Универзитет „Св. Кирил и Методиј“ Скопје

Природно-математички факултет

Институт за математика

Магдалена Ивановска

ПОВЕЌЕВРЕДНОСНА ЛОГИКА

- магистерски труд -

Скопје, 2008

Ментор:

Проф. Д-р Дончо Димовски,

редовен професор на ПМФ - Скопје

Рецензентска комисија:

Проф. Д-р Дончо Димовски,

редовен професор на ПМФ - Скопје

Проф. Д-р Биљана Јанева,

редовен професор на ПМФ - Скопје

Проф. Д-р Костадин Тренчевски,

редовен професор на ПМФ - Скопје

Датум на одбрана:

Датум на промоција:

Научна област: Математика

Универзитет „Св. Кирил и Методиј“ Скопје

Природно-математички факултет

Институт за математика

ПОВЕЌЕВРЕДНОСНА ЛОГИКА

Апстракт

Овој труд ја разработува теоријата на повеќевредносната логика низ неколку пристапи: семантички пристап, преку дефинирање на конкретните исказни сметања со задавање на алгебрата (односно, минималната матрица) на вистинитосните вредности; чисто синтаксички (формален) пристап, преку дефинирање на исказните сметања како формални теории; и алгебарски пристап, преку задавање на класата алгебри што ја формира алгебарската семантика на конкретно исказно сметање.

После воведот со универзална алгебра и класична исказна логика, дадена е општа дефиниција на повеќевредносно исказно сметање, а потоа се рагледани повеќе тривредносни, четиривредносни, n-вредносни и бесконечновредносни логики. Разработени се алгебрите на Post со цел да се даде алгебарска карактеризација на n-вредносно исказно сметање. На крајот е воведен нов поим за повеќевредносни логики со векторско-вредносни, поточно (3,2)-операции за конјункција и дисјункција.

UNIVERSITY SS CYRIL AND METHODIUS – SKOPJE

Faculty of Natural Sciences and Mathematics

Institute of Mathematics

MANY-VALUED LOGIC

Abstract

This work is examining the theory of many-valued logic using several approaches: semantic approach, through defining particular propositional calculi with stating the algebra (i.e. minimal matrix) of the truth values; pure syntactic (formal) approach, through defining the propositional calculi as formal theories; and algebraic approach, through stating the class of algebras which form the algebraic semantics of the particular propositional calculus.

After introducing the subject with universal algebra and classical logic, a general definition of many-valued propositional calculus is given, and various three-valued, four-valued, *n*-valued as well as infinite-valued logics are discussed. The Post algebras are introduces and examined with a purpose of giving algebraic characterization of an *n*-valued propositional calculus. At the end, a new concept of many-valued logics with vector-valued operations, in particular, with (3,2)-operations for conjunction and disjunction is introduced.

Содржина:

Вовед

Класичната логика е првиот (а долго време и единствениот) израз на науката во обидот да се формализира начинот на кој човекот размислува, поврзува податоци, донесува заклучоци. Моделирањето на знаењето во реченици, факти, ставови кои можат да бидат стриктно *точни* или *неточни* е сеуште метод на работа во математиката а и во другите науки, на кој (сеуште) се базира работата на сметачките машини.

Никој не може да ја оспори големината на класичната логика како научен систем, но никој не може и да не се посомнева во нејзината сеопфаност како математички модел. Зашто на секого му е интуитивно јасно дека, на пример, речениците со кои разговараме и податоците со кои располагаме, не се секогаш строго *вистинити* или *лажни*, понекогаш тие подобро се карактеризираат со некоја друга вистинитосна вредност.

И воопшто, светот е отповеќе сложен и колоритен, за да науката го смести во црно-бела слика; низите од нули и единици имаат ограничена изразувачка моќ.

* * *

Потеклото на повеќевредносната логика може да се бара уште во делата на Aristotle кој се сомнева во *законот за исклучување на третото* од класичната логика. И други антички филозофи имаат проблем да ја прифатат строгата бивалентност на тврдењата, особено на оние кои вклучуваат идни настани. Многу подоцна, слични идеи се среќаваат и во делата на Boole, Peirce (1885) и Vasilev (1924), кои се сметаат за пионери на повеќевредносната логика. Сепак, првите творци на созреани повеќевредносни системи се (независно еден од друг) Lukasiewicz и Post (1920).

Повеќевредносна логика е секоја логика која има повеќе од две вистинитосни вредности, односно секоја некласична логика. Терминот *повеќевредносна логика* се користи и за целокупноста од сите повеќевредносни логики, како и за областа што ги проучува нивните заеднички карактеристики.

Глава 1 е посветена на класичната логика, поточно, на *класичната исказна логика* (и секаде понатаму трудот е ограничен на исказни логики) која овде е воведена преку поимот за *универзална алгебра* кој е исто така разработен во првата глава.

Во глава 2 е дадена општа семантичка дефиниција на *повеќевредносно исказно сметање* преку поимот за *логичка матрица* кој е исто така воведен во оваа глава; а дадена е и општа формална дефиниција на повеќевредносно исказно сметање (како *формална теорија*). Овие два типа дефиниции на повеќевредносно исказно сметање ги следат двата начини на воведување на класичното исказно сметање претставени во глава 1.

Во глава 3 е направен преглед на некои позначајни (или поинтересни) повеќевредносни логики дефинирани досега во литературата од оваа област. Прегледот започнува со (историски значајната) три-вредносна логика на Lukasiewicz, за која е дадена аксиоматизација и докази на теоремите за согласност и комплетност. Дадени се уште неколку други три-вредносни логики и една четиривредносна логика; некои од нив влегуваат во системи n-вредносни логики за $n \geq 2$, кои се исто така наведени во оваа глава. Прегледот завршува со осврт на бесконечно-вредносните логики.

Во глава 4 е презентиран *алгебарскиот начин* на дефинирање на повеќевредносно исказно сметање, односно дефинирање на исказно сметање преку задавање на класата алгебри, во случајот – алгебри на Post, што ја сочинуваат неговата *алгебарската семантика* (поим дефиниран во глава 3). Тоа е направено преку примерот на n-вредносните сметања $\wp_n$, за конечно $n \geq 2$, кои имаат значајно место во повеќевредносната логика заради *функционалната комплетност* на нивните множества исказни операции.

Во глава 5 се дефинирани повеќевредносни логики со векторско-вредносни операции за конјункција и дисјункција. Разгледани се некои својства на овие операции, и истите се проширени и дефинирани и преку триаголна норма и конорма.

*   *   *

Низ целиот труд е присутна тенденција да се даде и формализација на матрично дефинираните исказни сметања, со аксиоматизација на истите до *формални теории*, а во некои случаи се дадени доказите на теоремите за *конзистентност*, *согласност* и *комплетност*. Затоа овде општо, и неформално, ќе кажеме што сѐ подразбираат овие и некои други поими и својства врзани за поимот *формална теорија*, како и самиот тој поим, а понатаму, во секој конкретен случај, истите ќе бидат прецизно дефинирани.

Под *формална теорија* T се подразбира систем кој се состои од: *формален јазик* составен од конечно или преброиво множество *симболи* и на утврден начин формирани *формули* (*реченици*) со помош на променливите; множество издвоени формули-*аксиоми*; и конечно множество *правила на изведување.* Во формалната теорија се дефинира поим за *доказ* и *теорема*.

Под *интерпретација* на една формална теорија T се подразбира доделување значење на симболите во неа, при што секоја формула добива форма на тврдење кое може да биде точно или неточно (или да прими некоја друга вистинитосна вредност) во дадената интерпретација.

Една интерпретација претставува *модел* за дадено множество формули ако секоја од тие формули е точно тврдење во рамките на таа интерпретација.

Побитни особини што една формална теорија може да ги поседува се особините за конзистентност, согласност и комплетност. Една формална теорија е ***конзистентна*** ако не постојат две теореми во теоријата што си противречат една на друга. Формалната теорија е ***согласна*** ако сé што може да се докаже во неа (секоја теорема) е универзално точно тврдење (точно во сите интерпретации). ***Согласноста*** на една формална теорија значи дека правилата за изведување во теоријата се добри, односно, во ниту еден случај (во ниту една интерпретација) нема да дозволат неточен заклучок од точна претпоставка. Една формална теорија е ***комплетна***, ако секое тврдење што е точно во сите интерпретации на теоријата, е докажливо во рамките на теоријата (е теорема), односно сé што е вистина, може да се докаже. Ако во една формална теорија важат теоремите за согласност и комплетност, тогаш тоа значи дека во неа можат да се докажат сите точни и само точните тврдења.

За една формална теорија велиме дека е ***одлучлива*** ако постои алгоритамски метод за проверување дали формулите се теореми или не.

Глава 1: Универзална алгебра. Класично исказно сметање

1.1 Универзална алгебра

Задачата на математичката логика е да обезбеди формален јазик за опишување на математичките структури, како и соодветни методи на докажување во рамките на тој јазик. Иако е јасно дека колку е покомплициран формалниот јазик, толку е поголема неговата изразувачка моќ, тука ќе го воведеме најпростиот формален јазик - јазикот на *универзалната алгебра* (се нарекува уште и *логика на равенства*), преку кој може да се согледаат многу карактеристики и на покомплексните формални јазици.

Универзална алгебра е поим што ги генерализира особините на низа алгебарски структури како што се групи, прстени, векторски простори и сл. Во секоја од овие алгебарски структури имаме множество (*носач*) на кое се дефинирани *операции* од различна *арност*, кои задоволуваат некои *равенства*. Така, на пример, ***група*** е дадено множество G заедно со бинарна операција $m: G \times G \to G$ (*множење*), унарна операција $i: G \to G$ (*инверзија*), и нуларна операција $i: G^0 \to G$ (*неутрален елемент*; притоа ја усвојуваме претпоставката дека G^0 е едноелементно множество, па така нуларната операција i, всушност, претставува избор на елемент од G), кои ги задоволуваат следните равенства:

(g$_1$) $m(x, m(y, z)) = m(m(x, y), z)$ (*асоцијативност*)
(g$_2$) $m(e, x) = x$ (*лев неутрален елемент*)
(g$_3$) $m(i(x), x)) = e$ (*лев инверз*)

за секои $x, y, z \in G$.

Ќе го дефинираме поимот за *операциски тип,* што се добива со генерализација на појавата на операции во дефиницијата на група како и во дефинициите на други алгебарски структури.

Нека Ω е множество од симболи и нека α е функција од Ω во $\boldsymbol{N}_0$. Елементите на Ω ќе ги викаме ***операциски симболи***, $\alpha(w)$-***арност*** на операцискиот симбол $w \in \Omega$, а парот (Ω, α) ќе го викаме ***операциски тип.*** За конечно множество Ω со кардиналност k, *операцискиот тип* може да се карактеризира и со k-торката $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$ каде што $\alpha_i = \alpha(w_i), w_i \in \Omega$, $i = 1, \dots, k$.

Ω-алгебра (*Ω-структура, структура од тип* (Ω, α)) претставува множество A (***носач*** на алгебрата) снабдено со операции $w_A \colon A^{\alpha(w)} \to A$, за секој $w \in \Omega$. w_A е "интерпретација" на w во A и се нарекува ***примитивна операција***. Значи, за една алгебра A (истата ознака ќе ја користиме и за конкретната алгебра и за нејзиниот носач), ќе сметаме дека е зададена со $(A, \{w_A | \, w \in \Omega\})$, за даден операциски тип (Ω, α). На пример, во случајот на групи се јавува операциски тип (2,1,0), односно секоја група е алгебарска структура од тип (Ω, α), каде $\Omega = \{m, i, e\}$, $\alpha(m) = 2$, $\alpha(i) = 1$, $\alpha(e) = 0$.

За две алгебарски структури (алгебри) од ист операциски тип (Ω, α) велиме дека се ***слични алгебарски структури*** (***слични алгебри***). Значи, на пример, секои две групи се слични алгебри.

Хомоморфизам $f \colon A \to B$, каде A и B се Ω-алгебри (A и B се слични алгебри) претставува пресликување за кое што важи:

$$f(w_A(a_1, a_2, ..., a_{\alpha(w)})) = w_B(f(a_1), f(a_2), ..., f(a_{\alpha(w)}))$$

за секој $w \in \Omega$, и секои $a_1, a_2, \dots, a_{\alpha(w)} \in A$.

Нека X е множество променливи; (Ω, α) – операциски тип (и нека $X \cap \Omega = \emptyset$). ***Терм*** или ***изведена операција*** (попрецизно, *Ω-терм над X*) се дефинира со следната индуктивна дефиниција:

(t_1) ако $x \in X$, тогаш x е терм;
(t_2) ако $w \in \Omega$, $\alpha(w) = n$, и $t_1, t_2, \dots, t_n$ се терми, тогаш $w(t_1, t_2, \dots, t_n)$ е терм;
(t_3) ништо друго не е терм.

Со $F_\Omega(X)$ (или само FX) го означуваме множеството од сите Ω-терми над X. Важи следнава теорема:

<u>Теорема 1.1</u>: (*a*) $F_\Omega(X)$ е Ω-алгебра;

(b) $F_\Omega(X)$ е *слободна* Ω-алгебра генерирана со X, т.е. важи дека за секоја Ω-алгебра A, и за секое пресликување $f: X \to A$, постои единствено проширување на f до хоморфизам $\bar{f}: F_\Omega(X) \to A$.

Доказ: (a) Дека $F_\Omega(X)$ е Ω-алгебра следува директно од условот (t_2) во дефиницијата за терм. Имено, за секој $w \in \Omega$, w_{FX} се дефинира со: за секои $t_1, t_2, \dots, t_n \in FX$, $w_{FX}(t_1, t_2, \dots, t_n) = w(t_1, t_2, \dots, t_n)$;

(b) Нека A е произволна Ω-алгебра и нека е дадено пресликување $f: X \to A$. Проширувањето $\bar{f}: F_\Omega(X) \to A$ на f го дефинираме индуктивно:

- ако $t = x \in X$, тогаш $\bar{f}(t) = f(x)$;
- ако $t = w(t_1, t_2, \dots, t_n)$, каде $w \in \Omega$, $\alpha(w) = n$, и $t_1, t_2, \dots, t_n$ се терми за кои што $\bar{f}$ е дефинирано, тогаш $\bar{f}(t) = w_A(\bar{f}(t_1), \bar{f}(t_2), \dots, \bar{f}(t_n))$.

Јасно е дека вака дефинираното пресликување $\bar{f}$ е хомоморфизам и дека е единствен хомоморфизам кој го проширува f.

Исто така важи и следното тривијално својство:

Теорема 1.2: $F_\Omega(X) = \bigcup\{F_\Omega(X')\mid X' \subseteq X, X' \textit{ конечно}\}$, за секое множество X.

Последната теорема ни овозможува понатаму да ги разгледуваме само слободните структури што се генерирани со конечно множество.

Нека $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, $t \in F_\Omega(X)$, A е Ω-алгебра. Во A дефинираме ***n*-арна изведена операција** што соодветствува на термот t (***термална операција***), t_A, со:

- ако $t = x_i$, за $1 \le i \le n$, тогаш $t_A(a_1, \dots, a_n) = a_i$;
- ако $t = w(t_1, \dots, t_m)$, $\alpha(w) = m$, тогаш

$$t_A(a_1, \dots, a_n) = w_A((t_1)_A(a_1, \dots, a_n), \dots, (t_m)_A(a_1, \dots, a_n)).$$

Специјално, ако $t = w(x_1, \dots, x_n)$ тогаш $t_A = w_A$ (секоја примитивна операција е термална операција).

На пример, според претходно дадената дефиниција на група, во дадена група G, операциите $t_G(x,y,z) = m(x, m(y,z))$ и $s_G(x,y,z) = m(m(x,y),z)$, $x,y,z \in G$, се тернарни изведени операции.

Лесно се согледува дека секој хомоморфизам помеѓу слични алгебри, $f: A \to B$, е согласен со сите термални операции исто како што е со примитивните (термални) операции во A и B.

Поимот за група според дефиницијата дадена претходно, освен со операции од даден тип, се карактеризира и со неколку равенства. Ако го разгледаме, на пример, првото од нив, т.е. асоцијативниот закон за групи, ќе забележиме дека тоа претставува равенство меѓу тернарните изведени операции t_G и s_G. Со цел да ја генерализираме појавата на равенства во групите и другите алгебарски структури, дефинираме поим за равенство во даден операциски тип Ω.

Изразот $s = t$ каде $s, t \in F_\Omega(X_n)$ се нарекува ***n*-арно равенство** (во Ω). За $s = t$ велиме дека е *задоволено* во една Ω-структура A, ако $s_A = t_A$.

Парот $T = (\Omega, E)$, каде што Ω е операциски тип, а E е множество равенства во Ω, го викаме ***алгебарска теорија***.

T-алгебра (модел за алгебарската теорија T) ќе ја викаме секоја Ω-структура A во која се задоволени равенствата од E.

Така, на пример, секоја група е (Ω, E)-модел, за $\Omega = \{m, i, e\}$, каде m, i, e се дефинирани претходно, а $E = \{ m(x_1, m(x_2, x_3)) = m(m(x_1, x_2), x_3),\ m(e, x_1) = x_1, m(i(x_1), x_1) = e\}$.

Исто како во случајот со термите, множеството (*примитивни*) равенства E, на една теорија T, може да се прошири до множество од *изведени равенства* $\tilde{E}$. $\tilde{E}$ се дефинира како најмалото множество за кое се задоволени следните услови:

1) $E \subseteq \tilde{E}$;

2) $\tilde{E}$ е релација на еквиваленција на множеството терми;

3) $\tilde{E}$ е затворено за два типа на супституција:

i) ако $(s = t) \in \tilde{E}$, и x_i е променлива од s и/или t, тогаш $s[u/x_i] = t[u/x_i]$, каде $s[u/x_i]$ и $t[u/x_i]$ ги означуваат термите што се добиваат кога секое појавување на x_i во s, односно t ќе се замени со термот u);

ii) ако s е терм, x_i е променлива од s, и $(t = u) \in \tilde{E}$, тогаш $s[t/x_i] = s[u/x_i]$, каде $s[t/x_i]$ и $s[u/x_i]$ ги означуваат термите што се добиваат кога секое појавување на термот t во s, односно термот u во t ќе се замени со променливата x_i).

Ако $s, t \in F_\Omega(X)$, со $s \approx_E t$ означуваме дека $(s = t) \in \tilde{E}$; тогаш, според дефиницијата на $\tilde{E}$, $\approx_E$ е релација на еквиваленција. Нека со $F_{(\Omega,E)}(X)$ го означиме множеството од нејзините класи на еквиваленција. Тогаш:

<u>Теорема 1.3</u>: (a) $F_{(\Omega,E)}(X)$ наследува Ω-структура од $F_\Omega(X)$, и ги задоволува равенствата од E;

(b) $F_{(\Omega,E)}(X)$ е *слободна* (Ω, E)-алгебра генерирана со X.

<u>Доказ</u>: (a) Според 3(ii) од дефиницијата на $\tilde{E}$ имаме дека примитивните операции во $F_\Omega(X)$ се согласни со релацијата $\approx_E$, па индуцираат операции на фактор множеството $F_{(\Omega,E)}(X)$. Сега, бидејќи секој елемент на $F_{(\Omega,E)}(X)$ е класа на

еквиваленција на некој терм, од 1) и 3(i) ќе следува дека операциите во $F_{(\Omega,E)}(X)$ ги задоволуваат равенствата од E;

(b) Нека со $\hat{E}$ го означиме множеството од сите равенства $s = t$, каде s и t се елементи на $F_\Omega(X)$ такви што $h(s) = h(t)$ за секој Ω-хомоморфизам h од $F_\Omega(X)$ во (Ω, E)-модел A. Тогаш, лесно се проверува дека $\hat{E}$ е затворено за особините 1), 2) и 3). (да забележиме дека при проверката за особината 3i), $h(s[u/x_i]) = h'(s)$, каде h' е единствениот хомоморфизам кој x_i го пресликува во u, а сите други елементи од X ги пресликува исто како хомоморфизмот h. Значи, $\hat{E} \subseteq \tilde{E}$, па секој хомоморфизам $h: F_\Omega(X) \to A$ се факторизира низ природното пресликување $F_\Omega(X) \to F_{(\Omega,E)}(X)$. Специјално, ако $h = \bar{f}$ единствениот хомоморфизам што проширува дадено пресликување $f: X \to A$ (според теоремата 1.1), добиваме хомоморфизам $\tilde{f}: F_{(\Omega,E)}(X) \to A$, дефиниран со $\tilde{f}([t]) = \bar{f}(t)$, што е, јасно, единствениот хомоморфизам што го проширува f.

Последица 1.4: Нека (Ω, E) е алгебарска теорија. Тогаш, равенството $s = t$ припаѓа во $\tilde{E}$ ако и само ако е задоволена во секоја (Ω, E)-алгебра.

Доказ: Множеството равенства задоволени во дадена (Ω, E)-алгебра е затворено за особините 1), 2) и 3), значи го содржи $\tilde{E}$. Со ова е покажана едната насока од тврдењето. Обратно, ако равенството $s = t$ е задоволено во секој (Ω, E)-модел, тогаш тоа е задоволено и во $F_{(\Omega,E)}(X_n)$, за секој n; тогаш, ако променливите $x_1, \ldots, x_n$ се сите променливи што се појавуваат во некој од термите s и t (притоа не мора да се јавуваат сите и во двата терми), ќе имаме:

$$s_{F_{(\Omega,E)}(X_n)}([x_1], \ldots, [x_n]) = t_{F_{(\Omega,E)}(X_n)}([x_1], \ldots, [x_n]),$$

каде $[x_i]$, за $1 \leq i \leq n$ е класата на еквиваленција на x_i во однос на еквиваленцијата $\approx_E$. Но, по дефиниција имаме:

$$s_{F_{(\Omega,E)}(X_n)}([x_1], \ldots, [x_n]) = [s_{F_{(\Omega,E)}(X_n)}(x_1, \ldots, x_n)] = [s],$$

Слично важи и за t, па ќе следува дека $[s] = [t]$, односно $(s = t) \in \tilde{E}$.

Оваа последица е најопшт пример на теорема за согласност и комплетност. Имено, таа покажува дека во *алгебарската (формална) теорија* (во која формалниот јазик го сочинуваат *променливите* и *термите*) се што е *точно* (задоволиво во секоја *алгебра*-модел на таа теорија), се совпаѓа со сé она што може да се докаже од аксиомите (*примитивните равенства*) на таа теорија, односно со сé она што е теорема (*изведено равенство*). Од фундаментално значење за секоја формална дедуктивна теорија е проверката дали во неа се задоволени теоремите за согласност и комплетност. Во случајот на алгебарска теорија, постоењето на *слободни алгебри* го олеснува доказот на овие теореми. Меѓутоа и во нив се јавува ткн. *проблем на зборови (одлучливост)* - проблемот за наоѓање на алгоритам кој ќе определува дали дадено равенство е докажливо во дадената теорија.

1.2 Класично исказно сметање

Под ***исказ*** во класичната логика се подразбира реченица за која може да се определи дали е *точна* или *неточна*, *вистинита* или *лажна*. Делот од класичната логика што се занимава со оперирање со искази се вика ***исказна логика,*** или (*класично*) ***исказно сметање***. Исказната логика ја проучува структурата на исказите од природниот јазик, методите на формирање сложени искази од елементарни, како и начинот на пресметување вистинитост на сложените искази на основа на вистинитоста на нивните составни делови. Освен тоа, исказната логика нуди метод на правилно докажување, т.е. изведување на точни искази (заклучоци) на база на други точни искази (претпоставки).

