Christiaan Huygens e o pêndulo cicloidal

C. Farina
Universidade Federal do Rio de Janeiro

TÓPICOS EM FÍSICA GERAL I

Universidade Federal do Rio de Janeiro

24 de abril, 2007

Roteiro da Apresentação

- **Vida e obra**
- **Em busca de um pêndulo isócrono**
- **A ciclóide e a competição de 1658**
- **A solução de Huygens**
- **O pêndulo cônico isócrono**
- **Comentários finais**

Vida e obra

Christiaan Huygens (1629-1695)

- Nascido em Haia, Holanda, C. Huygens era matemático, físico e astrônomo.
- Filho de Constantijn Huygens, homem de muita cultura, conhecido como poeta, latinista e matemático.
- Sua casa era frequentada por pessoas célebres, como René Descartes. (1596-1650).
- Desde cedo demonstrou talento para desenho e matemática (seus primeiros esforços em geometria impressionaram Descartes).
- 1645 - entra na Universidade de Leiden, onde estuda matemática e direito (por vontade de seu pai, forma-se em direito aos 22 anos).
- 1651 - primeiros escritos em matemática (seções cônicas).
- 1654 - publica "*De Circuli Magnitudine Inventa*", que lhe dá alguma reputação.

- 1655/56 - com seu irmão, cria um novo método de polir lentes; melhores imagens ($\sim 90\times$); faz várias observações astronômicas:
  - descobre uma lua de Saturno (Titan);
  - analisa a superfície de Marte e observa a nebulosa de Orion;
  - "*De Ratiociniis in ludo aleae*" (Do cálculo no jogo de azar);
  - estuda choques elásticos (publicação somente em 1669);
  - **desvenda o mistério de Saturno!**

- 1656 - publica o opúsculo: "*De Saturni luna observato nova*";

  o medo de estar incorreto $\times$ **prioridade da descoberta** faz

  Huygens explicar o mistério de Saturno em forma de **enigma:**

$$a_7\ c_5\ d_1\ e_5\ g_1\ h_1\ i_7\ \ell_4\ m_2\ n_9\ o_4\ p_2\ q_1\ r_2\ s_1\ t_5\ u_5$$

- A solução do anagrama é publicada apenas em 1659:

  Saturnus cingitur annulo tenui, plano, nusquam coherente et ad eclipticam inclinato.

  Saturno é rodeado por um anél tênue, plano, que nele não toca e que está inclinado para a eclíptica.

- 1657 - construção do 1^{o} relógio de pêndulo (descrita em 1658.)

- Huygens esteve interessado em problemas relacionados à construção de relógios por quase 40 anos: de 1656 até 1693.

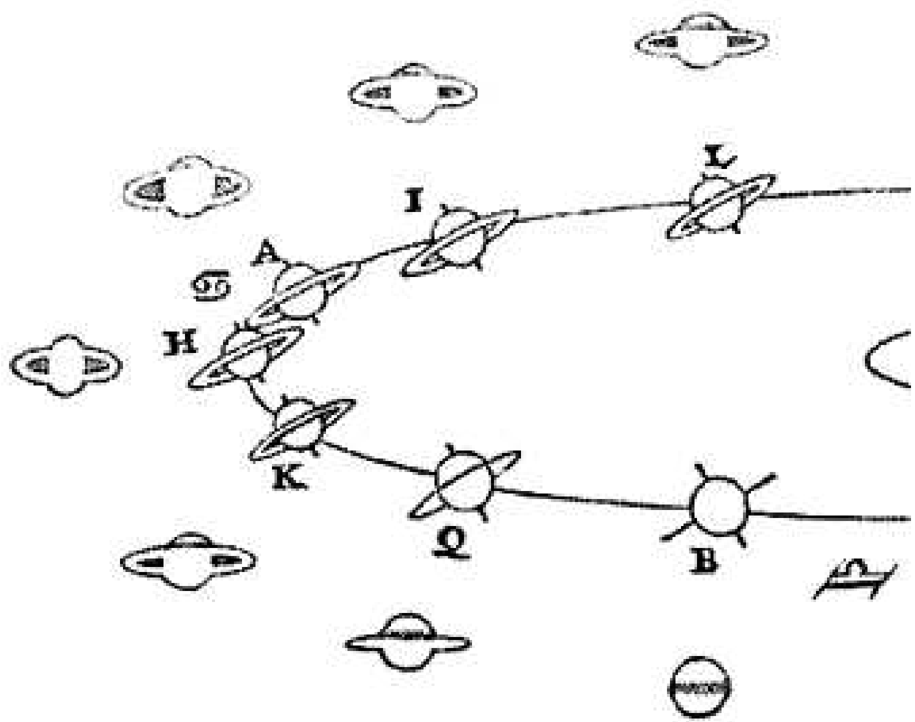
- Galileo já sugerira 1636 acoplar um contador ao pêndulo. Porém, somente em 1641 tenta fazê-lo; falece em 1642; seu filho tampouco consegue. A prioridade da patente é concedida a Huygens.

- 1658 - 4 publicações em matemática e geometria; publica "*Horologium*", onde descreve seu invento do ano anterior.

- Ainda em (1658), participa de um concurso sobre a ciclóide; retifica a ciclóide.

  Obs: Fermat já retificara a parábola semicúbica e Torricelli, a espiral logarítmica (1640).

- 1659 - publica "*Systema Saturnium*", onde descreve detalhadamente suas observações sobre o anél de Saturno:

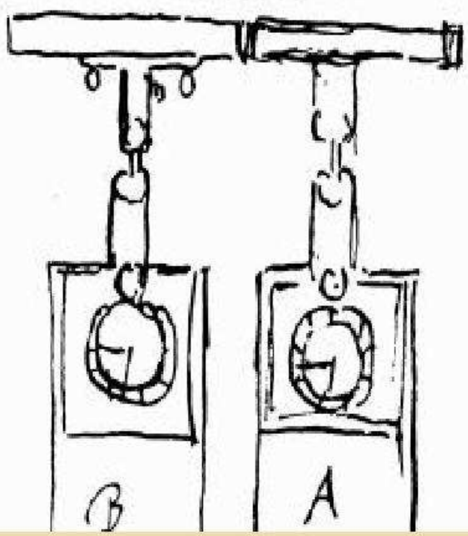


- 1662-1670 - Huygens constrói vários cronômetros marítimos.
- 1663 - torna-se membro da Real Academia de Londres.
- 1665 - observa e descreve pela primeira vez a sincronização de dois relógios de pêndulo presos a um mesmo suporte.

huygens' V.[1]) clocks

1665.

[Fig. 75.][2])



22 febr. 1665.

Diebus 4 aut 5 horologiorum duorum novorum in quibus catenulæ [Fig. 75], miram concordiam obſervaveram, ita ut ne minimo quidem exceſſu alterum ab altero ſuperaretur. ſed conſonarent ſemper reciprocationes utriusque perpendiculi. unde cum parvo ſpatio inter ſe horologia diſtarent, ſympathiæ quandam [3]) quasi alterum ab altero afficeretur ſuſpicari cœpi. ut experimentum caperem turbavi alterius penduli reditus ne ſimul incederent ſed quadrante horæ poſt vel ſemihora rurſus concordare inveni.

- 1665 - é convidado por J.B. Colbert (ministro de Luis XIV) para fundar a Academia de Ciências de Paris.
- 1666 - membro fundador da Academia de Paris (o que lhe rende um bom salário e apartamento bem situado).
- 1666-1681 - vive em Paris (2 visitas à Holanda).
- 1669 - publicação sobre leis governando os choques elásticos.
- 1673 - uma de suas publicações mais importantes:

  “Horologium oscillatorium sive do motu pendulorum ad horologia aptato demostrationes geometriae”

  (Relógio de pêndulo, ou demonstrações geométricas do movimento pendular aplicado a relógios)

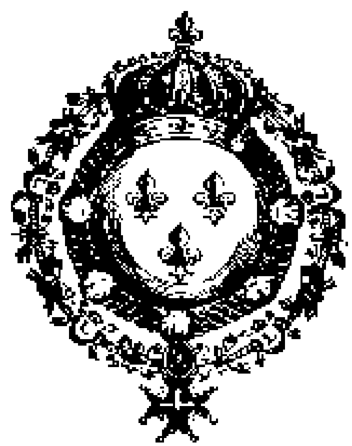
CHRISTIANI HVGENII

ZVLICHEMII, CONST. F.

HOROLOGIVM OSCILLATORIVM

SIVE

DE MOTV PENDVLORVM AD HOROLOGIA APTATO DEMONSTRATIONES GEOMETRICÆ.



PARISIIS,

Apud F. MUGUET, Regis & Illustrissimi Archiepiscopi Typographum via Citharæ, ad insigne trium Regum.

