_x \\ a_y - c_y & b_y - c_y & c_y \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} a_x - c_x & b_x - c_x \\ a_y - c_y & b_y - c_y \end{vmatrix} = (a - c) \times (b - c) = 2S_{\Delta abc}
 \end{aligned}$$

Тогава от формулите на Крамер получаваме

$$\alpha = \frac{S_{\Delta pbc}}{S_{\Delta abc}}, \quad \beta = \frac{S_{\Delta apc}}{S_{\Delta abc}}, \quad \gamma = \frac{S_{\Delta abp}}{S_{\Delta abc}}. \quad (5)$$

Забележка 1.1 За да са добре дефинирани α, β, γ , трябва $D = 2S_{\Delta abc} \neq 0$, т. е. точките a, b, c да са неколинеарни.

Забележка 1.2 Лицата на триъгълниците в (5) са ориентирани лица. Ако точката p не е вътре в Δabc , поне една от барицентричните ѝ координати е отрицателна.

Забележка 1.3 Да разгледаме пет точки $a, b, c, d, p \in \mathbb{R}^3$. Тогава барицентричните координати на p относно a, b, c, d са $\alpha = \frac{S_{pbcd}}{S_{abcd}}$, $\beta = \frac{S_{apcd}}{S_{abcd}}$ и т. н., където S_{abcd} е ориентирания обем на тетраедъра $abcd$.

2 Афинни изображения.

Голяма част от изображенията (трансформациите), които се използват за позициониране или мащабиране на обекти в компютърната графика, са **афинни изображения**.⁵

Дефиниция 11 *Изображението $\Phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ е афинно изображение, ако запазва афинните комбинации на точки, т.е.*

$$\text{ако } \mathbf{x} = \sum \alpha_j \mathbf{a}_j \Rightarrow \Phi(\mathbf{x}) = \sum \alpha_j \Phi(\mathbf{a}_j), \quad \sum \alpha_j = 1.$$

Понеже Φ е линейно изображение, то

$$\Phi(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \vec{v}, \quad (6)$$

където A е (3×3) - матрица и векторът $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$.

Твърдение. *Изображение от вида (6) е афинно изображение.*

Доказателство. Понеже $\sum \alpha_j = 1$, имаме

$$\begin{aligned} \Phi\left(\sum \alpha_j \mathbf{a}_j\right) &= A\left(\sum \alpha_j \mathbf{a}_j\right) + \vec{v} \\ &= \sum \alpha_j A\mathbf{a}_j + \sum \alpha_j \vec{v} \\ &= \sum \alpha_j (A\mathbf{a}_j + \vec{v}) \\ &= \sum \alpha_j \Phi(\mathbf{a}_j). \end{aligned}$$

■

Следователно изображенията от вида (6) са всичките афинни изображения от \mathbb{R}^3 в \mathbb{R}^3 .

Примери на афинни изображения.

- Ако $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ и $\vec{v} \neq 0$, имаме транслагция на вектор \vec{v} .
- Ако $A = \begin{pmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{pmatrix}$ и $\vec{v} = 0$ имаме мащабиране (scaling)⁶ по всяко от трите направления. Диагоналните елементи показват какъв е коефициентът на хомотетия по всяко от трите направления.

⁵affinis (лат.)-родствен. *Афинната геометрия* е раздел от геометрията, в който се изучават свойствата на фигурите в \mathbb{R}^2 (или \mathbb{R}^3), които се запазват при всички афинни изображения. Основният афинен инвариант е простото отношение на три колинеарни точки $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \frac{\mathbf{c} - \mathbf{a}}{\mathbf{c} - \mathbf{b}}$. Афинните изображения са изучени систематично за първи път от Möbius.

⁶Ако $k = k_1 = k_2 = k_3$ това е хомотетия с център 0 и коефициент k .

- Ако $A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ и $\vec{v} = 0$ имаме ротация около оста Oz .
- Изображението с матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & k_1 & k_2 \\ 0 & 1 & k_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ и $\vec{v} = 0$ (нарича се shear) се използва във font дизайна за генериране на наклонени букви (например *italics* в Latex).
- Ако $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ и $\vec{v} = 0$, Φ е успоредна проекция от \mathbb{R}^3 в \mathbb{R}^2 (също така може да се разглежда и като хомотетия с коефициент 0 по направление Oz).

Твърдение. Всяко афинно изображение може да се представи като суперпозиция на транслации, ротации, мащабирания (scalings) и shears.

Рангът $r(A)$ на матрицата A има важна геометрична интерпретация: Ако $r(A) = 3$, афинното изображение Φ изобразява тримерни обекти в тримерни обекти; ако $r(A) \leq 2$, Φ е успоредно проектиране върху равнина ($r(A) = 2$) или върху права линия ($r(A) = 1$).

Пример 1. Отсечката $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ (това е линейна интерполация на точките $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$) е афинен образ на интервала $[0, 1]$ (вж. фиг. 1, където вместо $u : 1 - u$ трябва да пише $u - a : b - u$), но също така може да се разглежда и като афинен образ на произволен интервал $[a, b]$. Интервалът $[a, b]$ от своя страна също може да се разглежда като афинен образ на интервала $[0, 1]$. Ако $t \in [0, 1]$ и $u \in [a, b]$, изображението е

$$\frac{u - a}{b - a} = \frac{t}{1 - t} \quad \text{т. е.} \quad t = (u - a)/(b - a).$$

Тогав интерполираната точка \mathbf{x} от отсечката $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ е или

$$\mathbf{x}(t) = (1 - t)\mathbf{a} + t\mathbf{b},$$

или

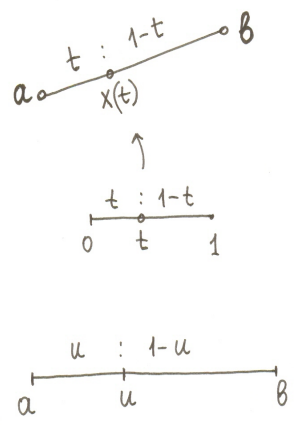
$$\mathbf{x}(u) = \frac{b - u}{b - a}\mathbf{a} + \frac{u - a}{b - a}\mathbf{b}.$$

Понеже a, u, b и $0, t, 1$ са в еднакво отношение, както $\mathbf{a}, \mathbf{x}, \mathbf{b}$, казваме също така, че *линейната интерполация е инвариантна при афинни изображения*.

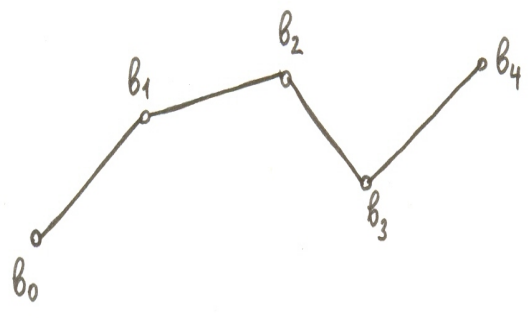
Пример 2. Нека точките $\mathbf{b}_0, \dots, \mathbf{b}_n \in \mathbb{R}^3$, $n \geq 1$, образуват полигон P . **Полигон** е начупената линия, състояща се от отсечките с краища $\mathbf{b}_i, \mathbf{b}_{i+1}$, $i = 0, \dots, n - 1$ (вж. фиг. 2).

Това е частично - линейна интерполанта на точките $\mathbf{b}_i, i = 0, \dots, n$. Ако точките \mathbf{b}_i лежат на непрекъснатата крива C (вж. фиг. 3), казваме, че P е частично - линейна интерполанта на C , което означаваме с $P = pl C$.⁷

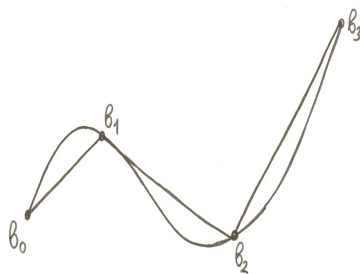
⁷Означението pl е съкращение от piecewise linear.