Овде прво ќе дадеме интуитивен, семантички вовед во класичното исказно сметање преку поимот за Булова алгебра, односно преку фундаменталната Булова алгебра, а потоа и аксиоматски ќе го поставиме класичното исказното сметање, како формална теорија и ќе покажеме дека во неа важат теоремите за согласност и комплетност.

Го разгледуваме операцискиот тип (Ω, α), каде што $\Omega = \{\top, \bot, \sim, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$, а α: (0,0,1,2,2,2,2). Им даваме интерпретација на симболите од Ω: $\top -$ точно (вистина); $\bot -$ неточно (лага); $\sim -$ не (негација); $\wedge -$ и (конјункција); $\vee -$ или (дисјункција); $\Rightarrow -$ следува (импликација); $\Leftrightarrow -$ ако и само ако (еквиваленција). Имајќи го ова значење, симболите од множеството Ω можат да се користат за конструкција на нови искази преку поврзување на дадени искази, па затоа ги нарекуваме ***исказни сврзници***.

Сега, секој исказ може да прими само една од две вистинитосни вредности: точно или неточно, $\top$ или $\bot$, 1 или 0. Го усвојуваме множеството $\mathbf{2} = \{0, 1\}$ како множество ***вистинитосни вредности***.

Дефинираме Ω-структура на множеството $\mathbf{2} = \{0, 1\}$:

$\top_2 = 1,$
$\bot_2 = 0,$
$\sim_2 (a) = 1 - a,$
$\wedge_2 (a, b) = \min \{a, b\},$
$\vee_2 (a, b) = \max \{a, b\},$
$\Rightarrow_2 (a, b) = 0$ акко $a = 1$ и $b = 0,$
$\Leftrightarrow_2 (a, b) = 1$ акко $a = b,$

за секои $a, b \in \mathbf{2}.$

Булова алгебра ќе го викаме секој (Ω, E)-модел, каде E е множеството од сите равенства во Ω што се задоволени во структурата **2**.

Јасно, **2** е *Булова алгебра*, ја викаме ***фундаментална*** (*минимална*).

Нека $P = \{p, q, r, \dots\}$ е множество променливи. Променливите од множеството P ќе ги користиме за означување на елементарни искази и секаде ќе оперираме со нив наместо со конкретни искази (бидејќи битна ни е само формата, а не и содржината на исказите); па и самите променливи ќе ги викаме ***елементарни искази***. ***Сложени искази*** ќе ги викаме елементите $F_\Omega(P)$, скратено, *FP-слободната Булова алгебра* над P.

Лесно се согледува дека E ги содржи следните равенства (во кои термите се дадени во експлицитен облик):

$p \vee q = \sim p \Rightarrow q,$
$p \wedge q = \sim (\sim p \vee \sim q),$
$p \Leftrightarrow q = (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p),$
$\top = p \vee \sim p,$
$\bot = p \wedge \sim p,$

па значи секој Ω-терм над P може да се "презапише" во терм во кој се јавуваат само симболите $\sim$ и $\Rightarrow$ (односно, секој Ω-терм е $\approx_E -$ еквивалентен со Ω-терм што ги содржи само симболите $\sim$ и $\Rightarrow$). Затоа, овие два симболи, односно исказни сврзници, може да се земат како ***елементарни исказни сврзници***, а горните равенства како дефинициони равенства за сврзниците $\bot$, $\top$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow, \Leftrightarrow$, кои ќе ги наречеме ***изведени сврзници***. Значи, секој сложен исказ може да се претстави со $\{\sim, \Rightarrow\}$ – терм над множеството P.

За исказот t ($t \in FP$) велиме дека е ***тавтологија*** ако равенството $t = \top$ припаѓа во E, (ако t_2 е константна функција со вредност 1).

Пример 1.1. Следните искази се тавтологии:

$$p \Rightarrow (q \Rightarrow p),$$
$$\big(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)\big) \Rightarrow \big((p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)\big),$$
$$((p \Rightarrow \perp) \Rightarrow \perp) \Rightarrow p,$$
$$(\sim p \Rightarrow \sim q) \Rightarrow ((\sim p \Rightarrow q) \Rightarrow p)),$$
$$\sim\sim p \Rightarrow p.$$

Секоја функција $v: P \to \mathbf{2}$ (која природно се проширува до хомоморфизам $v^*: FP \to \mathbf{2}$) ја викаме ***вреднување*** на P (доделување вистинитосни вредности на исказите од P).

Поимот *тавтологија* може да се дефинира и како специјален случај на поимот за ***семантичко следство***. Имено, ако S е множество искази и t е исказ, тогаш велиме дека S *семантички го повлекува* t, пишуваме $S \vDash t$ ако за секое вреднување v на елементарните искази од $S \cup \{t\}$, такво што $v^*\{s\} = 1$ за секој $s \in S$, имаме и $v^*(t) = 1$. Притоа, според претходната дефиниција за тавтологија сега ќе имаме: t е *тавтологија* акко $\emptyset \vDash t$. Пишуваме, $\vDash t$.

Битен пример на *семантичко следство* е ткн. modus ponens:

$$\{p, p \Rightarrow q\} \vDash q$$

Да забележиме дека ако $S \vDash t$, тогаш и сé што е добиено со замена на термите во $S \cup \{t\}$ со еквивалентни терми е исто така семантичко следство.

Сега ја разгледуваме „матрицата“:

$$\boldsymbol{M2} = (\mathbf{2}, \{1\}, \sim_2, \Rightarrow_2, \wedge_2, \vee_2, \Leftrightarrow_2),$$

Каде $\mathbf{2} = \{0, 1\}$ е множеството вистинитосни вредности; 1 е „издвоена“ вистинитосна вредност, во смисла на тоа дека е вистинитосна вредност што ја прима точен исказ; а $\sim_2$, $\Rightarrow_2$, $\wedge_2$, $\vee_2$, $\Leftrightarrow_2$ се операциите на Буловата алгебра **2** дефинирани погоре (Ќе подразбираме дека елементите на **2** ги определуваат двете константни операции). За дадено множество исказни променливи (елементарни искази) *P,* и за дадено вреднување v на тие искази, матрицата *M2* определува операциски тип за да се формира *FP* (множество на сложени искази), дава вистинитосни вредности што елементите од *FP* може да ги примат, издвојува вистинитосна вредност што ќе означува вистина, и дава начин да се прошири вреднувањето на *FP*, т.е. начин на пресметување на вистинитоста на сложени искази од *FP* преку вистинитоста на елементарните искази содржани во нив. Значи, може да се каже дека матрицата *M2* дава целосна карактеризација на двовредносно исказно сметање.

Имињата на операциите - елементарните и изведените, сугерираат на синтаксата на сложените искази што се добиваат со комбинација на попростите. Потоа, поимот за семантичко следство овозможува начин на изведување на вистинитоста на едни искази на основа на вистинитоста на други искази, а поимот за тавтологија укажува на тоа дека постојат искази кои се вистинити независно од вистинитоста на нивните составни делови.

*   *   *

Сега ќе го дефинираме класичното исказно сметање како *формална теорија*; значи ќе дефинираме: симболи и формули (формален јазик); основни тврдења (аксиоми); и правила за изведување.

Формалната аксиоматска теорија на двовредносното исказно сметање, се дефинира како севкупност од:

1. ***Симболи:*** $p, q \ldots$ - променливи, букви (притоа претпоставуваме дека множеството променливи е преброиво); и $\sim, \Rightarrow$ - елементарни сврзници;

2. ***Формули*** се дефинираат со следната индуктивна дефиниција**:**
   - секоја променлива е формула;
   - ако p и q се формули, тогаш и $\sim p$ и $p \Rightarrow q$ се формули;
   - ништо друго не е формула.

   Дефинираме изведени сврзници:

   (D1) $p \wedge q =\sim (p \Rightarrow \sim q)$
   (D2) $p \vee q =\sim p \Rightarrow q$
   (D3) $p \Leftrightarrow q = (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$
   (D4) $\top = p \Rightarrow p$ или $\top = p \vee \sim p$
   (D5) $\bot =\sim (p \Rightarrow p)$ или $\bot = p \wedge \sim p$

3. ***Аксиоми (Аксиоматски шеми)***
   За произволни формули p, q, r, следните формули се аксиоми:

   (A1) $p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$

(A2) $\big(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)\big) \Rightarrow ((p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r))$
(A3) $\sim\sim p \Rightarrow p$

4. ***Правило за изведување*** е само**:**
(MP) ***modus ponens***: од p и $p \Rightarrow q$, следува q.

Доказ (дедукција) на формулата t од множеството формули S ќе ја викаме секоја низа $t_1, t_2, \dots, t_n$ каде за секој i, t_i е или аксиома, или елемент на S (*премиса*), или е добиена од некои од предходните членови на низата со помош на правилото на изведување (MP); и $t_n = t$. Ќе велиме дека S ***синтаксички го повлекува*** t, $S \vdash t$, ако постои доказ на t од S. Притоа, ако $S = \emptyset$, тогаш велиме дека t е ***теорема***, пишуваме $\vdash t$.

Пример 1.2: $\vdash p \Rightarrow p$

Доказ:	1. $p \Rightarrow ((p \Rightarrow p) \Rightarrow p)$	(A1)
	2. $(p \Rightarrow ((p \Rightarrow p) \Rightarrow p) \Rightarrow ((p \Rightarrow (p \Rightarrow p)) \Rightarrow (p \Rightarrow p))$	(A2)
	3. $(p \Rightarrow (p \Rightarrow p)) \Rightarrow (p \Rightarrow p)$	(1, 2 и MP)
	4. $p \Rightarrow (p \Rightarrow p)$	(A1)
	5. $p \Rightarrow p$	(4, 3 и MP)

Пример 1.3: $\{p \Rightarrow q, q \Rightarrow r\} \vdash p \Rightarrow r$

Доказ:	1. $q \Rightarrow r$	(премиса)
	2. $(q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow (q \Rightarrow r))$	(A1)
	3. $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$	(1, 2 и MP)
	4. $(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Rightarrow ((p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r))$	(A2)
	5. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$	(3, 4 и MP)
	6. $p \Rightarrow q$	(премиса)
	7. $p \Rightarrow r$	(6, 5 и MP)

Ќе покажеме дека поимите за синтаксичко и семантичко следство се еквивалентни; и специјално, дека една формула е теорема ако и само ако е тавтологија.

Теорема 1.5 (***Теорема за согласност***): Ако $S \vdash t$, тогаш $S \vDash t$. Специјално, секоја теорема е тавтологија.

Доказ: Ако $S \vdash t$, тогаш постои доказ на t од S. Сега, секоја аксиома е тавтологија; ако $s \in S$, тогаш, јасно, $S \vDash s$; и ако $S \vDash s$ и $S \vDash s \Rightarrow t$, заради $\{s, s \Rightarrow t\} \vDash t$, ќе следува дека $S \vDash t$. Значи, во множеството $\{t' \mid S \vDash t'\}$ припаѓаат сите аксиоми, сите елементи од S; ова множество е затворено во однос на правилото за изведување (MP), па, бидејќи постои доказ за t од S, ќе следува дека t припаѓа во тоа множество, односно $S \vDash t$.

За доказ на спротивното тврдење, потребно е прво да ги докажеме теоремите за дедукција и адекватност.

<u>Теорема 1.6</u> (***Теорема за дедукција***): $S \vdash s \Rightarrow t$ ако и само ако $S \cup \{s\} \vdash t$.

<u>Доказ</u>: Ако $S \vdash s \Rightarrow t$, тогаш доказот на t од $S \cup \{s\}$ го добиваме кога на доказот на $s \Rightarrow t$ од S ќе ја додадеме s (како премиса) и t, добиено од $s \Rightarrow t$, и s со (MP).

Обратно, нека $t_1, t_2, \dots, t_n = t$ е доказ на t од $S \cup \{s\}$. Ќе покажеме со индукција по i дека $S \vdash s \Rightarrow t_i$, за секое i. Имаме три случаи:

1) Ако t_i е аксиома или елемент од S го имаме следниот доказ:

t_i	(аксиома или премиса)
$t_i \Rightarrow (s \Rightarrow t_i)$	(A1)
$s \Rightarrow t_i$	(од претходно и MP)

2) Ако $t_i = s$, тогаш заклучокот ќе следува од пример 1.2.

3) Ако постојат $j, k < i$ такви што $t_k = t_j \Rightarrow t_i$, тогаш, според индуктивната претпоставка, $S \vdash s \Rightarrow t_j$ и $S \vdash s \Rightarrow (t_j \Rightarrow t_i)$, па на спојот на овие две дедукции, го додаваме следното:

$(s \Rightarrow (t_j \Rightarrow t_i)) \Rightarrow ((s \Rightarrow t_j) \Rightarrow (s \Rightarrow t_i))$	(A2)
$(s \Rightarrow t_j) \Rightarrow (s \Rightarrow t_i)$	(од претходно и MP)
$(s \Rightarrow t_i)$	(од претходно и MP).

За множеството формули S велиме дека е ***синтаксички неконзистентно*** ако $S \vdash \perp$ (еквивалентно, ако за некоја формула p, $S \vdash \sim (p \Rightarrow p)$, т.е. $S \vdash p \wedge \sim p$).

За S велиме дека е ***семантички неконзистентно*** ако $S \vDash \perp$, односно, ако не постои вреднување v, такво што $v^*(t) = 1$, за секоја формула $t \in S$.

<u>Лема 1.7</u> (***Теорема за адекватност***): Ако множеството формули S е ***семантички неконзистентно***, тогаш S е ***синтаксички неконзистентно***.

<u>Доказ</u>: Да претпоставиме спротивно, дека S е синтаксички конзистентно. Ќе покажеме дека во тој случај S е семантички конзистентно, т.е. дека постои вреднување v, такво што $v^*(t) = 1$, за секоја формула $t \in S$.

Претпоставуваме дека множеството од сите формули е преброиво, т.е. дека формулите се подредени во низа. Го прошируваме S до множество S_∞ на следниот начин:

- $S_0 = S$;

- $S_i = S_{i-1} \cup \{t_i\}$, ако $S_{i-1} \cup \{t_i\}$ е синтаксички конзистентно, $S_i = S_{i-1} \cup \{\sim t_i\}$, ако $S_{i-1} \cup \{\sim t_i\}$ е синтаксички конзистентно;

- $S_\infty = \bigcup_{i=0}^{\infty} S_i$.

(Да забележиме дека, во секој од случаите, или $S_{i-1} \cup \{t_i\}$ или $S_{i-1} \cup \{\sim t_i\}$ е конзистентно, зашто ако претпоставиме, на пример, дека $S_{i-1} \cup \{t_i\}$ е синтаксички неконзистентно, тогаш, според теорема 1.6, ќе имаме дека $S_{i-1} \vdash t_i \Rightarrow \perp$, односно, $S_{i-1} \vdash \sim t_i$, па бидејќи S_{i-1} е синтаксички конзистентно, и $S_{i-1} \cup \{\sim t_i\}$ ќе биде).

На овој начин конструираното множество S_∞ е синтаксички конзистентно. Ако претпоставиме дека S_∞ е синтаксички неконзистентно, тогаш, бидејќи дедукцијата $S_\infty \vdash \perp$ се состои од конечно многу чекори, ќе следува дека постои конечно множество $S' \subseteq S_\infty$ што е неконзистентно; но тогаш S' ќе биде подмножество на S_i за некое i, од што ќе следува дека и S_i е неконзистентно.

Дефинираме пресликување h на множеството од сите формули на следниот начин:

- $h(t) = 1$, ако $t \in S_\infty$;

- $h(t) = 0$, ако $t \notin S_\infty$.

Ќе покажеме дека h е $\{\sim, \Rightarrow\}$ - хомоморфизам, односно дека $h = v^*$, за некое вреднување v, од што ќе следува семантичка конзистентност на множеството S.

i) Нека $t = \sim p$. Ако $p \in S_\infty$, тогаш $\sim p \notin S_\infty$, па $h(t) = 0$, а $h(p) = 1$, значи, $h(\sim p) = \sim_2 h(p)$. Слично, ако $p \notin S_\infty$;

ii) Нека $t = p \Rightarrow q$. Ги разгледуваме следните случаи:

- $h(q) = 1$, т.е. $q \in S_\infty$. Тогаш, од $\{p, q\} \vdash q$, и од теорема 1.6, ќе следува $q \vdash p \Rightarrow q$, па не може $\sim (p \Rightarrow q) \in S_\infty$. Значи, $p \Rightarrow q \in S_\infty$, па $h(p \Rightarrow q) = 1 = h(p) \Rightarrow_2 h(q)$;

- $h(p) = 0$. Во овој случај $\sim p \in S_\infty$, и бидејќи $\sim p \vdash p \Rightarrow q$, заклучуваме, слично како во претходниот случај, дека $h(p \Rightarrow q) = 1 = h(p) \Rightarrow_2 h(q)$;

- $h(p) = 1$, $h(q) = 0$. Во овој случај имаме $p \in S_\infty$ и $q \notin S_\infty$, па, бидејќи $\{p, p \Rightarrow q\} \vdash q$ ќе мора да биде $p \Rightarrow q \notin S_\infty$. Значи, $h(p \Rightarrow q) = 0 = h(p) \Rightarrow_2 h(q)$.

<u>Теорема 1.8</u> (***Теорема за комплетност***): Ако $S \vDash t$ тогаш $S \vdash t$.

<u>Доказ</u>: Нека $S \vDash t$. Тогаш, бидејќи $\{t, \sim t\} \vDash \perp$, ќе имаме $S \cup \{\sim t\} \vDash \perp$. Од последното, според лемата 1.7, ќе следува $S \cup \{\sim t\} \vdash \perp$. Сега, од ова и од теоремата за дедукција, ќе имаме $S \vdash \sim t \Rightarrow \perp$, односно $S \vdash \sim\sim t$. Од ова и од (A3) ќе следува $S \vdash t$.

<u>Последица 1.9</u> (***Теорема за компактност***): Ако $S \vDash t$, тогаш постои конечно подмножество S' од S, такво што $S' \vDash t$.

Доказ: Аналогното тврдење за $\vdash$ е очигледно, бидејќи дедукцијата на t од S се состои од конечно многу чекори, па од теоремите 1.8 и 1.5, ќе следува и ова тврдење.

Последица 1.10 (***Теорема за одлучливост***) Постои алгоритам кој за дадено множество формули S и за дадена формула t одредува дали важи $S \vdash t$.

Доказ: Нека n е бројот на променливи кои се јавуваат во $S \cup \{t\}$. За да утврдиме дали $S \vDash t$, треба да ги пресметаме вредностите на елементите од $S \cup \{t\}$ за 2^n вреднувања.

Значи, од претходното може да се сумира дека формалната теорија на класичното исказно сметање е ***аксиоматска теорија*** (постои процедура за одредување дали една формула е аксиома или не), која е *согласна*, *комплетна* и *одлучлива*.

Глава 2: Дефиниција на повеќевредносно исказно сметање

2.1 Начини на дефинирање и карактеристики на логичките системи

Принципот на бивалентност во класичната логика е, всушност, претпоставката дека секој *исказ* е или точен или неточен, т.е под било кое вреднување може да прими само една од две вистинитосни вредности (*точно* или *неточно*, 1 или 0). Повеќевредносните логики се некласични логики. Тие се разликуваат од класичната логика во тоа што не го прифаќаат принципот на бивалентност. Множествата вистинитосни вредности во повеќевредносните логики имаат повеќе од два елементи.

Сличноста на повеќевредносните логики со класичната логика е во тоа што и во нив важи принципот на компонентност. ***Принципот на компонентност*** (принцип на проширување) лежи во претпоставката дека вистинитосната вредност на секоја сложена формула (исказ) е функција од вистинитосните вредности на нејзините составни делови (елементарни искази).

*   *   *

Исто како и класичното исказно сметање, и повеќевредносните исказни сметања во основа се базираат на некој *формален јазик*, и потоа се дефинираат *семантички* или *синтаксички*. ***Семантичкото дефинирање*** на еден логички систем е поврзано со поимот за *интерпретација* (или модел), односно, преведување на зборовите (*формулите*) на формалниот јазик во функции што оперираат со вистинитосни вредности. Притоа се разгледуваат поимите за *тавтологија* и *логичко следство*. ***Синтаксичкото дефинирање*** на логичките системи значи: меѓу зборовите на формалниот јазик да се издвојат оние кои ќе бидат *аксиоми*, да се дефинираат *правила за изведување*, и да се дефинира поим за *доказ* и *теорема*; односно, да се дефинира логичкиот систем како формална теорија.

Од филозофска (епистемолошка) гледна точка семантичкиот аспект на (класичната) логика е пофундаментален од синтаксичкиот, зашто во суштина, семантичките идеи се тие што ја определуваат синтаксата на логичкиот систем. Семантичкото дефинирање на една повеќевредносна логика, односно на едно повеќевредносно исказно сметање започнува со реализација на принципот за компонентност, односно со семантичко определување на секој од исказните сврзници преку дефинирање операции (од соодветна арност) во множеството вистинитосни вредности што ќе ги карактеризираат тие сврзници. На тој начин се добива алгебарска структура над множеството вистинитосни вредности. Од алгебарска гледна точка, покрај вака добиената алгебарска структура, битни се и сите алгебарски структури *слични* на неа. Затоа разликуваме *стандардна и алгебарска семантика* на логичките системи.

Стандардната семантика, всушност, ги подразбира *множествата од вистинитосни вредности* и *логичките сврзници* (односно нивната интерпретација во соодветни *вистинитосно-вредносни функции*), кои се спојуваат во поимот за *стандардна логичка матрица*. ***Алгебарската семантика*** на еден логички систем ја подразбира целата *класа* од алгебарски структури слични со алгебрата над множеството вистинитосни вредности. За таквата класа алгебарски структури (која ја викаме *алгебарски комплемент* на логичкиот систем) точно е дека логички точните формули во логичкиот систем се токму оние формули чиишто интерпретации во класата се точни формули во неа. Улогата на ваквите класи во случајот на *класичнота логика* ја има класата на *Булови алгебри*.

Најстандарден начин да се дојде до алгебарскиот комплемент на даден логички систем е да се тргне од ткн. ***алгебра на Lindenbaum*** на соодветната логика, т.е. алгебрата од формулите во логичкиот систем по модул конгруенцијата за логичка еквивалентност на формули. Потоа за алгебрата на Lindenbaum се бара класа на најслични алгебарски структури кои припаѓаат во групата на некое *многуобразие*. (***Многуобразие*** е класа *К* од алгебарски структури која е затворена за подалгебри, хомоморфни слики, и директни производи).

*   *   *

Постојат повеќе методи за конструкција и задавање на едно исказно сметање. Во овој дел ќе бидат презентирани: начинот на конструкција на повеќевредносно исказно сметање преку задавање на неговата *минимална матрица*; и аксиомаскиот начин на дефинирање на повеќевредносно исказно сметање, односно дефинирање на исказно сметање како формална теорија. Покрај овие постојат и чисто *алгебарски метод*, со задавање на алгебрата, односно класата алгебри што го карактеризира исказното сметање (овој начин е разгледан во глава 4), потоа *природната дедукција*, *Gentzen-овиот метод на низи*, *методот на конечно генерирани дрва* и сл. Секој од овие методи бара некаква (своевидна) *теорема на комплетност*, што, всушност, обезбедува алгебарска интерпретација на соодветното исказно сметање. Па затоа алгебарската конструкција на исказното сметање се смета за пофундаментална.