MDCLXXIII

CVM PRIVILEGIO REGIS.

- Conteúdo do *Horologium Oscillatorium*:
  - teoria sobre matemática das curvas;
  - determinação de evolutas de curvas;
  - período do pêndulo simples ($\tau = 2\pi\sqrt{\ell/g}$);
  - teoria sobre força centrífuga;
  - oscilação de um corpo rígido preso por eixo fixo;
  - Primeiras noções de momento de inércia;
  - PÊNDULO CICLOIDAL (tema central dessa palestra)
- 1675 - projeta relógio com molas, mas a prioridade é dada a R. Hooke ($\sim$ 1660)

- 1673 - teoria ondulatória da luz (publicada em 1690). Descobre:
  - dupla refração; exp. com espato da Islândia (Calcita).
  - polarização da luz, mas não adota vibrações transversais;

    Obs: Newton argumenta:

    Polarização $\Longrightarrow$ Transversalidade das vibrações da luz

    Transversalidade $\Longleftrightarrow$ incompatível com éter luminífero

    Com esse argumento, refuta a teoria ondulatória da luz

- Teoria corpuscular domina por $\approx$ um século e meio;

- Somente com **Young** e **Fresnel** a teoria ondulatória é aceita;

- Tiro de misericórdia na T. corpuscular (vel. da luz na água);

- **J.C. Maxwell:** luz como onda eletromagnética (unificação);

- **H.R. Hertz:** 1^o a gerar e detectar ondas EM (1887);

- Mas, por ironia da história da ciência, ..., dualidade
onda-partícula, surgimento da teoria quântica.

- 1680 - máquinas de combustão interna (sem sucesso);
  - utiliza vácuo obtido pelo esfriamento de produtos gasosos aquecidos para operar bomba d'agua;
- 1681 - volta à Holanda por motivos de saúde; a morte de Colbert em 1683 e clima religioso não propício fazem com que Huygens não retorne mais a Paris;
- 1681 - apresenta para a Real Academia de Londres sua teoria de gravitação (Newton na audiência!); não admitia ação a distância.
- 1690 - publica *Traité de la lumière*; bonitas explicações para reflexão e refração. Enunciado do Princípio de Huygens:

  Cada ponto de uma frente de onda no éter hipotético é interpretada como uma fonte de novas perturbações (ondículas secundárias) que se espalham esfericamente e a nova frente de onda é a envolvória de todas estas ondículas...

- 1690 - *“Discours de la cause de la pesanteur”* (gravitação);
- 1690 - última publicação sobre relógios;
- 1695 - falece em Haia; últimos anos: solidão e melancolia.

  C. Huygens foi seguramente um dos maiores fí sicos do século XVII, século dos gênios (Galileo, Kepler, Descartes, Fermat, Pascal, Torricelli, Huygens, Hooke, Newton,...)

- Apelidado por **Newton** de *‘Summus Ingenius’*;
- **Leibniz:** amigo pessoal até o fim de seus dias; considerava-se discípulo de Huygens;
- **Sommerfeld:** *Huygens foi o especialista mais brilhante em relógios de todos os tempos*.

Para Joseph Louis Lagrange (1736 - 1813):

Huygens foi destinado a melhorar e desenvolver a maioria dos descobrimentos importantes de Galileo

Galileo $\Longrightarrow$ Huygens

- Telescópio (20$\times$) $\Longrightarrow$ melhorou telescópio (92$\times$);
- Luas de Júpiter $\Longrightarrow$ Lua de Saturno;
- Saturno (3 estrelas?) $\Longrightarrow$ desvendou o mistério de Saturno (anél)
- Princípio de Inércia $\Longrightarrow$ Teoria do Movimento Relativo;
- Quase chegou na $A_{cent.}$ $\Longrightarrow$ obteve a fórmula para $A_{cent.}$;
- Isocronismo do pêndulo (peq. oscil.) $\Longrightarrow$ pêndulo cicloidal;
- Sugeriu a construção de Relógios de pêndulo $\Longrightarrow$ construiu!

Em busca de um pêndulo isócrono

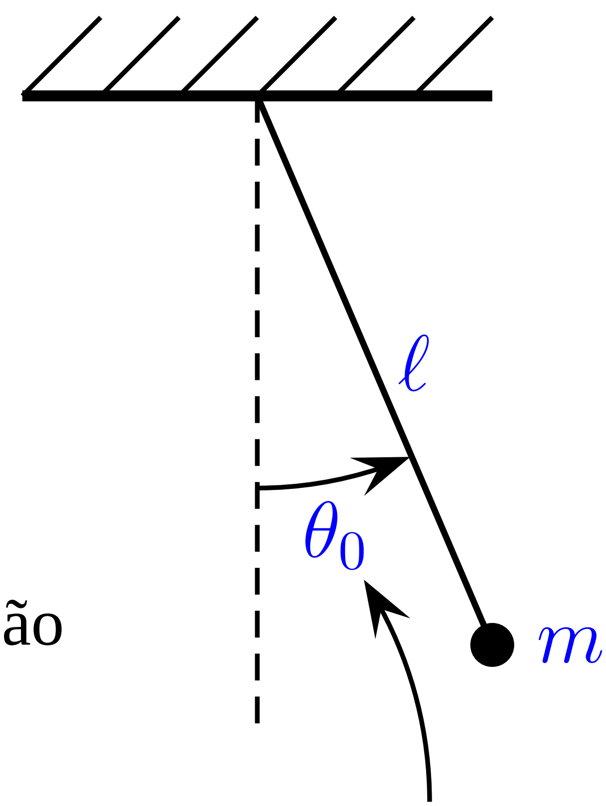
- Galileo na catedral de Pisa (aos 19 anos): oscilações de um lustre com período independente da amplitude (conta-se que teria usado o próprio pulso para medir os intervalos de tempo);

Para Galileo:

período τ não depende da amplitude de oscilação θ_0

Huygens:

percebe que isso só é verdade para pequenas amplitudes de oscilação



- Em 1673, Huygens relata um experimento em que

$$\frac{\tau(\pi/2)}{\tau_0} \approx \frac{34}{29} \approx 1,17$$

sendo τ_0 o período para pequenas oscilações.

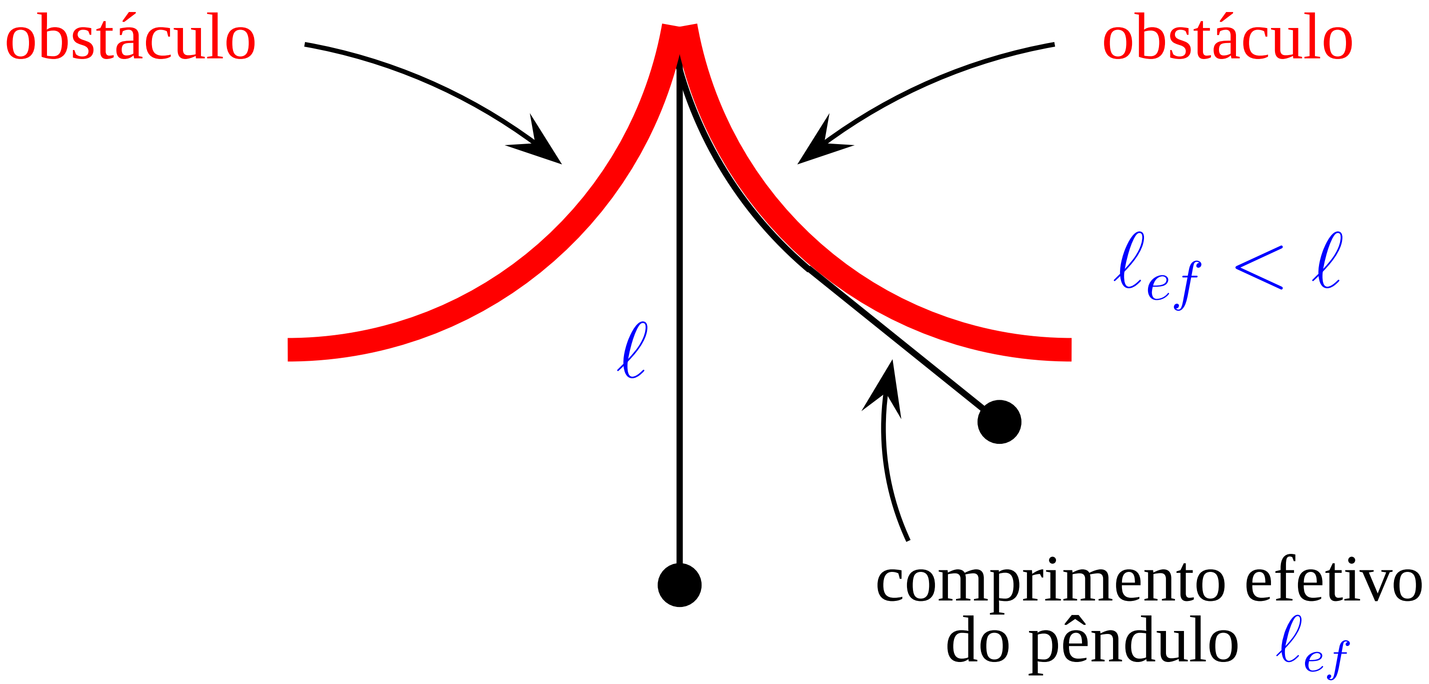
- Valor teórico exato para qualquer amplitude de oscilação:

$$\frac{\tau(\theta_0)}{\tau_0} = 1 + \frac{1^2}{2^2}\,\mathrm{sen}^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right) + \frac{1^2 \times 3^2}{2^2 \times 4^2}\,\mathrm{sen}^4\left(\frac{\theta_0}{2}\right) + \ldots$$