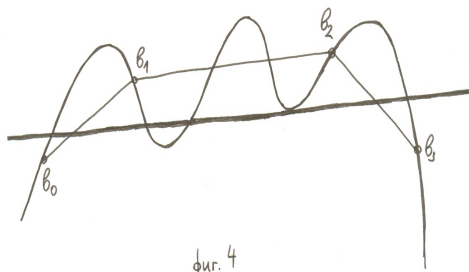
фиг. 1



фиг. 2



фиг. 3



фиг. 4

Частично - линейната интерполация има две важни свойства:

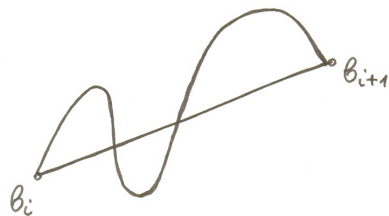
1. **Афинна инвариантност.** Това означава, че ако кривата C се изобрази в кривата ΦC чрез афинното изображение Φ , то частично - линейната интерполанта $pl \Phi C$ е афинен образ на първоначалната частично - линейна интерполанта $pl C$, т. е.

$$pl \Phi C = \Phi pl C$$

2. **Намаляване на вариацията.** Да пресечем кривата C с произволна равнина. Ще казваме, че точката \mathbf{a} е пресечна точка на кривата с равнината, ако в произволна околност⁸ на \mathbf{a} има точки от C , намиращи се в различни полупространства относно равнината. Нека $\text{cross } C$ е броят на пресечните точки на кривата с равнината. Тогава е изгълнено, че (вж. фиг. 4)

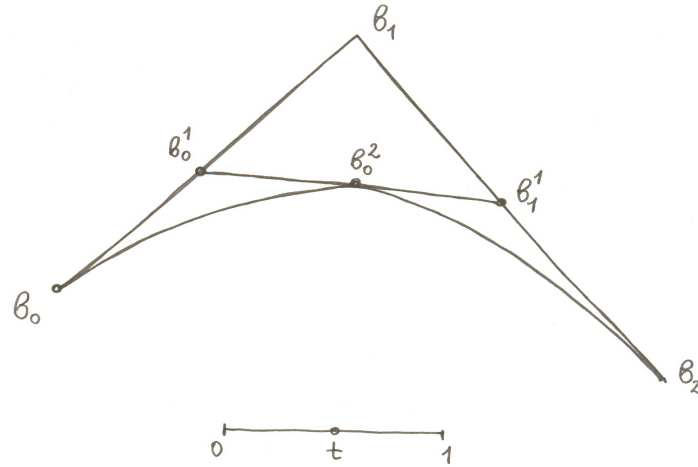
$$\text{cross } pl C \leq \text{cross } C. \quad (7)$$

⁸Околност на точка в \mathbb{R}^3 е отворено кълбо, съдържащо точката.



фиг. 5

Горното неравенство следва от факта, че произволна равнина може да пресече отсечката с краища \mathbf{b}_i и \mathbf{b}_{i+1} най-много в една точка, докато частта от кривата C между двете точки (фиг. 5) може да пресича равнината в повече от една точки. Свойството (7) се нарича *намаляване на вариацията*.



фиг. 1

3 Алгоритъм на de Casteljau.

Ще покажем прост геометричен метод за получаване на парабола. Нека \mathbf{b}_0 , \mathbf{b}_1 и \mathbf{b}_2 са три различни точки от \mathbb{R}^3 и $t \in \mathbb{R}$. Нека

$$\mathbf{b}_0^1 = (1-t)\mathbf{b}_0 + t\mathbf{b}_1,$$

$$\mathbf{b}_1^1 = (1-t)\mathbf{b}_1 + t\mathbf{b}_2,$$

$$\mathbf{b}_0^2 = (1-t)\mathbf{b}_0^1 + t\mathbf{b}_1^1.$$

Като заместим първите две уравнения в третото, получаваме

$$\mathbf{b}_0^2 = (1-t)^2\mathbf{b}_0 + 2t(1-t)\mathbf{b}_1 + t^2\mathbf{b}_2. \quad (8)$$

Това е квадратно уравнение относно t , следователно (8) описва парабола, когато t се мени от $-\infty$ до $+\infty$. Ще означаваме тази парабола с \mathbf{b}^2 . Построихме я чрез последователна линейна интерполация (вж. фиг. 1). Изпълнено е, че

$$\text{ratio}(\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_0^1, \mathbf{b}_1) = \text{ratio}(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_1^1, \mathbf{b}_2) = \text{ratio}(\mathbf{b}_0^1, \mathbf{b}_0^2, \mathbf{b}_1^1) = \frac{t}{1-t},$$

откъдето следва, че конструирането на параболата е афинно инвариантно.

Свойства на $\mathbf{b}^2(t)$.

- *Интерполира двете крайни точки.* Очевидно $\mathbf{b}^2(0) = \mathbf{b}_0$ и $\mathbf{b}^2(1) = \mathbf{b}_2$.

- $\mathbf{b}^2(t)$ е непрекъсната и има непрекъснати производни от произволен ред, защото е полином.
- От (8) следва, че

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathbf{b}^2(t) &= -2(1-t)\mathbf{b}_0 + (-2t + 2(1-t))\mathbf{b}_1 + 2t\mathbf{b}_2 \\ &= 2((1-t)(\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_0) + t(\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1)).\end{aligned}$$

Ако $t = 0$, получаваме, че векторът $\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_0$ е допирателен вектор към кривата в точката \mathbf{b}_0 . Ако $t = 1$, допирателният вектор в точката \mathbf{b}_2 е $\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1$.

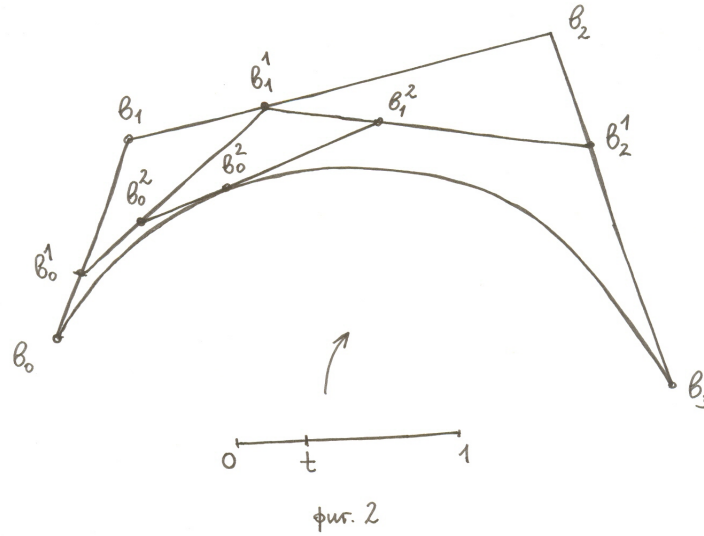
- *Параболата е равнинна крива.* От (8) следва, че $\mathbf{b}^2(t)$ е барицентрична комбинация на точките \mathbf{b}_0 , \mathbf{b}_1 и \mathbf{b}_2 , защото

$$(1-t)^2 + 2t(1-t) + t^2 = 1.$$

Следователно $\mathbf{b}^2(t)$ лежи в равнината на $\triangle\mathbf{b}_0\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2$.

