ESTADÍSTICA ESPAÑOLA
Vol. 51, núm. 170, 2009, págs. 173 a 192

El juego guirguiesca del Libro de los Dados de Alfonso X (siglo XIII) y el actual juego del craps. Similitudes y diferencias en el cálculo de sus probabilidades

por
J. BASULTO SANTOS
y
J.A. CAMÚÑEZ RUÍZ

RESUMEN

El juego de guirguiesca es uno de los 12 juegos recogidos en el Libro de los Dados de Alfonso X. Este juego incluye, a partir del primer lanzamiento de los dados, la posibilidad de un envite por uno de los jugadores al jugador que los lanza. Como resultado del lanzamiento de los dados y de las apuestas que se cruzan en el envite pueden definirse varios "subjuegos" (o modalidades alternativas del juego original). En este trabajo nos ocupamos de uno de ellos, el que aquí llamamos J[5], que presenta una curiosa analogía con el popular juego de "craps". El juego J[5] da una probabilidad de ganar, al jugador que lanza los dados, que es prácticamente igual a la del juego de craps. Pero lo más interesante es que, además, J[5] es un juego complementario al de craps, en el sentido de que si éste da ventaja al jugador que lanza los dados en las partidas que acaban en el primer lanzamiento, frente a las que terminan con más de un lanzamiento, en el juego J[5] ocurre lo contrario, es decir, la ventaja es para el jugador que lanza los dados cuando las partidas acaban en más de un lanzamiento, frente a las que terminan en el primero. Podemos decir, por tanto, que el craps es un juego más adecuado para jugadores que desean ganar rápidamente (en la primer lanzamiento), mientras que el que llamamos J [5] es interesante para jugadores que busquen vivir algo de emoción antes de ganar.

Palabras Clave: Alfonso X El Sabio, Craps, Un subjuego de Guirguiesca.

Clasificación AMS: 01A45, 60-03, 60E05.

1. INTRODUCCIÓN

En el año 1283 se acabó de escribir, en la ciudad de Sevilla, el manuscrito “El Libro de Açedrex, Dados y Tablas” gracias a la extraordinaria labor de mecenas del rey Alfonso X (1221-1284). Leemos en el prólogo de este manuscrito lo siguiente: “Este libro fue començado e acabado en la cibdat de Sevilla por mandato del muy noble rey don Alfonso, fijo del muy noble Don Ferrando e de la reina Doña Beatriz,…, en la era del mill e trescientos e veint e un año”. El año está calculado según la Era de Julio César que corresponde al año 1283 de la era Cristiana. Desconocemos el año de su comienzo.

El rey Alfonso X reunió en su corte cuantos sabios pudo encontrar y les encomendó la tarea de compilar y componer una amplia serie de obras que suelen agruparse en los bloques siguientes: legales (como el Setenario, el Fuero Real, las Siete Partidas y el Libro de las Tahurerías), históricas (como la Historia de España y la llamada General Historia), científicas (como las traducciones árabes sobre Astronomía y Astrología (7 libros), la elaboración de libros de Astronomía (16 libros), de Medicina, Astrología y Magia (5 libros) y los Libros de Açedrex, Dados y Tablas), poesía y música (como Las Cantigas de Santa María y las Cantigas Profanas) y otras obras literarias.

El Libro de Açedrex, Dados y Tablas, que se encuentra en El Escorial con la signatura j.T.6, desde que Felipe II ordenó su traslado desde la Capilla Real de Granada en 1591, está formado por 98 folios de pergamino y hojas de gran tamaño, de 400×280 mms. El texto está dispuesto a dos columnas y su escritura, angulosa y puntiaguda, de quebrados trazos, es un ejemplo de letra gótica. El libro consta de siete partes, separadas por folios en blanco. Comienza con un prólogo (1r a 2r) y, a partir de aquí, está dividido en las partes siguientes:

1. El libro del ajedrez. (Folios 1r a 64r)

2. El libro de los dados. Esta formado por los siguientes juegos: Mayores, de Menores y Tanto en Uno como en Dos, Triga, Azar, Marlota, Riffa, Par con As, Panquist, Medio Azar, Azar Pujado y Guirguiesca. (Folios 65r a 71v)

3. El libro de las tablas (Backgammon). Esta formado por los siguientes juegos: Quinze Tablas, Doze Canes o Doze Hermanos, Doblet, Fallas, Seis Dos e As, Emperador, Medio Emperador, Pareja de Entrada, Cab e Quinal, Todas Tablas, laquet y Bufa Cortesa., Bufa de Baldrac y Reencontrant. (Folios 72r a 80r)

4. Ajedrez y tablas decimales: El grant ajedrez (doze casas) sin dados o con dados de ocho llanas, ajedrez (diez casas) con dados de siete llanas y Tablas (tableros) de diez casas con dados de siete llanas. (Folios 81r a 85v)

5. Otros juegos: Açedrez de los Quatro Tiempos y Tablas (tableros) que dicen El Mundo. (Folios 87r a 89v)

6. El libro del Alquerque: de doze, cercar la liebre, de nueve con dados y sin dados y de tres. (Folios 91r a 93v)

7. Juegos astronómicos: de los escaques que se juega con un dado y Tablas (tableros) con siete llanas. (Folios 95r a 97v)

El libro lleva un último folio en blanco.

En el presente trabajo vamos a interesarnos en el Libro de los Dados que está formado por juegos de suertes(1) (chances).