- Para valores grandes de θ_0 essa série é lentamente convergente;

$$\frac{\tau(\pi/2)}{\tau_0}\Big|_{4^a\ ordem} \approx 1,16\ ; \qquad \frac{\tau(\pi/2)}{\tau_0}\Big|_{serie} \approx 2,08$$

- Medir bem o tempo significava medir bem as distâncias marítimas.
- Como as ondas do mar alteravam a amplitude dos pêndulos, Huygens decide construir um pêndulo isócrono e utilizá-lo num cronômetro marítimo.
- Como compensar o aumento do período para grandes oscilações? Inserindo obstáculos laterais!



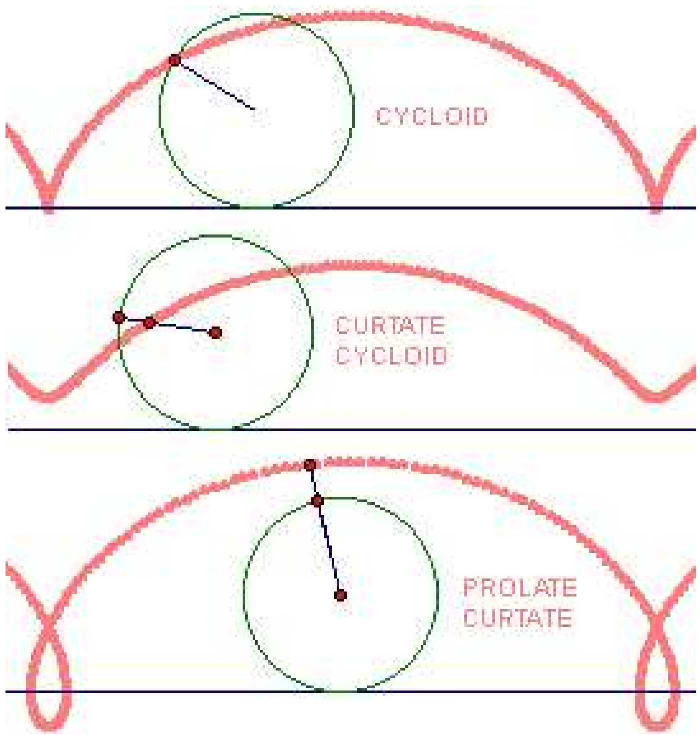
Mas que forma deve ter cada obstáculo lateral para que a diminuição do comprimento efetivo do pêndulo (ℓ_{ef}) compense o aumento de seu perí odo (τ) com a amplitude (θ_0)?

- Huygens tentou (em vão) estabelecer um método experimental para determinar a forma dos obstáculos;
- Desistiu da idéia em 1658, voltando a restringir a amplitude de oscilação;
- No entanto, uma feliz (?) coincidência o aguardava:

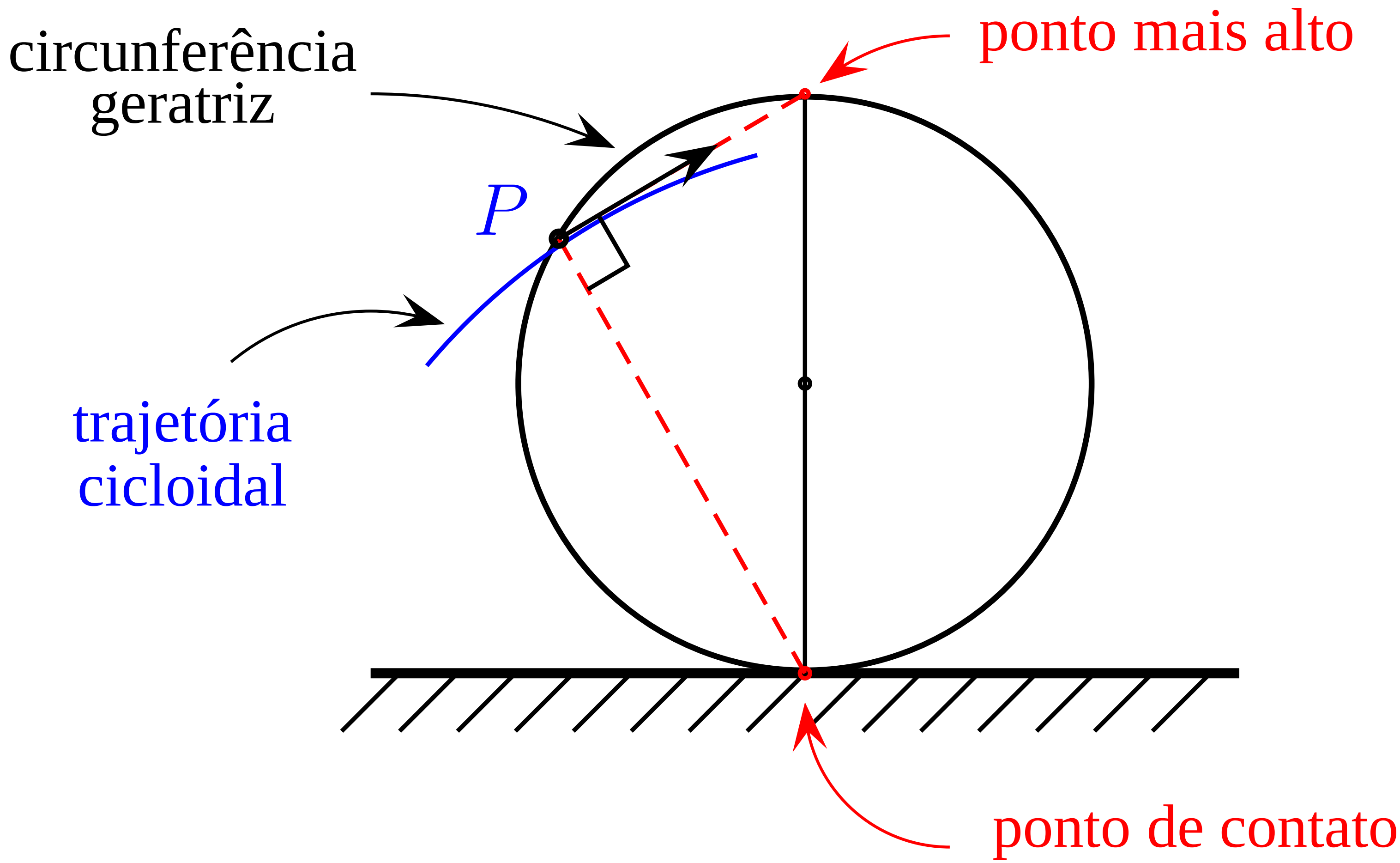
- *a dor de dente de Pascal* -

A ciclóide e a competição de 1658

- A ciclóide foi descoberta por Galileo (~ 1599) e, na França, independentemente, por Mersenne (*la roulette*);
- Definição cinemática: *um ponto P em um círculo que rola sem deslizar em uma linha reta descreve uma ciclóide.*



- Propriedade fundamental: *a reta tangente à ciclóide em P passa pelo ponto mais alto da circunferência geratriz*



- Em uma ocasião, Pascal escreveu:

  "A cicl óide é uma curva tão usual e corrente que depois da reta e da circunferência nenhuma outra curva é tão comumente encontrada. É descrita tão frequentemente diante de nossos olhos que é surpreendente que não tenha sido considerada pelos antigos.."

- Na época, havia a necessidade de novas curvas, para testar novos métodos ...

- Rapidamente, a ciclóide se tornou popular entre os matemáticos;

- Nomes importantes relacionados à ciclóide: Galileo, Mersenne, Roberval, Christopher Wren, Pascal, Huygens, irmãos Bernoulli (braquistócrona), Newton, Leibniz, Torricelli, ...