- *Изпъкнала обвивка.* Когато $t \in [0, 1]$, барицентричната комбинация е изпъкнала комбинация, защото и трите коефициента в (8) са неотрицателни. Следователно $\mathbf{b}^2(t)$ принадлежи на изпъкналата обвивка на точките \mathbf{b}_0 , \mathbf{b}_1 и \mathbf{b}_2 , която е вътрешността на $\triangle\mathbf{b}_0\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2$.
- *Ако трите точки \mathbf{b}_0 , \mathbf{b}_1 и \mathbf{b}_2 са колинеарни, $\mathbf{b}^2(t)$ е права линия,* защото изпъкналата обвивка на отсечка е самата отсечка.

И така, параболата е равнинна крива, затова ако искаме да работим с пространствени криви, ще трябва да обобщим алгоритъма за полиномиални криви от произволна степен n .



Алгоритъм на de Casteljau.

Вход: $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n \in \mathbb{R}^3$, $t \in \mathbb{R}$

$$\mathbf{b}_i^r(t) = (1-t)\mathbf{b}_i^{r-1}(t) + t\mathbf{b}_{i+1}^{r-1}(t), \quad r = 1, \dots, n; \quad i = 0, \dots, n-r$$

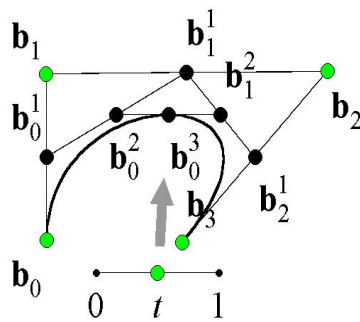
$$\mathbf{b}_i^0 = \mathbf{b}_i \tag{9}$$

Изход: $\mathbf{b}_0^n(t)$ е точка от кривата \mathbf{b}^n , съответстваща на параметъра t .

Полиномиалната крива \mathbf{b}^n се нарича **крива на Bézier**. Полигонът, образуван от точките $\mathbf{b}_0, \dots, \mathbf{b}_n$, се нарича **полигон на Bézier** или **контролен полигон** на кривата. Точките \mathbf{b}_i се наричат **точки на Bézier** или **контролни точки**. На фиг. 2 е показан алгоритъмът за $n = 3$, който генерира кубична крива на Bézier.

Междинните точки \mathbf{b}_i^r е удобно да се записват в триъгълна таблица, която ще наричаме **схема на de Casteljau**. Например схемата за кубична крива ($n=3$) изглежда по следния начин:

$$\begin{array}{cccc}
 \mathbf{b}_0 & & & \\
 \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_0^1 & & \\
 \mathbf{b}_2 & \mathbf{b}_1^1 & \mathbf{b}_0^2 & \\
 \mathbf{b}_3 & \mathbf{b}_2^1 & \mathbf{b}_1^2 & \mathbf{b}_0^3
 \end{array}$$



Фигура 1: Областта от пример 3.1

Пример 3.1 По-долу е дадена схемата на de Casteljau за конкретна **равнинна** крива (вж. фиг. 1), оценена за $t = 1/2$. Точките $\mathbf{b}_i^r \in \mathbb{R}^2$ са зададени с декартовите си координати (x, y) .

$(0, 0)$

$(0, 2)$ $(0, 1)$

$(8, 2)$ $(4, 2)$ $(2, 3/2)$

$(4, 0)$ $(6, 1)$ $(5, 3/2)$ $(7/2, 3/2)$

Някои свойства на кривите на Bézier, получени с геометрични аргументи.

- *Афинна инвариантност.* Следва директно от геометричния алгоритъм на de Casteljau, при който точките от кривата се получават чрез линейна интерполация. Афинните изображения са основно средство във всяка САД система, затова афинната инвариантност е едно много важно свойство. Ще отбележим, обаче, че афинните изображения имат един съществен недостатък - те не са инвариантни при проективните изображения, които се използват за по-реалистично представяне на обектите (например в компютърната анимация).

- *Инвариантност при афинни преобразувания на параметъра.* Алгоритъмът „не вижда“ какъв е интервалът, в който е дефиниран параметърът t , защото използва само просто отношение на три точки. Затова ако кривата е дефинирана в произволен интервал $a \leq u \leq b$, можем да направим смяна на параметъра $0 \leq t = \frac{u-a}{b-a} \leq 1$, след което алгоритъмът продължава по обичайния начин. Обобщеният алгоритъм изглежда така:

$$\mathbf{b}_i^r(u) = \frac{b-u}{b-a} \mathbf{b}_i^{r-1}(u) + \frac{u-a}{b-a} \mathbf{b}_{i+1}^{r-1}(u). \quad (10)$$

Понеже преминаването от интервала $[a, b]$ към интервала $[0, 1]$ е афинно изображение, кривите на Bézier са инвариантни при афинни преобразувания на параметъра.

- *Свойството на изпъкналата обвивка.* Ако $0 \leq t \leq 1$, $\mathbf{b}^n(t)$ лежи в изпъкналата обвивка на контролните точки. Това е така, защото всяка междинна точка \mathbf{b}_i^r се получава като изпъкнала комбинация на две точки от предишната стъпка, следователно на никоя стъпка не може да излезем извън изпъкналата обвивка на началните точки.

Следствие: Равнинен полигон генерира равнинна крива.

Пример. Interference checking - алгоритъм за бърза проверка дали дадени две криви на Bézier се пресичат. Използва т. нар. minmaxboxes, чиито страни са успоредни на координатните оси, а координатите на върховете им се получават от минималните и максималните координати на контролния полигон.

- *Интерполация на крайните контролни точки.* Вижда се от схемата на de Casteljau като я приложим за $t = 0$ и $t = 1$. Крайните контролни точки са две много важни точки в геометричния дизайн и е добре да имаме директен контрол върху тях.
- *Симетрия.* Ако вместо полигона $\mathbf{b}_0, \dots, \mathbf{b}_n$ разгледаме полигона $\mathbf{b}_n, \dots, \mathbf{b}_0$, ще получим същата крива.
- *Линейна точност.* Ако контролните точки са колинеарни, \mathbf{b}^n е права линия.

4 Blossom на крива на Bézier.

Алгоритъмът на de Casteljau може да се обобщи по следния начин: на r -тото ниво, т.е. при пресмятането на междинните точки \mathbf{b}_i^r , вместо да използваме стойност на параметъра t , ще извършим оценяването за нова стойност на параметъра t_r . Например за $n = 3$ (случая на кубична крива) схемата на de Casteljau изглежда по следния начин:

$$\begin{array}{cccc} \mathbf{b}_0 & & & \\ \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_0^1[t_1] & & \\ \mathbf{b}_2 & \mathbf{b}_1^1[t_1] & \mathbf{b}_0^2[t_1, t_2] & \\ \mathbf{b}_3 & \mathbf{b}_2^1[t_1] & \mathbf{b}_1^2[t_1, t_2] & \mathbf{b}_0^3[t_1, t_2, t_3]. \end{array}$$

Точката $\mathbf{b}_0^3[t_1, t_2, t_3]$ е функция на три независими променливи, следователно вече не описва крива, а област в \mathbb{R}^3 .

Дефиниция 12 Функцията на три променливи $\mathbf{b}[\cdot, \cdot, \cdot]$ се нарича **blossom** на кривата $\mathbf{b}^3(t)$.

Самата крива $\mathbf{b}^3(t)$ се получава при $t_1 = t_2 = t_3 = t$.