(1) La palabra probabilidad significaba antiguamente lo que hoy llamamos probabilidad subjetiva, mientras que la palabra chance o suerte era utilizada como nuestra probabilidad objetiva. Ahora bien, la palabra suerte o chance no ha tenido un significado probabilístico en su origen. Como muy bien recoge Kendall (Kendall, M.G. (1956). Studies in the History of Probability and Statistics: II. The Beginning of Probability Calculus. Biometrika, vol. 43, No.1-4, pp. 1-14.) la palabra chance (en nuestro caso suerte) era, por ejemplo, en el caso del juego de Azar (Basulto et al, 2006), una puntuación del conjunto suerte, o sea, del conjunto {7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14}. El jugador lanzaba los dados para dar las suertes, primero, al otro jugador y a, continuación, a él; y una vez que las suertes estaban repartidas el jugador debía lanzar los dados sucesivamente hasta que viniese su suerte, que le hacía ganar, o la del otro jugador que le hacía perder y, por lo tanto, hacía ganar al otro jugador.

Estos juegos constituyen una muestra muy valiosa de problemas sobre juegos de azar(2) que hoy resolvemos mediante el Cálculo de Probabilidades. El manuscrito proporciona una información precisa acerca de las reglas que siguen estos juegos de suertes, lo que nos ha permitido, junto con otras fuentes de información, dar una descripción matemática de los mismos. En esta dirección hemos encontrado algunos de los juegos del Libro de los Dados en las publicaciones de los matemáticos de los siglos XVII y XVIII que contribuyeron al desarrollo del Cálculo de Probabilidades. Así, el juego llamado guirguiesca, que se juega con dos dados y que motiva el presente trabajo, genera varios subjuegos que veremos más adelante y que, algunos de ellos, pueden encontrarse a partir de la página 26 del libro "Essay d'Analyse sur les Jeux de Hazard", edición de 1714 de Montmort (1678-1719) y, también, en el libro "The Doctrine of Chance" de De Moivre (1667-1754), en la página 160 de la edición The American Mathematical Society del año 2000.

Elaborar nuevos juegos de azar o modificar los existentes fue una labor desarrollada por los matemáticos De Moivre, Leibniz (Mora Charles, 1992) y L. Euler Bellhouse; 1991 y 2007), entre otros. Los dos primeros modificaron ciertos juegos hasta hacerlos más justos, es decir, con probabilidades de ganar cercanas a 0,5. Precisamente, hemos comprobado en el Libro de los Dados que, cuando nuestros cálculos producen, en algunos de sus juegos, probabilidades de ganar alejadas de 0,5, entonces los autores de estos juegos proponen que al inicio de los mismos se sortee quién debe comenzar lanzando los dados, acción a la que en el manuscrito se le llama "hacer batalla" (en algunos de estos juegos la probabilidad de ganar o perder depende de quién lance). Este sorteo inicial sirve para que, a la larga, el juego se haga justo.

La Historia del Cálculo de Probabilidades es testigo del uso intensivo de los juegos de azar como generadores de problemas que se convierten en tópicos entre los investigadores de dicho cálculo. Una muestra de esta afirmación puede verse en los libros de Anders Hald (1990, 1998, 2006).

La mayor parte de los juegos del Libro de los Dados lo son de apuestas (*gambling* en inglés). Ahora bien, hemos encontrado que el llamado guirguiesca incluye, a partir del primer lanzamiento en el que los dos dados sacan una suerte, la posibilidad de proponer un *envite* por parte de uno de los jugadores a aquél que lanza los

(2) La palabra azar es de origen árabe y corresponde a la palabra "al zahr", que era una flor que se pintaba en una de las caras del dado. La palabra da nombre al juego Azar del Libro de los Dados, y hoy día la usamos para referir cualquier situación contingente. En ese juego, obtener una puntuación "azar" era conseguir una puntuación del conjunto {3, 4, 5, 6, 15, 16, 17, 18} al lanzar tres dados, puntuaciones cuyas probabilidades son todas inferiores al 3,3%.

dados. Este envite, además de ser descrito en el texto del manuscrito, ha sido recogido en la miniatura en color que acompaña a este juego, que recogemos en la segunda sección del presente trabajo. En ella se observa cómo el jugador de la izquierda tiene levantada su mano como señal del envite después que los dados le dan su suerte (la miniatura muestra la suerte cuatro).

La presencia del envite, que obliga al otro jugador a aceptarlo, o si no pierde el juego, genera en este juego de guirguiesca siete “subjuegos” que se reducen a cuatro como veremos en la sección dos de este trabajo. De estos subjuegos nos interesamos por el que llamamos J[5]. El análisis de otro, que llamamos J[7], y que defendemos que es la raíz del juego conocido como craps, puede verse en Basulto et al (2007). El juego de craps ya aparece en las obras citadas de Montmort y De Moivre. Hoy día, este juego es muy popular, entre otras razones, porque la probabilidad de ganar cuando se apuesta al evento “pass line” es igual a 0,49292, ganando entonces la cantidad apostada después de abonar un pequeño porcentaje de lo ganado. En el caso de nuestro juego J[7], la probabilidad que tiene de ganar el jugador que lanza los dados se aleja de la probabilidad del juego de craps. En cambio, para el citado subjuego J[5], dicha probabilidad es prácticamente la misma.

Una diferencia notable entre craps y J[5] es la siguiente: mientras que en el juego de craps “la probabilidad de que el jugador que lanza los dados gane en el primer lanzamiento supera a la probabilidad de que gane cuando la partida finaliza con más de un lanzamiento”, en el J[5] ocurre lo contrario, es decir, “la probabilidad de que el juzgador que lanza los dados gane cuando la partida finaliza con más de un lanzamiento es mayor que la probabilidad de que gane cuando la partida acaba en el primer lanzamiento”. Estos resultados serán probados en el presente trabajo.