Дефинирањето преку минимална адекватна матрица може исто така да се нарече *алгебарки метод*, зашто матрицата го дава алгебарскиот тип, а и една од алгебрите во класата-алгебрата од вистинитосни вредности.

2.2 Општа дефиниција на исказно сметање

Пред да го дефинираме поимот за исказно сметање, ќе ги дефинираме поодделно елементите што ја сочинуваат неговата дефиниција.

2.2.1 Формален јазик

Во овој дел ќе дадеме прецизна дефиниција на поимот за формален јазик, која ги обединува дефинициите за формален јазик дадени во првата глава.

Нека $P = \{p_i : i \in N\}$ е преброиво множество ***променливи***. Нека (Ω, α) е операциски тип и нека $F_\Omega(P)$, или скратено, FP е множеството од сите Ω-терми над P. Елементите на FP ќе ги нарекуваме ***формули.***

Двојката $\mathcal{L} = (P, FP)$ ја викаме ***формален јазик.*** Всушност, под *формален јазик* ја подразбираме севкупноста од: *елементи на* FP („зборови“) и, специјално, елементи на P („букви“); *операциски симболи* од Ω; *загради* и *запирка*.

Кога формалниот јазик е составен дел од конкретно исказно сметање, елементите на P ги викаме ***исказни променливи (елементарни искази)***, елементите на FP - ***искази (елементарни и сложени),*** а елементите на Ω-***исказни сврзници*** (притоа, во зависност од арноста ќе имаме *нуларни сврзници* или *константи*, *унарни сврзници*, *бинарни сврзници* итн.) Исказните сврници може и специфично да се именуваат според семантичкото значење што го имаат при оперирањето со искази во конкретно исказно сметање, како што тоа го направивме во делот за класичната логика, именувајќи ги симболите од Ω со: негација, конјункција, дисјункција, импликација, еквиваленција, и сл.

2.2.2 Множества вистинитосни вредности. Назначени вистинитосни вредности

Бидејќи во повеќевредносната логика не важи принципот на бивалентност, се подразбира дека исказите, освен 0 и 1, можат да примаат и други (и поинакви) вредности (оценки) за вистинитост. Значи за разлика од класичната логика, каде единствено множество вистинитосни вредности е $\mathbf{2} = \{0, 1\}$, во повекевредносната логика ***множество вистинитосни вредности*** може да се дефинира како множество симболи (кои можат да бидат броеви, букви и сл.) што се користат за означување вид и степен на вистинитост на искази.

Не постои стандарден избор на множество вистинитосни вредности. Како тоа ќе биде креирано и како ќе бидат разбрани и интерпретирани симболите во него, најчесто зависи од конкретната примена на соодветната логика. Сепак, скоро во секое множество вистинитосни вредности, постојат два елементи (обично се и означени со 0 и 1), кои ја имаат улогата на класичните *точно* и *неточно*, соодветно.

Вообичаено, V (оваа ознака ќе ја користиме за множество вистинитосни вредности) е множество броеви, барем во оние случаи каде што е битно вистинитосните вредности да бидат споредливи. (Може да бидат и парови, тројки броеви, и сл.). И притоа:

$$\{0,1\} \subseteq V,$$

а најчесто се зема и:

$$V \subseteq [0,1].$$

Во тој случај се работи за ткн. *стандардно* множество вистинитосни вредности, кај кое 0 и 1 се најмала и најголема вистинитосна вредност, соодветно.

Карактеристични се и следните множества вистинитосни вредности:

$$V_0 = \{x \in \mathbb{Q} | 0 \leq x \leq 1\},$$

како бесконечно преброиво,

$$V_\infty = \{x \in \mathbb{R} | 0 \leq x \leq 1\},$$

како бесконечно непреброиво множество вистинитосни вредности, и

$$V_n = \left\{ \frac{m}{n-1} \middle| 0 \leq m \leq n-1 \right\} \text{ , за } n \geq 2,$$

како конечно множество вистинитосни вредности чиишто елементи се распоредени рамномерно низ единечниот интервал.

Во класичната логика вистинитосната вредност 1 (вистина, точно) има посебно значење зашто со неа се вреднуваат точните искази, преку неа се дефинира поимот за семантичко следство, таа ги карактеризира тавтологиите. Во повеќевредносната логика точноста (вистинитоста) е поширок поим, па така, улогата што ја има 1 во класичната логика, во повеќевредносната логика може да ја имаат (и) други вистинитосни вредности. Поточно, за дадено множество вистинитосни вредности V, се избира подмножество D на V чиишто елементи ќе ја карактеризираат вистинитоста, и се нарекува множество од ***назначени вистинитосни вредности***. Притоа, природно е да се земе:

$$1 \in D \subseteq V \quad \text{и} \quad 0 \notin D.$$

2.2.3 Логичка матрица. Исказна логика. Логички систем

Нека е даден формалниот јазик $\mathcal{L} = (P, FP)$, каде FP е слободната Ω-алгебра над P, за даден операциски тип Ω.

Логичка матрица за $\mathcal{L}$ е системот $\mathcal{M} = (M, M^*)$, каде што M е Ω - алгебра, а M^* е подмножество од M. ***Минимална логичка матрица*** за јазикот $\mathcal{L}$ е логичка матрица за $\mathcal{L}$, чијшто носач има најмала кардиналност.

Нека V е множество *вистинитосни вредности* и нека D е множество *назначени вредности*. Ако на V дефинираме операции од тип Ω, тогаш (V, D) е (минимална) *логичка матрица* за $\mathcal{L}$. (V го користиме и како ознака за алгебрата и како ознака за нејзиниот носач). Понатаму, во глава 3, во дефинициите на конкретни исказни сметања се користи последниот тип на логичка матрица, и тоа во облик $(V, D, \{w_V | w \in \Omega\})$, каде што V е множество вистинитосни вредности, D е множество *назначени вредности*, и w_V, $w \in \Omega$ се функции на вистинитосни вредности-интерпретации на симболите од Ω} над V. Ваквиот облик на матрицата содржи конкретна информација за вистинитосните вредности и оперирањето со нив, и затоа со задавање на $(V, D, \{w_V | w \in \Omega\})$ може да се каже дека е дефинирана

исказна логика (Притоа, и без тоа посебно да се нагласи, секогаш ќе сметаме дека елементите од V припаѓаат на Ω како нуларни операции, т.е. константи)

Нека е даден формалниот јазик $\mathcal{L} = (P, FP)$ и нека е дадена логичка матрица $\mathcal{M} = (M, M^*)$ за L. Двојката $(\mathcal{L}, \mathcal{M})$ ја викаме ***логички систем.***

2.2.4 Вреднување. Логичка точност и логичко следство.

Нека $(\mathcal{L}, \mathcal{M})$ е логички систем, каде $\mathcal{L} = (P, FP)$, FP е Ω - алгебра над P, а $\mathcal{M} = (M, M^*)$ е логичка матрица за $\mathcal{L}$.

Секоја функција $v: P \to M$ се нарекува ***вреднување*** на P во матрицата $\mathcal{M}$. Бидејќи алгебрата FP е *слободно генерирана* алгебра над P, секое вреднување $v: P \to M$ на единствен начин се проширува до хомоморфизам $v^*: FP \to M$:

- $v^*(p) = v(p)$ за $p \in P$;
- $v^*(w_{FP}(t_1, t_2, \dots, t_n)) = w_M(v^*(t_1), v(t_2), \dots, v^*(t_n))$, каде што w_{FP} и w_M се алгебарски операции што одговараат на n-арниот сврзник $w \in \Omega$, $t_1, t_2, \dots, t_n \in FP$;
- $v^*(c_{FP}) = c_M$, за *константите*.

За една формула $t \in FP$ велиме дека е ***точна формула*** во $(\mathcal{L}, \mathcal{M})$, во однос на дадено вреднување v ако $v^*(t) \in M^*$. За t велиме дека е ***логички точна*** (***тавтологија***) во системот $(\mathcal{L}, \mathcal{M})$, ако t е точна формула во однос на секое вреднување v.

Се дефинира и поим за *семантичко следство* слично како во класичната логика. Имено, за формулата t велиме дека ***семантички (логички) следува*** од множеството формули S, ако t е точна формула во однос на секое вреднување v за кое што е *точна* секоја формула од S. Означуваме со $S \vDash t$. Тривијално, ако $\emptyset \vDash t$ (ознака $\vDash t$), тогаш t е тавтологија во $(\mathcal{L}, \mathcal{M})$.

Во случај на конечно-вредносна логика, проверката дали една формула е логички точна се прави на сосема ист начин како и во класичната логика - со проверка на сите случаи (со вистинитосни табели и сл.), што значи дека: за секој конечно-вредносен логички систем на едно исказно сметање особината на логичка точност е ***одлучлива***; исто така, за секое множество формули S особината да се биде семантичко следство од S е одлучлива.

Поимот за *семантичко следство* треба да обезбеди механизам за оценување на точноста на едни формули на база на точноста на други, т.е. за изведување на точност на формула на база на веќе утврдена точност на други формули. На основа на поимот за семантичко следство може да се дефинира и ***функција за семантичко следство*** како пресликување $Pr: P(FP) \to P(FP)$, такво што $Pr(S) = \{t \mid S \vDash t\}$.

Се проверува дека оваа функција ги задоволува следните услови, за секои $X, Y \in P(FP)$, и за секоја формула $t \in FP$:

- $X \subseteq Pr(X) \subseteq FP$;
- ако $X \subseteq Pr(Y)$, тогаш $Pr(X) \subseteq Pr(Y)$;
- ако $t \in Pr(X)$ тогаш постои конечно множество Y такво што $Y \subseteq X$ и $t \in Pr(Y)$;
- $Pr(Pr(X)) \subseteq Pr(X)$,

што претставуваат услови за едно пресликување $Pr: P(FP) \to P(FP)$ да биде ***функција за изведување***. Значи, *функцијата за семантичко следство* претставува *функција за изведување*.

2.2.5 Исказно сметање

Нека е даден *операцискиот тип* (Ω, α).

Исказно сметање е севкупноста:

$$\Pi = (\mathcal{L}, \mathcal{M}, v, Pr)$$

каде што:

- $\mathcal{L} = (P, FP)$ е *формален јазик* над Ω;
- $\mathcal{M} = (M, M^*)$ *е минимална логичка матрица* за $\mathcal{L}$;
- $v: P \to M$ е *вреднување* на променливите од P во $\mathcal{M}$;
- $Pr: P(FP) \to P(FP)$ е *функција за семантичко следство* (за Pr може да се земе и дека е *функција за изведување*, и во тој случај ќе имаме поопшта дефиниција).

2.3 Формална теорија на исказно сметање

Едно исказно сметање е дефинирано како формална теорија (аксиоматски) ако:

- е дефиниран формален јазик $\mathcal{L} = (P, FP)$ над даден операциски тип Ω;

- издвоено е конечно, или рекурзивно преброиво множество формули кои се земаат за ***аксиоми*** (*аксиоматски систем* на исказното сметање);
- се дефинира конечно множество ***правила*** $r_1, r_2, \dots, r_m$ за изведување (прифаќање) на формули од претходно изведени формули или од аксиомите. (секое правило *r* е, всушност, релација во FP^{n+1}, за некое *n*; и притоа, ако $(t_1, \dots, t_n, t) \in r$, формулите $t_1, \dots, t_n$ ги викаме ***претпоставки*** (***премиси***), а формулата t ја викаме ***заклучок***, па затоа правилата најчесто се задаваат во следниот облик:

$$(r) \quad \frac{t_1, \dots, t_n}{t}$$

За аксиомите и правилата во една формална теорија на исказно сметање ќе подразбираме дека се инваријантни во однос на замена на променливите во нив, со други променливи, односно формули.

Ако исказното сметање е дефинирано аксиоматски, под ***доказ (дедукција)*** во него се подразбира секоја конечна низа од формули $t_1, t_2, \dots, t_n$ такви што за секој $i, 1 \leq i \leq n$, t_i е или аксиома или постојат индекси $i_1, i_2, \dots i_k$ помали од i, за кои што важи:

$$(t_{i_1}, t_{i_2}, \dots, t_{i_k}, t_i) \in r_j \ ,$$

за некое правило r_j.

Формулата $t \in FP$ се вика ***теорема*** (*тврдење*) ако постои доказ $t_1, t_2, \dots, t_n$, таков што $t_n = t$. Доказот во тој случај се вика *доказ на* t.

Нека S е произволно множество формули. Ќе велиме дека S ***синтаксички ја повлекува*** формулата t, $S \vdash t$, ако постои доказ на t од S; односно, ако постои низа од формули $t_1, t_2, \dots, t_n$ такви што за секој $i, 1 \leq i \leq n$, t_i е или аксиома, или елемент од S (***премиса***), или постојат индекси $i_1, i_2, \dots i_k$ помали од i, за кои што важи:

$$(t_{i_1}, t_{i_2}, \dots, t_{i_k}, t_i) \in r_j \ ,$$

за некое правило r_j.

Дефинираме ***функција за синтаксичко следство***, C, во партитивното множество на множеството формули, на следниот начин: за секое множество формули S, $t \in C(S)$ акко $S \vdash t$. За функцијата C се проверува дека е *функција за изведување*.

Двојката $\wp = (\mathcal{L}, C)$, каде $\mathcal{L}$ е формален јазик, а C е функција за синтаксичко следство, ќе ја викаме ***формална теорија на исказно сметање***.

За секоја теорема t ќе важи $t \in C(\mathrm{A})$, каде A е множеството аксиоми. Во тој случај пишуваме: $\vdash t$. Всушност, множеството $C(\mathrm{A})$ е множество од сите изведливи тврдења (теореми) во исказното сметање $\wp = (\mathcal{L}, C)$. Заради инваријантноста на аксиомите и правилата за изведување во однос на замената на променливи, јасно е дека е и множеството $C(\mathrm{A})$ ќе биде затворено за замена на променливи, односно, ако една формула е теорема, тогаш и секоја замена на променливите во неа со нови променливи или формули, како резултат повторно ќе даде теорема.

За исказното сметање $\wp = (\mathcal{L}, C)$ ќе велиме дека е ***конзистентно***, ако постои формула $t \in FP$ таква што $t \notin C(\mathrm{A})$.

За една формална теорија на исказно сметање велиме дека е ***импликативна***, односно, теорија на ***импликативно исказно сметање***, ако исказните сврзници на формалниот јазик се нуларни, унарни и бинарни сврзници, и меѓу бинарните сврзници се сретнува еден, кој ја има улогата на *импликација* и најчесто се означува со $\Rightarrow$, во врска со кој ќе важат следните услови:

(i_1) за секоја формула $t \in FP$, $t \Rightarrow t \in C(\mathrm{A})$;

(i_2) за било кои формули $s, t \in FP$, и за секое множество формули S, важи: ако s и $s \Rightarrow t \in C(S)$, тогаш и $t \in C(S)$;

(i_3) за било кои формули $s, t, u \in FP$, и за секое множество формули S, важи: ако $s \Rightarrow t \in C(S)$, и $t \Rightarrow u \in C(S)$, тогаш и $s \Rightarrow u \in C(S)$;

(i_4) за секоја формула $t \in FP$, и за секое множество формули S, важи: ако $t \in C(S)$, тогаш за секоја формула $s \in FP$, $s \Rightarrow t \in C(S)$;

(i_5) за било кои формули $s, t \in FP$, и за секое множество формули S, важи: ако $s \Rightarrow t, t \Rightarrow s \in C(S)$, тогаш за секој унарен сврзник $w^1 \in \Omega$, $w^1(s) \Rightarrow w^1(t) \in C(S)$;

(i_6) за било кои формули $s, t, u, v \in FP$, и за секое множество формули S, важи: ако $s \Rightarrow t$, $t \Rightarrow s, u \Rightarrow v$, $v \Rightarrow u \in C(S)$, тогаш за секој бинарен сврзник $w^2 \in \Omega, w^2(s, u) \Rightarrow w^2(t, v) \in C(S)$.

Нека е дадена формална теорија на исказно сметање $\wp = (\mathcal{L}, C)$, каде $\mathcal{L} = (P, FP)$ е формален јазик од операциски тип Ω, а C е функцијата на синтаксичко следство. Логичката матрица $\mathcal{M} = (M, M^*)$ на јазикот $\mathcal{L}$, се нарекува ***адекватна логичка матрица***, а алгебрата M - ***адекватна алгебра на исказното сметање*** $\wp = (\mathcal{L}, C)$, ако се задоволени следните услови:

(m_1) ако формулата $t \in FP$ е аксиома, тогаш за секое вреднување $v: P \to M$, $v^*(t) \in M^*$;

(m_2) ако r е правило со кое од формулите $t_1, t_2, \dots, t_k$ се изведува формулата t, тогаш за секое вреднување $v: P \to M$, од $v^*(t_i) \in M^*$, за $i = 1, \dots, k$, следува $v^*(t) \in M^*$.

Ако $\wp = (\mathcal{L}, \mathcal{C})$, е теорија на импликативно исказно сметање, треба да се задоволени и условите:

(m_3) за секои $a, b, c \in M$, од $a \Rightarrow b \in M^*$ и $b \Rightarrow c \in M^*$, следува $a \Rightarrow c \in M^*$;
(m_4) за секои $a, b \in M$, од $a \Rightarrow b \in M^*$ и $b \Rightarrow a \in M^*$, следува $a = b$.

Притоа, за операциите во адекватните алгебри на исказното сметање $\wp = (\mathcal{L}, \mathcal{C})$ ќе користиме исти ознаки како и за соодветните операции во слободната $\Omega -$ алгебра FP, а од контекстот ќе биде јасно за кои операции се работи.

<u>Теорема 2.1</u>: Нека $\mathcal{M} = (M, M^*)$ е адекватна логичка матрица за исказното сметање $\wp = (\mathcal{L}, \mathcal{C})$. Ако $t \in FP$ е теорема во исказното сметање $\wp$, тогаш за секое вреднување $v: P \to M$ важи $v^*(t) \in M^*$.

<u>Доказ</u>: Нека $S = \{t | v^*(t) \in M^*\}$ е множество формули. Тогаш, според (m_1) и (m_2) од претходната дефиниција, јасно е дека сите аксиоми припаѓаат во S и дека S е затворено во однос на сите правила за изведување, па од ова и од дефиницијата на C, добиваме $C(\mathrm{A}) \subseteq S$ со што е докажана теоремата.

Во остатокот од оваа глава, ќе сметаме дека во множеството сврзници Ω постои нуларен сврзник 1, и ќе се ограничиме на логички матрици од облик $\mathcal{M} = (M, \{1\})$.

Нека $\wp = (\mathcal{L}, \mathcal{C})$ е формална теорија на импликативно исказно сметање, каде $\mathcal{L} = (P, FP)$ е формален јазик од операциски тип Ω. Тогаш важи следната лема:

<u>Лема 2.2</u>: Бинарната релација $\leq$ во FP дефинирана со:

(1) $s \leq t$ ако и само ако $\vdash s \Rightarrow t$

е *псевдо-подредување* (т.е. е рефлексивна и транзитивна релација).

Доказ: Видовме дека $\vdash s \Rightarrow t$ акко $s \Rightarrow t \in C(\mathrm{A})$, па од ова, и од (i_1) и (i_3) од дефиницијата на импликативно исказно сметање, ќе следува дека $\leq$ е рефлексивна и транзитивна релација во множеството формули.

Од претходната лема и од дефиницијата за импликативно исказно сметање ќе следува доказот на следната теорема:

Теорема 2.3: (a) Бинарната релација $\approx$ во FP дефинирана со:

(2) $s \approx t$ ако и само ако $\vdash s \Rightarrow t$ и $\vdash t \Rightarrow s$

е конгруенција во Ω-алгебрата од формули FP.

(b) Релацијата $\preccurlyeq$ дефинирана на фактор множеството $FP/\approx$ со:

(3) $[s] \preccurlyeq [t]$ ако и само ако $\vdash s \Rightarrow t$

е релација за подредување.

Да забележиме дека за било кои две формули s и t во FP, важи следното: ако и двете формули се теореми во $\wp$, тогаш заради (i_2) од дефиниција на импликативно исказно сметање и заради дефиниција на релацијата $\approx$, ќе важи $s \approx t$. Од друга страна, ако, на пример, формулата s е теорема, а формулата t не е теорема во $\wp$, тогаш не важи $s \approx t$, бидејќи, заради (i_2), формулата $s \Rightarrow t$ не е теорема во тој случај. Значи, сите теореми во $\wp$, припаѓаат во иста класа на еквиваленција во однос на релацијата $\approx$, што ќе ја означиме со 1. Значи важи:

(4) $[s] = 1$ ако и само ако s е теорема во $\wp = (\mathcal{L}, C)$.

Множеството $FP/\approx$ на природен начин наследува Ω-структура:

$$
\begin{aligned}
&[s] \Rightarrow [t] = [s \Rightarrow t],\\
(5)\quad &w^2([s],[t]) = [w^2(s,t)], \text{ за секој бинарен сврзник } w^2 \in \Omega,\\
&w^1([s]) = [w^1(s)], \text{ за секој унарен сврзник } w^1 \in \Omega,
\end{aligned}
$$

за секои $s, t \in FP$.

Од (3), (4) и (5) ќе добиеме дека важи:

(6) $[s] \preccurlyeq [t]$ ако и само ако $[s] \Rightarrow [t] = 1$.

<u>Теорема 2.4</u>: (a) $(FP/\approx,\ \{1\})$ е адекватна логичка матрица за исказното сметање $\wp = (\mathcal{L}, \mathcal{C})$; притоа, алгебрата $FP/\approx$ е недегенерирана ако и само ако $\wp$ е конзистентно;

(b) $FP/\approx$ е слободна алгебра во класата на сите адекватни алгебри за исказното сметање $\wp = (\mathcal{L}, \mathcal{C})$, со генераторно множество $[P] = \{[p] | p \in P\}$. Притоа, ако $\wp$ е конзистентно исказно сметање, тогаш од $p_1 \neq p_2$, ќе следува $[p_1] \neq [p_2]$.

<u>Доказ</u>: (a) Нека $v: P \rightarrow FP/\approx$ е дадено вреднување. Нека $v_1: P \rightarrow FP$ е пресликување такво што за секое $p \in P$, важи:

(7) $v(p) = [v_1(p)]$.

Тогаш, за секоја формула t во FP ќе важи:

(8) $v^*(t) = [v_1^*(t)]$.

Пресликувањето $v_1: P \rightarrow FP$ може да го разгледуваме како замена на променливите со други формули, па ако t е аксиома, тогаш и $v_1^*(t)$ ќе биде аксиома, па, од (4) ќе имаме $[v_1^*(t)] = 1$, односно $v^*(t) = 1$. Слично, ако *r* е правило со кое од формулите $t_1, t_2, \dots, t_k$ се изведува формулата t, и ако $v^*(t_i) = 1$, за $i = 1, \dots, k$, тогаш од (8) ќе добиеме $[v_1^*(t_i)] = 1$, па, според (4), формулите $v_1^*(t_i)$ за $i = 1, \dots, k$, се теореми во $\wp$, па и $v_1^*(t)$ ќе биде теорема во $\wp$, односно ќе важи $v^*(t) = [v_1^*(t)] = 1$. Значи, исполнети се условите (m_1) и (m_2) од дефиницијата за адекватна алгебра. (m_3) и (m_4) ќе бидат исполнети заради (3) и (6). Од (4) е јасно дека алгебрата $FP/\approx$ е недегенерирана ако и само ако $\wp$ е конзистентно;

(b) Јасно е дека множеството $[P]$ е генераторно множество за алгебрата $FP/\approx$. Нека $f: [P] \rightarrow A$, каде A е произволна алгебра адекватна со исказното сметање $\wp$. Пресликувањето f индуцира вреднување $v: P \rightarrow A$ дефинирано со:

(9) $v(p) = f([p])$, за секој $p \in P$,

што на единствен начин се проширува до хомоморфизам $v^*: FP \rightarrow A$.