Сега ще пресметнем blossom на кривата $\mathbf{b}^3(t)$ за някои конкретни стойности на аргументите. Очевидно $\mathbf{b}_0^3[0, 0, 0] = \mathbf{b}_0$ и $\mathbf{b}_0^3[1, 1, 1] = \mathbf{b}_3$. Да приложим схемата на de Casteljau за $[t_1, t_2, t_3] = [0, 0, 1]$:

$$\begin{array}{cccc} \mathbf{b}_0 & & & \\ \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_0 & & \\ \mathbf{b}_2 & \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_0 & \\ \mathbf{b}_3 & \mathbf{b}_2 & \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_1 = \mathbf{b}[0, 0, 1]. \end{array}$$

Аналогично получаваме $\mathbf{b}_2 = \mathbf{b}[0, 1, 1]$. Следователно контролните точки на кривата се получават като стойности на нейния blossom при стойности на аргументите само нули и единици. Всъщност всичките междинни точки \mathbf{b}_i^r в схемата могат да се получат като стойности на blossom -а за конкретни стойности на аргументите. Например за $[t_1, t_2, t_3] = [0, 0, t]$ получаваме

$$\begin{array}{cccc} \mathbf{b}_0 & & & \\ \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_0 & & \\ \mathbf{b}_2 & \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_0 & \\ \mathbf{b}_3 & \mathbf{b}_2 & \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_0^1 = \mathbf{b}[0, 0, t]. \end{array}$$

Цялата схема на de Casteljau може да я запишем като

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_0 &= \mathbf{b}[0, 0, 0] \\ \mathbf{b}_1 &= \mathbf{b}[0, 0, 1] \quad \mathbf{b}[0, 0, t] \\ \mathbf{b}_2 &= \mathbf{b}[0, 1, 1] \quad \mathbf{b}[0, t, 1] \quad \mathbf{b}[0, t, t] \\ \mathbf{b}_3 &= \mathbf{b}[1, 1, 1] \quad \mathbf{b}[t, 1, 1] \quad \mathbf{b}[t, t, 1] \quad \mathbf{b}[t, t, t]. \end{aligned}$$

Случаят на кубична крива лесно се обобщава за крива от произволна степен n . Контролните ѝ точки, изразени чрез стойностите на blossom -а са

$$\mathbf{b}_i = \mathbf{b}[0^{<n-i>}, 1^{<i>}],$$

където $t^{<r>}$ означава, че t участва r пъти като аргумент. Например

$$\mathbf{b}[0^{<1>}, t^{<2>}, 1^{<0>}] = \mathbf{b}[0, t, t].$$

Алгоритъмът на de Casteljau (9) може да се запише чрез blossom по следния начин:

$$\begin{aligned} \mathbf{b}[0^{<n-r-i>}, t^{<r>}, 1^{<i>}] &= (1-t)\mathbf{b}[0^{<n-r-i+1>}, t^{<r-1>}, 1^{<i>}] \\ &\quad + t\mathbf{b}[0^{<n-r-i>}, t^{<r-1>}, 1^{<i+1>}]. \end{aligned}$$

Точката от кривата, съответстваща на параметъра t , е $\mathbf{b}[t^{<n>}]$.

Дефиниция 13 *Функции, чиито стойности не зависят от наредбата на аргументите им, се наричат **симетрични функции**.*

Твърдение. *Функцията blossom е симетрична полиномиална функция на n променливи.*

Доказателството на това твърдение за $n = 2$ следва от CAGD версията на теоремата на Менелай (фиг. 9 от Афинни пространства. Барицентрични координати). За точката \mathbf{c} от фиг. 9 е изпълнено $\mathbf{c} = \mathbf{b}[t, s] = \mathbf{b}[s, t]$. Общият случай следва от този частен случай.

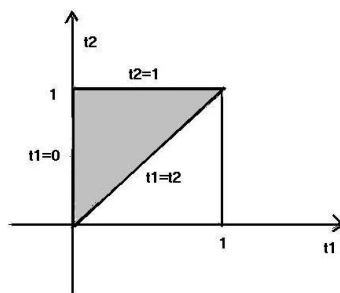
Функцията blossom има още едно важно свойство. Ако първият ѝ аргумент е афинна комбинация на две (или повече) числа, например $t_1 = \alpha t + \beta s$, можем да пресметнем blossom-а по следния начин:

$$\mathbf{b}[\alpha t + \beta s, t_2, \dots, t_n] = \alpha \mathbf{b}[t, t_2, \dots, t_n] + \beta \mathbf{b}[s, t_2, \dots, t_n], \quad \alpha + \beta = 1.$$

Горното означава, че blossom-а \mathbf{b} е афинен относно първия си аргумент, следователно поради симетрията си е афинен и относно всеки от аргументите си. Това означава, че blossom-а е **мултиафинна функция**.

Можем да разглеждаме и blossom на крива на Bézier, който е дефиниран в произволен интервал $[a, b]$. От (10) следва, че

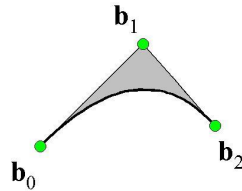
$$\mathbf{b}_i = \mathbf{b}[a^{<n-i>}, b^i]. \quad (11)$$



Фигура 2: Дефиниционната област на функцията $b[t_1, t_2]$

Задача. Нека b_0, b_1, b_2 са три различни точки в \mathbb{R}^3 . Каква област в \mathbb{R}^3 описва функцията $b[t_1, t_2]$, където $0 \leq t_1, t_2 \leq 1$?

Решение. Дефиниционната област на функцията $b[t_1, t_2]$ е $0 \leq t_1, t_2 \leq 1$, което представлява квадрат със страна единица (вж. фиг. 2). Тази област може да я представим като обединение на двете области $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq 1$ и $0 \leq t_2 \leq t_1 \leq 1$, на които диагоналът $t_1 = t_2$ разделя единичния квадрат (вж. фиг. 2) Поради симетричността на функцията blossom ($b[t_1, t_2] = b[t_2, t_1]$), достатъчно е да разгледаме за дефиниционна област на $b[t_1, t_2]$ единия от двата триъгълника, например $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq 1$. Неговата граница се състои от трите отсечки $t_1 = 0$, $t_2 = 1$ и $t_1 = t_2$. Трите криви, дефинирани над тези отсечки са $b[0, t_2]$, $0 \leq t_2 \leq 1$ (това е отсечката с краища b_0 и b_1), $b[t_1, 1]$, $0 \leq t_1 \leq 1$ (това е отсечката с краища b_1 и b_2) и $b[t, t]$, $0 \leq t \leq 1$ (това е параболата с контролни точки b_0, b_2 и b_3). Търсената област е областта, чийто контур се състои от тези три криви (вж. фиг. 3).



Фигура 3: Областта, която се описва от функцията $b[t_1, t_2]$

5 Полиноми на Бернщейн.

Кривите на Bézier дефинирахме чрез геометричния рекурсивен алгоритъм на de Casteljau (9). За да улесним изучаването на свойствата на тези полиномиални криви ще ни трябва аналитичното им представяне.

Дефиниция 14 *Полиномът от n -та степен*

$$B_i^n(t) := \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i},$$

където биномните коефициенти са

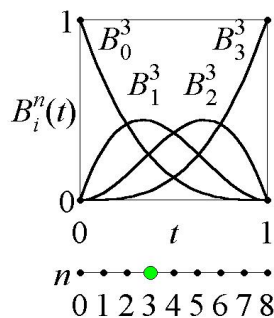
$$\binom{n}{i} = \begin{cases} \frac{n!}{i!(n-i)!} & \text{ако } 0 \leq i \leq n \\ 0 & \text{в ост. случаи} \end{cases},$$

се наричат полиноми на Бернщейн.

Например

$$\begin{aligned} B_0^0(t) &\equiv 1, \\ B_0^1(t) &= 1-t, \quad B_1^1(t) = t, \\ B_0^2(t) &= (1-t)^2, \quad B_1^2(t) = 2t(1-t), \quad B_2^2(t) = t^2. \end{aligned}$$

Забележка. За фиксирано n (горния индекс в означението $B_i^n(t)$) полиномите на Бернщейн, които не са тъждествено нула, са точно $n+1$ на брой (колкото стойности приема долния индекс $i = 0, 1, \dots, n$) и всичките



Фигура 4: Полиномите на Бернщейн за $n = 3$

са от степен n .