Con esta aportación pretendemos que sea considerado el Libro del Ajedrez, Dados y Tablas como una contribución del mecenazgo del rey Alfonso X a la Historia del Cálculo de Probabilidades.

No queremos terminar esta introducción sin comentar que Alfonso X completó su labor legislativa con la elaboración del llamado Libro de las Tahurerías(3), un libro de leyes que mandó redactar para legislar los juegos de apuestas en todo su reino.

---

(3) Macdonald, R. A. (1995). Libro de las Tahurerías: a special code of law, concerning gambling, drawn up by Maestro Roldán at the command of Alfonso X of Castile. Madison Hispanic Seminary of Medieval Studies.

En la Castilla del siglo XIII los juegos de apuestas fueron prohibidos debido a las peleas, crímenes y blasfemias inherentes a esta actividad tan antigua como el propio hombre en la tierra. Ahora bien, ante la imposibilidad de hacer cumplir estos buenos deseos, Alfonso X planteó una política más realista: regular los juegos de apuestas por medio de las leyes de la Tahurerías(4). Las tahurerías eran los casinos reales donde se podía jugar legalmente. El empresario interesado en estos casinos pujaba para hacerse con una concesión durante un cierto tiempo. Estos empresarios eran llamados tablajeros o aleatores (*alea* es "dado" en latín). El Libro de las Tahurerías y su relación con los juegos de suertes abre otras posibilidades de investigación.

A partir de aquí el presente trabajo queda distribuido de la siguiente forma. En la sección que sigue describimos el juego de guirguiesca, con sus subjuegos, y el juego de craps. En la sección tercera mostramos las principales características del juego J[5] a partir de conocer las del craps. Resumimos los principales resultados y su importancia en las conclusiones y, finalmente, recogemos en un apéndice alguna de las fórmulas utilizadas en las secciones anteriores.

2. JUEGOS DE GUIRGUIESCA Y CRAPS

Guirguiesca y craps son juegos que se juegan con dos dados. A los jugadores que participan en el juego del craps les llamamos Caster, que lanza los dados, y Setter, que apuesta en contra. Los nombres los tomamos de la tradición en la literatura de este juego. A los que participan en guirguiesca los llamamos G1, que lanza los dados, y G2.

Ambos juegos tienen en común que clasifican las puntuaciones, que resultan al lanzar los dos dados, en las menos probables recogidas en el conjunto Azar, {2, 3, 11, 12}, y las más probables recogidas en el conjunto Suerte, {4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}.

(4) Un ejemplo es la Ley II: De los que juegan con dados de engaño e con escaques de engaño, e lo que saben fincar los dados, donde se recogen tres tipos de engaños que se hacían con los dados, a saber, los dados plomados que se les ponía pesos para que al lanzarlos cayeran de manera determinada; los dados desvenados que tenían los puntos casi borrados y era difícil leerlos y así hacía dudar al fullero en complicidad con sus compinches y, finalmente, los dados afeitados que tenían limadas las aristas (cantos en el manuscrito) para que al tirarlos cayeran en la forma deseada.

En la Tabla 1 recogemos un esquema de la estructura del juego de guirguiesca.

Tabla 1

		Suertes de G2						
		4	5	6	7	8	9	10
Azares	2	G2	G2	G2	G2	G2	G2	G2
	3	G2	G2	G2	G2	G2	G2	G2
Suertes de G1	4	G1	R	R	R	R	R	R
	5	R	G1	R	R	R	R	R
	6	R	R	G1	R	R	R	R
	7	R	R	R	G1	R	R	R
	8	R	R	R	R	G1	R	R
	9	R	R	R	R	R	G1	R
	10	R	R	R	R	R	R	G1
Azares	11	G2	G2	G2	G2	G2	G2	G2
	12	G2	G2	G2	G2	G2	G2	G2

En la Tabla 1, hemos encabezado las columnas con la suerte de G2. Cada fila se inicia con los valores de la izquierda donde aparecen azares y suertes de G1. Las celdas que contienen G2 indican que cuando se den las correspondientes suertes de las columnas y fila que determinan dicha celda, entonces gana ese jugador. Similar interpretación para las celdas que contienen G1. En cuanto a las celdas que contienen la letra R, cuando ocurran las suertes fila y columna asociadas, el jugador G1 debe lanzar los dados sucesivamente hasta que salga alguna de las suertes que definen esta celda.

El juego de guirguiesca puede concluir en el primer lanzamiento, o bien alargarse varios más, haciéndolo más atractivo. Comienza lanzando G1; si sale una puntuación azar él lo gana y el juego concluye, pero si sale una puntuación suerte, por ejemplo cuatro, ésta le corresponde al jugador G2 y, entonces, éste puede hacer un envite (proponer una apuesta distinta de la inicial) a G1. En este caso, éste último debe aceptarlo o, si no, debe abandonar el juego y perder lo apostado.

La siguiente miniatura nos muestra al jugador que hemos llamado G2 con la mano levantada, haciendo el envite, cuando los dados le han dado la suerte cuatro.