Parada para um concurso:

- Huygens se interessa pela ciclóide graças ao convite feito por Pascal para participar de uma competição sobre a ciclóide (1658);
- A origem do concurso é curiosa: *uma dor de dente de Pascal!*
- A fim de amenizar uma forte dor de dente, Pascal (1623-1662) resolve pensar em problemas sobre a ciclóide propostos por **Mersenne** (parece que a idéia funcionou!);
- Não só resolve tais problemas como cria vários outros, que são expostos em forma de concurso (fato comum na época);
- **Huygens** resolveu 4 dos 6 problemas (no menor tempo), mas ...
- o vencedor do concurso foi **Amos Detonville** (pseudônimo utilizado por **Pascal**), que resolveu todos de uma forma brilhante (e com isso ganhou o concurso e o prêmio).

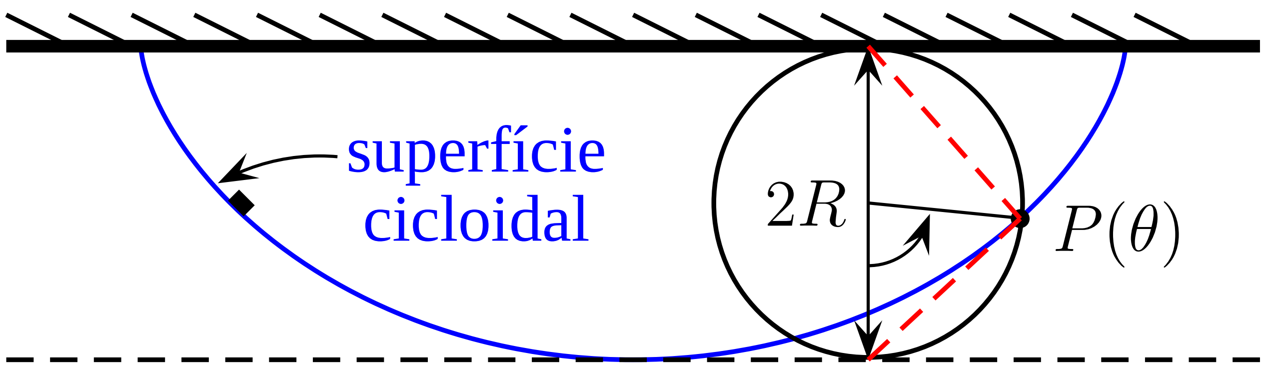
A solução de Huygens

- Familiarizado com a nova curva (ciclóide), Huygens decidiu verificar se ela solucionava o seu problema (pêndulo isócrono);

e deu certo!!

Procedimento de Huygens:

- Considera um corpo deslizando sobre uma superfície cicloidal lisa:



- Mostra inicialmente que tal corpo oscila de modo que seu período não depende da altura de onde é abandonado;

- Com isso, fica evidente que se o corpo no extremo do pêndulo descrever uma ciclóide, seu período τ não dependerá da amplitude de oscilação θ_0;

- **Huygens** chega a esse resultado mostrando que a projeção vertical do movimento sobre a superfície cicloidal coincide com a projeção de um movimento circular uniforme auxiliar;

- Mas persiste a questão: qual é a forma do obstáculo lateral para que o corpo no extremo do pêndulo descreva uma ciclóide?

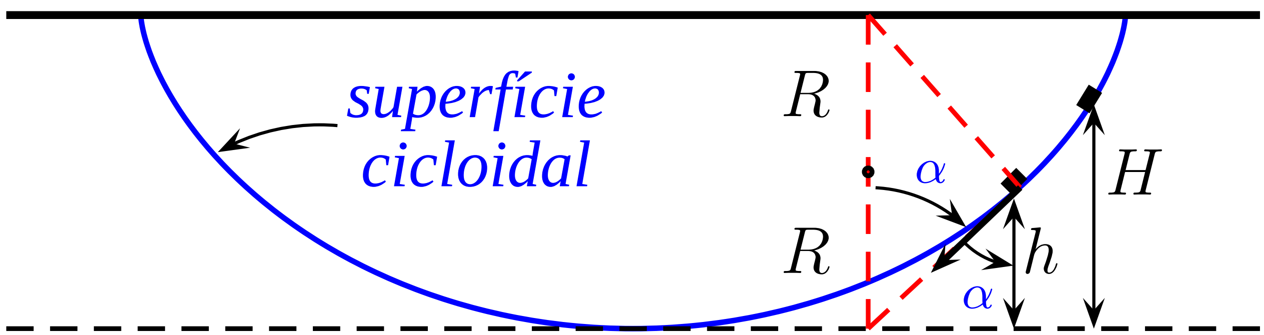
- **Huygens** se pergunta: por que não tentar obtáculos cicloidais?

e deu certo novamente!!

Primeira parte da demonstração:

- Corpo parte do repouso de uma altura H;
- Em t, o corpo se encontra em h. Como desceu $H - h$, temos

$$v^2 = 2g(H-h) \quad \Longrightarrow \quad v = \sqrt{2g}\,\sqrt{H-h} \tag{1}$$



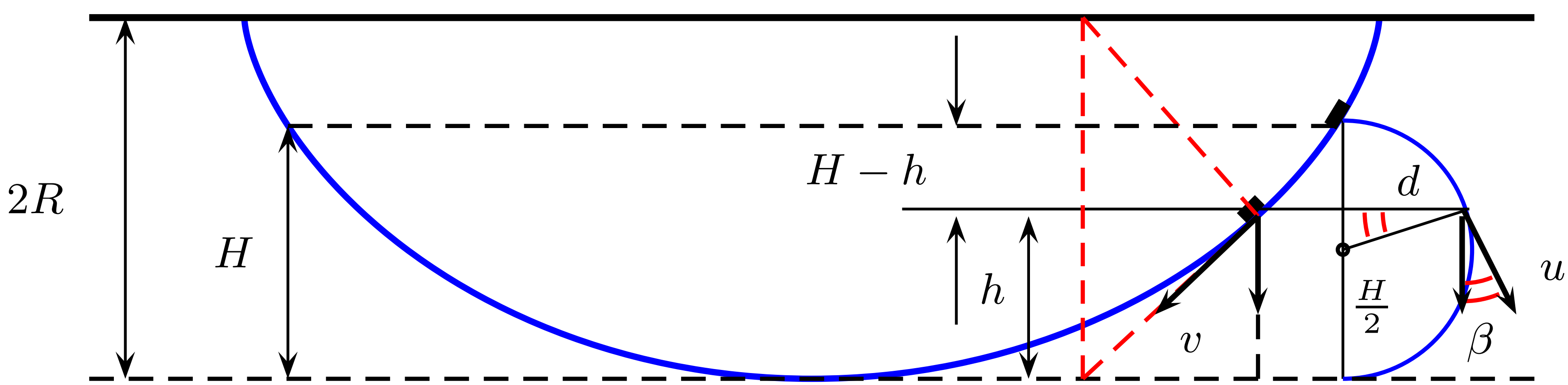
- Da figura, temos $v_{vert} = v\,\cos\alpha$. Usando a propriedade fundamental da ciclóide, temos, também

$$(2R\,\cos\alpha)\,\cos\alpha = h \quad \Longrightarrow \quad \cos\alpha = \sqrt{\frac{h}{2R}} \tag{2}$$

- Substituindo (1) e (2) em na equação $v_{vert} = v\,\mathrm{cos}\alpha$, obtemos

$$v_{vert} = \sqrt{\frac{g}{R}}\sqrt{h(H-h)} \qquad (3)$$

Huygens introduz um MCU auxiliar de raio H/2 e veloc. u (a ser ajustada convenientemente):



Da figura, temos

$$u_{vert} = u\,\mathrm{cos}\beta, \text{ onde } \mathrm{cos}\beta = \frac{d}{H/2} \quad \Longrightarrow \quad u_{vert} = \frac{ud}{H/2} \qquad (4)$$

- Das propriedades de triângulos retângulos, podemos escrever

$$\frac{d}{H-h} = \frac{h}{d} \quad \Longrightarrow \quad d = \sqrt{h(H-h)} \tag{5}$$

Substituindo (5) em (4), obtemos

$$u_{vert} = \frac{u}{H/2}\sqrt{h(H-h)} \tag{6}$$

Comparando com a equação para v_{vert}, a saber,

$$v_{vert} = \sqrt{\frac{g}{R}}\sqrt{h(H-h)} \tag{7}$$

vemos que, se escolhermos

$$\frac{u}{H/2} = \sqrt{\frac{g}{R}}, \quad \text{ou seja} \quad u = \frac{H}{2}\sqrt{\frac{g}{R}}\,, \tag{8}$$

as projeções verticais dos 2 movimentos coincidirão!