Свойства на полиномите на Бернщейн.

1. Едно от най-важните им свойства е **рекурсията**,

$$B_i^n(t) = (1-t)B_i^{n-1}(t) + tB_{i-1}^{n-1}(t).$$

Доказателство.

$$\begin{aligned} & (1-t)B_i^{n-1}(t) + tB_{i-1}^{n-1}(t) \\ &= (1-t) \binom{n-1}{i} t^i (1-t)^{n-i-1} + t \binom{n-1}{i-1} t^{i-1} (1-t)^{n-i} \\ &= t^i (1-t)^{n-i} \left(\binom{n-1}{i} + \binom{n-1}{i-1} \right) = t^i (1-t)^{n-i} \binom{n}{i}. \end{aligned}$$

■

2. Полиномите на Бернщейн разделят единицата, т. е. $\sum_{i=0}^n B_i^n(t) \equiv 1$.

Доказателство.

$$\sum_{i=0}^n B_i^n(t) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} = (t + 1 - t)^n = 1.$$

■

3. Полиномите на Бернщайн са неотрицателни при $0 \leq t \leq 1$, т. е. $B_i^n(t) \geq 0$ при $0 \leq t \leq 1$. Това свойство е очевидно следствие от дефиницията.

Сега ще докажем теорема за пресмятане на междинната точка b_i^r в алгоритъма на de Casteljau (9).

Теорема.

$$b_i^r(t) = \sum_{j=0}^r b_{i+j} B_j^r(t) = b_i B_0^r(t) + b_{i+1} B_1^r(t) + \dots + b_{i+r} B_r^r(t). \quad (12)$$

Тази теорема показва, че междинната точка b_i^r в алгоритъма на de Casteljau зависи само от точките $b_i, b_{i+1}, \dots, b_{i+r}$. Например b_0^1 зависи от b_0 и b_1 ; b_1^1 зависи от b_1 и b_2 ; b_2^1 зависи от b_2 и b_3 ; b_0^3 зависи от b_0, b_1, b_2 и b_3 (всичките контролни точки). Най-важният случай се получава при $r = n$ и $i = 0$,

$$b^n(t) := b_0^n(t) = b_0 B_0^n(t) + b_1 B_1^n(t) + \dots + b_n B_n^n(t).$$

Доказателство на (12). Ще докажем (12) чрез индукция по r .

$$\begin{aligned} b_i^r(t) &= (1-t)b_i^{r-1}(t) + t b_{i+1}^{r-1}(t) \text{ (алгоритъм на de Casteljau)} \\ &= (1-t) \sum_{j=0}^{r-1} b_{i+j} B_j^{r-1}(t) + t \sum_{j=0}^{r-1} b_{i+j+1} B_j^{r-1}(t) \\ &\quad \text{(индукционно допускане)} \\ &= (1-t) \sum_{j=0}^{r-1} b_{i+j} B_j^{r-1}(t) + t \sum_{j=1}^r b_{i+j} B_{j-1}^{r-1}(t) \\ &\quad \text{(смяна на сумационния индекс във втората сума)} \\ &= (1-t) \sum_{j=0}^r b_{i+j} B_j^{r-1}(t) + t \sum_{j=0}^r b_{i+j} B_{j-1}^{r-1}(t) \\ &\quad \text{(защото } B_r^{r-1}(t) = B_{-1}^{r-1}(t) \equiv 0) \\ &= \sum_{j=0}^r b_{i+j} ((1-t)B_j^{r-1}(t) + t B_{j-1}^{r-1}(t)) \\ &= \sum_{j=0}^r b_{i+j} B_j^r(t) \text{ (рекурсия)}. \end{aligned}$$

■

Геометрична интерпретация на (12)

1. Пресмятат се r нива на алгоритъма на de Casteljau.
2. Получените точки $b_i^r(t)$ се разглеждат като контролни точки за крива на Bézier от степен $n - r$ и стойността ѝ се пресмята за стойност на параметъра t .

Свойства на кривите на Bézier (Сега ще ги получим отново, но с алгебрични аргументи).

1. *Афинна инвариантност.* Това свойство следва от факта, че барицентричните координати са инвариантни при афинни изображения и $\sum_{i=0}^n B_i^n(t) = 1$.
2. *Инвариантност при афинни преобразувания на параметъра.* Очевидно е изпълнено, че ако $0 \leq t \leq 1$ и $a \leq u \leq b$, то

$$\sum_{i=0}^n b_i B_i^n(t) = \sum_{i=0}^n b_i B_i^n\left(\frac{u-a}{b-a}\right).$$

3. *Свойството на изпъкналата обвивка.* Следва от $B_i^n(t) \geq 0$ и $\sum_{i=0}^n B_i^n(t) = 1$.
4. *Интерполация на крайните точки.* Това свойство е очевидно.
5. *Симетрия.* Следва от

$$\sum_{i=0}^n b_i B_i^n(t) = \sum_{i=0}^n b_{n-i} B_i^n(1-t),$$

сменя се само посоката върху кривата.

6. *Линейна точност.* Ще докажем това свойство само за равноотдалечени контролни точки, лежащи върху отсечката $[a, b]$. Нека $b_i = (1 - \frac{i}{n})a + \frac{i}{n}b$, $i = 0, \dots, n$. Поради афинната инвариантност (свойство 1) без ограничение можем да разглеждаме отсечката $[0, 1]$, т. е. $b_i = \frac{i}{n}$, $i = 0, \dots, n$. За да проверим линейната точност, трябва да докажем, че

$$\sum_{i=0}^n \frac{i}{n} B_i^n(t) = t. \quad (13)$$

Доказателство.

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n \frac{i}{n} B_i^n(t) &= \sum_{i=0}^n \frac{i}{n} \frac{n!}{i!(n-i)!} t^i (1-t)^{n-i} \\ &= t \sum_{i=1}^n \frac{(n-1)!}{(i-1)!((n-1)-(i-1))!} t^{i-1} (1-t)^{(n-1)-(i-1)} \\ &= t \sum_{i=1}^n \binom{n-1}{i-1} t^{i-1} (1-t)^{(n-1)-(i-1)} \\ &= t \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} t^j (1-t)^{n-1-j} \\ &\quad (\text{смяна на индекса } j := i-1) \\ &= t \sum_{j=0}^{n-1} B_j^{n-1}(t) = t \text{ (разделяне на единицата)}. \end{aligned}$$

■

7. *Инвариантност относно афинните комбинации.* Следва от очевидното равенство

$$\sum_{j=0}^n (\alpha b_j + \beta c_j) B_j^n(t) = \alpha \sum_{j=0}^n b_j B_j^n(t) + \beta \sum_{j=0}^n c_j B_j^n(t),$$

където $\alpha + \beta = 1$.

Следващата ни цел е да покажем, че полиномите на Бернщайн $B_i^n(t)$, $i = 0, \dots, n$ (ще напомним, че това са полиноми от степен n), са базис за алгебричните полиноми от степен n . Както добре е известно, пространството от алгебрични полиноми от степен n относно променливата t

$$\mathcal{P}_n(t) := \{a_0 t^n + a_1 t^{n-1} + \dots + a_n, a_i \in \mathbb{R}, i = 0, \dots, n\}$$

има размерност $n + 1$ и негов базис са полиномите $1, t, t^2, \dots, t^n$.

Тъй като $B_i^n(t) \in \mathcal{P}_n(t)$, то B_i^n може да се представи като линейна комбинация на базисните полиноми $1, t, t^2, \dots, t^n$. Следващата лема показва как става това.

