6. Sucesiones y Series numéricas

6.2. Series numéricas 6.2.2. SERIES SUMABLES

Serie telescópica

Se llama **serie telescópica** a cualquier serie de la forma $\sum a_n$ donde $a_n = b_n - b_{n+1}$.
Observa que las sumas parciales de esta serie son:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = (b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + (b_3 - b_4) + \ldots + (b_n - b_{n+1}) = b_1 - b_{n+1}$$

de donde se deduce que la serie es convergente si el límite de $\{b_n\}$ es finito, siendo su suma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty}(b_n - b_{n+1}) = \lim_n (b_1 - b_{n+1}) = b_1 - \lim_n b_n$$

Serie geométrica

Se llama **serie geométrica** a cualquier serie de la forma $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = a + ar + ar^2 + \ldots + ar^n + \ldots$, con $a \neq 0$.
La serie geométrica diverge si $|r| > 1$ o $r = 1$, oscila si $r = -1$ y converge si $|r| < 1$, en cuyo caso:

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = a + ar + ar^2 + \ldots + ar^n + \ldots = \frac{a}{1-r}$$

Serie aritmético-geométrica

Se llama **serie aritmético-geométrica** a cualquier serie de la forma $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} P(n)r^n$, donde $P(n)$ es un polinomio en n. La serie aritmético-geométrica converge siempre que $|r| < 1$. Para calcular su suma S se aplica repetidamente, hasta llegar a una serie geométrica, el hecho de que

$$S - rS = k + \sum Q(n)r^n \qquad \text{donde } Q \text{ es un polinomio de grado inferior a } P$$

Serie hipergeométrica

Se llama **serie hipergeométrica** a cualquier serie de la forma $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, donde $\displaystyle\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\alpha n + \beta}{\alpha n + \gamma}$, con $\alpha > 0$, $\beta \neq 0$ y $\alpha + \beta - \gamma \neq 0$. Esta serie diverge cuando $\alpha + \beta - \gamma > 0$, y converge cuando $\alpha + \beta - \gamma < 0$, siendo la suma en este caso:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{a_1 \gamma}{\gamma - \alpha - \beta}$$

Ejercicios

1. Calcula la suma de las series: **(a)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$; **(b)** $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}$.

2. Calcula la suma de las series: **(a)** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{3^n}$; **(b)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^{2n}}$; **(c)** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{2^n}$.

3. Usa series geométricas para encontrar la expresión fraccionaria de: **(a)** $a = 2,\widehat{3}$; **(b)** $a = 2,0\widehat{51}$.

4. Se deja caer una pelota desde una altura de 2 metros y se deja botar indefinidamente hasta que se para. Si la altura alcanzada en cada salto igual a 3/4 de la altura alcanzada en el salto anterior, ¿cuál es la distancia vertical recorrida por la pelota?

5. Calcula la suma de las series: **(a)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$; **(b)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n-1}{2^n}$; **(c)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)\cdots(n+a-1)}$, $a > 1$.