Miniatura

Si, como nos muestra la imagen, G2 hace un envite, entonces el juego de guirguiesca genera siete subjuegos, correspondientes a las siete posibilidades que se abren desde ese instante, y que en la Tabla 1 se representan en las columnas de la misma encabezadas con las suertes {4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}. Pero como las suertes que suman 14 son igual de probables(5), podemos reducir estos subjuegos a cuatro, que los identificamos por J[4], *J*[5], J[6] y J[7]. De estos, vamos a quedarnos con J[5] para compararlo con el juego de Craps. Un estudio del juego de guirguiesca puede verse en Basulto et al (2007).

El subjuego J[5], que está recogido en la Tabla 1, consiste en los siguiente: Ya ha ocurrido el primer lanzamiento, donde G1 no ha ganado pues ha salido una puntuación suerte. Entonces se inicia este subjuego; si G1 lanza una puntuación azar, entonces gana G2; si lanza la suerte 5, entonces gana G1; en otros casos

(5) En el manuscrito, a las puntuaciones que suman 14 se les llama çoçobra (zozobra), por ejemplo la puntuaciones 4 es la zozobra de 10 porque 4+10=14=2(6+1). También este concepto se puede aplicar a combinaciones con repetición, así la combinación (1, 3) tiene como zozobra la (6, 4), es decir, para obtener la zozobra de una combinación (a, b) se resta de siete cada valor numérico, así (7-a) y (7-b).

hemos puesto la letra R, o sea, se repite el lanzamiento. Así, cuando se produce el primer lanzamiento del subjuego, efectuado por G1, como ya se ha establecido, si dicho lanzamiento muestra una suerte distinta de 5, por ejemplo 4, entonces G1 debe efectuar sucesivos lanzamientos hasta que consiga 4 (antes de que salga 5), lo que haría ganar, o bien salga 5 (antes de que salga 4), lo que le haría perder y, por tanto, ganar a G2.

En la Tabla 2 recogemos un esquema con la estructura del juego de craps.

Tabla 2

		Suertes de Setter
		7
Azares	2	Setter
	3	Setter
Suertes de Caster	4	R
	5	R
	6	R
	7	Caster
	8	R
	9	R
	10	R
Azares	11	Caster
	12	Setter

En el craps la suerte de Setter es la puntuación siete, mientras que las suertes de Caster son {4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}. Las celdas de esta tabla se interpretan como las de la Tabla 1. Este juego consiste en lo siguiente: cuando Caster lanza una puntuación del conjunto {2, 3, 12}, entonces gana la partida Setter; si lanza la suerte 7 o el azar 11, entonces gana la partida Caster; en otros casos hemos puesto la letra R (de repetición).

Cuando Caster efectúa el primer lanzamiento y obtiene una suerte distinta de 7, por ejemplo 4, entonces este jugador inicia una serie de lanzamientos sucesivos, que se detiene cuando aparece por primera vez un 4 o un 7. Si aparece antes un 4 que un 7 el juego lo gana Caster, el que lanza. Si, por el contrario, aparece antes un 7 que un 4, el juego lo gana Setter, el segundo jugador. En esta situación, llamamos p_k a la probabilidad de obtener la puntuación k al lanzar los dos dados, con k=2,3, …, 12. A partir de la descripción dada del craps, deducimos a continuación las probabilidades de los sucesos que nos interesan aquí. Definimos dichos sucesos. Representamos con w el suceso "Caster gana el juego", por l "Caster pierde el juego". Asimismo, representamos por 1L el suceso "el juego acaba en el primer lanzamiento" y por +1L, "el juego concluye con más de un lanzamiento". Entonces, se deduce que la probabilidad de que Caster gane y acabe el juego en un lanzamiento es:

$P_r\left[l,1L\,|\,craps\right]=p_2+p_3+p_{12}$; la probabilidad de que gane el mismo y acabe en más de un lanzamiento es:

$P_r\left[w,+1L\,|\,craps\right]=\sum\limits_{k=4,k\neq 7}^{10}\frac{p_k^2}{p_k+p_7}$ y, por último, la probabilidad de que Caster pierda y acabe el juego con más de un lanzamiento es: $P_r\left[l,+1L\,|\,craps\right]=\sum\limits_{k=4,k\neq 7}^{10}\frac{p_k p_7}{p_k+p_7}$. En el apéndice de este trabajo introducimos los cálculos que conducen a las igualdades presentadas. A partir de las mismas deducimos las siguientes consecuencias.

C.1.(craps). $P_r\left[w,1L\,|\,craps\right]=2P_r\left[l,1L\,|\,craps\right]$.

Por tanto $P_r\left[w,1L\,|\,craps\right]>P_r\left[l,1L\,|\,craps\right]$.

C.2.(craps). $P_r\left[w,+1L\,|\,craps\right]<P_r\left[l,+1L\,|\,craps\right]$.

C.3.(craps). $P_r\left[w\,|\,1L,craps\right]>P_r\left[w\,|\,+1L,craps\right]$.

C.4.(craps). $P_r\left[1L\,|\,craps\right]<0'5$ y $P_r\left[+1L\,|\,craps\right]>0'5$.