Portanto, o intervalo de tempo desde que o corpo é abandonado até atingir o ponto mais baixo da sup. cicloidal é o mesmo que no movimento auxiliar o corpo gasta para dar meia volta:

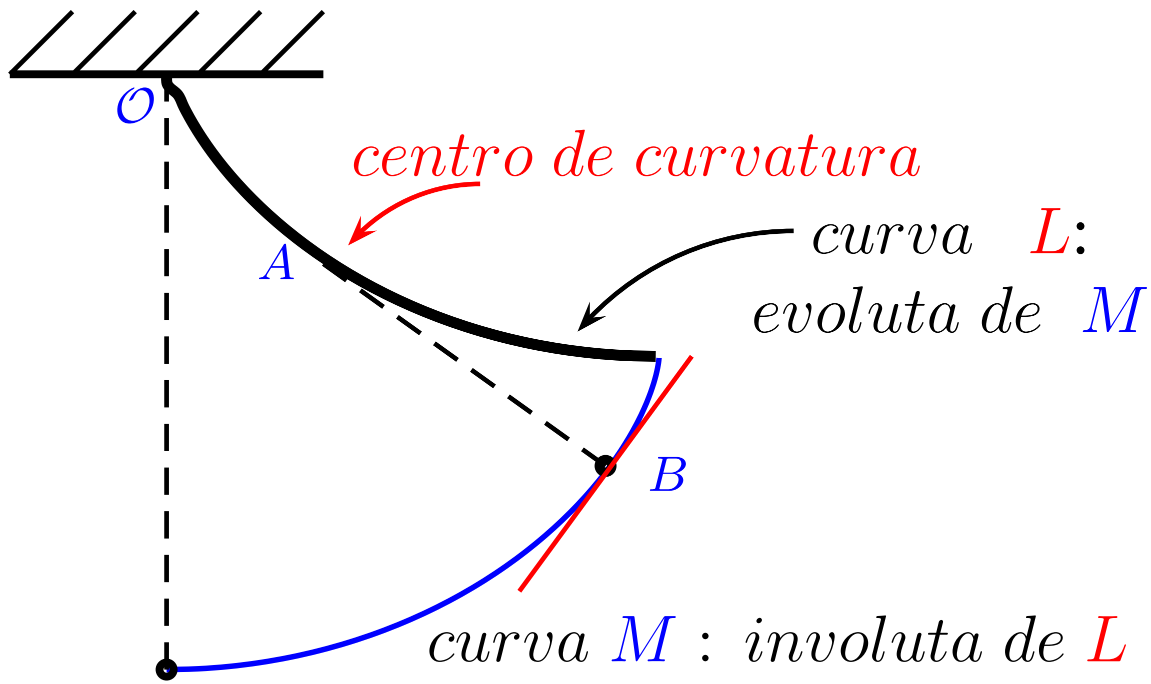
$$\frac{1}{4}\tau = \frac{\pi H/2}{u} = \frac{\pi H/2}{H/2\sqrt{g/R}} \implies \tau = 4\pi\sqrt{\frac{R}{g}} \qquad (9)$$

O perí odo não depende H!

Obs: para que um pêndulo simples oscilando com pequenas amplitudes tenha esse período seu comprimento deve ser $\ell = 4R$ (esse resultado era esperado?)

Segunda parte da demonstração:

- Huygens desenvolveu a teoria das evolutas e involutas;

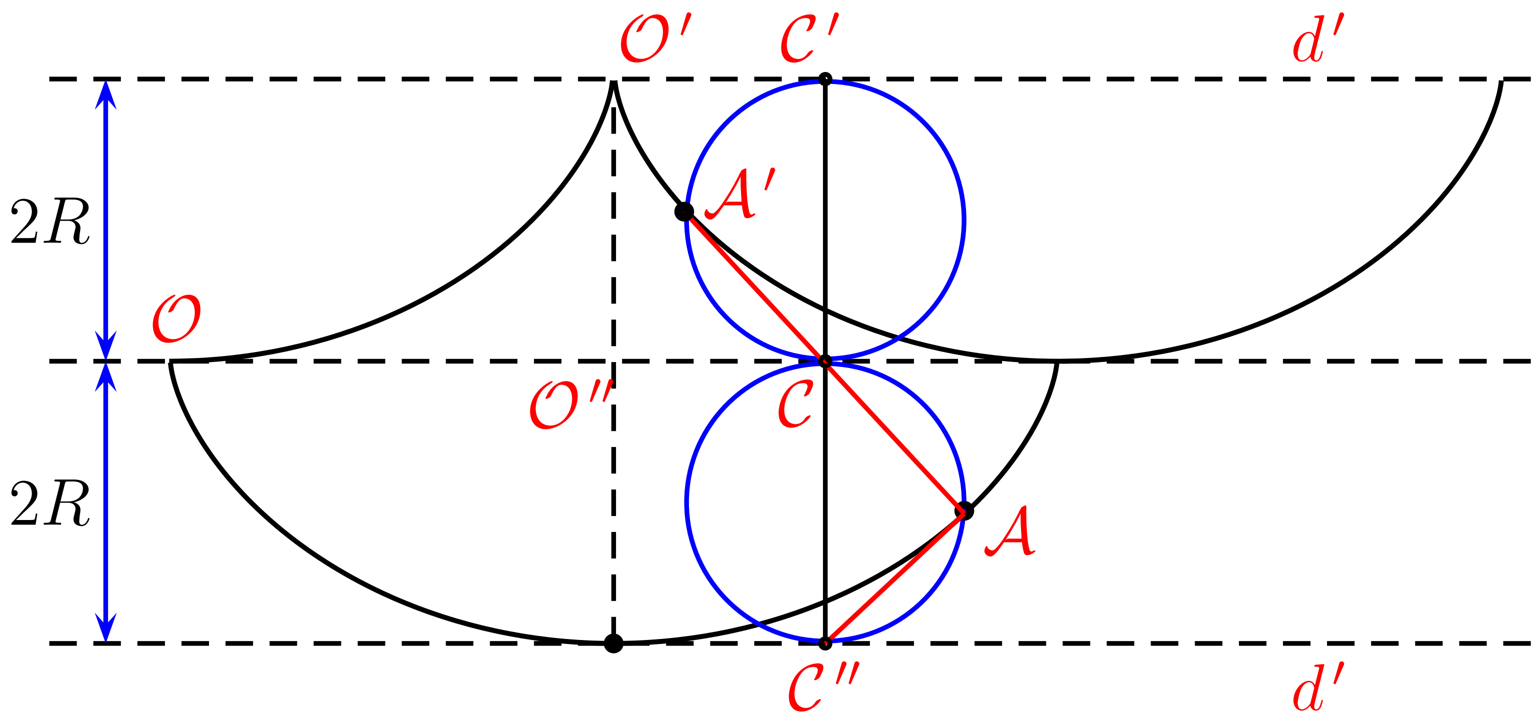


- A evoluta da curva M corresponde ao lugar geométrico dos centros de curvatura da curva M
- Dada uma curva M, só há uma evoluta para ela; no entanto, dada uma curva L, há várias involutas possíveis

Conjecturas (corretas) de Huygens:

- A reta perpendicular à curva M em B (perpendicular à reta tangente em B) é tangente à curva L em A, isto é, as perpendiculares à curva M são tangentes à curva L;
- Dada uma curva, só há uma evoluta, pois uma curva pode ser traçada a partir de suas tangentes (é a envolvente das tangentes);
- A evoluta da ciclóide é a própria ciclóide, deslocada e defasada de π rad. (Huygens foi feliz em sua suposição, pois nem sempre a evoluta de uma curva é a própria curva)

- Imaginemos que as duas geratrizes azuis girem juntas:



- A tangente em A passa por $\mathcal{C}''$ e, portanto, a perpendicular em A passa por $\mathcal{C}$; a tangente em A' passa por $\mathcal{C}$; Basta mostrar, então, que $\widehat{\mathcal{C}''\hat{\mathcal{C}}A} = \widehat{\mathcal{C}'\hat{\mathcal{C}}A'}$, ou seja, que os comprimentos de arco $\widetilde{A\mathcal{C}''}$ e $\widetilde{A'\mathcal{C}'}$ são iguais. Inicialmente, note que $\widetilde{A'\mathcal{C}'} = \overline{\mathcal{O}'\mathcal{C}'}$; Temos tb $\widetilde{\mathcal{C}\mathcal{C}''A} = \overline{\mathcal{O}\mathcal{C}} \implies \widetilde{\mathcal{C}\mathcal{C}''} + \widetilde{\mathcal{C}''A} = \overline{\mathcal{O}\mathcal{O}''} + \overline{\mathcal{O}''\mathcal{C}} \implies \widetilde{\mathcal{C}''A} = \overline{\mathcal{O}''\mathcal{C}}$
A evoluta da ciclóide é a própria ciclóide defasada e deslocada!