Лема 5.1

$$B_i^n(t) = \sum_{j=i}^n (-1)^{j-i} \binom{n}{j} \binom{j}{i} t^j.$$

Доказателство. От дефиницията на $B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}$ и като използваме биномното развитие на $(1-t)^{n-i}$, получаваме

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i \sum_{k=0}^{n-i} \binom{n-i}{k} (-1)^k t^k = \sum_{k=0}^{n-i} (-1)^k \binom{n}{i} \binom{n-i}{k} t^{i+k}.$$

В последната сума сменяме сумационния индекс k с $j := i + k$ и получаваме

$$B_i^n(t) = \sum_{j=i}^n (-1)^{j-i} \binom{n}{i} \binom{n-i}{j-i} t^j.$$

Остава да покажем, че

$$\binom{n}{i} \binom{n-i}{j-i} = \binom{n}{j} \binom{j}{i},$$

което се проверява лесно. ■

Теорема 5.1 *Полиномите на Бернщайн B_i^n , $i = 0, \dots, n$, са базис за пространството $\mathcal{P}_n(t)$ от алгебрични полиноми от степен n .*

Доказателство. Тъй като полиномите $B_i^n(t)$, $i = 0, \dots, n$ са точно $n+1$ на брой, достатъчно е да покажем, че те са линейно независими.

Нека $\sum_{i=0}^n c_i B_i^n(t) = 0$. От лема 5.1 следва

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n c_i B_i^n(t) &= \sum_{i=0}^n c_i \sum_{j=i}^n (-1)^{j-i} \binom{n}{j} \binom{j}{i} t^j \\ &= c_0 \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} \binom{j}{0} t^j + c_1 \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \binom{n}{j} \binom{j}{1} t^j + \dots \\ &\quad + c_n \sum_{j=n}^n (-1)^{j-n} \binom{n}{j} \binom{j}{n} t^j \\ &= c_0 + \left(-\binom{n}{1} \binom{1}{0} c_0 + \binom{n}{1} \binom{1}{1} c_1 \right) t + \dots \\ &\quad + \left(\binom{n}{n} \binom{n}{0} (-1)^n c_0 + \dots + c_n \right) t^n = 0. \end{aligned}$$

Сега от линейната независимост на полиномите $1, t, t^2, \dots, t^n$ следва, че

$$c_0 = -c_0 + c_1 = \dots = (-1)^n c_0 + \dots + c_n = 0,$$

откъдето получаваме $c_0 = \dots = c_n = 0$. ■

Ще докажем за пълнота и още една лема, която показва по какъв начин всеки от полиномите $1, t, t^2, \dots, t^n$ се представя като линейна комбинация на полиномите на Бернщайн $B_i^n(t)$, $i = 0, \dots, n$.

Лема 5.2

$$t^i = \sum_{j=i}^n \frac{\binom{j}{i}}{\binom{n}{i}} B_j^n(t), \quad i = 0, \dots, n. \quad (14)$$

Доказателство. Доказателството ще извършим чрез индукция по n . За $n = 1$, $i = 0$ и $i = 1$ твърдението (14) лесно се проверява. Да допуснем, че (14) е вярно за $n - 1$. Тогава е изпълнено

$$\begin{aligned} t^i = t \cdot t^{i-1} &= t \sum_{j=i-1}^{n-1} \frac{\binom{j}{i-1}}{\binom{n-1}{i-1}} B_j^{n-1}(t) \\ &= t \sum_{j=i-1}^{n-1} \frac{\binom{j}{i-1}}{\binom{n-1}{i-1}} \binom{n-1}{j} t^j (1-t)^{n-1-j} \\ &= \sum_{k=i}^n \frac{\binom{k-1}{i-1}}{\binom{n-1}{i-1}} \binom{n-1}{k-1} t^k (1-t)^{n-k} \quad (\text{смяна на индекса } k := j+1) \\ &= \sum_{k=i}^n \frac{i}{k} \frac{\binom{k}{i}}{\binom{n}{i}} \frac{k}{n} \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} \end{aligned}$$

$$= \sum_{k=i}^n \frac{\binom{k}{i}}{\binom{n}{i}} B_j^n(t).$$

■

6 Производни на крива на Bézier.

Понеже кривата на Bézier от n -та степен е $b^n(t) = \sum_{j=0}^n b_j B_j^n(t)$, за да намерим нейната производна, ще ни е необходима производната на полинома на Бернщайн $B_j^n(t)$. Последователно получаваме

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} B_j^n(t) &= \frac{d}{dt} \binom{n}{j} t^j (1-t)^{n-j} \\ &= \frac{n! j}{j!(n-j)!} t^{j-1} (1-t)^{n-j} - \frac{n!}{j!(n-j)!} t^j (n-j) (1-t)^{n-j-1} \\ &= n \frac{(n-1)!}{(j-1)!(n-1-(j-1))!} t^{j-1} (1-t)^{n-1-(j-1)} - n \frac{(n-1)!}{j!(n-1-j)!} t^j (1-t)^{n-1-j} \\ &= n \binom{n-1}{j-1} t^{j-1} (1-t)^{n-1-(j-1)} - n \binom{n-1}{j} t^j (1-t)^{n-1-j} \\ &= n (B_{j-1}^{n-1}(t) - B_j^{n-1}(t)). \end{aligned}$$

Тогава за производната на кривата на Bézier получаваме

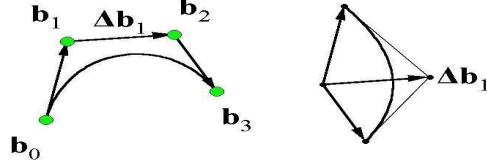
$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} b^n(t) &= n \sum_{j=0}^n (B_{j-1}^{n-1}(t) - B_j^{n-1}(t)) b_j \\ &= n \sum_{j=1}^n (B_{j-1}^{n-1}(t) b_j - n \sum_{j=0}^{n-1} B_j^{n-1}(t)) b_j \\ &\quad (\text{защото } B_n^{n-1}(t) \equiv 0) \\ &= n \sum_{j=0}^{n-1} B_j^{n-1}(t) b_{j+1} - n \sum_{j=0}^{n-1} B_j^{n-1}(t) b_j \\ &= n \sum_{j=0}^{n-1} (b_{j+1} - b_j) B_j^{n-1}(t) \end{aligned}$$

Отбележете, че производната на крива на Bézier за фиксирана стойност на параметъра t не е точка в \mathbb{R}^3 , тъй като $b_{j+1} - b_j$, $j = 0, \dots, n-1$, са вектори в \mathbb{R}^3 , а не точки! За визуализиране на производната крива и полигон построяваме полигон с контролни точки $\mathbf{a} + \Delta b_0, \dots, \mathbf{a} + \Delta b_{n-1}$, където a е произволна точка, например $a = 0$. Производната крива се нарича **ходограф** (hodograph) (вж. фиг. 5). Очевидно е, че ходографът не се променя при трансляция на първоначалната крива.

Сега ще дефинираме производни от по-висок ред. За целта първо ще дадем дефиниция за крайни разлики.