También, en el apéndice citado introducimos la igualdad A-1 que nos permite calcular la probabilidad de que Caster, el que lanza los dados en el craps, gane el juego es 0,49292. En el caso del juego J[5], la probabilidad de que gane G1, el que lanza, es 0,49241. Si llamamos ε a la diferencia entre ambas probabilidades (un valor pequeño), o sea, si $\varepsilon = P_r\left[w \middle| craps\right] - P_r\left[w \middle| J[5]\right]$, se comprueba la siguiente:

$$\textbf{C.5.(craps)}.\ (p_5 + p_{11}) - P_r\left[l, +1L \middle| craps\right] - P_r\left[w, +1L \middle| craps\right] > 2\varepsilon .$$

Observando las Consecuencias 3 y 4 entendemos el efecto compensatorio global del juego, para que la probabilidad de ganar o perder de cada jugador sea próxima a 0,5. Así, la Consecuencia 3 nos indica que la probabilidad de que gane el jugador que lanza, si hay un solo lanzamiento, es mayor que si hay más de uno (de hecho, estas probabilidades son 0,6666 y 0,4060, respectivamente). Mientras, la Consecuencia 4 nos informa que la probabilidad de que el juego termine con un solo lanzamiento es menor a la de que concluya con más de uno (0,3333 frente a 0,6666).

3. COMPARACIONES ENTRE EL JUEGO DE CRAPS Y J [5] DE GUIRGUIESCA

En esta sección introducimos dos igualdades que relacionan craps y *J*[5]. A partir de ellas deducimos dos consecuencias que también relacionan ambos juegos y tres consecuencias del juego J[5] de guirguiesca que se muestran complementarias a las del juego del craps.

Se verifican las siguientes ecuaciones:

$$\textbf{E.1.-}\ P_r\left[1L \middle| craps\right] = P_r\left[1L \middle| J[5]\right] + (p_7 - p_5) .$$

$$\textbf{E.2.-}\ P_r\left[w, 1L \middle| J[5]\right] = P_r\left[l, 1L \middle| Craps\right] = p_5 .$$

La primera ecuación informa que es más probable que el juego acabe en el primer lanzamiento, si se trata de craps, que si se trata de J[5]. La ecuación E.2 establece que, en J[5], la probabilidad de que G1 gane el juego y acabe en el primer lanzamiento es igual a la probabilidad de que Caster pierda el juego y acabe en el primer lanzamiento en el caso de craps. De esta ecuación, y de C.1.(*craps*) se obtiene la siguiente consecuencia:

$$\textbf{C.1.(craps-guirguiesca)}.\ P_r\left[w, 1L \middle| craps\right] = 2P_r\left[w, 1L \middle| J[5]\right] .$$

O sea, la probabilidad de ganar y efectuar un solo lanzamiento, en el craps, es el doble que en J[5], en ambos casos para el jugador que lanza los dados. De las ecuaciones E.1 y E.2 deducimos:

C.2.(craps-guirguiesca). $P_r\left[l,1L\left|J[5]\right.\right]-P_r\left[l,1L\left|craps\right.\right]=p_{11}$.

Esta segunda consecuencia nos ofrece la diferencia de probabilidades de perder y acabar en un solo lanzamiento entre ambos juegos, siendo dicha probabilidad superior en J[5].

Demostramos a continuación tres consecuencias para el juego J[5] de guirguiesca que se muestran complementarias a las del juego de craps.

C.1.(guirguiesca). $P_r\left[l,1L\left|J[5]\right.\right]>P_r\left[w,1L\left|J[5]\right.\right]$.

Esta es complementaria de **C.1.(craps)**.

Prueba:

Podemos escribir, a partir de la probabilidad de la intersección de sucesos disjuntos,

$$P_r\left[w,1L\left|J[5]\right.\right]+P_r\left[l,1L\left|J[5]\right.\right]=P_r\left[1L\left|J[5]\right.\right].$$

Por tanto, $P_r\left[l,1L\left|J[5]\right.\right]=P_r\left[1L\left|J[5]\right.\right]-P_r\left[w,1L\left|J[5]\right.\right]$. El segundo miembro de esta igualdad, por E.1 y E.2, coincide con

$P_r\left[1L\left|craps\right.\right]-(p_7-p_5)-P_r\left[l,1L\left|Craps\right.\right]=P_r\left[w,1L\left|Craps\right.\right]-(p_7-p_5)$, que por la consecuencia C.1.(craps-guirguiesca), es igual a $2P_r\left[w,1L\left|J[5]\right.\right]-(p_7-p_5)$.

Resumiendo, tenemos

$P_r\left[l,1L\left|J[5]\right.\right]-P_r\left[w,1L\left|J[5]\right.\right]=P_r\left[w,1L\left|J[5]\right.\right]-(p_7-p_5)$, que por E.2, es igual a $2p_5-p_7>0$.

Si comparamos esta consecuencia con la C.1.(*craps*), resulta que, si en el juego de craps es más probable ganar y acabar en el primer lanzamiento que perder y acabar en el primer lanzamiento, en el juego J[5] ocurre lo contrario.

Veamos a continuación la desigualdad complementaria de la consecuencia C.2.(craps) en el juego J[5].

C.2.(guirguiesca). $P_r\left[w,+1L \middle| J[5]\right] > P_r\left[l,+1L \middle| J[5]\right]$.

Prueba:

Sabemos que $P_r\left[w \middle| craps\right] - P_r\left[w \middle| J[5]\right] = \varepsilon$. Podemos escribir entonces $P_r\left[w,+1L \middle| J[5]\right] = P_r\left[w,+1L \middle| craps\right] + \left(P_r\left[w,1L \middle| craps\right] - P_r\left[w,1L \middle| J[5]\right]\right) - \varepsilon$, y por C.1.(craps-guirguiesca), tenemos

$$P_r\left[w,+1L \middle| J[5]\right] = P_r\left[w,+1L \middle| craps\right] + P_r\left[w,1L \middle| J[5]\right] - \varepsilon,$$

y por E.1 resulta $P_r\left[w,+1L \middle| J[5]\right] = P_r\left[w,+1L \middle| Craps\right] + p_5 - \varepsilon$.