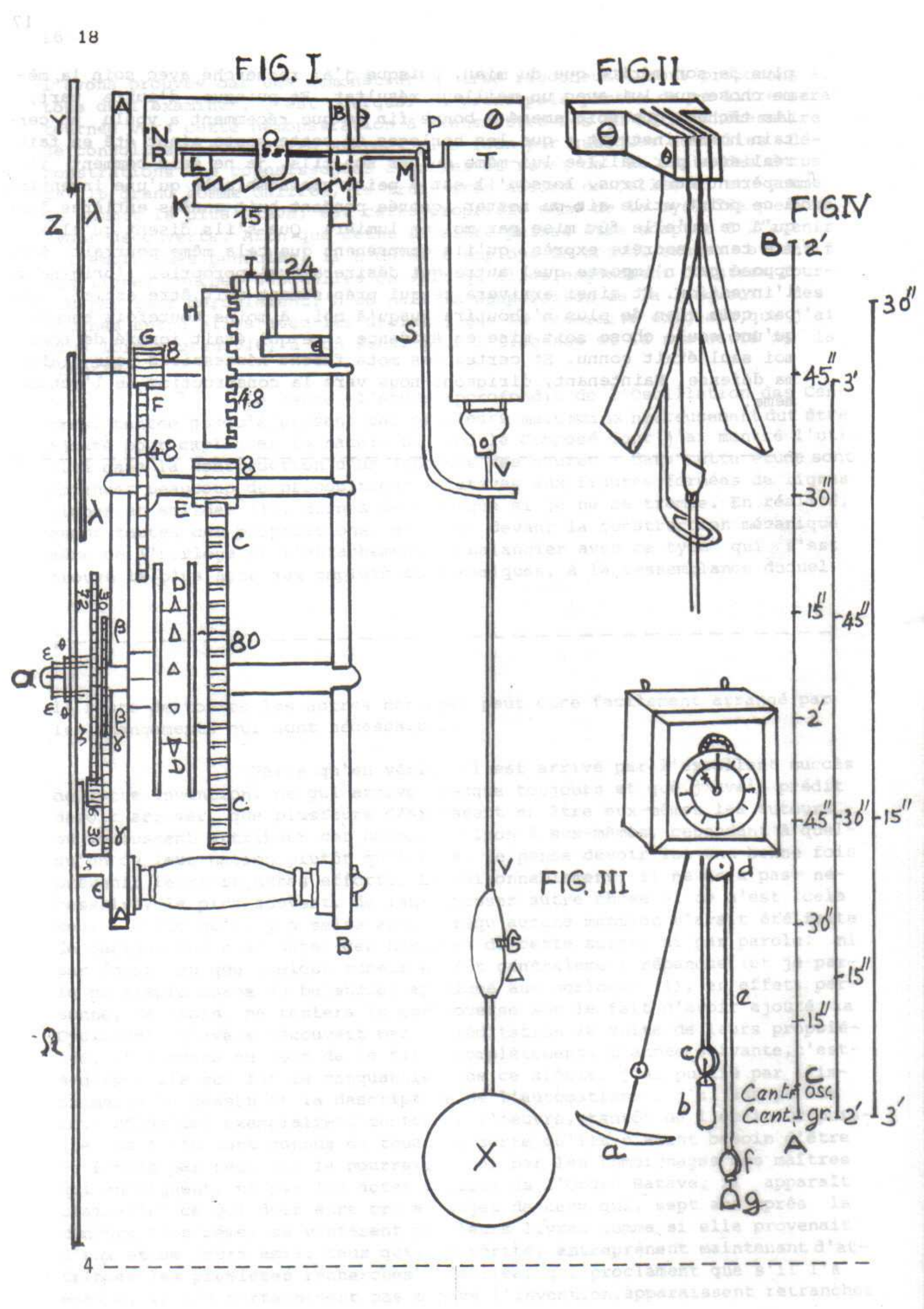
esboç o de um reĺogio

com

pêndulo cicloidal

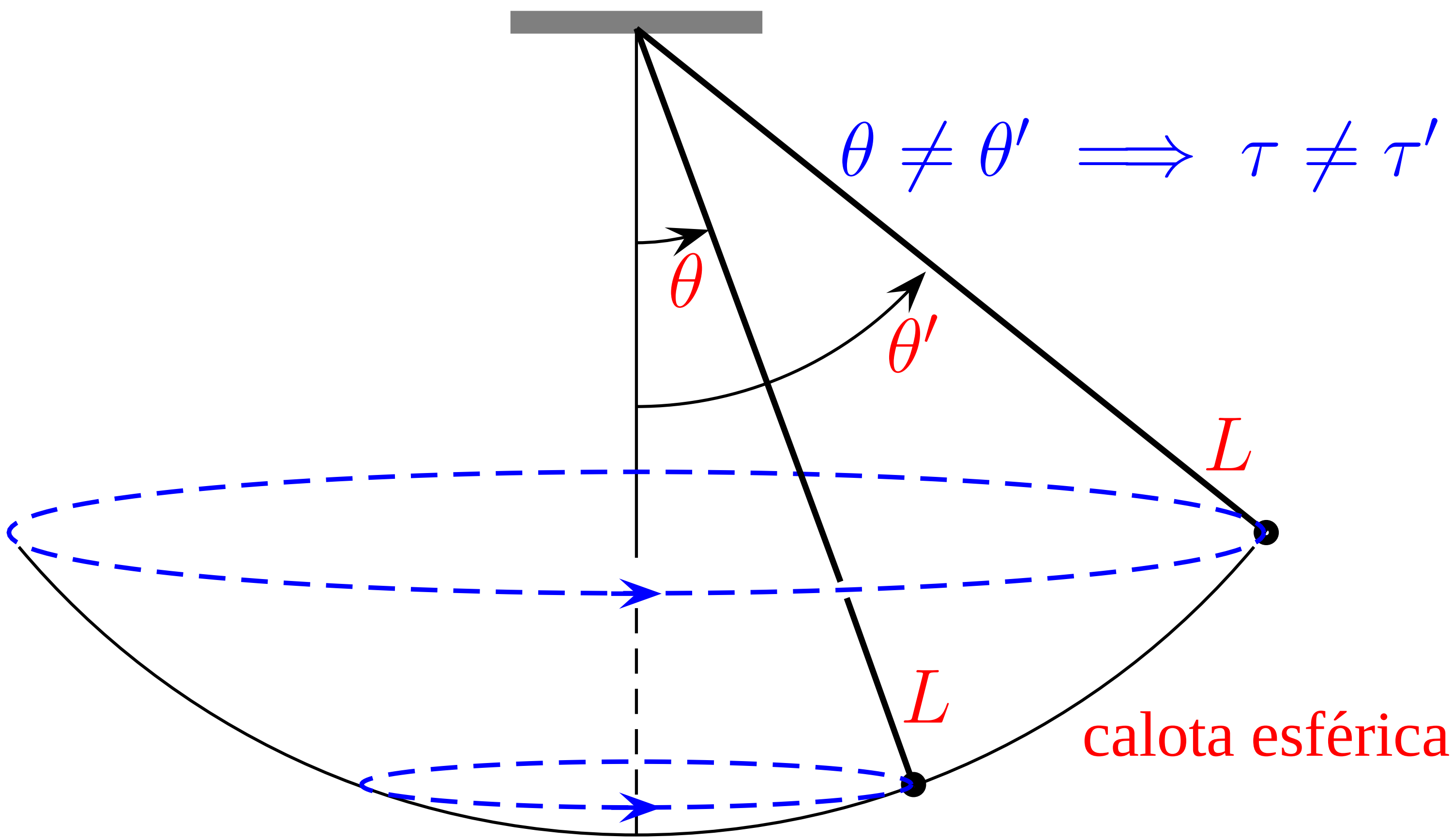
feito por Huygens

(*Horologium Oscillatorium*

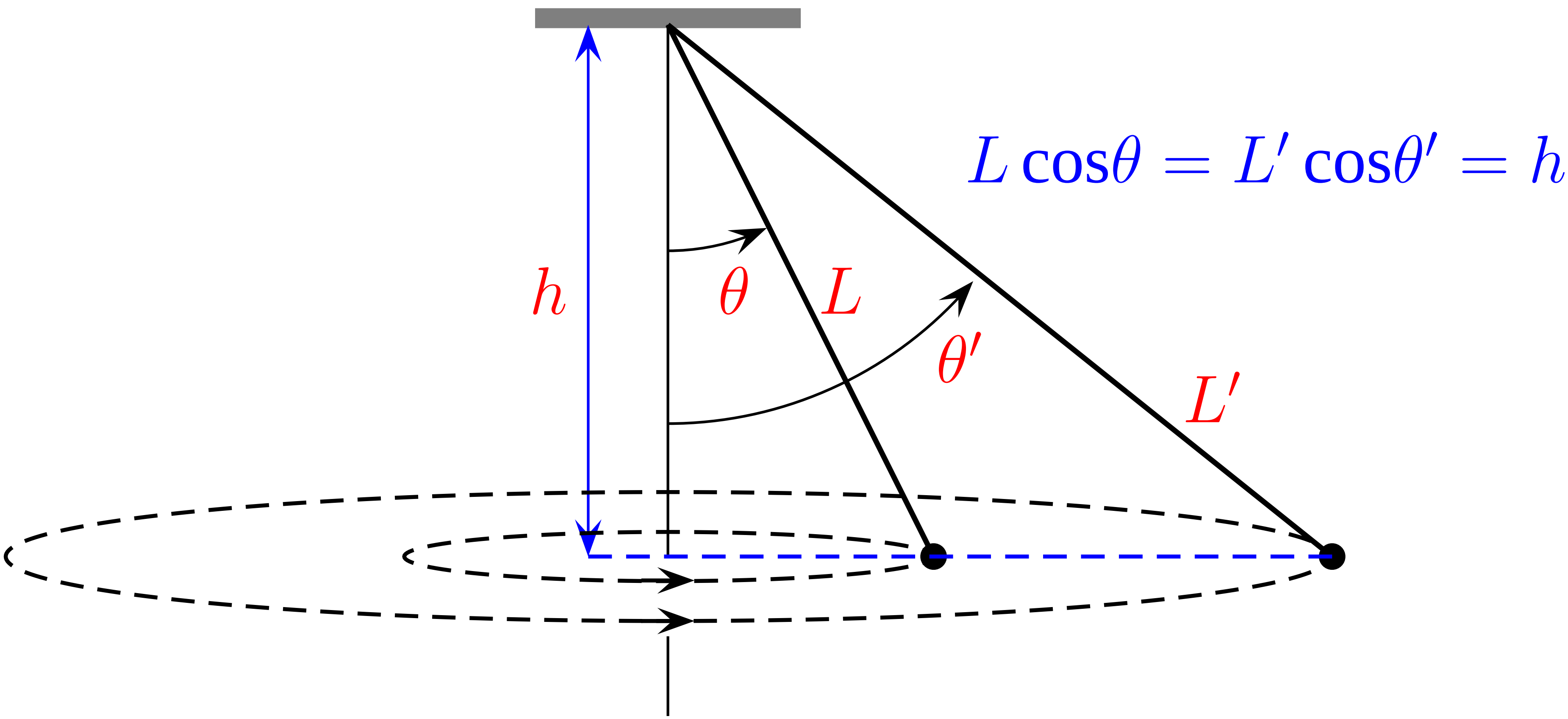


O pêndulo cônico isócrono

- pêndulo cônico **usual:** movimento análogo ao de uma partícula no interior