Нека *t* и *s* се произволни формули од *FP*, за кои што важи $[t] = [s]$. Тоа, по дефиниција, значи дека $s \approx t$, односно важи $\vdash s \Rightarrow t$ и $\vdash t \Rightarrow s$ во $\wp$. Според теорема 2.1 имаме $v^*(s \Rightarrow t) = 1$ и $v^*(t \Rightarrow s) = 1$. Значи, $v^*(s) \Rightarrow v^*(t) = 1$ и $v^*(t) \Rightarrow v^*(s) = 1$, па според (m_4), $v^*(s) = v^*(t)$. Докажавме дека од $[t] = [s]$ следува $v^*(s) = v^*(t)$, за произволни формули *t* и *s*. Следствено, равенството:

(10) $f^*([t]) = v^*(t)$,

дефинира пресликување $f^*: FP/\approx \rightarrow A$. Притоа, f^* е проширување на f, затоа што за секој $p \in P$,

$f^*([p]) = v^*(p) = v(p) = f([p])$.

Уште повеќе, ако $[t] = 1$, односно, ако $\vdash t$ во $\wp$, ќе имаме:

(11) $f^*([1]) = v^*(t) = 1$.

Сега, од (10), (11) и (5), ќе следува дека f^* е хомоморфизам од $FP/\approx$ во A.

Да претпоставиме дека $p_1 \neq p_2$, за произволни $p_1, p_2 \in P$. Тогаш $p_1 \Rightarrow p_2$ не е теорема во $\wp$, зашто, ако претпоставиме дека $p_1 \Rightarrow p_2$ е теорема во $\wp$, тогаш, бидејќи теоремите се инваријантни за замена на променливи, и за секоја формула *t* од FP, $(p_1 \Rightarrow p_1) \Rightarrow t$ ќе биде теорема, па потоа, заради (i_1) и (i_2), и t ќе биде теорема, што ќе значи дека $\wp$ не е конзистентно. Значи, $p_1 \Rightarrow p_2$ не е теорема во $\wp$, па според тоа $[p_1] \neq [p_2]$.

Глава 3: Повеќевредносни логики

Развојот на повеќевредносната логика вистински започнува во периодот од 1920-1930 година и е воглавно предводен од Полската школа за логика на чело со J. Lukasiewicz кој најпрво конструира три-вредносна логика, а потоа ја проширува до систем n-вредносни логики. Паралелно, американскиот математичар E.L.Post исто така креира фамилија од конечно-вредносни логики, работејќи на проблемот на ***функционална комплетност*** (репрезентација на сите вистинитосно-вредносни функции на едно конечно множество вистинитосни вредности, со помош на само неколку од нив). Подоцна и други математичари како Wajsberg, Godel, Kleen го даваат својот придонес во конституирањето на областа.

Во оваа глава се разгледани неколку тривредносни и една четиривредносна логика. Секоја повекевредносна логика, која нема тенденција да биде само логички формализам, но и математички модел за некој реален начин на размислување кој има конкретна или потенцијална примена, се соочува со проблемот на интерпретација на вистинитосните вредности, барем на оние различните од 1 (точно) и 0 (неточно). Од тој аспект, три-вредносните и четиривредносните логики имаат посебно значење, зашто во нив има помалку (само една или две) вредности што треба да се интерпретираат. Овие логики особено се истакнуваат во редовите на конечно-вредносните логики кога станува збор за филозофски ориентирана примена.

Дел од дадените тривредносни логики се разгледани и во рамките на системи од n-вредносни логики за $n \geq 2$. На крај се разработени и бесконечно вредносните логики што се базираат на триаголна норма, ткн. *фази логики*.

Сите логики во оваа глава се воведени матрично, односно со задавање на минималната адекватна матрица со алгебрата на вистинитосни вредности, а потоа за дел од нив е дадена и соодветната аксиоматизација; во некои случаи е наведена и алгебарската семантика на соодветната логика.

За тривредносната логика на Lukasiewicz заедно со соодветната аксиоматизација, дадена се и теоремите за комплетност и согласност; исто така, за оваа логика е дадено и проширувањето до функционално комплетната тривредносна логика на Lukasiewicz-Slupecki.

3.1 Логики на Lukasiewicz

3.1.1 Тривредносна логика на Lukasiewicz

Три-вредносната логика на Lukasiewicz, L_3, е дадена со минималната матрица:

$$ML_3 = (\{0,1/2\ ,1\}, \{1\}, \sim, \Rightarrow_L, \wedge, \vee, \Leftrightarrow_L),$$

каде што операциите $\sim, \Rightarrow_L$, негација и импликација, соодветно, се дефинирани со табелите:

x	$\sim x$
0	1
½	½
1	0

$\Rightarrow_L$	0	½	1
0	1	1	1
½	½	1	1
1	0	½	1

а трите други операции може да се дефинираат преку термалните равенства:

$$t \vee s = (t \Rightarrow_L s) \Rightarrow_L s$$
$$t \wedge s = \sim ((\sim t \Rightarrow_L \sim s))$$
$$t \Leftrightarrow_L s = (t \Rightarrow_L s) \wedge (s \Rightarrow_L t)$$

Соодветно на нивните дефиниции, операциите што ги даваат симболите $\wedge$, $\vee$ и $\Leftrightarrow_L$ (термалните операции, т.е. вистинитосно-вредносните функции $\wedge$, $\vee$, $\Leftrightarrow_L$) се дадени со табелите:

$\wedge$	0	½	1
0	0	0	0
½	0	½	½
1	0	½	1

$\vee$	0	½	1
0	0	½	1
½	½	½	1
1	1	1	1

$\Leftrightarrow_L$	0	½	1
0	1	½	0
½	½	1	½
1	0	½	1

Константите 0, ½ и 1 се толкуваат како *неточно*, *недефинирано*, и *точно*, соодветно. 1 е единствената назначена вредност. Како што може да се забележи од горните вистинитосни табели, рестрикциите на овие операции над множеството **2** се еднакви на соодветните класични вистинитосно-вредносни операции. Друго што може да се забележи доколку се применат овие операции на конкретно множество искази, е дека негацијата на недефиниран исказ, е недефиниран исказ; $\wedge$ и $\vee$ се, всушност *min* и *max* операциите, соодветно; импликацијата на два искази е точен исказ само кога *претпоставката* е помалку или до ист степен точна како *заклучокот*; а еквиваленцијата на два искази е точен исказ само кога и двата искази имаат иста вистинитосна вредност. Претходните заклучоци важат и во дворедносното исказно сметање, поради што може да се каже дека три-вредносната логика на Lukasiewicz е природно проширување на класичната исказна логика со додавање на трета вистинитосна вредност.

*   *   *

Вака е оригинално дефинирано три-вредносното исказно сметање на Lukasiewicz. Во 1931 истото е аксиоматизирано од страна на Wajsberg.

Формалниот јазик е $\mathcal{L}_L = (P, FP)$, каде формулите во FP се $\{\Rightarrow, \sim\} -$ терми, за унарниот симбол $\sim$ и бинарниот симбол $\Rightarrow$. Аксиоматскиот систем е следниот:

(L1) $p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$,
(L2) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow ((q \Rightarrow p) \Rightarrow (p \Rightarrow q))$,
(L3) $(\sim q \Rightarrow \sim p) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$,
(L4) $((p \Rightarrow \sim p) \Rightarrow p) \Rightarrow p$,

а единствено правило за изведување е *правилото за раздвојување* (*modus ponens*):
$\frac{p, p \Rightarrow q}{q}$.

За овој аксиоматски систем важат теоремите за согласност и комплетност. Пред да дадеме доказ на овие теореми, ќе дефинираме некои неопходни поими, и ќе докажеме некои помошни својства.

Поимите за *синтаксичко* и *семантичко следство*, *доказ*, *теорема* и *тавтологија* се претходно дефинирани во глава 2. Ќе ги усвоиме следните дефиниции за семантичка и синтаксичка конзистентност на множество формули: За множеството формули S ќе велиме дека е ***синтаксички конзистентно***, ако не постои формула t, таква што $S \vdash t$ и $S \vdash \sim t$. (Ако таква формула постои, тогаш за S ќе велиме дека е ***синтаксички неконзистентно***). За S ќе велиме дека е ***максимално конзистентно*** множеството формули, ако

1) S е *синтаксички конзистентно*;
2) Ако $S \cup \{t\}$ за некоја формула t е *синтаксички конзистентно*, тогаш $S \vdash t$.

За множеството формули S ќе велиме дека е ***семантички конзистентно***, ако постои *вреднување* со кое сите елементи на S се вреднуваат со 1.

<u>Лема 3.1</u>: За секое множество формули S и за секои формули $t, s, r \in FP$, важат следните основни својства во врска со докажливоста и синтаксичката конзистентност:

(a) Ако $S \vdash t$, тогаш $S' \vdash t$ за секое $S' \supseteq S$;
(b) Ако $S \vdash t$, тогаш постои конечно множество $S' \subseteq S$ такво што $S' \vdash t$;
(c) Ако $t \in S$, тогаш $S \vdash t$;
(d) Ако $S \vdash t$ и $S \vdash t \Rightarrow s$, тогаш $S \vdash s$;
(e) $\vdash (t \Rightarrow (t \Rightarrow (s \Rightarrow r))) \Rightarrow ((t \Rightarrow (t \Rightarrow s)) \Rightarrow (t \Rightarrow (t \Rightarrow r)))$;
(f) $\vdash \sim t \Rightarrow (t \Rightarrow s)$;
(g) $\vdash t \Rightarrow t$;
(h) $\vdash (t \Rightarrow (t \Rightarrow \sim t)) \Rightarrow (t \Rightarrow \sim t)$;
(i) $\vdash ((t \Rightarrow \sim t) \Rightarrow \sim (t \Rightarrow \sim t)) \Rightarrow t$;
(j) $\vdash \sim\sim t \Rightarrow t$;
(k) $\vdash t \Rightarrow \sim\sim t$;
(l) $\vdash (t \Rightarrow s) \Rightarrow (\sim s \Rightarrow \sim t)$;
(m) $\vdash \sim (t \Rightarrow s) \Rightarrow t$;
(n) $\vdash \sim (t \Rightarrow s) \Rightarrow \sim s$;
(o) $\vdash t \Rightarrow (\sim s \Rightarrow \sim (t \Rightarrow s))$;
(p) $\vdash (t \Rightarrow \sim t) \Rightarrow ((\sim s \Rightarrow s) \Rightarrow (t \Rightarrow s))$;
(q) Ако $S \cup \{t\} \vdash s$, тогаш $S \vdash t \Rightarrow (t \Rightarrow s)$; (*Теорема за дедукција на Stutterer*)
(r) Ако S е синтаксички неконзистентно, тогаш $S \vdash t$ за секоја формула t;
(s) S е синтаксички неконзистентно акко $S \vdash \sim (t \Rightarrow t)$ за секоја формула t;
(t) Ако $S \cup \{t\}$ е синтаксички неконзистентно, тогаш $S \vdash t \Rightarrow \sim t$;
(u) Ако $S \cup \{t \Rightarrow \sim t\}$ е синтаксички неконзистентно, тогаш $S \vdash t$.

<u>Доказ</u>: Својствата (a) – (d) следуваат директно од дефиницијата за синтаксичко следство. Дел од доказите на (e) – (p) се дадени во Додаток 1.

(q) Нека низата $t_1, t_2, \dots, t_n$ е доказ на s од $S \cup \{t\}$. Со математичка индукција по i ќе покажеме дека $S \vdash t \Rightarrow (t \Rightarrow t_i)$, за секое $i, 1 \le i \le n$, па специјално ќе следува дека $S \vdash t \Rightarrow (t \Rightarrow s)$. Ги разгледуваме трите можни случаи:

1) t_i е аксиома или елемент од S. Тогаш $S \vdash t_i$, заради (a) или (c). Бидејќи $t_i \Rightarrow (t \Rightarrow t_i)$ е аксиома, јасно, $S \vdash t_i \Rightarrow (t \Rightarrow t_i)$, па од (d) ќе имаме $S \vdash t \Rightarrow t_i$. Сега, бидејќи $(t \Rightarrow t_i) \Rightarrow (t \Rightarrow (t \Rightarrow t_i))$ е аксиома, имаме $S \vdash (t \Rightarrow t_i) \Rightarrow (t \Rightarrow (t \Rightarrow t_i))$, па, повторно според (d), ќе имаме $S \vdash t \Rightarrow (t \Rightarrow t_i)$.

2) $t_i = t$. Тогаш $t \Rightarrow (t \Rightarrow t_i)$ е аксиома, па $S \vdash t \Rightarrow (t \Rightarrow t_i)$.

3) t_i е добиено со примена на (MP) од t_k и $t_k \Rightarrow t_i$ за некое $k < i$. Тогаш, според индуктивната претпоставка, $S \vdash t \Rightarrow (t \Rightarrow t_k)$ и $S \vdash t \Rightarrow (t \Rightarrow (t_k \Rightarrow t_i))$. Од

последното, од (e), и од (d) ќе имаме $S \vdash \big(t \Rightarrow (t \Rightarrow t_k)\big) \Rightarrow (t \Rightarrow (t \Rightarrow t_i))$, па повторно според (d), $S \vdash t \Rightarrow (t \Rightarrow t_i)$.

(r) Нека S е синтаксички неконзистентно, т.е. нека постои формула r, таква што $S \vdash r$ и $S \vdash \sim r$. Тогаш, од (f) и (d), ќе следува дека $S \vdash t$ за секоја формула t.

(s) $S \vdash t \Rightarrow t$ заради (g). Па, ако $S \vdash \sim (t \Rightarrow t)$, тогаш S е синтаксички неконзистентно. Обратно, ако S е синтаксички неконзистентно, тогаш заради (r), $S \vdash \sim (t \Rightarrow t)$.

(t) Нека $S \cup \{t\}$ е синтаксички неконзистентно. Тогаш $S \cup \{t\} \vdash \sim t$, заради (r), па $S \vdash t \Rightarrow (t \Rightarrow \sim t)$, заради (q). Сега, од (h) и (d), имаме $S \vdash t \Rightarrow \sim t$.

(u) Нека $S \cup \{t \Rightarrow \sim t\}$ е синтаксички неконзистентно. Тогаш $S \vdash (t \Rightarrow \sim t) \Rightarrow \sim (t \Rightarrow \sim t)$, па според (i) и (d), ќе имаме $S \vdash t$.

Теорема 3.2: Ако множеството од формули S е синтаксички конзистентно, тогаш S е семантички конзистентно.

Доказ: Нека S е синтаксички конзистентно. Претпоставуваме дека сите формули се подредени во низа. S го прошируваме до множество S_∞ со следната конструкција:

- $S_0 = S$;
- $S_i = S_{i-1} \cup \{t_i\}$, ако $S_{i-1} \cup \{t_i\}$ е синтаксички конзистентно, $S_i = S_{i-1}$ ако $S_{i-1} \cup \{t_i\}$ не е синтаксички конзистентно;
- $S_\infty = \bigcup_{i=0} S_i$.

Сега имаме:

1) S_∞ е синтаксички конзистентно;

(Ако претпоставиме дека S_∞ е синтаксички неконзистентно, тогаш според (s) и (b) од претходната лема, ќе следува дека постои конечно множество $S' \subseteq S_\infty$ што е неконзистентно; но тогаш S' ќе биде подмножество на S_i за некое i, од што ќе следува дека и S_i е неконзистентно, што не е точно)

2) S_∞ е максимално конзистентно множество формули.

(Ако претпоставиме дека за некое i, постои формула t_i за којашто не важи $S_\infty \vdash t_i$, тогаш според (c) во лемата, ќе следува дека $t_i \notin S_\infty$, што значи дека $t_i \notin S_i$, па $S_{i-1} \cup \{t_i\}$ е синтаксички неконзистентно, па според (s) и (a) од лемата, ќе следува дека и $S_\infty \cup \{t_i\}$ е синтаксички неконзистентно).

Дефинираме вреднување v на множеството променливи P на следниот начин:

- $v(p) = 1$, ако $S_\infty \vdash p$;
- $v(p) = 0$, ако $S_\infty \vdash \sim p$;
- $v(p) = \frac{1}{2}$, ако $S_\infty \nvdash p$ и $S_\infty \nvdash \sim p$.

Вреднувањето v се проширува до хомоморфизам v^* над множеството од сите формули FP. Ќе покажеме дека и за секоја формула $t \in FP$ важи:

(i) $v^*(t) = 1$, ако $S_\infty \vdash t$;

(ii) $v^*(t) = 0$, ако $S_\infty \vdash \sim t$;

(iii) $v^*(t) = \frac{1}{2}$, ако $S_\infty \nvdash t$ и $S_\infty \nvdash \sim t$.

Доказот на ова тврдење се изведува со математичка индукција по должината на t. (***Должина*** на формула t, $l(t)$, се дефинира индуктивно: $l(p) = 1$ за секоја променлива p, $l(\sim p) = l(p) + 1$, $l(p \Rightarrow q) = l(p) + l(q) + 1$).

Ако $l(t) = 1$, тогаш t е променлива, па тврдењето следува од дефиницијата на v.

Нека тврдењето важи за секоја формула t, со $l(t) = l_0$, за фиксно $l_0 > 1$. Ќе покажеме дека важи за $l_0 + 1$. Па нека t е формула таква што $l(t) = l_0 + 1$.

1) Нека $t =\sim s$. Ги разгледуваме трите случаи:

- $S_\infty \vdash t$, односно, $S_\infty \vdash\sim s$. Тогаш $S_\infty \nvdash s$, па, според индуктивната претпоставка (ИП), $v^*(s) = 0$, и $v^*(t) = v^*(\sim s) =\sim v^*(s) = 1$;

- $S_\infty \vdash \sim t$, односно $S_\infty \vdash \sim \sim s$. Тогаш, според (j) и (d) од лемата, $S_\infty \vdash s$, па според (ИП), $v^*(s) = 1$, и $v^*(t) = v^*(\sim s) =\sim v^*(s) = 0$;

- $S_\infty \nvdash t$ и $S_\infty \nvdash \sim t$, односно, $S_\infty \nvdash\sim s$ и $S_\infty \nvdash \sim \sim s$. Во тој случај и $S_\infty \nvdash s$, зашто во спротивно, ако $S_\infty \vdash s$, од (k) и (d) од лемата, ќе имавме $S_\infty \vdash \sim \sim s$. Значи, $S_\infty \nvdash s$ и $S_\infty \nvdash\sim s$, па според (ИП) имаме $v^*(s) = \frac{1}{2}$, и $v^*(t) = v^*(\sim s) =\sim v^*(s) = \frac{1}{2}$.

2) Нека $t = s \Rightarrow r$. Ги разгледуваме трите случаи:

- $S_\infty \vdash s \Rightarrow r$. Ако $S_\infty \vdash \sim s$, тогаш $v^*(s) = 0$. Ако $S_\infty \vdash r$, тогаш $v^*(r) = 1$. Ако $S_\infty \vdash s$, тогаш $S_\infty \vdash r$, според (d) од лемата, па повторно $v^*(r) = 1$. И, ако $S_\infty \vdash\sim r$, тогаш $S_\infty \vdash \sim s$, според (l) и (d) од лемата, па повторно, $v^*(s) = 0$. Значи, ако било која од s, $\sim s$, r, $\sim r$ синтаксички следува од S_∞, тогаш $v^*(s) = 0$ или $v^*(r) = 1$, па $v^*(t) = v^*(s \Rightarrow r) = v^*(s) \Rightarrow_L v^*(r) = 1$. Ако, ниту една од s, $\sim s$, r, $\sim r$ не следува од S_∞, тогаш $v^*(s) = v^*(r) = \frac{1}{2}$ според (ИП), па $v^*(t) = v^*(s \Rightarrow r) = v^*(s) \Rightarrow_L v^*(r) = 1$.

- $S_\infty \vdash\sim (s \Rightarrow r)$. Тогаш, според (m), (n) и (d) од лемата, $S_\infty \vdash s$ и $S_\infty \vdash\sim r$, па според (ИП), $v^*(s) = 1$ и $v^*(r) = 0$, па $v^*(t) = v^*(s \Rightarrow r) = v^*(s) \Rightarrow_L v^*(r) = 0$.

- $S_\infty \nvdash s \Rightarrow r$ и $S_\infty \nvdash\sim (s \Rightarrow r)$. Тогаш не може $v^*(s)$ да биде 0, и не може $v^*(r)$ да биде 1, зашто во тој случај според (ИП), $\sim s$ или r синтаксички ќе следува од S_∞, па според (L1), и (f), (a) и (d) од лемата, и $s \Rightarrow r$ синтаксички ќе следува од S_∞. Ако $v^*(s) = 1$, тогаш не може и $v^*(r) = 0$ зашто, според (ИП), s и $\sim r$ ќе бидат докажливи од S_∞, па, според (o) и (d) од лемата и $\sim (s \Rightarrow r)$ ќе биде. Значи, ако $v^*(s) = 1$, тогаш $v^*(r)$ мора да е $\frac{1}{2}$, па $v^*(s \Rightarrow r) = \frac{1}{2}$. Ако $v^*(s) = \frac{1}{2}$, тогаш не може и $v^*(r) = \frac{1}{2}$ зашто, од (ИП), ниту s, ниту $\sim r$ нема да бидат докажливи од S_∞, па заради максималната конзистентност на S_∞, $S_\infty \cup \{s\}$ и $S_\infty \cup \{\sim r\}$ ќе бидат синтаксички неконзистентни, па, според (t) од лемата, ќе имаме $S \vdash s \Rightarrow \sim s$ и $S \vdash \sim r \Rightarrow \sim\sim r$, па според (p) и (d), $S_\infty \vdash s \Rightarrow r$. Значи, $v^*(r)$ мора да е 0, па $v^*(s \Rightarrow r) = \frac{1}{2}$.

Сега, бидејќи секоја формула од S, е и во S_∞, па според (c) е докажлива од S_∞, ќе следува дека секоја формула од S ќе се вреднува со 1 со вака конструираното вреднување v.

<u>Теорема 3.3</u> (***Строга теорема за согласност и комплетност***): $S \vDash t$ ако и само ако $S \vdash t$.

<u>Доказ</u>: Нека $S \vDash t$. Тогаш $S \cup \{t \Rightarrow \sim t\}$ е семантички неконзистентно, па според претходната теорема $S \cup \{t \Rightarrow \sim t\}$ е и синтаксички неконзистентно, па, според (u) од лемата, $S \vdash t$.

Обратно, ако $S \vdash t$, тогаш постои постои низа од формули $t_1, t_2, \dots, t_n$ такви што за секој $i, 1 \leq i \leq n$, t_i е или аксиома, или елемент од S, или е добиен од претходни елементи во низата со (MP); и $t_n = t$. А бидејќи множеството $\{t' \mid S \vDash t'\}$ ги содржи аксиомите, и е затворено за (MP), ќе следува дека $S \vDash t$.

<u>Последица 3.4</u> (***Слаба теорема за согласност и комплетност***): $\vDash t$ ако и само ако $\vdash t$.

<u>Теорема 3.5</u> (***Теорема за компактност***): Ако секое конечно подмножество на S е семантички конзистентно, тогаш S е семантички конзистентно.