Si ahora operamos con los sucesos "el jugador que lanza pierde el juego", es decir, $P_r\left[l \middle| craps\right] - P_r\left[l \middle| J[5]\right] = -\varepsilon$ y usamos la consecuencia C.2.(craps-guirguiesca), obtenemos $P_r\left[l,+1L \middle| J[5]\right] = P_r\left[l,+1L \middle| craps\right] - p_{11} + \varepsilon$. A partir de estas identidades deducimos que

$$P_r\left[w,+1L \middle| J[5]\right] - P_r\left[l,+1L \middle| J[5]\right] = p_5 + p_{11} - \left(P_r\left[l,+1L \middle| Craps\right] - P_r\left[w,+1L \middle| Craps\right]\right) - 2\varepsilon$$

que por la consecuencia C.5.(craps), prueba la desigualdad.

Concluimos entonces, al comparar la consecuencia demostrada con la correspondiente del craps, que si en este último es menos probable ganar y acabar en más de un lanzamiento que perder y acabar en más de un lanzamiento, en el juego J[5] ocurre lo contrario.

Finalmente, demostramos la desigualdad complementaria de la consecuencia C.3.(*craps*) en el juego J[5].

C.3.(guirguiesca). $P_r\left[w \middle| +1L, J[5]\right] > P_r\left[w \middle| 1L, J[5]\right]$.

Prueba:

De la consecuencia C.1.(guirguiesca) sabemos que $P_r\left[l,1L\,|\,J[5]\right] > P_r\left[w,1L\,|\,J[5]\right]$, y que al dividir ambos términos por la probabilidad marginal $P_r\left[1L\,|\,J[5]\right]$, obtenemos $P_r\left[w\,|\,1L,J[5]\right] < 0'5$.

De la consecuencia C.1.(guirguiesca) sabemos que $P_r\left[w,+1L\,|\,J[5]\right] > P_r\left[l,+1L\,|\,J[5]\right]$, y al dividir ambos términos por la probabilidad marginal $P_r\left[+1L\,|\,J[5]\right]$, obtenemos $P_r\left[w\,|\,+1L,J[5]\right] > 0'5$, que prueba la desigualdad.

Comparando esta consecuencia con la correspondiente para el craps, tenemos que si en el craps es más probable ganar en el primer lanzamiento que en más de un lanzamiento, en el J[5] ocurre lo contrario.

CONCLUSIONES

En el presente trabajo hemos relacionado el juego de craps, que hoy es muy popular en los casinos de juego y en Internet (basta teclear en Google “craps game” para que se nos ofrezca más de 78 millones de páginas), con el subjuego J[5] de guirguiesca recogido en el Libro de los Dados de Alfonso X El Sabio.

La variable aleatoria N: “número de lanzamientos que efectúa el primer jugador hasta que concluye el juego”, que se define para ambos juegos, mide lo que en la literatura del cálculo de probabilidades se ha llamado “duración del juego”. Es interesente el cálculo de su esperanza matemática. En el apéndice abordamos dicho cálculo. De esos resultados concluimos que el juego J[5] tiene una duración esperada de 0,6925 lanzamientos adicionales sobre los del craps, con una desviación típica de 3,7473 lanzamientos frente a 3,003 del craps. Podríamos decir que J[5] tiene “más duración” que el craps.

Cuando el jugador que lanza los dados ha conseguido que el juego continúe después del primer lanzamiento, el juego J[5] le da una probabilidad de ganar igual a 0,52, por lo que es ventajoso al compararlo con el craps, que le da una probabilidad de 0,406. En cambio, si el jugador que lanza lo dados busca ganar en el primer lanzamiento, entonces el juego de craps le da una probabilidad de 0,6666 de ganar, frente a 0,3999 de J[5].

Por tanto, si el jugador busca más emoción, o sea disfruta más cuando gana después de varios lanzamientos, el juego J[5] es una opción, pero si quieren ganar pronto, en el primer lanzamiento, el craps es la alternativa.

Debe tenerse en cuenta que estas ventajas, que ocurren en ciertas momentos de la partida, se compensan globalmente ya que ambos juegos dan una probabilidad de ganar, al jugador que lanza los dados, cercana a 0,5.

Queremos finalizar este trabajo comentando que Alfonso X abordó los juegos de suertes con apuestas (gambling) desde el conocimiento de las reglas de los juegos que se jugaban en la Tahurerías hasta las consecuencias de su actividad social y la necesidad de su regulación. Muchos de los temas tratados en el libro de los juegos y el Libro de las Tahurerías, debido al mecenazgo de Alfonso X, serían recogidos en la obra "Liber de Ludo Aleae" de Cardano (1501-1576), un libro de juegos de suerte con apuestas.

APÉNDICE

En este apéndice recogemos los resultados que hemos usado en este trabajo. Algunos son acompañados de una demostración basada en el uso de valores esperados y en la resolución de la correspondiente ecuación en diferencias finitas.

Para el juego de craps:

Tomemos, por ejemplo, el caso de que la suerte de Caster es 4 y la de Setter es 7; los dados se lanzan sucesivamente hasta que ocurra por primera vez 4 ó 7. Si sale antes 4 que 7 gana Caster. Si, por el contario, ocurre 7 antes que 4, gana Setter.

Llamamos $\alpha_{4,7}$ a la probabilidad de sacar las puntuaciones 4 ó 7. Dicha probabilidad es $\alpha_{4,7} = \frac{3+6}{36}$. Denominamos p_4 la probabilidad de que salga la puntuación 4, cuyo valor es $p_4 = \frac{3}{36}$.