Дефиниция. Крайни разлики от ред r се дефинират рекурсивно по следния начин

$$\Delta^r b_j = \Delta^{r-1} b_{j+1} - \Delta^{r-1} b_j.$$



Фигура 5: Ходограф за кубична крива на Bézier

Например

$$\begin{aligned}\Delta^0 b_j &= b_j \\ \Delta^1 b_j &= b_{j+1} - b_j \\ \Delta^2 b_j &= \Delta^1 b_{j+1} - \Delta^1 b_j = b_{j+2} - 2b_{j+1} + b_j \\ \Delta^3 b_j &= b_{j+3} - 3b_{j+2} + 3b_{j+1} - b_j.\end{aligned}$$

Коефициентите в крайната разлика могат да се намерят (както и биномните коефициенти) от триъгълника на Паскал. В общия случай е изпълнено

$$\Delta^r b_j = \frac{n!}{(n-r)!} \sum_{i=0}^r \binom{r}{i} (-1)^{r-j} b_{i+j}.$$

Формулата за производна на крива на Bézier, която изведохме по-горе, се записва във вида

$$\frac{d}{dt} B_j^n(t) = n \sum_{j=0}^{n-1} \Delta^1 b_j B_j^{n-1}(t). \quad (15)$$

Сега r -тата производна на крива на Bézier ще получим като приложим r пъти формулата (15). Получаваме

$$\frac{d^r}{dt^r} b^n(t) = \frac{n!}{(n-r)!} \sum_{j=0}^{n-r} \Delta^r b_j B_j^{n-r}(t). \quad (16)$$

Два важни частни случая на формулата (16) се получават за $t = 0$ и $t = 1$. Имаме

$$\frac{d^r}{dt^r} b^n(0) = \frac{n!}{(n-r)!} \Delta^r b_0$$

и

$$\frac{d^r}{dt^r} b^n(1) = \frac{n!}{(n-r)!} \Delta^r b_{n-r}.$$

От горните две формули следва, че r -тата производна в крайните точки зависи само от най-близките $r+1$ контролни точки (вкл. и крайната точка).

Ако $r = 0$, получаваме, че кривата на Bézier интерполира двете крайни контролни точки. За $r = 1$ получаваме, че b_0 и b_1 дефинират тангента при $t = 0$, ако $b_0 \neq b_1$. Всъщност тангента можем да дефинираме чрез b_0 и първото b_j , което е различно от b_0 . Така че тангента можем да дефинираме дори и ако тангенциалният вектор е 0.

7 Връзка между производни на крива на Bézier и алгоритъм на de Casteljau.

Производните на крива на Bézier могат да се изразят и чрез междинните точки, генерирани от алгоритъма на de Casteljau. Това се дължи на факта, че операторите \sum и Δ комутират:

$$\sum_{j=0}^{n-1} \Delta b_j = \sum_{j=0}^{n-1} b_{j+1} - \sum_{j=0}^{n-1} b_j = \sum_{j=1}^n b_j - \sum_{j=0}^{n-1} b_j = \Delta \sum_{j=0}^{n-1} b_j.$$

Тогава последователно получаваме⁹

$$\frac{d^r}{dt^r} b^n(t) = \frac{n!}{(n-r)!} \sum_{j=0}^{n-r} \Delta^r b_j B_j^{n-r}(t) \quad (17)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{n!}{(n-r)!} \Delta^r \sum_{j=0}^{n-r} b_j B_j^{n-r}(t) \\ &= \frac{n!}{(n-r)!} \Delta^r b_0^{n-r}(t). \end{aligned} \quad (18)$$

Следователно производната на крива на Bézier от ред r се смята по 2 различни начина:

- Първо пресмятаме r -тата крайна разлика на контролните точки, след което получените точки¹⁰ разглеждаме като контролни точки на крива на Bézier от степен $n-r$ и я оценяваме за стойност на параметъра t . Накрая умножаваме с $\frac{n!}{(n-r)!}$ (вж. (17)).

⁹**Н. В.** $\Delta \sum_{j=0}^{n-1} b_j B_j^{n-1} := \sum_{j=0}^{n-1} b_{j+1} B_j^{n-1} - \sum_{j=0}^{n-1} b_j B_j^{n-1}$.

¹⁰Всъщност това не са точки, а вектори, като в предишния параграф обяснихме подобно как се постъпва за да се визуализира ходографът.

- В триъгълната схема на de Casteljau стигаме до колоната с точки b_i^{n-r} , $i = 0, \dots, r$. За тези точки пресмятаме r -тата крайна разлика и я умножаваме с $\frac{n!}{(n-r)!}$ (вж. (18)).

За да пресметнем r -та производна на крива на Bézier правим r стъпки за пресмятане на разлика (r -та крайна разлика) и $n - r$ оценявания за стойност на параметъра t . Няма значение в какъв ред!

Следствие 7.1 За $r = 1$ от (18) получаваме

$$\frac{d}{dt}b^n(t) = n(b_1^{n-1}(t) - b_0^{n-1}(t)),$$

следователно междинните точки $b_1^{n-1}(t)$ и $b_0^{n-1}(t)$ дефинират допирателен вектор в точката $b^n(t)$.

Пример 7.1 Ще пресметнем първата производна за кубичната крива от пример 3.1 за $t = 1/2$.

Първи начин. Една стъпка за намиране на крайна разлика и после две оценявания за $t = 1/2$.

$$\begin{aligned} &(0, 0) \\ (0, 2) \quad \Delta b_0 &= b_1 - b_0 = (0, 2) \\ (8, 2) \quad \Delta b_1 &= b_2 - b_1 = (8, 0) \quad (4, 1) \\ (4, 0) \quad \Delta b_2 &= b_3 - b_2 = (-4, -2) \quad (2, -1) \quad (3, 0) \end{aligned}$$

Втори начин. Две оценявания за $t = 1/2$ и после една стъпка за намиране на крайна разлика.

$$\begin{aligned} &(0, 0) \\ (0, 2) \quad (0, 1) \\ (8, 2) \quad (4, 2) \quad (2, 3/2) \\ (4, 0) \quad (6, 1) \quad (5, 3/2) \quad (3, 0) \end{aligned}$$

Разбира се, и в двата случая трябва да умножим получения резултат с $\frac{n!}{(n-r)!} = 3$. Забележете, че полученият вектор е успореден на абсцисата, което се вижда и от фиг. 3.1.

8 Blossom и поляра.

Нека b_0, \dots, b_n са контролните точки за кривата на Bézier $b(t)$ от степен n . Прилагаме един път алгоритъма на de Casteljau за стойност на параметъра t_1 . Получаваме точките $b_0^1(t_1), \dots, b_{n-1}^1(t_1)$, които може да разглеждаме като контролен полигон на крива $p_1(t)$ от степен $n-1 \Rightarrow$

$$p_1(t) = b[t_1, t^{<n-1>}]. \quad (19)$$

По-долу ще изразим $p_1(t)$ чрез $b(t)$. За целта първо ще докажем следната

Лема. $b(t) = \sum_{i=0}^{n-1} b_i^1(t) B_i^{n-1}(t)$

Доказателство. Последователно получаваме

$$\begin{aligned} b(t) = \sum_{i=0}^n b_i B_i^n(t) &= \sum_{i=0}^n b_i ((1-t)B_i^{n-1} + tB_{i-1}^{n-1}(t)) \\ &= (1-t) \sum_{i=0}^n b_i B_i^{n-1} + t \sum_{i=0}^n b_i B_{i-1}^{n-1} \\ &= (1-t) \sum_{i=0}^{n-1} b_i B_i^{n-1} + t \sum_{i=0}^{n-1} b_{i+1} B_i^{n-1} \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} ((1-t)b_i + tb_{i+1}) B_i^{n-1}(t) \end{aligned}$$

■

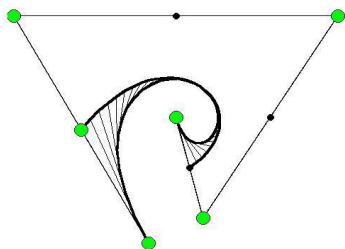
Сега за $p_1(t)$ получаваме

$$\begin{aligned} p_1(t) &= \sum_{i=0}^{n-1} (b_i^1(t_1) - b_i^1(t)) B_i^{n-1}(t) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} ((1-t_1)b_i + t_1 b_{i+1} - (1-t)b_i - t b_{i+1}) B_i^{n-1}(t) + \sum_{i=0}^{n-1} b_i^1(t) B_i^{n-1}(t) \\ &= (t_1 - t) \sum_{i=0}^{n-1} (b_{i+1} - b_i) B_i^{n-1}(t) + \sum_{i=0}^{n-1} b_i^1(t) B_i^{n-1}(t) \\ &= \frac{t_1 - t}{n} \frac{d}{dt} b(t) + b(t) \end{aligned}$$

(следва от лемата и формулата за ходографа).