de uma calota esférica: a normal faz o papel da tensão.
- L é o raio de curvatura do arco de círculo que gera, por revolução, a calota esférica (e não da trajetória da partícula)

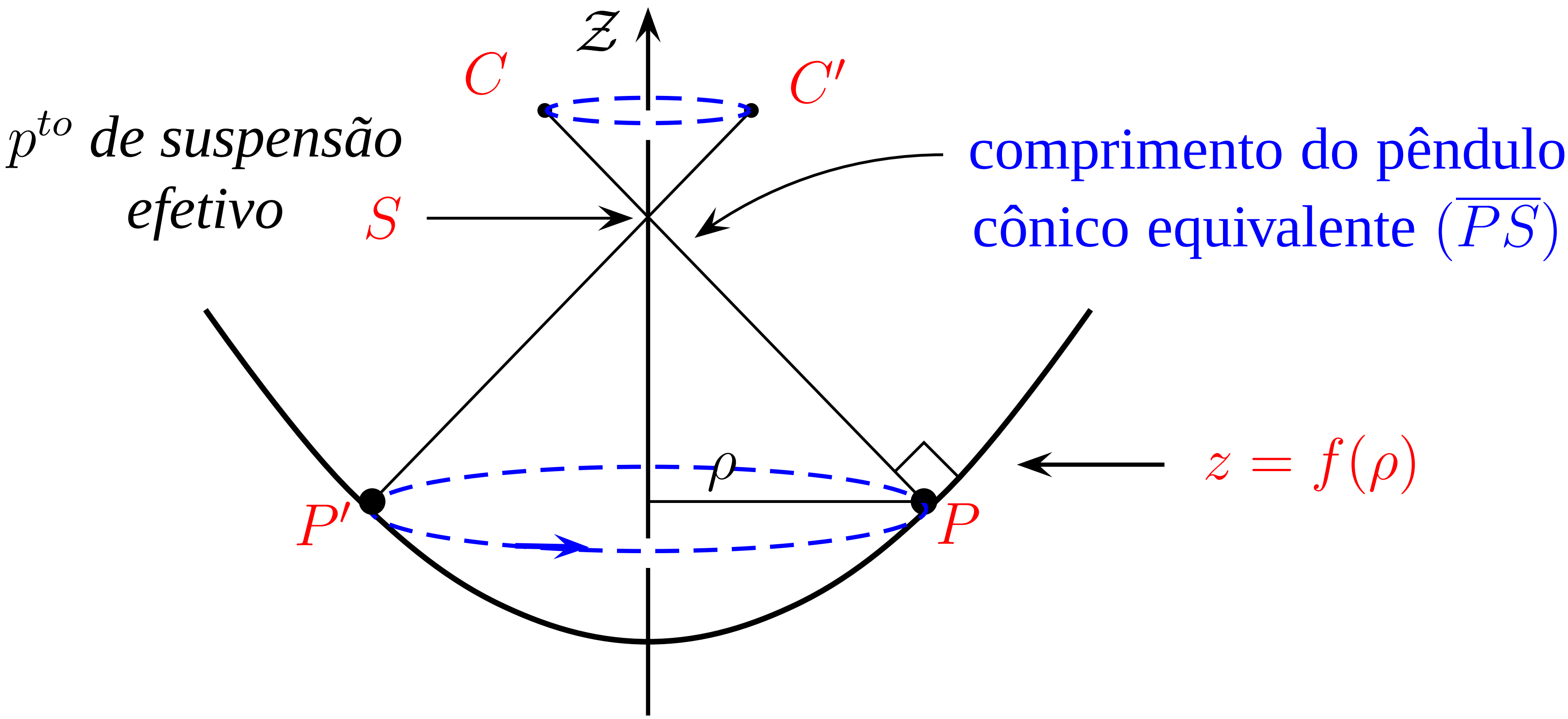


- No entanto, pêndulos diferentes podem ter períodos iguais, pois τ só depende da projeção vertical h.