Si ahora nos situamos en el momento en el que Caster ha recibido su suerte, que suponemos es la puntuación 4, llamaremos E a lo que espera retirar de lo apostado, donde el total apostado será considerado como una unidad monetaria que apuestan los dos jugadores. En el siguiente lanzamiento, Caster puede obtener 4, que le hace ganar esa unidad monetaria, puede lanzar 7, que le hace perder (o ganar 0), o lanzar cualquier otra puntuación, lo cual es como volver a la situación de partida y, así lo que espera es E’ = E. Tomando las tres posibilidades descritas que parten de la puntuación 4 usando el valor esperado, resulta la ecuación

$$E = p_4 + (1-\alpha_{4,7})E \text{ , cuya solución es } E = \frac{p_4}{\alpha_{4,7}} = \frac{3}{9} .$$

Si aplicamos esta fórmula al resto de las suertes, que multiplicaremos por sus correspondientes probabilidades, y si añadimos la probabilidad de ganar en el primer lanzamiento, obtenemos la siguiente fórmula que nos proporciona la probabilidad de que Caster (el que lanza los dados) en el juego de craps:

$$P\left[w \middle| \text{Craps}\right] = p_7 + p_{11} + \sum_{k=4;k\neq 7}^{10} \frac{p_k^2}{\alpha_{k,7}} , \qquad \text{[A-1]}$$

donde p_k es la probabilidad de que salga la puntuación k= 4,5,6,8,9,10; y $\alpha_{k,7}$ la probabilidad de que se lance la puntuación k ó 7.

La correspondiente fórmula para el juego J[5] se obtiene cambiando las probabilidades $p_7 + p_{11}$ por p_5 y los valores $\alpha_{k,7}$ por $\alpha_{k,5}$.

Nos interesamos ahora por la duración del juego de craps. Vamos a considerar la variable aleatoria, N, que cuenta el total de lanzamientos que debe hacer Caster para terminar una partida. La fórmula para el valor esperado de N es,

$$E\left[N \middle| \text{Craps}\right] = 1 + \sum_{k=4;k\neq 7}^{10} \frac{p_k}{\alpha_{k,7}} . \qquad \text{[A-2]}$$

La fórmula correspondiente para J[5] se obtiene cambiando los valores $\alpha_{k,7}$ por $\alpha_{k,5}$ y, también, la suerte 7 de Setter por la suerte 5.

De la fórmula [A-2] es fácil probar que, $E\left[N \middle| \text{craps}\right] < E\left[N \middle| J[5]\right]$, es decir, el valor esperado de lanzamientos en el juego de Craps es menor que el de J[5].

Una explicación de la fórmula [A-2] usando el valor esperado es la siguiente. Si en el primer lanzamiento Caster ha sacado la suerte 4, sabemos que debe lanzar los dados sucesivamente hasta que, por fin, salga 4 ó 7. Ahora representamos por E el valor esperado de la variable N a partir de que Caster ha sacado su suerte 4.

Si en el siguiente lanzamiento de los dados no ha ocurrido 4 ó 7, representamos por E’ el valor esperado de la variable N a partir de ese momento. Es evidente que $E' = E + 1$ y además, $E = \alpha_{4,7} + \left(1-\alpha_{4,7}\right)E' = \alpha_{4,7} + \left(1-\alpha_{4,7}\right)\left(E+1\right)$, obteniendo que

$E = \dfrac{1}{\alpha_{4,7}}$. Este último valor debe multiplicarse por la probabilidad de lanzar la suerte 4 de Caster. Repitiendo estos cálculos para el resto de las suertes, sumando todos los resultados, y añadiendo una unidad que corresponde al lanzamiento que le dio la suerte a Caster, obtenemos la fórmula [A-2]. Un argumento semejante al anterior, proporcionado por uno de los evaluadores de este trabajo, consiste en usar el modelo geométrico de Pascal en el caso en el que el jugador Caster ha recibido su suerte, excepto la puntuación siete, usando el valor esperado de dicho modelo para llegar al cálculo del valor esperado marginal de N a través de la distintas probabilidades de las puntuaciones implicadas.

Aunque el cálculo de la varianza de la variable aleatoria N se sigue directamente de su definición, vamos a proceder con el cálculo de la esperanza de la variable aleatoria $M = N(N-1)$, que está relacionada con la varianza de N por la siguiente expresión $Var(N) = E\left[N(N-1)\right] + E[N] - \left(E[N]\right)^2$, ya que la fórmula de dicha esperanza es de más cómoda lectura:

$$E\left[N(N-1)\middle|craps\right] = 2\sum_{k=4;k\neq 7}^{10} \frac{p_k}{\alpha_{k,7}^2}. \qquad [A-3]$$

Una forma de obtener [A-3] es la siguiente:

1. Para cada suerte k, de Caster, distinta de la puntuación 7, el valor esperado de N^2, condicionado a la suerte *k*, es la serie siguiente

$$\sum_{k=2}^{\infty} k^2\alpha(1-\alpha)^{k-2} = \frac{\alpha^2+\alpha+2}{\alpha^2}, \text{ donde } \alpha = \alpha_{k,7}.$$

2. A este último resultado lo multiplicamos por la probabilidad de que salga la suerte k, sumamos los productos para todos los valores de k, y añadimos la probabilidad de que N =1, es decir, $p_2 + p_3 + p_7 + p_{11} + p_{12}$. Así obtenemos $E\left[N^2\right]$.