Окончателно получихме

$$p_1(t) = b(t) + \frac{t_1 - t}{n} \frac{d}{dt} b(t).$$



Фигура 6: Крива на Bézier за $n = 4$ и първата ѝ поляра за $t_1 = 1/2$

Полиномът $p_1(t)$ от степен $n - 1$ се нарича **първа поляра** на кривата $b(t)$ относно параметъра t_1 .

Геометричен смисъл. Тангентата във всяка точка $b(t)$ пресича полярата $p_1(t)$ в точката $p_1(t)$ (вж. фиг. 6, където е показана полярата за $t_1 = 1/2$). Това е вярно и за 3D криви, не само за 2D криви!

Вярно е и следното твърдение: ако $b(t)$ е 3D кубична крива, полярата $p_1(t)$ лежи в оскулачната равнина.¹¹ Това означава, че ако пресечем всичките тангенти към кубичната крива $b(t)$ с оскулачната равнина в точката $b(t_1)$, ще опишем полярата $p_1(t)$. Вярно е също така и че стойността на blossom-a $b[t_1, t_2, t_3]$ за три различни стойности t_1, t_2, t_3 е сечението на трите оскулачни равнини, съответно в точките $b(t_1), b(t_2)$ и $b(t_3)$.

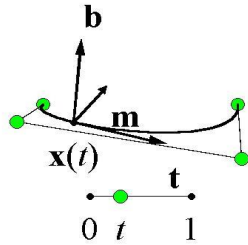
Аналогично на (19), **втора поляра** дефинираме като

$$p_{1,2} = b[t_1, t_2, t^{<n-2>}]$$

¹¹Нека 3D кривата $\mathbf{x}(t)$ има параметрично представяне $\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in [a, b] \in \mathbb{R}$. Ще предполагаме, че $\dot{\mathbf{x}}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)) \neq 0$, $t \in [a, b]$. За всяка точка $\mathbf{x}(t)$ от кривата въвеждаме локална координатна система с начало \mathbf{x} и координатни оси, определени чрез векторите \mathbf{t} , \mathbf{m} и \mathbf{b} по следния начин

$$\mathbf{t} = \frac{\dot{\mathbf{x}}}{\|\dot{\mathbf{x}}\|}, \quad \mathbf{b} = \frac{\dot{\mathbf{x}} \wedge \ddot{\mathbf{x}}}{\|\dot{\mathbf{x}} \wedge \ddot{\mathbf{x}}\|}, \quad \mathbf{m} = \mathbf{b} \wedge \mathbf{t}.$$

Правите през точката $\mathbf{x}(t)$, определени чрез векторите \mathbf{t} , \mathbf{m} и \mathbf{b} се наричат съответно **тангента**, **главна нормала** и **биномала**. Локалната координатна система се нарича **триедър на Frenet** (фиг. (7)). Координатната равнина, определена от \mathbf{t} и \mathbf{m} се нарича **оскулачна равнина** в точката $b(t_1)$.



Фигура 7: Триедър на Frenet

и т.н., като **n-та поляра** е $p_{1,2,\dots,n} = b[t_1, \dots, t_n]$. Това е blossom-а на $b(t)$.

9 Непараметрично зададени криви и cross plot.

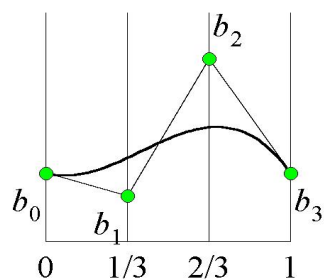
Досега разглеждахме 3D параметрични криви $b(t)$. Сега ще разгледаме частния случай на **функционални криви** $y = f(x)$, където $f(x)$ е полином. Тези криви са равнинни и в параметрична форма се записват като

$$b(t) = (x(t), y(t)) = (t, y(t)).$$

Нека $f(t) = b_0 B_0^n(t) + \dots + b_n B_n^n(t)$, т.е. полиномът $f(t)$ е изразен чрез базисните полиноми на Бернщайн. Отбележете, че сега b_j не са точки, а реални числа и следователно b_j , $j = 1, \dots, n$ не образуват полигон! Обаче функционалните криви са подмножество на параметричните криви, следователно всяка функционална крива си има полигон. Ще го намерим като използваме линейната точност (вж. (13)). Изпълнено е

$$b(t) = \sum_{j=0}^n \left(\frac{j}{n}, b_j\right) B_j^n(t),$$

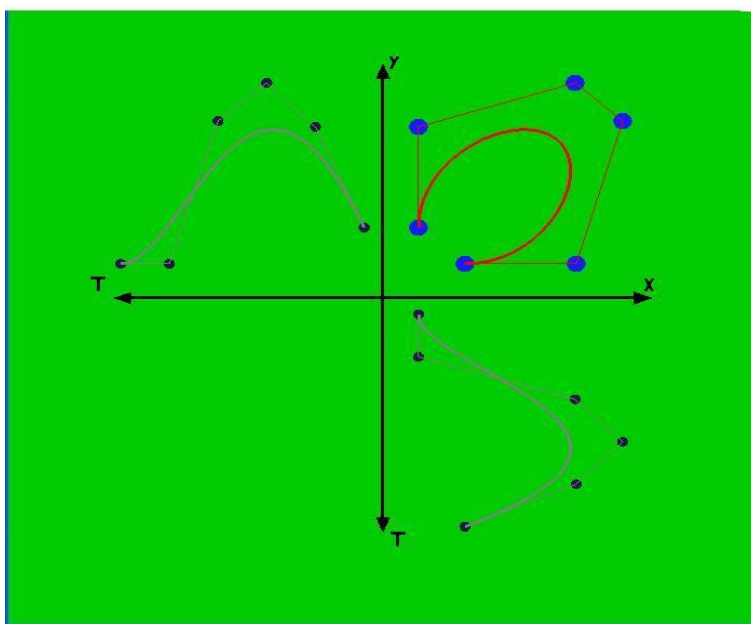
откъдето следва, че контролния полигон на функцията $f(t)$ е с върхове точките $(j/n, b_j)$, $j = 0, \dots, n$. За да има пълна яснота, ще наричаме $f(t)$ **функция на Bézier**, а b_j , $j = 0, \dots, n$ - **ординати на Bézier**. На фиг. 8



Фигура 8: Кубична функция на Bézier

е показана кубична функция на Bézier, като ординатите на кубична функция на Bézier са $b_j = j/3$, $j = 0, \dots, 3$. Поради инвариантността при афинните преобразувания на кривите на Bézier може да разглеждаме произволен интервал $[a, b]$ вместо $[0, 1]$. Тогава абсцисите на контролните точки са $a + \frac{j(b-a)}{n}$, $j = 0, \dots, n$.

Параметричните криви на Bézier са съставени от координатни функции на Bézier. За 2D криви те се използват за чертаене на **cross plot** на кривата (вж. фиг. 9). Cross plot -ът на кривата е много полезен за изследване на всякакви 2D криви. Ние ще го използваме за криви на Bézier и сплайн криви.



Фигура 9: Cross plot за $n = 5$ и $x(t) = y(t)$