<u>Доказ</u>: Ако претпоставиме дека секое конечно подмножеството на S е семантички конзистентно, тогаш (бидејќи, јасно, важи и обратното тврдење на теорема 3.2), секое конечно подмножество на S ќе биде и синтаксички конзистентно, па според (b) и (s) од лема 3.1, и S ќе биде синтаксички конзистентно. Па, според теоремата 3.2 ќе следува дека S е семантички конзистентно.

* * *

Множеството вистинитосно-вредносни функции на тривредносната логика на Lukasiewicz не е *функционално комплетно*. (Бидејќи, на пример, рестрикциите на $\Rightarrow_L$ и $\sim$ над множеството $\{0,1\}$ се однесуваат како класичната импликација и негација, не постои терм над $\{\Rightarrow_L, \sim\}$ што како *термална функција* би ја имал константната функција на {0, 1/2, 1} со вредност 1/2)

Во 1936 Slupecki го проширил L_3, додавајќи уште една вистинитосно-вредносна операција со табелата:

x	$\#x$
0	½
½	½
1	½

и, соодветно со оваа промена, во аксиоматскиот систем ги додал аксиомите:

(L5) $\#t \Rightarrow \sim \#t$
(L6) $\sim \#t \Rightarrow \#t$

Новодобиениот систем, наречен тривредносно исказно сметање на Lukasiewicz-Slupecki, L_3S, е функционално комплетен.

За тривредносното исказно сметање на Lukasiewicz-Slupecki важат и теоремите за согласност и комплетност, затоа што доказот на теоремата 3.2 лесно се проширува во случај кога t е од облик $\#r$. Имено, ниту $S_\infty \vdash \#r$, ниту $S_\infty \vdash \sim \#r$ (зашто во спротивен случај, заради L5, L6 и (a) и (d) од лема 3.1, S_∞ ќе биде синтаксички неконзистентно), и $v^*(\#r) = v^*(\sim \#r) = 1/2$. Поради ова, (i)-(iii) од теорема 3.2 се исполнети и по воведувањето на новиот операциски симбол (новата вистинитосно-вредносна операција).

3.1.2 *n*-вредносни логики на Lukasiewicz

Логиката дефинирана во претходниот наслов може да се обопшти и во логика со *n* вистинитосни вредности, и за цел број n поголем од 3, односно, може обопштено да се дефинираат *n-вредносни логики на Lukasiewicz*, L_n, за $2 \leq n \leq \infty$, со минималните матрици:

$$ML_n = (V_n, \{1\}, \sim, \Rightarrow_L, \&, \curlyvee, \wedge, \vee, \Leftrightarrow_L), \quad 2 \leq n \leq \infty,$$

каде што $\sim$ и $\Rightarrow_L$ се вистинитосно-вредносни функции на *негација* и *импликација*, кои се дефинирани со:

$\sim a = 1 - a,$
$a \Rightarrow_L b = \min\{1, 1 - a + b\},$

а другите операции се дефинираат преку $\sim$ и $\Rightarrow_L$ (примитивни операции). Така, & и $\curlyvee$ се дефинираат со термите:

$$t\&s = \sim (t \Rightarrow_L \sim s),$$
$$t \curlyvee s = \sim t \Rightarrow_L s,$$
$$t \Leftrightarrow_L s = (t \Rightarrow_L s) \wedge (s \Rightarrow_L t),$$

и се нарекуваат (строга) *конјункција* и (строга) *дисјункција,* соодветно, а за нивните вистинитосно-вредносни (термални) функции се добива дека се следните функции:

$$a\&b = \max\{a + b - 1{,}0\},$$
$$a \curlyvee b = \min\{a + b, 1\},$$

кои се нарекуваат *аритметичка конјункција* и *аритметичка дисјункција* на Lukasiewicz, соодветно. Може да се забележи дека овие два сврзници се поврзани со *De Morgan-ов закон* со негацијата на овој систем, односно дека важи:

$$\sim(a\&b) = \sim a \curlyvee \sim b.$$

Останатите два сврзници, слаба конјункција и слаба дисјункција, се дефинираат преку термите:

$$t \wedge s = t\&(t \Rightarrow_L s),$$
$$t \vee s = (t \Rightarrow_L s) \Rightarrow_L s,$$

а како соодветни на нив термални функции се добиваат min и max.

ML_2 е, всушност, матрица на класичното исказно сметање, а ML_3 е три-вредносното исказното сметање на Lukasiewicz дефинирано во претходниот наслов. Притоа, во овие два случаи операциите & и $\curlyvee$ се совпаѓаат со операциите $\wedge$ и $\vee$, соодветно.

Соодветна класа од алгебарски структури за бесконечно-вредносниот систем L_∞ е класата на *MV-алгебри.* За конечно-вредносните логики на Lukasiewicz, пак, соодветна алгебарска семантика претставуваат ткн. *алгебри на Lukasiewicz.*

3.2 Логики на Post

3.2.1 Тривредносна логика на Post

Тривредносна логика на Post е логиката дадена со следната матрица:

$$MP_3 = (\{0,1/2,1\}, \{1\}, \wedge, \vee, \sim_P, \Rightarrow_P),$$

каде што $\wedge$ и $\vee$ се min и max, соодветно, а операциите $\sim_P$ и $\Rightarrow_P$ се дефинирани со следните вистинитосни табели:

x	$\sim_P x$
0	1
½	0
1	½

$\Rightarrow_P$	0	½	1
0	1	1	1
½	0	1	1
1	0	½	1

Post нема дадено толкување на вистинитосните вредности, ниту пак на вистинитосно-вредносните операции во оваа логика. Тој оваа, а и неговите n-вредносни логики за $n > 3$ ги замислил како формален систем кој ќе биде функционално комплетен.

3.2.2 *n*-вредносни логики на Post

n-вредносни логики на Post, P_n, за $2 \leq n < \infty$, се дефинирани со следните минимални матрици:

$$MP_n = (V_n, \{1\}, \sim_P, \vee, \wedge, \Rightarrow_P), \quad 2 \leq n < \infty,$$

каде што вистинитосно-вредносните функции $\sim_P$, $\vee$, $\wedge$, $\Rightarrow_P$ (негација, дисјункција, конјункција и импликација), се дефинирани со:

$$\sim_P a = \begin{cases} 1 & , \ за \ a = 0 \\ a - \frac{1}{n-1} & , \ за \ a \neq 0 \end{cases},$$

$$a \vee b = \max\{a, b\},$$

$$a \wedge b = \min\{a, b\},$$

$$a \Rightarrow_P b = \begin{cases} 1, & a \leq b \\ b, & a > b \end{cases}.$$

Може да се забележи дека во овој систем функцијата на негација е зависна од бројот на вистинитосни вредности (за разлика од негацијата во другите системи). Сепак, дефиницијата на негација може да се формулира и универзално за сите P_n системи, како циклична пермутација на сите вистинитосни вредности во нивниот природен редослед.

Може да се забележи дека во системот логики на Post отсуствува бесконечновредносна логика, токму поради проблемот за функционална комплетност.

Овде за единствена назначена вредност се зема 1, меѓутоа Post дефинирал и системи со повеќе назначени вредности.

Множеството основни сврзници на секој од системите на Post е ***функционално комплетно***, во смисла на тоа што овозможува репрезентација на секоја можна вистинитосно-вредносна функција над V_n (Па така, секој систем на Post, го покрива соодветниот ситем на Lukasiewicz, т.е. множеството од L_n-*тавтологии* е подмножество од множеството на P_n-*тавтологии*).

3.3 Логики на Gödel

3.3.1 Тривредносна логика на Gödel

Тривредносната логика на Gödel е дадена со следната матрица:

$$MG_3 = (\{0,1/2,1\}, \{1\}, \wedge, \vee, \sim_G, \Rightarrow_G, \Leftrightarrow_G),$$

каде што $\wedge$ и $\vee$ се min и max операциите, соодветно, а $\sim_G$ и $\Rightarrow_G$ се зададени со следните вистинитосни табели:

x	$\sim_G x$
0	1
½	0
1	0

$\Rightarrow_G$	0	½	1
0	1	1	1
½	0	1	1
1	0	½	1

Операцијата $\Leftrightarrow_G$ може да се дефинира со термот:

$$t \Leftrightarrow_G s = (t \Rightarrow_G s) \wedge (s \Rightarrow_G t)$$

Оваа логика е интересна заради тоа што нејзините тавтологии ги опфаќаат сите тврдења на ткн. *интуиционистичкото исказно сметање*. Всушност, и аксиоматизацијата што ја дал Gödel за оваа логика се совпаѓа со аксиоматскиот систем на интуиционистичката логика, со една аксиома плус, (G11):

(G1) $(p \wedge q) \Rightarrow p$,
(G2) $(p \wedge q) \Rightarrow q$,
(G3) $p \Rightarrow (p \vee q)$,
(G4) $q \Rightarrow (p \vee q)$,
(G5) $p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$,
(G6) $p \Rightarrow (\sim p \Rightarrow q)$,
(G7) $p \Rightarrow (q \Rightarrow (p \wedge q))$,
(G8) $(p \Rightarrow \sim q) \Rightarrow (q \Rightarrow \sim p)$,
(G9) $(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Rightarrow ((p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r))$,
(G10) $(p \Rightarrow r) \Rightarrow ((q \Rightarrow r) \Rightarrow ((p \vee q) \Rightarrow r)$,
(G11) $(\sim p \Rightarrow q) \Rightarrow ((q \Rightarrow p) \Rightarrow q)) \Rightarrow q)$.

Единствено правило за изведување е modus ponens.

3.3.2 *n*-вредносни логики на Gödel

n-вредносните логики на Gödel, G_n, се дефинирани со следните матрици:

$$MG_n = (V_n, \{1\}, \wedge, \vee, \sim_G, \Rightarrow_G, \Leftrightarrow_G), \quad 2 \leq n \leq \infty,$$

каде што вистинитосно-вредносните операции се дефинирани со:

$$a \wedge b = \min\{a, b\},$$

$$a \vee b = \max\{a, b\},$$

$$\sim_G a = \begin{cases} 1, & \text{ако } a = 0 \\ 0, & \text{ако } a > 0 \end{cases},$$

$$a \Rightarrow_G b = \begin{cases} 1, & \text{ако } a \leq b \\ b, & \text{ако } a > b \end{cases},$$

$$a \Leftrightarrow_G b = \begin{cases} 1, & \text{ако } a = b \\ \min\{a,b\}, & \text{ако } a \neq b \end{cases},$$

и претставуваат конјункција, дисјункција, негација, импликација и еквиваленција, соодветно. Јасно, важи:

$$t \Leftrightarrow_G s = (t \Rightarrow_G s) \wedge (s \Rightarrow_G t).$$

Алгебарска семантика за бесконечниот случај е класата на сите Heyting алгебри, т.е. на сите псевдо-Булови мрежи, дефинирани во глава 4.

3.3 Тривредносна логика на Kleene

S. C. Kleene во 1952 конструирал две тривредносни логики со цел да се справи со проблемите што произлегуваат од концептот за *недефинираност* во теоријата на парцијални рекурзивни функции. Битна претпоставка при конструкцијата на овие логики е дека $a \vee b$ може да има смисла (да прими една од двете "дефинирани" вистинитосни вредности) и во одредени случаи кога една од двете вистинитосни вредности a или b е недефинирана.

Вистинитосните вредности 0, 1/2, 1 се толкуваат како *неточно*, *недефинирано*, и *точно*, соодветно. 1 е единствена назначена вредност.

Тривредносната логика на Kleene Kl_1 е дадена со минималната матрица:

$$MKL_1 = (\{0,1/2,1\},\{1\},\sim,\vee,\wedge,\Rightarrow_{K_1},\Leftrightarrow_{K_1}),$$

каде што операциите се дадени со табелите:

x	$\sim x$
0	1
½	½
1	0

$\Rightarrow_{K_1}$	0	½	1
0	1	1	1
½	½	½	1
1	0	½	1

$\Leftrightarrow_{K_1}$	0	½	1
0	1	½	0
½	½	½	½
1	0	½	1

$\vee$	0	½	1
0	0	½	1
½	½	½	1
1	1	1	1

$\wedge$	0	½	1
0	0	0	0
½	0	½	½
1	0	½	1

Три-вредносната логика на Kleene Kl_2 е дадена со минималната матрица:

$$MKL_2 = (\{0,1/2,1\}, \{1\}, \sim, \vee, \wedge, \Rightarrow_{K_2}, \Leftrightarrow_{K_2}, \equiv),$$

каде што операциите $\sim, \vee, \wedge$ се како во Kl_1 (и како во сите претходно дефинирани три-вредносни логики) а останатите операции се дадени со:

$\Rightarrow_{K_2}$	0	½	1
0	1	1	1
½	½	1	1
1	0	½	1

$\Leftrightarrow_{K_2}$	0	½	1
0	1	½	0
½	½	1	½
1	0	½	1

$\equiv$	0	½	1
0	1	0	0
½	0	1	0
1	0	0	1

Логиките Kl_1 и Kl_2 се нарекуваат силна и слаба логика на Kleene, соодветно.

Импликацијата од системот Kl_1 може да се дефинира во L_3 преку следниот терм:

$$t \Rightarrow_{K_1} s = (t \Rightarrow_L s) \wedge (t \vee\sim t \vee s \vee\sim s),$$

па значи, системот Kl_1 е подсистем на системот L_3, но обратното не важи. Имено, логиката дефинирана со матрицата Kl_1 има празно множество тавтологии, бидејќи секоја од вистинитосно-вредносните функции во оваа логика има вредност ½ кога сите аргументи примаат вредност ½. Ако, пак, во Kl_1 се земат 1 и ½ како назначени вредности, тогаш матрицата MKL_1 станува хомоморфна со класичната двовредносна матрица и множеството тавтологии се совпаѓа со истото во класичната логика.

Логиката дефинирана со матрицата Kl_2 е мало проширување на три-вредносната логика на Lukasiewicz, со додавање на операцијата $\equiv$.

3.4 Тривредносна логика на Hallden

Во тривредносната логика на Hallden, третата вистинитосна вредност (покрај *точно* и *неточно*) означува *бесмислено*, иако, од филозофски аспект, е дискутабилно дали на нешто што е бесмислено може да му се додели вистинитосна вредност, уште повеќе, назначена вистинитосна вредност.

Формално, тривредносната логика на Hallden е дефинирана преку следната матрица:

$$MH = (\{0,1/2,1\}, \{1/2,1\}, \sim, \#, \wedge_H, \vee_H, \Rightarrow_H, \Leftrightarrow_H, -),$$

каде што 0, 1 и ½ би се доделиле како вистинитосни вредности на неточни, точни и бесмислени искази, соодветно. Операциите се дефинирани со следните табели:

x	$\sim x$
0	1
½	½
1	0

x	$\#x$
0	1
½	0
1	1

$\wedge_H$	0	½	1
0	0	½	0
½	½	½	½
1	0	½	1

Ако p е исказ, тогаш $\#p$ ќе биде исказот “p има смисла”.

Операциите $\sim$ и $\wedge_H$ соодветсвуваат на негација и конјункција. Како што се гледа од табелата, се зема дека конјункцијата на бесмислен исказ со било каков исказ, е бесмислен исказ, додека, пак, рестрикцијата на оваа операција над множеството $\{0,1\}$ се совпаѓа со класичната конјункција.

Операциите $\vee_H, \Rightarrow_H$ и $\Leftrightarrow_H$ се дефинираат преку термалните равенства (што важат и во класичната логика):

$$t \vee_H s = \sim (\sim t \wedge_H \sim s),$$
$$t \Rightarrow_H s = \sim t \vee_H s,$$
$$t \Leftrightarrow_H s = (t \Rightarrow_H s) \wedge_H (s \Rightarrow_H t).$$

Нивните вистинитосни табели се следните:

$\vee_H$	0	½	1
0	0	½	1
½	½	½	½
1	1	½	1

$\Rightarrow_H$	0	½	1
0	1	½	1
½	½	½	½
1	0	½	1

$\Leftrightarrow_H$	0	½	1
0	1	½	0
½	½	½	½
1	0	½	1

Од последните табели може да се забележи дека и дисјункција на бесмислен исказ со било каков исказ, е бесмислен исказ; и дека ако било кој од двата дела на импликацијата е бесмислен исказ, тогаш и самата импликација е бесмислен исказ; како и дека еквиваленција на бесмислен исказ со било каков исказ, е бесмислен исказ.

Унарната операција $-$ се дефинира преку термот:

$$-t = \sim \#t$$

Вистинитосната табела на сврзникот $-$ е следната:

x	$-x$
0	0
½	1
1	0

Ако p е исказ, тогаш $-p$ ќе биде исказот “p има смисла”.

Hallden го дал следниот систем аксиоми за оваа логика:

(H1) $(\sim p \Rightarrow p) \Rightarrow p$,
(H2) $p \Rightarrow (\sim p \Rightarrow q)$,
(H3) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow ((q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r))$,
(H4) $\#p \Leftrightarrow \# \sim p$,
(H5) $\#(p \wedge q) \Leftrightarrow (\#p \wedge \#q)$,
(H6) $p \Rightarrow \#p$,

со modus ponens како правило за изведување.

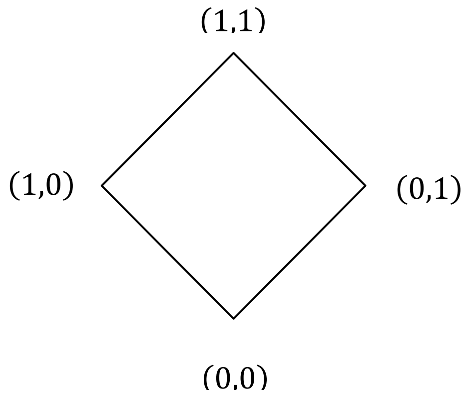
Теоремите за согласност и комплетност важат за оваа аксиоматска теорија.

3.5 Четиривредносни логики

За разлика од тривредносните логики, каде што се среќаваме со најразлични пристапи и интерпретации, кај досега дефинираните четиривредносни логики има само неколку пристапи кон тоа како да се дефинираат и интерпретираат четирите вистинитосни вредности.

Како примери за четиривредносни логики можат да се земат четиривредносните логики на Lukasiewicz, Gödel и Post, дефинирани во рамките на соодветните n-вредносни системи, во кои четирите вистинитосни вредности се подредени линеарно.

Многу поинтересен е пристапот во кој како множество вистинитосни вредности се зема множеството парови $V_4^* = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$ со природното подредување:

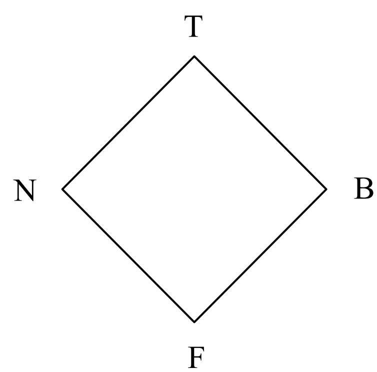


Овој пристап е од особено значење поради неговата примена во работењето со бази на податоци во кои има можност за појава на недостаток на информација, но и неконзистентност на информација. Имено, во базите на податоци информациите се складираат во форма на факти, реченици за кои најчесто се подразбира дека можат да бидат точни или неточни. Тие информации доаѓаат во базата од различни извори, и во различно време. На основа на информациите содржани во базата, компјутерот треба да биде во состојба да одговори (да даде потврда или одрекување) на заклучоци што се во врска со тие информации. Но, бидејќи конкретната база на податоци може да биде некомплетна или пак неконзистентна, би било добро множеството од можни одговори на компјутерот да биде проширено, односно, освен одговорите „точно“ и „неточно“, компјутерот да може како одговор да даде и „не знам“ (што ќе произлегува од недостаток на информации во базата), или „и точно и неточно“ (што ќе значи несовпаѓање на некои информации во базата, присутност на меѓусебно контрадикторни факти и сл.) Сега, поради тоа што комјутерот има четири можни одговори на секое прашање (четири „знаци“ што може да ги поврзи со секоја реченица), тој треба да биде опремен и со внатрешен „механизам на размислување“, со што ќе „одлучува“ кој одговор („знак“) да го даде. Со сето ова се постигнува, компјутерот да биде во состојба да ги поврзува информациите, на некој начин да „размислува, а не само да го повторува она што му е кажано“.

Заради поедноставување ги воведуваме ознаките T $=(1,0)$ (*точно*); F $=(0,1)$, (*неточно*); N $=(0,0)$, (*ни точно ни неточно,* неопределеност, недостаток на информација во врска со вистинитоста); и B $=(1,1)$, (*и точно и неточно,* преопределеност, вишок на информација во врска со вистинитоста).

Природното подредување на множеството $V_4^*=\{$T, F, N, B$\}$ е еден вид „подредување по количество информација“, кое N, комплетниот недостаток на информација го смета за најлош можен случај, и преферира што е можно повеќе информации (независно какви). Ваквото подредување го вреднува количеството информации на компјутерот поврзани со конкретната реченица.

Постои и друго подредување на V_4^*, кое може да се нарече „подредување по вистинитост", кое вистинитосната вредност T ја рангира на највисоката позиција, F е најдолу, односно најмногу преферира точни искази, а најмалку грешни; додека, пак, N и B се рангирани некаде во средина, зашто ако некоја од овие вистинитосни вредности се припише на некој исказ, отворени се можностите тој да биде и точен, а и неточен. Ако ова подредување го означиме со $\preccurlyeq$, тогаш $(V_4^*, \preccurlyeq)$ е мрежа:



Од алгебарска гледна точка множеството V_4^* со двете различни подредувања, формира алгебарска структура која претставува *бимрежа*.

Кое од подредувањата на V_4^* ќе се земе, зависи од (потенцијалната) примена на четиривредносната логика во оперирањето со конкретна бази на податоци.

Операциите sup и inf (ги означуваме со $\vee$, $\wedge$, соодветно) во горната мрежа се природни кандидати за функции на вистинитост на конјункцијата и дисјункцијата на искази. Претходно споменатиот интуитивен пристап дава основа и за дефинирање на негација, односно функција на вистинитосна вредност што ќе одговара на сврзникот негација, $\sim$, преку следната табела:

x	T	F	N	B
$\sim x$	F	T	N	B

После интуитивно дефинираните операции над множеството вистинитосни вредности V_4^* потребно е да се воведе поим за семантичко (логичко) следство, односно, бидејќи општата дефиниција за семантичко следство е природно применлива овде, потребно е само да се избере назначено множество вредности. А за тоа најдобар избор е множеството $\{T\}$.

Со досега дефинираното определивме матрица на четиривредносна логика која ќе ја означиме со D_4:

$$MD_4 = (V_4^*, \{\mathrm{T}\}, \vee, \wedge, \sim),$$

во која V_4^* може да се земе со било кое од двете споменати подредувања.

3.6 Бесконечно-вредносни логики

Под бесконечно-вредносни логики ги подразбираме логиките во кои множеството вистинитосни вредности има бесконечно многу елементи. Претходно ги воведовме бесконечно-вредносните логики на Lukasiewicz и Gödel како дел од системите *n*-вредносни логики на Lukasiewicz и Gödel, соодветно, за $2 \leq n \leq \infty$. Во овие логики како множество вистинитосни вредности се јавува $V_\infty = [0,1]$. Во наредното поглавје ќе дефинираме уште една логика од ваков тип со истото множество вистинитосни вредности, која, за разлика од претходно споменатите две, не влегува во пребროив систем од логики.