3. Si a ese último valor esperado le restamos $E[N]$, se obtiene [A-3].

La fórmula [A-3] se aplica también al juego J[5] modificando la suerte del jugador Setter.

De la fórmula [A-3] es fácil probar que,

$$E\left[N(N-1)\middle|craps\right] < E\left[N(N-1)\middle|J[5]\right],$$

y de aquí se deduce que,

$$\mathrm{Var}\left[N \mid \mathrm{craps}\right] < \mathrm{Var}\left[N \mid J[5]\right],$$

es decir, la varianza del número de lanzamientos en el juego de Craps es menor que la del juego de J[5].

Calculamos ahora la función de probabilidad de la variable aleatoria N del craps.

Para $N = 1$,

$$P\left[N = 1\right] = p_2 + p_3 + p_7 + p_{11} + p_{12}\,. \qquad \text{[A-4]}$$

y para valores distintos de la unidad,

$$P\left[N = n\right] = \sum_{k=4;k\neq 7}^{10} p_k \alpha_{k,7}\left(1-\alpha_{k,7}\right)^{n-2}\,. \qquad \text{[A-5]}$$

Las fórmulas [A-4] y [A-5] son válidas para el juego J[5] modificando la suerte del jugador Setter.

Por último, la función de Supervivencia es

$$S_N\left[n \mid \mathrm{craps}\right] = \sum_{k=4;k\neq 7}^{10} p_k\left(1-\alpha_{k,7}\right)^{n-1}\,. \qquad \text{[A-6]}$$

De la fórmula [A-6], es fácil probar que,

$$S_N\left[n \mid \mathrm{craps}\right] < S_N\left[n \mid J[5]\right],$$

es decir, la función de Supervivencia del juego de craps es menor que la de J[5].

REFERENCIAS

BASULTO, J., CAMÚÑEZ, J. A. Y ORTEGA F. J. (2006). «Azar Game in the Book of Dice of Alfonso X The Learned. Its relation with the Hazard Games of Montmort, Cotton, Hoyle, De Moivre and J. Bernoulli» *Math. & Sci. Hum.-Mathematics and Social Sciences.* No. 174, 5-24.

BASULTO, J.; CAMÚÑEZ, J. A. Y ORTEGA F. J (2007). «Juegos de azar, guirguesca y marlota del Libro de los Dados del Alfonso X El Sabio». *Alcanate. Revista de Estudios Alfonsíes*. 89-116.

GIROLAMO CARDANO (1663). «Liber de Ludo Aleae». A cura di Massimo Tamborino. Filosofia e Scienza Nell'Età Moderna. Francoangeli. 2004.

BELLHOUSE, D. R. (1991), «The Genoese Lottery». *Satistical Science*, vol. 6, N0. 2, 141-148.

BELLHOUSE, D. R. (2007). «Euler and Lotteries». Libro de «Leonhard Euler: Life, Work and Legacy». Robert E. Bradley and C. Edward Sandifer (Editores). Elsevier B.V.

DE MOIVRE, A. (1718), «The doctrine of chances or a method of calculating the probability of event in play». The third edition, printed by A. Millar, in the Strand. MDCCLVI, 1718. [Reprint by the American Mathematical Society, 2000].

HALD, A. (1998). «A History of Mathematical Statistics from 1750 to 1930». Wiley.

HALD, A. (2003). «A History of Probablity and Statistics and Their Applications before 1750». Wiley.

HALD, A. (2006). «A History of Parametric Statistical Inference from Bernoullli to Fisher, 1713-1935». *Sources and Studies in History of Mathematical and Physical Sciences. Springer.*

KENDALL, M.G. (1956). «Studies in the History of Probability and Statistics: II. The Beginning of Probability Calculus». *Biometrika*, vol. 43, No.1 / 4 , pp. 1-14.

MACDONALD, R.A. (1995). «Libro de las tahurerías: a special code of law, concerning gambling, drawn up by Maestro Roldán at the command of Alfonso X of Castile». Madison Hispanic Seminary of Medieval Studies.

MONTMORT, A. (1723 «Essay d'Analyse sur les Jeux de Hazard». Paris, Quillau.

MORA CHARLES, M. S. DE (1992). «Quelques jeux de hazard selon Leibniz». *Historia Mathematica* 19, 125-157.

THE GAME GUIRGUIESCA OF THE BOOK OF THE DICE OF ALFONSO X (13TH CENTURY) AND THE CURRENT GAME OF THE CRAPS. SIMILARITIES AND DIFFERENCES IN THE CALCULATION OF HIS PROBABILITIES

ABSTRACT

The guirguiesca's game is one of twelve games gathered in the Book of Dice of Alfonso X. After the first throw of the dice, the guirguiesca's game includes the proposal of a bid from one of the players to the player that rolls the dice. The result obtained with the dice and the bets of the bid generate several games. One of these games is called J[5] that motivate our paper. Game J[5] gives one probability of winning to the player that rolls the dice, which is almost the same than Craps' game. *Craps* is a very popular game in all sort of casinos. The most interesting of this thing is that the game J[5] is complementary to craps' game, more accurately, craps' game give the advantage to the player that rolls the dice in the games that end in the first throw while J[5] gives the advantage in the games end in several toss. We can say, therefore, that the craps is a game more adapted for players who want to win rapidly, in the first toss whereas the fact that we call J[5] it is interesting for players who seek to live through something of emotion before winning.

Key Words: Alfonso X The Learned, Craps'game, Guirguiesca's subgame.

AMS Classification: 01A45, 60-03, 60E05.