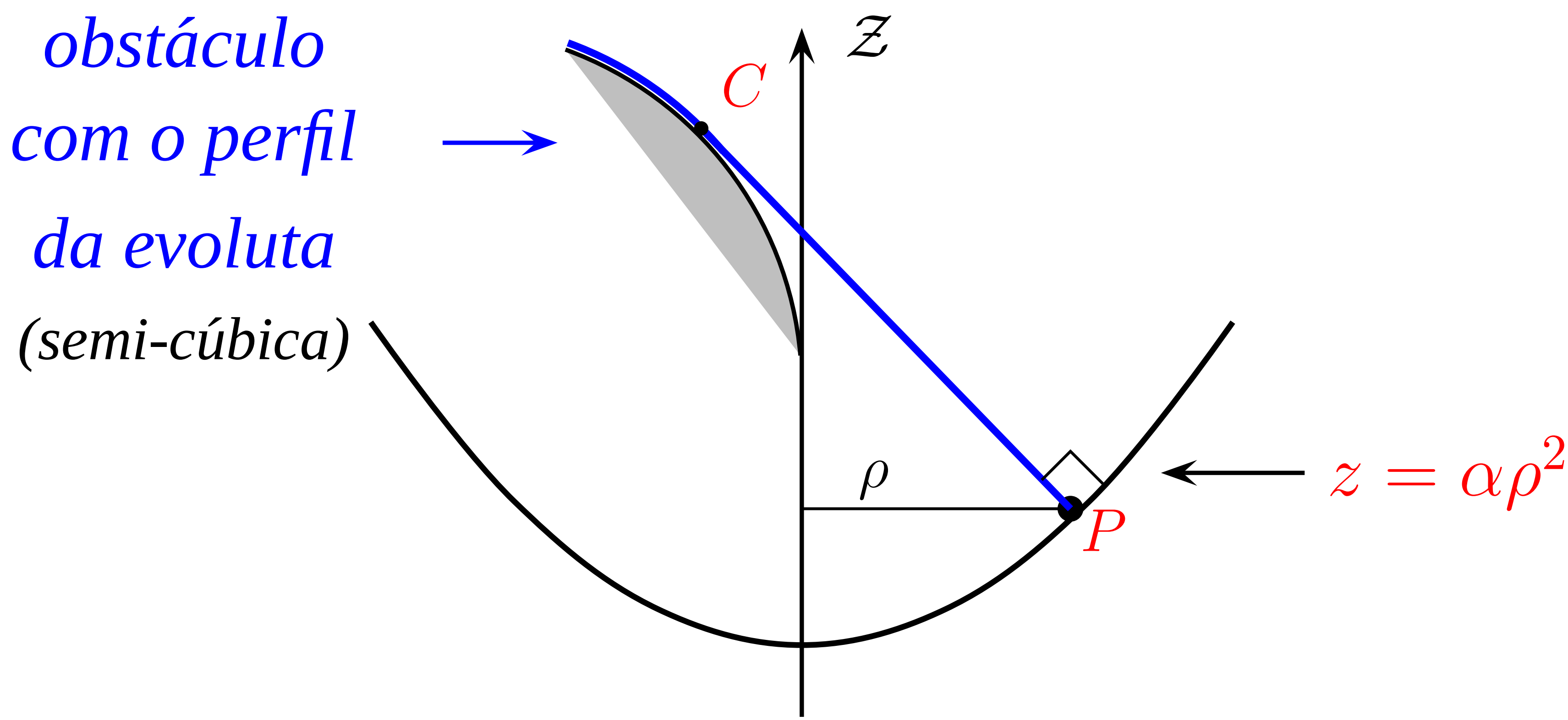


$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{L\cos\theta}{g}}\,, \quad \tau' = 2\pi\sqrt{\frac{L'\cos\theta'}{g}} \quad \Longrightarrow \quad \tau = \tau' = 2\pi\sqrt{\frac{h}{g}}$$

- Existe alguma superfície de revolução cuja forma faça com que os mov. circulares de uma partícula deslizando em seu interior tenham o mesmo período τ qualquer que seja o raio ρ da trajetória?
- Em caso afirmativo, ela deve ter a propriedade: a projeção vertical do comp. do pêndulo cônico equivalente deve ser cte ($\overline{PS} = Cte$).

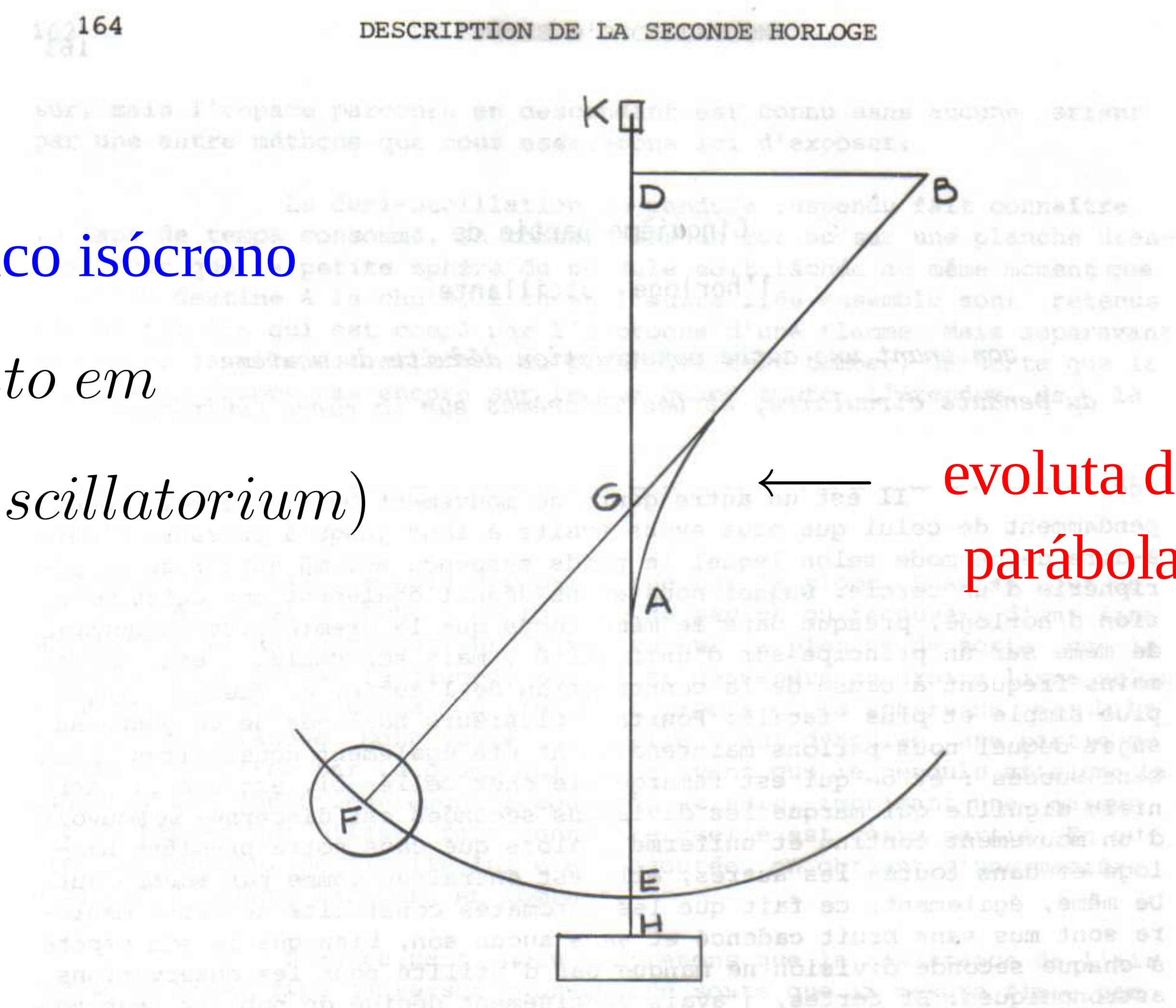


- O paraboloide de revolução possui essa prorpriedade!
- Mas como fazer a esfera no extremo do pêndulo se mover sobre tal superfície? $\Longrightarrow$ Evoluta da parábola $(William\ Neile,\ 1657)$



pêndulo cônico isócrono

(descrito em Horologium Oscillatorium)



evoluta da parábola

Comentários finais

- Huygens está entre os maiores físicos e matemáticos do século XVII. Como mencionamos, mas sem entrar em detalhes, seus interesses foram bastante variados. Além dos tópicos já mencionados, poderíamos ainda aumentar a lista citando, por exemplo, o estudo da catenária, da forma achatada da Terra; e de diversas outras curvas matemáticas.

- Soulção de Huygens $\Longrightarrow$ retificação da ciclóide; comprimento de arco cicloidal $= 8R$ (um dos problemas do concurso de 1658);

- Ciclóide e a braquistócrona (do grego: bráquis = menor, cronos = tempo). Proposto por Jean Bernoulli em 1696 e resolvido em 1697 por ele próprio, Jacques Bernoulli, Leibniz, L'Hopital e Newton

  "*É pelo tamanho da pata que se reconhece o leão.*"

- Solução híbrida: Huygens + cálculo diferencial e integral simples

$$\frac{dh}{dt} = -\sqrt{\frac{g}{R}}\sqrt{(H-h)h} \implies \int_0^{\tau/4} dt = -\sqrt{\frac{R}{g}}\int_H^0 \frac{dh}{\sqrt{(H-h)h}}$$

Não é necessário resolver a integral para mostrar que τ independe de H. Basta definir a variável adimensional $\xi := h/H$:

$$\tau = 4\sqrt{\frac{R}{g}}\int_0^H \frac{dh}{\sqrt{(H-h)h}} \quad = \quad 4\sqrt{\frac{R}{g}}\int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi)\xi}}$$

Note que a dependência em H desapareceu! A integral $\int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi)\xi}}$ é, simplesmente, fator numérico. Obviamente, se quisermos o valor do período, devemos efetuar a integração, cujo valor é π.

É difícil resumir em poucas palavras descobertas tão geniais quanto as de Huygens, mas o texto de S.S. Gindikin o faz com maestria:

"A dramática história do trabalho de Huygens é muito instrutiva. Num certo sentido, sua maior ambição não foi realizada: ele nunca teve êxito na construção de cronômetros marítimos e o pêndulo cicloidal, que Huygens considerava seu principal invento, não sobreviveu a relógios de terra (restrições na amplitude eram suficientes). O pêndulo cônico sofreu do mesmo problema. Mas seus resultados físicos e matemáticos, que foram motivados por problemas de aperfeiçoamento de relógios, sobreviveram até os nossos dias, na análise infinitesimal, geometria diferencial e mecânica, e não se pode subestimar seus significados"

S.G. Gindikin, "Tales of Physicists and Mathematicians"