3.6.1 Производ логика

Производ логика, *П*, се нарекува логиката дефинирана со следната матрица:

$$M\Pi = ([0,1], \{1\}, \odot, \Rightarrow_\Pi, \bar{0}, \sim, \wedge),$$

каде што $\odot$ е обичниот производ на реални броеви, операцијата $\Rightarrow_\Pi$ е дефинирана со:

$$a \Rightarrow_\Pi b = \begin{cases} 1, & \text{ако } a \leq b \\ \frac{b}{a}, & \text{ако } a > b \end{cases},$$

$\bar{0}$ е константна функција со вредност 0, а операциите за негација и конјункција, $\sim$ и $\wedge$, се дефинираат преку следните терми:

$$\sim t = t \Rightarrow_\Pi \bar{0}$$

$$t \wedge s = t \odot (t \Rightarrow_{\Pi} s),$$

па, според тоа, за нивните вистинитосни функции ќе имаме:

$$\sim a = \begin{cases} 1, & \text{ако } a = 0 \\ 0, & \text{ако } a \neq 0 \end{cases}$$

$$a \wedge b = \min\{a, b\}.$$

Значи, овие две операции се совпаѓаат со операциите на негација и конјункција во бесконечната логика на Gödel, G_∞.

Дисјункцијата, пак, на G_∞ може исто така да се добие во оваа логика, преку термот:

$$t \vee s = \big((t \Rightarrow_{\Pi} s) \Rightarrow_{\Pi} s\big) \wedge ((s \Rightarrow_{\Pi} t) \Rightarrow_{\Pi} t).$$

Сепак, не постои начин на производ логиката да ѝ се придружи цела фамилија од конечно-вредносни логики со скратување на множеството вистинитосни вредности до V_n, како во претходните случаи. Впрочем, освен V_2, ниту едно друго множество вистинитосни вредности не е затворено за обичниот производ на реални броеви, а за V_2 тој се совпаѓа со операцијата min.

Алгебарската семантика за оваа логика е дадена со ткн. *производ алгебри*, кои се покажаа парадигматични за појавата и развојот на бесконечните повеќевредносни логики базирани на триаголни норми.

3.6.2 Логики што се базираат на триаголна норма (Фази логики)

Иако основните бесконечно-вредносни логики претставени во претходните делови (логиката на Lukasiewicz, L_∞, логиката на Godel, G_∞, и производ логиката, *П*) изгледаат сосема различно, постои генерализација што овозможува трите логики да се разгледуваат од иста појдовна точка. Имено, својствата на вистинитосната функција на сврзникот $\wedge$ во системот G_∞, & во L_∞, и $\odot$ во *П*, се совпаѓаат со својства на една многу поширока класа функции, ткн. *триаголни норми*, или, скратено, *т-норми*, кои се сметаат за природни кандидати за функцијата на вистинитосна вредност на конјункцијата. Уште повеќе, преку т-нормите, потоа, може да се изведат и функциите на вистинитосна вредност на сите други сврзници.

<u>Дефиниција 3.1</u>: ***Триаголна норма (т-норма),*** $\otimes$, претставува пресликување од $[0,1] \times [0,1]$ во $[0,1]$, такво што за секои $a, b, c \in [0,1]$ важат следните услови:

(T1) $a \otimes b = b \otimes a$; (*комутативност*)
(T2) $(a \otimes b) \otimes c = a \otimes (b \otimes c)$; (*асоцијативност*)
(T3) $a \otimes 1 = a$; (*неутрален елемент*)
(T4) $a \otimes b \leq a \otimes c$, ако $b \leq c$. (*монотоност*)

Од алгебарска гледна точка, единечниот интервал со дефинирана т-норма претставува *подреден моноид* (абелова полугрупа со единица). Моноидот е *интегрален* (единицата е воедно и универзална горна граница-најголем елемент). Се покажува дека 0 е *анихилатор,* односно, $a \otimes 0 = 0$, за секој $a \in [0,1]$.

Поаѓајќи од т-норма $\otimes$, може да дефинираме бинарна операција $\rightarrow$ ткн. *резидиум операција* на дадената т-норма $\otimes$, преку:

$$a \rightarrow b = \sup\{c | a \otimes c \leq b\}.$$

За да се дефинира оваа операција треба нормата да има особина на зачувување на супремум, а за тоа потребен и доволен услов е таа да е непрекината од лево по двата аргументи.

Дефиниционото равенство за резидиум операцијата укажува дека $a \rightarrow b$ е најголемата вредност за која е исполнето:

$$a \otimes (a \rightarrow b) \leq b.$$

Последното неравенство може да се смета за фази верзија на правилото за изведување *modus ponens*. Според тоа, резидиум операцијата на дадена непрекината од лево т-норма $\otimes$ може да се карактеризира како најслабата операција која овозможува modus ponens да важи, што, всушност, ја прави погодна за вистинитосна функција на сврзникот импликација во фази логиката.

Потоа преку $\rightarrow$ може да се дефинира и унарна операција – со термот:

$$-t = t \rightarrow 0,$$

која може да се земе како вистинитосна функција сврзникот негација.

Слаба конјункција и *слаба дисјункција* се дефинираат преку min-операцијата и преку термот

$$t \vee s = \big((t \to s) \to s\big) \wedge ((s \to t) \to t),$$

соодветно.

Алгебарската структура $\langle [0,1], \wedge, \vee, \otimes, \to, 0, 1 \rangle$ со носач [0,1], во која основни операции се: непрекинатата од лево t-норма ⊗, операцијата на импликација →, min-операцијата ∧, и операцијата ∨; и 0 и 1 (нуларни операции-константи) ја викаме ***алгебра на т-норма***. Ако 1 го издвоиме како назначена вредност, оваа алгебра дава логичка матрица за логика, која ја нарекуваме ***логика базирана на т-норма*** (***фази логика***).

Од теоријата на непрекинати т-норми, добро познат е заклучокот дека непрекинатите т-норми можат да се карактеризираат преку три *основни* (непрекинати) т-норми: т-нормата на Lukasiewicz, min-нормата и Производ нормата. Имено, секоја непрекината т-норма е *ординална сума* од овие три норми.

Како што е споменато претходно, бесконечно-вредносните логики базирани на трите основни норми се добро определени и соодветно аксиоматизирани. Проблемот на генерална аксиоматизација, т.е. на аксиоматизација на било која непрекината т-норма се покажал прилично тежок. Решавањето на овој проблем започнува со барање на сите формули во јазикот на системите базирани на т-норми кои се логички точни, т.е. точни во сите такви системи. Наједноставен начин тоа да се направи е алгебарската семантика да биде определена (или генерирана) од класата од сите алгебри базирани на непрекината т-норма. За таа цел потребно е аналитичкиот поим за непрекинатост на т-норма да се „алгебризира“.

Дефиниција 3.2: Алгебрата базирана на т-норма $\langle [0,1], \wedge, \vee, \otimes, \to, 0, 1 \rangle$ е ***делива*** ако за секои $a, b \in L$, важи:

$$a \wedge b = a \otimes (a \to b).$$

Теорема 3.6: Алгебрата базирана на т-норма $\langle [0,1], \wedge, \vee, \otimes, \to, 0, 1 \rangle$ е делива акко т-нормата ⊗ е непрекината.

3.6.3 Аксиоматизација на логиките што се базираат на триаголна норма

Класата алгебри базирани на т-норми (непрекинати или не) не е *многуобразие*, зашто не е затворена за директен призвод на алгебри. Значи, пред да се градат логики со база алгебра на т-норма, корисно би било да се најде начин да се прошири класата на непрекинати (деливи) т-норми до многуобразие. P.Hajek го постигнува тоа со тоа што наместо класата од деливи алгебри на т-норма, кои се линеарно подредени интегрални моноиди, ја разгледува класата на мрежно подредени интегрални моноиди кои се деливи. Тоа се ткн. *BL-алгебри*. Тие се дефинираат на следниот начин:

Дефиниција 3.3: ***BL-алгебра*** е алгебарска структура L =$(L,\vee,\wedge,*,\rightarrow,0,1)$ со четири бинарни операции и 2 константи такви што:

- $(L,\vee,\wedge,0,1)$ е *ограничена мрежа* со 0 и 1 како најмал и најголем елемент, соодветно;
- $(L,*,1)$ *комутативен моноид*, т.е. комутативна полугрупа со единица 1;
- бинарните операции $*$ и $\rightarrow$ формираат *здружен пар*, т.е. за секои $a,b,c\in L$ е задоволен следниот услов:
  $c\leq(a\rightarrow b)\Leftrightarrow a*c\leq b;$
- за секои $x,y\in L$ задоволен е условот за *линеарност*:
  $(a\rightarrow b)\vee(b\rightarrow a)=1$
  и условот за *деливост*:
  $a*(a\rightarrow b)=a\wedge b.$

Аксиоматизацијата на Hajek на *основната логика базирана на t-норма* (*BTL*), т.е. на класата на сите формули кои се точни во сите BL-алгебри, е дадена во формалниот јазик L_T кој како основни сврзници ги има $\rightarrow$, $*$, и константата 0 (кои се компатибилни со исто означените операции во секоја BL-алгебра). Логиката базирана на т-норма го има следниот систем на аксиоми:

(B1) $(p\rightarrow q)\rightarrow((q\rightarrow r)\rightarrow(p\rightarrow r)),$
(B2) $p*q\rightarrow p,$
(B3) $p*q\rightarrow q*p,$
(B4) $\big(p\rightarrow(q\rightarrow r)\big)\rightarrow(p*q\rightarrow r),$
(B5) $(p*q\rightarrow r)\rightarrow(p\rightarrow(q\rightarrow r)),$
(B6) $p*(p\rightarrow q)\rightarrow q*(q\rightarrow p),$
(B7) $\big((p\rightarrow q)\rightarrow r\big)\rightarrow(((q\rightarrow p)\rightarrow r)\rightarrow r),$

а како правило на изведување се јавува само modus ponens.

Формалната теорија на исказното сметање сочинето од овој систем аксиоми и правилото modus ponens, се означува со $\mathcal{B}_L$.

Поаѓајќи од примитивните сврници $\rightarrow$ и $*$ и константата 0, формалниот јазик L_T на исказното сметање $\mathcal{B}_L$ може да се прошири со дефинирање на нови сврзници:

$$t \wedge s = t * (t \rightarrow s)$$
$$t \vee s = \big((t \rightarrow s) \rightarrow t\big) \wedge ((s \rightarrow t) \rightarrow t)$$
$$\sim t = t \rightarrow 0$$

Се проверува дека дефинираните сврзници $\wedge$ и $\vee$, како вистинитосно-вредносни функци ги имаат токму операциите sup и inf од мрежата.

<u>Теорема 3.12</u>: Алгебрата на Lindenbaum за исказното сметање $\mathcal{B}_L$ е BL-алгебра.

<u>Теорема 3.13:</u> (*Теорема за согласност и комплетност*): Една формула t од јазикот L_T е теорема во исказното сметање $\mathcal{B}_L$ ако и само ако t е точна во сите BL-алгебри.

Глава 4: Алгебарска карактеризација на n-вредносно исказно сметање

Во оваа глава прво ќе го дефинираме поимот *алгебра на Post* и ќе дадеме низа поими и својства во врска со овој поим. Потоа ќе дефинираме формална теорија на n-вредносно исказно сметање, $\wp_n$, и ќе покажеме дека една алгебра е адекватна алгебра на $\wp_n$ ако и само ако е алгебра на Post, односно дека класата алгебри на Post ја формира алгебарската семантика за така дефинираното исказно сметање $\wp_n$.

4.1 Алгебри на Post

Дефиниција 4.1: Една алгебра $(A,\vee,\wedge)$ од тип (2,2) се нарекува ***мрежа***, ако за било кои елементи $a, b, c \in A$ се задоволени следните услови:

(l_1) $a \vee b = b \vee a,\ a \wedge b = b \wedge a$ (*комутативност*)
(l_2) $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c, a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$ (*асоцијативност*)
(l_3) $a \wedge a = a,\ a \vee a = a$ (*идемпотентност*)
(l_4) $(a \wedge b) \vee b = b,\ a \wedge (a \vee b) = a$ (*апсорпција*)

Елементите $a \vee b$ и $a \wedge b$ се нарекуваат ***супремум*** и ***инфимум*** на двоелементното множество $\{a, b\}$, соодветно.

Лема 4.1: За секоја мрежа $(A,\vee,\wedge)$ и за секои $a, b \in A$ важи:

$$a \vee b = b \text{ ако и само ако } a \wedge b = a.$$

Лемата 4.1 овозможува да се дефинира релација $\leq$ во множеството A:

$$a \leq b \text{ акко } a \vee b = b \text{ акко } a \wedge b = a.$$

За вака дефинираната релација лесно се проверува дека е рефлексивна, антисиметрична и транзитивна, односно, дека претставува *подредување* (*мрежно подредување*) во A. Исто така, се покажува и дека важи:

$$a \vee b = sup\{a, b\}, \qquad a \wedge b = inf\{a, b\},$$

каде што sup и inf се супремум и инфимум во однос на подредувањето $\leq$, па оттаму очигледен е доказот на следната лема:

Лема 4.2: Нека $(A, \vee, \wedge)$ е мрежа и нека $\leq$ е мрежното подредување во A. Тогаш, за секои $a, b, c \in A$ важи:

- $a \leq a \vee b$, $a \wedge b \leq a$;
- ако $a \leq c$ и $b \leq c$, тогаш $a \vee b \leq c$;
- ако $c \leq a$ и $c \leq b$, тогаш $c \leq a \wedge b$;
- ако $a \leq c$ и $b \leq d$, тогаш $a \wedge b \leq c \wedge d$ и $a \vee b \leq c \vee d$.

Теорема 4.3: Нека $(A, \leq)$ е подредено множество во кое секое двоелементно подмножество има супремум и инфимум. Ако дефинираме:

$$a \vee b = sup\{a, b\}, \qquad a \wedge b = inf\{a, b\},$$

тогаш $(A, \vee, \wedge)$ е мрежа и релацијата $\leq$ се совпаѓа со индуцираното мрежно подредување во неа.

Според претходните разгледувања, следува дека мрежа може да се дефинира како алгебра од тип (2,2) во која се задоволени равенствата $(l_1) - (l_4)$, но еквивалентно, и како подредено множество во кое секое двоелементно подмножество поседува супремум и инфимум.

Нека $(A, \vee, \wedge)$ е мрежа и нека $\leq$ е мрежното подредување. Ако A има најголем елемент, тогаш тој се нарекува *единица* на мрежата и се означува со 1; ако A има најмал елемент, тој се нарекува *нула* на мрежата и се означува со 0. Јасно, притоа, за секој елемент $a \in A$ ќе важат:

- $a \leq 1$, $0 \leq a$;
- $a \vee 1 = 1$, $a \wedge 1 = a$;
- $a \vee 0 = a$, $a \wedge 0 = 0$,

За една мрежа $(A, \vee, \wedge)$ велиме дека е *дистрибутивна*, ако равенствата:

$$(l_5) \quad a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c),$$
$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c),$$

се исполнети за секои $a, b, c \in A$.

Во делот 1.2 дефинираавме Булова алгебра. Овде ќе дадеме дефиниција на поимот Булова алгебра преку поимот за мрежа.

<u>Дефиниција 4.2</u>: ***Булова алгебра*** претставува алгебра $(B,\wedge,\vee,0,1)$ од тип (2,2,0,0) таква што $(B,\wedge,\vee)$ е дистрибутивна мрежа во која 0 е најмал, 1 е најголем елемент, и за секој елемент $a \in B$, постои елемент $b \in B$, така што се исполнети:

(b_1) $a \wedge b = 0$,
(b_2) $a \vee b = 1$.

И воопшто, ако во една алгебра $(A,\wedge,\vee,0,1)$, за некој елемент $a \in A$, постои елемент $b \in A$, така што важат (b_1) и (b_2), тогаш за елементот a велиме дека е ***комплементиран***, и b се нарекува ***комплемент*** на a.

<u>Дефиниција 4.3</u>: Една алгебра $(A,\vee,\wedge,\Rightarrow,\sim,1,0)$ од тип (2,2,2,1,0,0) се нарекува ***псевдо-Булова алгебра*** (***алгебра на Heyting***), ако $(A,\vee,\wedge)$ е ограничена мрежа со единица 1 и нула 0, а бинарната операција $\Rightarrow$ и унарната операција $\sim$ се дефинирани со:

(h_1) $a \Rightarrow b = \sup\{c | a \wedge c \leq b\}$;
(h_2) $\sim a = a \Rightarrow 0$.

Елементот $a \Rightarrow b$ го викаме ***псевдо-комплемент на $\boldsymbol{a}$ во однос на $\boldsymbol{b}$***, а елементот $\sim a$ го викаме ***псевдо-комплемент*** на a.

<u>Лема 4.4</u>: Секоја псевдо-Булова алгебра $(A,\vee,\wedge,\Rightarrow,\sim,1,0)$ е дистрибутивна мрежа.

<u>Теорема 4.5</u>: Една алгебра $(A,\vee,\wedge,\Rightarrow,\sim,1)$ од тип (2,2,2,1,0) е псевдо-Булова алгебра ако и само ако за секои $a,b,c \in A$, важат следните равенства:

(a) $a \Rightarrow (b \Rightarrow a) = 1$,
(b) $\big(a \Rightarrow (b \Rightarrow c)\big) \Rightarrow \big((a \Rightarrow b) \Rightarrow (a \Rightarrow c)\big) = 1$,
(c) ако $a \Rightarrow b = 1$ и $b \Rightarrow a = 1$, тогаш $a = b$,
(d) $a \Rightarrow 1 = 1$,
(e) $a \Rightarrow (a \vee b) = 1$,
(f) $b \Rightarrow (a \vee b) = 1$,
(g) $(a \Rightarrow c) \Rightarrow \big((b \Rightarrow c) \Rightarrow (a \vee b \Rightarrow c)\big) = 1$,
(h) $(a \wedge b) \Rightarrow a = 1$,
(i) $(a \wedge b) \Rightarrow b = 1$,

(j) $(a \Rightarrow b) \Rightarrow ((a \Rightarrow c) \Rightarrow (a \Rightarrow b \wedge c)) = 1$,

(k) $a \Rightarrow \sim b = b \Rightarrow \sim a$,

(l) $\sim (a \Rightarrow a) \Rightarrow b = 1$.

Доказ: Нека $(A, \vee, \wedge, \Rightarrow, \sim, 1)$ е псевдо-Булова алгебра. Со примена на (h_1), (h_2) и на претходно наведените својства на мрежа, се проверува дека (a)-(l) важат.

Обратно, нека имаме алгебра $(A, \vee, \wedge, \Rightarrow, \sim, 1)$ за која важат равенствата (a)-(l). Во A дефинираме релација $\leq$ на следниот начин:

(1) $a \leq b$ ако и само ако $a \Rightarrow b = 1$.

Ќе провериме дека $\leq$ е подредување во A. Да забележиме прво дека од (c) и (d) ќе следува:

(2) ако $1 \Rightarrow b = 1$, тогаш $b = 1$.

Сега, од (b) ќе имаме:

$$\big(a \Rightarrow ((a \Rightarrow a) \Rightarrow a)\big) \Rightarrow \big((a \Rightarrow (a \Rightarrow a)) \Rightarrow (a \Rightarrow a)\big) = 1,$$

па, со двократна примена на (a) и (2), ќе добиеме:

$a \Rightarrow a = 1$, за секое $a \in A$,

од што следува рефлексивноста на $\leq$. Симетричност ќе се добие со примена на (c). За доказ на транзитивноста на $\leq$, да претпоставиме дека $a \leq b$ и $b \leq c$, односно дека $a \Rightarrow b = 1$ и $b \Rightarrow c = 1$. Сега со примена на (d), добиваме: $a \Rightarrow (b \Rightarrow c) = 1$. Од ова и од $a \Rightarrow b = 1$, со примена на (b) и (2), добиваме $a \Rightarrow c = 1$, односно $a \leq c$.

Значи, $\leq$ е подредување во A, во однос на кое 1 е најголем елемент (следува од (d)). Да забележиме дека од (l) и од (1), ќе следува $\sim 1 \Rightarrow b = 1$, односно $\sim 1 \leq b$, за секој $b \in A$, па ~ 1 е најмал елемент во однос на подредувањето $\leq$. Ставаме $\sim 1 = 0$.

Дека $a \vee b$ и $a \wedge b$ се, соодветно, супремум и инфимум на двоелементното множество $\{a,b\}$, ќе следува од (e), (f), (g) и (h), (i), (j), соодветно, па според тоа $(A, \vee, \wedge)$ е мрежа.

За да покажеме дека важи (h_1), најпрво последователно ќе покажеме дека важат својствата:

(3) $a \leq b \Rightarrow a$

(4) $a \leq b \Rightarrow c$ повлекува $b \leq a \Rightarrow c$

(5) $a \leq (a \Rightarrow b) \Rightarrow b$

(6) $1 \Rightarrow a = a$

(7) ако $b \leq c$, тогаш $a \Rightarrow b \leq a \Rightarrow c$

(8) $a \Rightarrow (a \Rightarrow b) = a \Rightarrow b$

(9) $a \Rightarrow (b \Rightarrow c) = b \Rightarrow (a \Rightarrow c)$

(10) $a \Rightarrow (b \Rightarrow (a \wedge b)) = 1$.

Својството (3) следува од (a) и од (1).

За да го покажеме (4), да претпоставиме дека $a \leq b \Rightarrow c$, т.е., $a \Rightarrow (b \Rightarrow c) = 1$. Тогаш, заради (b) и (2), ќе имаме: $(a \Rightarrow b) \Rightarrow (a \Rightarrow c) = 1$, односно, $(a \Rightarrow b) \leq (a \Rightarrow c)$. Од друга страна, $b \leq a \Rightarrow b$, според (3), па ќе добиеме $b \leq a \Rightarrow c$.

Ако го примениме (4) на $(a \Rightarrow b) \leq (a \Rightarrow b)$, ќе го добиеме (5).

Според (5), $1 \leq (1 \Rightarrow a) \Rightarrow a$, па бидејќи 1 е најголем елемент ќе имаме $1 = (1 \Rightarrow a) \Rightarrow a$. Значи $(1 \Rightarrow a) \leq a$. Од (3) добиваме $a \leq (1 \Rightarrow a)$, па $(1 \Rightarrow a) = a$, односно важи (6).

За да го покажеме (7) да претпоставиме дека $b \leq c$, односно $b \Rightarrow c = 1$. Значи, според (2), $a \Rightarrow (b \Rightarrow c) = 1$. Со примена на (b) и (1) добиваме: $(a \Rightarrow b) \Rightarrow (a \Rightarrow c) = 1$, односно, $(a \Rightarrow b) \leq (a \Rightarrow c)$.

Од (b), (1) и (2) следува: $\big(a \Rightarrow (a \Rightarrow b)\big) \leq \big((a \Rightarrow a) \Rightarrow (a \Rightarrow b)\big) = 1 \Rightarrow (a \Rightarrow b) = a \Rightarrow b$. Значи, важи (8).

Од (b), (4) и (1) следува дека: $a \Rightarrow b \leq \big(a \Rightarrow (b \Rightarrow c)\big) \Rightarrow (a \Rightarrow c)$. Од ова и од (3) ќе следува $b \leq \big(a \Rightarrow (b \Rightarrow c)\big) \Rightarrow (a \Rightarrow c)$. Со примена на (4), добиваме: $a \Rightarrow (b \Rightarrow c) \leq b \Rightarrow (a \Rightarrow c)$. Со соодветна пермутација на променливите во последното неравенство, ќе го добиеме и обратното неравенство, значи важи (9).

Заради (j) и (1), ќе имаме $(b \Rightarrow a) \leq ((b \Rightarrow b) \Rightarrow (b \Rightarrow (a \wedge b))$. Од $a \Rightarrow a = 1$ и (6), ќе имаме $b \Rightarrow a \leq b \Rightarrow (a \wedge b)$. Значи, од (a) и од (7), ќе имаме:

$$1 = a \Rightarrow (b \Rightarrow a) \leq a \Rightarrow (b \Rightarrow (a \wedge b)),$$

со што равенството (10) е покажано.

Ќе покажеме дека $a \wedge (a \Rightarrow b) \leq b$. Поаѓаме од очигледното равенство:

$$a \wedge (a \Rightarrow b) \leq a \Rightarrow b.$$

Од ова и од (4) ќе имаме:

$$a \leq (a \wedge (a \Rightarrow b)) \Rightarrow b,$$

што значи:

$$a \wedge (a \Rightarrow b) \leq (a \wedge (a \Rightarrow b)) \Rightarrow b,$$

што значи:

$$\big(a \wedge (a \Rightarrow b)\big) \Rightarrow \Big(\big(a \wedge (a \Rightarrow b)\big) \Rightarrow b\Big) = 1,$$

од што, со примена на (8), ќе имаме:

$$\big(a \wedge (a \Rightarrow b)\big) \Rightarrow b = 1,$$

односно,

$$\big(a \wedge (a \Rightarrow b)\big) \leq b.$$

Сега нека $a \wedge c \leq b$. Тогаш со примена на (7) двапати, ќе имаме:

$$a \Rightarrow \big(c \Rightarrow (a \wedge c)\big) \leq a \Rightarrow (c \Rightarrow b).$$

Значи $a \Rightarrow (c \Rightarrow b) = 1$, па со примена на (9) добиваме $c \Rightarrow (a \Rightarrow b) = 1$, односно $c \leq (a \Rightarrow b)$. Со ова е комплетиран доказот на (h_1).

Бидејќи $0 = \sim 1$, со последователна примена на (k), (6), добиваме: $a \Rightarrow 0 = a \Rightarrow \sim 1 = 1 \Rightarrow \sim a = \sim a$, со што е докажан условот (h_2).

<u>Дефиниција 4.4</u>: ***n*-вредносна алгебра на Post** (**алгебра на Post од ред n**, $n \geq 2$) претставува алгебрата:

$$P = (P, \vee, \wedge, \Rightarrow, \sim, 1, d_1, d_2, \dots, d_{n-1}, e_0, e_1, \dots, e_{n-1})$$

од тип (2,2,2,1,0,1,1,...,1,0,0,...,0), каде што $(P, \vee, \wedge, \Rightarrow, \sim, 1)$ е псевдо-Булова алгебра, и за секое i, $1 \leq i \leq n-1$, и за секои $a, b \in P$ се задоволени равенствата:

(p_1) $d_i(a \vee b) = d_i(a) \vee d_i(b)$,

(p_2) $d_i(a \wedge b) = d_i(a) \wedge d_i(b)$,

(p_3) $d_i(a \Rightarrow b) = \wedge_{j=1}^{i}(d_j(a) \Rightarrow d_j(b))$,

(p_4) $d_i(\sim a) = \sim d_1(a)$,

(p_5) $d_i(d_j(a)) = d_j(a)$, за $j = 1, \dots, n-1$,

(p_6) $d_i(e_j) = \begin{cases} 1, & i \leq j \\ 0, & i > j \end{cases}$, за $j = 0,1, \dots, n-1$,

(p_7) $a = \vee_{i=1}^{n-1}(d_i(a) \wedge e_i)$,

(p_8) $d_1(a) \vee \sim d_1(a) = 1$.

<u>Пример 4.1</u>: Секоја двовредносна алгебра на Post

$$P = (P, \vee, \wedge, \Rightarrow, \sim, 1, d_1, e_0, e_1)$$

е *Булова алгебра*. (Имено, од (p_7) имаме $a = d_1(a) \wedge e_1$, па според тоа $a \leq e_1$, за секое a, па $e_1 = 1$. Значи $a = d_1(a) \wedge 1 = d_1(a)$. Па така, $e_0 = d_1(e_0) = 0$, според (p_6). Исто така, важи и $a \vee \sim a = d_1(a) \vee \sim d_1(a) = 1$, за секое $a \in P$).

<u>Лема 4.6</u>: Нека P е n-вредносна алгебра на Post. Тогаш за секои $a, b \in P$ важи:

(a) $(P, \vee, \wedge, 1)$ е дистрибутивна мрежа со нула и единица;

(b) $0 = e_0 \leq e_1 \leq \dots \leq e_{n-1} = 1$;

(c) $d_i(a) \leq d_j(a)$, за $j \leq i$, $i, j = 1,2, \dots, n-1$;

(d) ако $a \leq b$ тогаш $d_i(a) \leq d_i(b)$ за $i = 1,2, \dots, n-1$;

(e) $d_{n-1}(a) \leq a \leq d_1(a)$;

(f) $e_0 \Rightarrow a = e_{n-1}$,

$e_{n-1} \Rightarrow a = a,$

$e_1 \Rightarrow a = d_1(a);$

(g) $e_i \Rightarrow a = \bigvee_{j=1}^{i-1}(d_j(a) \wedge e_j) \vee d_i(a)$ за $i = 1,2,\dots,n-1;$

(h) $a \Rightarrow e_0 = \sim a,$

$a \Rightarrow e_{n-1} = e_{n-1};$

(i) $a \Rightarrow e_i = e_i \vee \sim d_{i+1}(a)$, за $i = 0,1,\dots,n-1;$

(j) $e_i \Rightarrow e_j = \begin{cases} e_{n-1}, & i \leq j \\ e_j, & i > j \end{cases}$, за $i, j = 0,1,\dots,n-1;$

(k) ако $e_{i+1} \leq d_j(a) \vee e_i$ важи за некое i, $0 \leq i \leq n+1$, тогаш $d_j(a) = e_{n-1}$.

Доказ: (a) важи заради дефиницијата на псевдо-Булова алгебра и лема 4.4;

(b) Од (p_7) и (p_6) имаме $e_j = \bigvee_{i=1}^{n-1}(d_i\,(e_j) \wedge e_i) = \bigvee_{i \leq j} e_i = \sup\{e_1,\dots,e_j\}$, значи $e_i \leq e_j$, за $i \leq j$, и ова важи за сите i и j, $i, j = 1,2,\dots,n-1$. Заради последниот заклучок, од (p_7) и од дистрибутивност, ќе имаме: за произволно $a \in P$, $a \wedge e_{n-1} = (\bigvee_{i=1}^{n-1}(d_i\,(a) \wedge e_i)) \wedge e_{n-1} = \bigvee_{i=1}^{n-1}(d_i\,(a) \wedge e_i \wedge e_{n-1}) = \bigvee_{i=1}^{n-1}(d_i\,(a) \wedge e_i) = a$, што значи дека $e_{n-1} = 1$. Од (p_7) и (p_6) за e_0 ќе имаме: $e_0 = \bigvee_{i=1}^{n-1}(d_i\,(e_0) \wedge e_i) = \bigvee_{i=1}^{n-1}(0 \wedge e_i) = 0;$

(c) Според (p_7), $a = \bigvee_{i=1}^{n-1}(d_i\,(a) \wedge e_i)$, па, со примена на (p_1), (p_2), и (p_6), ќе следува: $d_j(a) = d_j(\bigvee_{i=1}^{n-1}(d_i\,(a) \wedge e_i)) = \bigvee_{i=1}^{n-1}(d_j\,(d_i(a)) \wedge d_j(e_i)) = \bigvee_{i=1}^{n-1}(d_i(a) \wedge d_j(e_i)) = \bigvee_{j \leq i} d_i(a)$, од каде следува дека $d_j(a) \geq d_i(a)$ за $j \leq i$;

(d) Ако $a \leq b$, тогаш $a \wedge b = a$, па $d_i(a \wedge b) = d_i(a)$, односно $d_i(a) \wedge d_i(b) = d_i(a)$, па $d_i(a) \leq d_i(b)$.

(e) Од (p_7) имаме $a = \bigvee_{i=1}^{n-1}(d_i\,(a) \wedge e_i)$, па $a \geq d_{n-1}(a) \wedge e_{n-1} = d_{n-1}(a)$; повторно од (p_7) и од лема 4.2 (f), имаме $a = \bigvee_{i=1}^{n-1}(d_i\,(a) \wedge e_i) = (d_1(a) \wedge e_1) \vee \dots \vee (d_{n-1}(a) \wedge e_{n-1}) \leq (d_1(a) \wedge e_{n-1}) \vee \dots \vee (d_{n-1}(a) \wedge e_{n-1}) = d_1(a) \vee \dots \vee d_{n-1}(a) = d_1(a);$

(f) Бидејќи $e_{n-1} = 1$ и $e_0 = 0$, равенството $e_0 \Rightarrow a = e_{n-1}$ е јасно од дефиницијата на $\Rightarrow$, а $e_{n-1} \Rightarrow a = a$ се совпаѓа со равенството (6) од доказот на теорема 4.5; од (p_7) и (p_3), а потоа и од претходните две равенства, имаме $e_1 \Rightarrow a = \bigvee_{i=1}^{n-1}(d_i\,(e_1 \Rightarrow a) \wedge e_i) = \bigvee_{i=1}^{n-1}(\bigwedge_{j=1}^{i}(d_j\,(e_1) \Rightarrow d_j(a)) \wedge e_i) = \bigvee_{i=1}^{n-1}(d_1\,(a) \wedge e_i) = d_1(a) \wedge e_{n-1} = d_1(a);$

(g) Од (p_7), а потоа и од (p_3) и (f), имаме:

$$e_i \Rightarrow a = \bigvee_{j=1}^{n-1}(\,d_j(e_i \Rightarrow a) \wedge e_j) = \bigvee_{j=1}^{n-1}(\,\bigwedge_{k=1}^{j}(\,d_k(e_i) \Rightarrow d_k(a) \wedge e_j)) =$$

$$= \bigvee_{j=1}^{n-1}((\bigwedge_{k=1}^{\min(i,j)} d_k(a)) \wedge e_j) = \bigvee_{j=1}^{i-1}(d_j(a) \wedge e_j) \vee d_i(a);$$

(h) Равенствата следуваат од дефиниција 4.3 и од теорема 4.5.

(i) Да забележиме прво дека од дефиницијата на операцијата $\sim$, ќе следува:

(1) $\sim\sim b \geq b$, за секое $b \in P$,

а потоа со последователна примена на (1), равенството (7) од доказот на теорема 4.5, и теорема 4.5 (k), ќе имаме:

(2) $a \Rightarrow b \leq \sim b \Rightarrow \sim a$,

од што се добива:

(3) ако $a \leq b$ тогаш $\sim b \leq \sim a$.

Сега, со последователна примена на (p_7), (p_3), (h) и (3), добиваме:

$$a \Rightarrow e_i = \bigvee_{j=1}^{n-1}(d_j(a \Rightarrow e_i) \wedge e_j) = \bigvee_{j=1}^{n-1}(\bigwedge_{k=1}^{j}(d_j(a) \Rightarrow d_j(e_i)) \wedge e_j) =$$

$$= \bigvee_{j=1}^{i}(\bigwedge_{k=1}^{j}(d_k(a) \Rightarrow d_k(e_i)) \wedge e_j) \vee \bigvee_{j=i+1}^{n-1}(\bigwedge_{k=1}^{j}(d_k(a) \Rightarrow d_k(e_i)) \wedge e_j) =$$

$$= \bigvee_{j=1}^{i}(\bigwedge_{k=1}^{j}(d_k(a) \Rightarrow e_{n-1}) \wedge e_j) \vee \bigvee_{j=i+1}^{n-1}(\bigwedge_{k=1}^{j}(d_k(a) \Rightarrow e_0) \wedge e_j) =$$

$$= \bigvee_{j=1}^{i}(\bigwedge_{k=1}^{j} e_{n-1}) \wedge e_j) \vee \bigvee_{j=i+1}^{n-1}(\bigwedge_{k=1}^{j}(\sim d_k(a)) \wedge e_j) =$$

$$= \bigvee_{j=1}^{i}(e_{n-1} \wedge e_j) \vee \bigvee_{j=i+1}^{n-1}(\sim d_j(a)) \wedge e_j) =$$

$$= e_i \vee \sim d_{i+1}(a).$$

(j) $e_i \Rightarrow e_j = \sup\{c | e_i \wedge c \leq e_j\} = \begin{cases} e_{n-1}, & i \leq j \\ e_j, & i > j \end{cases}$, за $i, j = 0,1, \dots, n-1$;

(k) Нека $e_{i+1} \leq d_j(a) \vee e_i$ важи за некое i, $0 \leq i \leq n+1$. Од ова неравенство ,од (d) и од (p_1), имаме $d_{i+1}(e_{i+1}) \leq d_{i+1}(d_j(a)) \vee d_{i+1}(e_i)$; од последното и од (p_5) и (p_6), ќе следува $1 \leq d_j(a) \vee 0$, односно, $1 \leq d_j(a)$, па $1 = d_j(a)$.

<u>Пример 4.2</u>: (*n-елементна алгебра на Post*): Нека $P_n = \{e_0, e_1, \dots, e_{n-1}\}$, $n \geq 2$, $e_i \neq e_j$, за $i \neq j$. Без губење на општоста може да се земе дека $e_i = i$. Значи $P_n = \{0,1, \dots, n-1\}$; елементите $n-1$ и 0 се единицата и нулата на алгебрата, соодветно. Операциите се дефинирани на следниот начин:

$$i \vee j = \max\{i, j\},$$

$$i \wedge j = \min\{i, j\},$$

$$i \Rightarrow j = \begin{cases} n-1, & i \leq j \\ j, & i > j \end{cases},$$

$$\sim i = \begin{cases} n-1, & i = 0 \\ 0, & i > 0 \end{cases},$$

$$d_i(j) = \begin{cases} n-1, & i \leq j \\ 0, & i > j \end{cases}.$$

Се проверува дека со ова е зададена n-вредносна алгебра на Post, која, поради тоа што носачот има n елементи, се нарекува ***n-елементна алгебра на Post***.

Да забележиме дека, ако се нормализира множеството вистинитосни вредности во горниот пример, ќе се добие множеството V_n, а операциите $\vee$, $\wedge$, $\Rightarrow$ и $\sim$ што притоа се добиваат се совпаѓаат со соодветните опарации од n-вредносната логика на Gödel дефинирана во глава 3.

Теорема 4.7: Секоја n-елементна алгебра на Post е функционално комплетна.

Доказ: Ќе покажеме со индукција по $k = 0, 1, 2, \ldots$ дека секоја функција $f: P_n^k \to P_n$ може да се претстави како композиција од $\vee,\ \wedge,\ \Rightarrow,\ \sim,\ 1, d_1, d_2, \ldots, d_{n-1}, e_0, e_1, \ldots, e_{n-1}$.

Тврдењето е точно за $k = 0$, бидејќи $e_0, e_1, \ldots, e_{n-1}$ се единствените константни функции во P_n. Нека m е фиксно. Да претпоставиме дека тврдењето е точно за секое $k, 1 \leq k \leq m$, т.е. дека секоја $k -$ арна функција $g: P_n^k \to P_n$ може да се претстави преку константите и операциите на алгебрата.

Нека $f: P_n^{m+1} \to P_n$. Дефинираме:

$$J_i(x) = d_i(x) \wedge\sim d_{i+1}(x), \text{ за } i = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Значи,

$$J_0(x) = \sim d_1(x),$$
$$J_1(x) = d_1(x) \wedge\sim d_2(x),$$
$$\ldots$$
$$J_{n-1}(x) = d_{n-1}(x).$$

Тогаш, јасно:

$$J_i(e_j) = \begin{cases} e_{n-1}, & \text{ако } i = j \\ e_0, & \text{ако } i \neq j. \end{cases}$$

Сега, за да се комплетира индукцијата доволен е записот:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_m, x_{m+1}) = \bigvee_0^{n-1}(f(x_1, x_2, \ldots, x_m, e_i) \wedge J_i(x_{m+1})).$$

Навистина, за секое $j = 0, \ldots, n-1$, ако $x_{m+1} = e_j$, тогаш единствениот член на сумата на десната страна од последното равенство што е различен од e_0 е $f(x_1, x_2, \ldots, x_m, e_j) \wedge J_j(e_j) = f(x_1, x_2, \ldots, x_m, x_{m+1})$.

<u>Дефиниција 4.5</u>: Нека $P = (P, \vee, \wedge, \Rightarrow, \sim, 1, d_1, d_2, \dots, d_{n-1}, e_0, e_1, \dots, e_{n-1})$ е n-вредносна алгебра на Post. ***Филтер*** F во P е подмножество на P, такво што:

- $1 \in F$;
- ако $a \in F$ и $a \Rightarrow b \in F$, тогаш и $b \in F$.

Лесно се покажува дека за секој филтер важат и следните својства, што понатаму ќе ги подразбираме:

- ако $a \leq b$ и $a \in F$, и $b \in F$;
- ако $b \in F$, тогаш $a \Rightarrow b \in F$;
- ако $a, b \in F$, тогаш $a \wedge b \in F$;

Еден филтер е ***D-филтер*** кога од $a \in F$ следува $d_i(a) \in F$, за $i = 1, \dots, n-1$. Еден ***D-филтер*** F се нарекува:

- ***правилен***, ако постои $a \in P$ такво што $a \notin F$;
- ***иредуцибилен***, ако е *правилен* и ако не е пресек на било кои два правилни филтри различни од него;
- ***прост***, ако е *правилен* и ако за било кои $a, b \in P$, условот $a \vee b \in F$ повлекува дека $a \in F$ или $b \in F$;
- ***максимален***, ако е *правилен* и ако не се содржи во различен од него правилен *D-филтер*.

Нека $a \in P$. Множеството

$$F_a = \{x \in P | d_{n-1}(a) \leq x\}$$

е D-филтер. (Јасно, $1 \in F_a$. Ако $x \in F_a$ и $x \Rightarrow y \in F_a$, ќе имаме $d_{n-1}(a) \leq x$ и $d_{n-1}(a) \leq x \Rightarrow y$, па $d_{n-1}(a) \leq x \wedge (x \Rightarrow y)$; сега, бидејќи $x \Rightarrow y = \sup\{c | x \wedge c \leq y\}$, имаме $x \wedge (x \Rightarrow y) \leq y$, па $d_{n-1}(a) \leq y$ и $y \in F_a$. Значи F_a е филтер. Нека $x \in F_a$; значи $d_{n-1}(a) \leq x$; од ова и од лема 4.6(d) ќе следува $d_i(d_{n-1}(a)) \leq d_i(x)$, за секое $i = 1, 2, \dots, n-1$; од последното и од (p_5), имаме $d_{n-1}(a) \leq d_i(x)$, па $d_i(x) \in F_a$, и F_a е D-филтер).

F_a се нарекува *D-филтер генериран од a*. Секој филтер од ваков облик се вика ***главен филтер***.

Нека A е произволно подмножество од P. Се проверува дека множеството од сите елементи $x \in P$, за кои постои низа $a_1, a_2, \dots, a_m \in A$ така што $\bigwedge_{i=1}^{m} d_{n-1}(a_i) \leq x$ е D-филтер. Го викаме *D-филтер генериран од множеството A*.

Нека $a \in P$ е фиксен елемент и нека F е D-филтер во алгебра на Post P. Множеството од сите елементи $x \in P$ за кои постои елемент $c \in F$, така што $d_{n-1}(a) \wedge d_{n-1}(c) \leq x$ е D-филтер кој се нарекува *D-филтер генериран од елемент a и D-филтер F.*

Лема 4.8: За секој D-филтер F во n-вредносна алгебра на Post P, следните тврдења се еквивалентни:

(a) F е максимален D-филтер;
(b) F е иредуцибилен D-филтер;
(c) F е прост D-филтер;
(d) за секое $a \in P$, или $d_{n-1}(a) \in F$ или $\sim d_{n-1}(a) \in F$.

Доказ: (a) повлекува (b): Нека F не е иредуцибилен, односно нека постојат правилни D-филтри F_1 и F_2, такви што $F \neq F_1$, $F \neq F_2$, и $F = F_1 \cap F_2$. Тогаш $F \subseteq F_1, F_2$, па F не е максимален.

(b) повлекува (c): Нека F е правилен D-филтер што не е прост. Тогаш постојат $a, b \in F$, такви што $a \vee b \in F$, $a \notin F$ и $b \notin F$. Нека F_1 е D-филтерот генериран од F и од a, и нека F_2 е D-филтерот генериран од F и од b. Јасно, $F \subseteq F_1 \cap F_2$. Нека $x \in F_1 \cap F_2$. Тогаш, по дефиниција ќе следува дека $d_{n-1}(a) \wedge d_{n-1}(c_1) \leq x$ и $d_{n-1}(b) \wedge d_{n-1}(c_2) \leq x$, за некои $c_1, c_2 \in F$. Нека $c = c_1 \wedge c_2$. Според Лема 4.6 (d), ќе имаме $d_{n-1}(c) \leq d_{n-1}(c_1)$ и $d_{n-1}(c) \leq d_{n-1}(c_2)$. Значи, $d_{n-1}(a) \wedge d_{n-1}(c) \leq x$ и $d_{n-1}(b) \wedge d_{n-1}(c) \leq x$, па, заради еден од дистрибутивните закони, ќе следува дека $(d_{n-1}(a) \vee d_{n-1}(b)) \wedge d_{n-1}(c) \leq x$. Сега, со примена на (p_1), добиваме $d_{n-1}(a \vee b) \wedge d_{n-1}(c) \leq x$. Бидејќи $a \vee b,\ c \in F$, ќе имаме дека $d_{n-1}(a \vee b)$, $d_{n-1}(c) \in F$, па така и $d_{n-1}(a \vee b) \wedge d_{n-1}(c) \in F$, од што ќе следува дека $x \in F$. Значи, $F_1 \cap F_2 \subseteq F$, со што е докажано дека F не е иредуцибилен.

(c) повлекува (d): Нека F е прост D-филтер. Бидејќи P е псевдо-Булова алгебра, по дефиниција имаме дека $\sim d_{n-1}(a) = d_{n-1}(a) \Rightarrow 0$. Тогаш, бидејќи F е правилен, за секој $a \in P$, најмногу еден од елементите $d_{n-1}(a)$ и $\sim d_{n-1}(a)$ ќе припаѓа во F. Од друга страна, заради (p_8) и (p_5), за секој $a \in P$, ќе важи $d_{n-1}(a) \vee \sim d_{n-1}(a) \in F$, па, бидејќи F е прост D-филтер, барем еден од елементите $d_{n-1}(a)$ и $\sim d_{n-1}(a)$ ќе припаѓа во F, со што е комплетиран доказот на (d).

(d) повлекува (a): Нека важи (d). Ако $a \notin F$, тогаш, според лема 4.6 (e), и $d_{n-1}(a) \notin F$, па значи $\sim d_{n-1}(a) \in F$. Ова повлекува дека D-филтерот генериран од a и од F не е правилен, па F е максимален D-филтер.

Лема 4.9: Ако F_0 е D-филтер во алгебра на Post од ред n, и ако $d_{n-1}(a) \notin F_0$, тогаш постои иредуцибилен D-филтер F^* таков што $F_0 \subseteq F^*$ и $a \notin F^*$.

Доказ: Нека $\mathcal{F}$ е подреденото множество што се состои од сите D-филтри во алгебрата на Post од ред n кои го содржат филтерот F_0 и не го содржат елементот a. Јасно е дека секоја верига во $\mathcal{F}$ е мајорирана со унијата на D-филтрите што припаѓаат во неа. Па, според лема на Цорн, во $\mathcal{F}$ постои максимален елемент F^*. Јасно, $F_0 \subseteq F^*$ и $a \notin F^*$. Да претпоставиме дека постојат правилни филтри F_1 и F_2, такви што $F^* = F_1 \cap F_2$. Тогаш $F_0 \subseteq F_1$, $F_0 \subseteq F_2$ и $a \notin F_1$ или $a \notin F_2$. Значи, $F_1 \in \mathcal{F}$ или $F_2 \in \mathcal{F}$, па бидејќи F^*е максимален елемент во $\mathcal{F}$, ќе следува дека $F^* = F_1$ или $F^* = F_2$. Значи F^* е иредуцибилен.

Нека F е D-филтер во алгебра на Post P од ред n. Дефинираме релација на следниот начин:

$$a \approx_F b \quad \text{ако и само ако} \quad a \Rightarrow b \in F \ \text{ и } \ b \Rightarrow a \in F.$$

Теорема 4.10: Нека $P = (P, \vee, \wedge, \Rightarrow, \sim, 1, d_1, d_2, \dots, d_{n-1}, e_0, e_1, \dots, e_{n-1})$ е n-вредносна алгебра на Post, $n \geq 2$ и нека F е D-филтер во P. Тогаш релацијата $\approx_F$ е конгруенција во P; фактор алгебрата $P/\approx_F$, што ја означуваме со P/F, е n-вредносна алгебра на Post. Пресликувањето $h(a) = [a]$ е епиморфизам од P во P/F и F е јадрото на h. За секој елемент $a \in P$, важи $a \in F$ акко $a \approx_F 1$. Алгебрата P/F е дегенерирана ако и само ако F не е правилен.

Доказ: За секое $a \in P$, $a \Rightarrow a = 1 \in F$, па $a \approx_F a$, значи $\approx_F$ е рефлексивна; $\approx_F$ е симетрична по дефиниција; а од теорема 4.5 (b) и (a), ќе следува и транзитивноста на релацијата $\approx_F$.

Нека $a \approx_F b$ и $c \approx_F d$. Тогаш $a \Rightarrow b \in F$, $b \Rightarrow a \in F$, $c \Rightarrow d \in F$ и $d \Rightarrow c \in F$.

Со примена на дефинициите на операцијата $\Rightarrow$ и филтер, и на лема 4.2 (f), се покажува дека од $a \Rightarrow b \in F$ следува $a \wedge c \Rightarrow b \wedge c \in F$, од $c \Rightarrow d \in F$ следува $b \wedge c \Rightarrow b \wedge d \in F$, па, од транзитивност, ќе имаме $a \wedge c \Rightarrow b \wedge d \in F$. Слично се покажуваат и другите услови потребни за да се покаже согласноста на $\approx_F$ со операциите $\wedge$ и $\vee$.

За да ја покажеме согласноста на релацијата $\approx_F$ со операцијата $\Rightarrow$, најпрво ќе ги покажеме следните неравенства:

(11) $a \Rightarrow b \leq (b \Rightarrow c) \Rightarrow (a \Rightarrow c)$,

(12) $b \Rightarrow c \leq (a \Rightarrow b) \Rightarrow (a \Rightarrow c)$.

За доказ на (11), да забележиме дека од равенството (5) во теорема 4.5, ќе имаме: $b \leq (b \Rightarrow c) \Rightarrow c$. Со примена на (7) од теорема 4.5 на последното неравенство, добиваме: $(a \Rightarrow b) \Rightarrow b \leq (a \Rightarrow b) \Rightarrow \big((b \Rightarrow c) \Rightarrow c\big)$, па, според равенството (5), ќе имаме: $a \leq (a \Rightarrow b) \Rightarrow \big((b \Rightarrow c) \Rightarrow c\big)$. Сега, со примена на (4) и (9) од теорема 4.5, добиваме: $(a \Rightarrow b) \leq a \Rightarrow ((b \Rightarrow c) \Rightarrow c) = (b \Rightarrow c) \Rightarrow (a \Rightarrow c)$. (12) ќе следува од (11) и од (4).

Сега, од (11) и (12) ги добиваме следните неравенства:

$b \Rightarrow a \leq (a \Rightarrow c) \Rightarrow (b \Rightarrow c)$,

$c \Rightarrow d \leq (b \Rightarrow c) \Rightarrow (b \Rightarrow d)$,

од кои, бидејќи $b \Rightarrow a \in F$ и $c \Rightarrow d \in F$, ќе следува $(a \Rightarrow c) \Rightarrow (b \Rightarrow c) \in F$, и $(b \Rightarrow c) \Rightarrow (b \Rightarrow d) \in F$. Слично се покажува и дека $(b \Rightarrow d) \Rightarrow (b \Rightarrow c) \in F$ и $(b \Rightarrow c) \Rightarrow (a \Rightarrow c) \in F$, што ќе значи $(a \Rightarrow c) \approx_F (b \Rightarrow c)$ и $(b \Rightarrow d) \approx_F (b \Rightarrow c)$, од што, заради транзитивноста на $\approx_F$, ќе следува $(a \Rightarrow c) \approx_F (b \Rightarrow d)$.

Согласност со $\sim$ ќе следува од неравенството (2) во доказот на лема 4.6.

Од (p_3), и од дефиницијата за D-филтер, имаме:

$$d_{m-1}(a \Rightarrow b) = \bigwedge_{j=1}^{m-1}(d_j\,(a) \Rightarrow d_j(b)) \in F.$$

Значи, за секое $j = 1, .., m-1$, $d_j(a) \Rightarrow d_j(b) \in F$. Слично се покажува дека за секое $j = 1, .., m-1$, $d_j(b) \Rightarrow d_j(a) \in F$, што значи дека $d_j(a) \approx_F d_j(b)$. Покажавме дека $\approx_F$ е конгруенција во P.

Од теорема за изоморфизам, јасно е дека пресликувањето $h(a) = [a]$ е епиморфизам од P во *P/F* и F е јадрото на h, односно секој елемент $a \in P$, важи $a \in F$ акко $a \approx_F 1$.

Дека фактор алгебрата $P/\approx_F$, што ја означуваме со *P/F*, е n-вредносна алгебра на Post, следува од тоа што класата алгебри на Post е класа алгебри кои можат да се дефинираат со равенства, па е затворена во однос на хомоморфни слики, а *P/F*$= h(P)$.

Јасно е дека алгебрата *P/F* е дегенерирана ако и само ако *F* не е вистински.

<u>**Лема 4.11**</u>: Нека е дадена алгебра на Post P и нека B_C е множеството од сите елементи во P од облик $d_i(a)$, каде $i = 1, \dots, n-1$, $a \in P$. Тогаш множеството B_C е множество од сите комплементирани елементи во дистрибутивната мрежа $(P, \vee, \wedge, 1)$. Уште повеќе, ова множество е затворено за операциите $\vee$, $\wedge$, $\Rightarrow$, $\sim, 1$ и алгебрата $(B, \vee, \wedge, \Rightarrow, \sim, 1)$ е Булова алгебра.

<u>Доказ</u>: Бидејќи $(P, \vee, \wedge, \Rightarrow, \sim, 1)$ е псевдо-Булова алгебра, по дефиниција ќе имаме:

$a \wedge \sim a = 0$, за секое $a \in P$.

Специјално,

$d_i(a) \wedge \sim d_i(a) = 0$, за секое $i = 1, \dots, n-1$, и секој $a \in P$.

Од друга страна, заради (p_5) и (p_8), ќе имаме:

$d_i(a) \vee\sim d_i(a) = d_1(d_i(a)) \wedge\sim d_1(d_i(a)) = 1$, за секое $i = 1, \dots, n-1$, и секој $a \in P$. Покажавме дека секој елемент од B_C е комплементиран и дека комплементот на $d_i(a) \in B$ е $\sim d_i(a)$.

Сега, да претпоставиме дека a е произволен комплементиран елемент од P. Ќе покажеме најпрво дека во тој случај комплементот на a се совпаѓа со псевдо-комплементот на a, $\sim a$. Па, нека елеметот b е комплементот на a. Тогаш важат равенствата (b_1) и (b_2), па од нив и од (h_1) ќе следува:

$$b \leq a \Rightarrow 0 =\sim a,$$

од каде, заради (b_1) ќе имаме:

$$1 = a \vee b \leq a \vee\sim a,$$

што заедно со $a \wedge\sim a = 0$, значи дека $\sim a$ е комплемент на a, а од единственоста на комплементот, ќе имаме $b =\sim a$.

Понатаму, според (p_7) и (p_4) ќе имаме:

$$\sim a = (d_1(\sim a) \wedge e_1) \vee \dots \vee (d_{n-1}(\sim a) \wedge e_{n-1}) =$$
$$=\sim d_1(a) \wedge (e_1 \vee \dots \vee e_{n-1}) =\sim d_1(a).$$

Докажавме дека $\sim a =\sim d_1(a)$. Сега, бидејќи a и $d_1(a)$ се комплементирани елементи, ќе имаме:

$$a =\sim\sim a =\sim\sim d_1(a) = d_1(a),$$

од што следува дека секој комплементиран елемент a е од облик $d_1(a)$, па значи припаѓа во множеството B. Значи B_C е множеството од сите комплементирани елементи во алгебрата на Post P.

Ќе покажеме дека B_C е затворено во однос на операциите $\vee$, $\wedge$, $\sim$, $1, \Rightarrow$, што заедно со составот на B_C ќе повлекува дека B_C е Булова алгебра. Нека $d_i(a)$ и $d_j(b)$ се произволни елементи од B_C. Тогаш, заради (p_1), (p_2), и (p_5), ќе имаме:

$$d_i(a) \vee d_j(b) = d_i(a) \vee d_i(d_j(b)) = d_i(a \vee d_j(b)) \in B_C;$$
$$d_i(a) \wedge d_j(b) = d_i(a) \wedge d_i(d_j(b)) = d_i(a \wedge d_j(b)) \in B_C;$$
$$\sim d_i(a) =\sim d_1(d_i(a)) = d_j\big(\sim d_i(a)\big) \in B_C;$$
$$1 = d_i(e_{n-1}) \in B_C,$$

што значи дека множеството B е затворено во однос на операциите $\vee$, $\wedge, \sim$ и 1.

Заради својството $\sim a \vee b \leq a \Rightarrow b$, што се проверува дека важи, ќе имаме:

$$\sim d_i(a) \vee d_j(b) \leq d_i(a) \Rightarrow d_j(b).$$

Уште повеќе, од (h_1) е јасно дека:

$$d_i(a) \wedge (d_i(a) \Rightarrow d_j(b)) \leq d_j(b);$$

со додавање на $\sim d_i(a)$ на двете страни од ова неравенство, и со примена на $d_i(a) \vee\sim d_i(a) = 1$ и дистрибутивниот закон, се добива:

$$\sim d_i(a) \vee (d_i(a) \Rightarrow d_j(b)) \leq\sim d_i(a) \vee d_j(b);$$

значи $d_i(a) \Rightarrow d_j(b) \leq\sim d_i(a) \vee d_j(b)$. Покажавме дека:

$d_i(a) \Rightarrow d_j(b) =\sim d_i(a) \vee d_j(b)$,

од што ќе следува дека множеството B_C е затворено и во однос на операцијата $\Rightarrow$.

<u>Лема 4.12</u>: Ако F е прост D-филтер во недегенерирана алгебра на Post P од ред n, тогаш P/F е n-елементна алгебра на Post од ред n.

<u>Доказ</u>: Нека F е прост D-филтер во P. Бидејќи $d_{n-1}(e_j) = 0$ за $j < n-1$, заклучуваме дека $e_j \notin F$, за $j < n-1$. Значи, за сите $i, j = 0, \dots, n-1$, од $i \neq j$, ќе следува $[e_i] \neq [e_j]$. Навистина, ако $i < j$, тогаш, според лема 4.6 (j), $e_j \Rightarrow e_i = e_i \notin F$, т.е. e_i не е еквивалентно со e_j, односно $[e_i] \neq [e_j]$. Значи, алгебрата P/F содржи барем n различни елементи. Нека a е произволен елемент во алгебрата на Post P. Бидејќи, $F_0 = F \cap B_C$ е прост филтер во Буловата алгебра B_C од сите комплементирани елементи во P, заради лема 4.8 и (p_5), заклучуваме дека за секое $i = 0, \dots, n-1$, или $d_i(a) \in F_0$ или $\sim d_i(a) \in F_0$. Значи, или $d_i(a)$ или $\sim d_i(a)$ ќе припаѓа во F. Според лема 4.6 (c), ако $d_i(a) \in F$, тогаш за секој $j, 0 \leq j \leq i$, $d_j(a) \in F$. Според (c) и (3) од лема 4.6, $i \leq j$ повлекува $\sim d_i(a) \leq \sim d_j(a)$, што значи дека ако $\sim d_i(a) \in F$, тогаш, и за секој $j \geq i$, $\sim d_j(a) \in F$. Од последните разгледувања следува дека за секој елемент a во алгебрата на Post P, постои индекс $i = 0, \dots n-1$, таков што за секој $j, 0 \leq j \leq i, d_j(a) \in F$ и за секој $j \geq i$, $\sim d_j(a) \in F$. Ќе покажеме дека $[a] = [e_i]$.

Ако $i = 0$, тогаш, според (p_4), лема 4.6 (f) и (h), ќе имаме:

$d_{n-1}(a \Rightarrow e_0) = d_{n-1}(\sim a) =\sim d_1(a) \in F$, и

$d_{n-1}(e_0 \Rightarrow a) = d_{n-1}(e_{n-1}) = 1 \in F$,

па, според лема 4.4 (e), $a \Rightarrow e_0 \in F$ и $e_0 \Rightarrow a \in F$, односно $[a] = [e_0]$.

Нека $0 < i \leq n-1$. Тогаш, од (p_3), (p_6) и лема 4.4, ќе имаме:

$$\begin{aligned} d_{n-1}(a \Rightarrow e_i) &= \big(d_1(a) \Rightarrow d_1(e_i)\big) \wedge \dots \wedge (d_{n-1}(a) \Rightarrow d_{n-1}(e_i)) = \\ &= (d_1(a) \Rightarrow e_{n-1}) \wedge \dots \wedge (d_i(a) \Rightarrow e_{n-1}) \wedge \\ &\wedge (d_{i+1}(a) \Rightarrow e_0) \wedge \dots \wedge (d_{n-1}(a) \Rightarrow e_0) = \\ &=\sim d_{i+1}(a) \wedge \dots \wedge \sim d_{n-1}(a). \end{aligned}$$

Бидејќи $\sim d_{i+1}(a), \dots, \sim d_{n-1}(a) \in F$, добиваме $d_{n-1}(a \Rightarrow e_i) \in F$. Од друга страна, од (p_3), (p_6) и лема 4.6 ќе имаме и:

$$\begin{aligned} d_{n-1}(e_i \Rightarrow a) &= \big(d_1(e_i) \Rightarrow d_1(a)\big) \wedge \dots \wedge (d_{n-1}(e_i) \Rightarrow d_{n-1}(a)) = \\ &= \big(e_{n-1} \Rightarrow d_1(a)\big) \wedge \dots \wedge \big(e_{n-1} \Rightarrow d_i(a)\big) \wedge \\ &\wedge \big(e_0 \Rightarrow d_{i+1}(a)\big) \wedge \dots \wedge \big(e_0 \Rightarrow d_{n-1}(a)\big) = \\ &= d_1(a) \wedge \dots \wedge d_i(a). \end{aligned}$$

Бидејќи $d_1(a), \dots, d_i(a) \in F$, добиваме $d_{n-1}(e_i \Rightarrow a) \in F$.

Сега, според лема 4.6.(e), ќе имаме $a \Rightarrow e_i \in F$ и $e_i \Rightarrow a \in F$, односно $[a] = [e_i]$, за $0 < i \leq n-1$, со што е комплетиран доказот.

4.2 Формална теорија на n-вредносно исказно сметање

Нека (Ω, α) е операцискиот тип на алгебрите на Post. Нека $\mathcal{L}_n = (P, FP)$ формален јазик, каде P е множество променливи, а FP е множество формули (Ω-терми над P). Притоа, за симболите во Ω ќе ги употребуваме истите ознаки како во дефиниција 4.4.

Нека за секои $p, q, r \in FP$ следните формули во јазикот $\mathcal{L}_n$ се *аксиоми* (притоа, $p \Leftrightarrow q$ ќе го користиме како скратена ознака за формулата $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$):

(P1) $p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$

(P2) $\big(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)\big) \Rightarrow ((p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r))$

(P3) $p \Rightarrow p \vee q$

(P4) $q \Rightarrow p \vee q$

(P5) $(p \Rightarrow r) \Rightarrow ((q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \vee q \Rightarrow r))$

(P6) $p \wedge q \Rightarrow p$

(P7) $p \wedge q \Rightarrow q$

(P8) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow ((p \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow q \wedge r))$

(P9) $(p \Rightarrow \sim q) \Rightarrow (q \Rightarrow \sim p)$

(P10) $\sim (p \Rightarrow p) \Rightarrow q$

(P11) $d_i(p \vee q) \Leftrightarrow d_i(p) \vee d_i(q)$

(P12) $d_i(p \wedge q) \Leftrightarrow d_i(p) \wedge d_i(q)$

(P13) $d_i(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \bigwedge_{j=1}^{i} d_j\,(p) \Rightarrow d_j(q),\ i = 1, \dots, n-1$

(P14) $d_i(\sim p) \Leftrightarrow \sim d_1(p)$

(P15) $d_i\big(d_j(p)\big) \Leftrightarrow d_j(p),\ j = 0,1, \dots, n-1$

(P16) $d_i(e_j)$, за $i \leq j,\ \sim d_i\big(e_j\big)$, за $i > j, j = 0,1, \dots, n-1, i = 1, \dots, n-1$

(P17) $p \Leftrightarrow \bigvee_{i=1}^{n-1}(d_i\,(p) \wedge e_i)$

(P18) $d_1(p) \vee \sim d_1(p)$

Нека се дадени следните две *правила за изведување*:

(r_1) $\frac{p, p \Rightarrow q}{q}$ (*правило за раздвојување, modus ponens*)

(r_2) $\frac{p}{d_{n-1}(p)}$ (*правило за валидност на сврзникот* d_{n-1})

Горниот аксиоматски систем заедно со правилата за изведување, дефинира *функција за семантичко следство* што ќе ја означиме со C_n. Тогаш со $\wp_n = (\mathcal{L}_n, C_n)$ е дефинирана формална теорија на исказно сметање што ќе го викаме ***n*-*вредносно исказно сметање***.

Се покажува дека исказното сметање $\wp_n = (\mathcal{L}_n, C_n)$ е импликативно исказно сметање, односно, дека во врска со него се исполнети условите $(i_1) - (i_6)$ од дефиницијата за импликативно исказно сметање дадена во глава 2.

<u>Теорема 4.12</u>: Класата од сите адекватни алгебри на n-вредносното исказното сметање $\wp_n = (\mathcal{L}_n, C_n)$ се совпаѓа со класата од сите n-вредносни алгебри на Post.

<u>Доказ</u>: Нека алгебрата $A = (A, \vee, \wedge, \Rightarrow, \sim, 1, d_1, d_2, \dots, d_{n-1}, e_0, e_1, \dots, e_{n-1})$ е адекватна алгебра на исказното сметање $\wp_n = (\mathcal{L}_n, C_n)$. Тогаш, бидејќи секое вреднување $v: P \to A$, се проширува до хомоморфизам $v^*: FP \to A$, кој е согласен со аксиомите и правилата на $\wp_n$, и од импликативноста на теоријата $\wp_n = (\mathcal{L}_n, C_n)$, ќе имаме дека се исполнети (a)-(l) од теорема 4.5, па значи A е псевдо-Булова алгебра. Сега, бидејќи во секоја псевдо-Булова алгебра важи:

(1) $a \wedge b = 1$ ако и само ако $a = 1$ и $b = 1$,

заради ова, и аксиомите од $\wp_n = (\mathcal{L}_n, C_n)$ ќе следува дека важат $(p_1) - (p_8)$ од дефиниција 4.4, па A е n-вредносна алгебра на Post.

Обратно, ако $A = (A, \vee, \wedge, \Rightarrow, \sim, 1, d_1, d_2, \dots, d_{n-1}, e_0, e_1, \dots, e_{n-1})$ е n-вредносна алгебра на Post, тогаш, заради тоа што во неа важат (a)-(l) од теорема 4.5, за секое вреднување $v: P \to A$, ќе важи $v^*(t) = 1$, за секоја аксиома t од облик (P1)-(P10); потоа во A важат $(p_1) - (p_8)$ од дефиниција 4.4, па оттаму, од (1) во доказот на теорема 4.5, и од (1), ќе важи $v^*(t) = 1$ и за секоја аксиома t од облик (P11)-(P18); докажавме дека за алгебрата A важи условот (m_1) од дефиницијата за адекватна алгебра. За доказ на (m_2), да претпоставиме дека $v: P \to A$ е вреднување за кое $v^*(p) = 1$ и $v^*(p \Rightarrow q) = v^*(p) \Rightarrow v^*(q) = 1$. Значи, $v^*(p) = 1$, и $v^*(p) \Rightarrow v^*(q) = 1$, па заради (2) од теорема 4.5 ќе следува $v^*(q) = 1$. Слично, ако $v^*(p) = 1$, тогаш $v^*(d_{n-1}(p)) = d_{n-1}(v^*(p)) = d_{n-1}(1) = 1$, заради дефиниција 4.4 (p_6) и лема 4.6 (b). Условите (m_3) и (m_4) се, јасно, исполнети за секоја алгебра на Post. Значи, A е адекватна алгебра за $\wp_n = (\mathcal{L}_n, C_n)$.

Како последица од претходните теореми и од теоремите 2.2 и 2.3 од глава 2, важи следната теорема:

<u>Теорема 4.13</u>: Фактор алгебрата $FP/\approx$, каде релацијата $\approx$ е дефинирана со:

$a \approx b$ акко $a \Rightarrow b$ и $b \Rightarrow a$ се теореми во $\wp_n$ акко $a \Leftrightarrow b$ е теорема во $\wp_n$,

е слободна n-вредносна алгебра на Post генерирана од P.

Да забележиме дека од теорема 4.5 и дефиниција 4.4 следува дека секоја алгебра на Post е алгебра определена со равенства.

Ако сега, во согласност со терминологијата во глава 1, во множеството формули во јазикот $\mathcal{L}_n$, FP, дефинираме множество *основни равенства*, E, што ќе се состои од:

- равенства од облик $t \Leftrightarrow 1$, каде t е било која аксиома од $\wp_n = (\mathcal{L}_n, C_n)$, во која не се јавува симболот $\Leftrightarrow$; и

- аксиомите од $\wp_n = (\mathcal{L}_n, C_n)$ во кои се јавува симболот $\Leftrightarrow$,

тогаш, јасно, според теорема 4.5 и дефиниција 4.4, FP ќе биде алгебра на Post.

Сега, за релацијата $\approx$ на множеството FP дефинирана во теорема 4.13 се проверува дека ги задоволува условите за да биде релација што ќе ги карактеризира *изведените равенства* $\tilde{E}$ ($a \approx b$ акко $a \Leftrightarrow_E b$) па, според тоа теоремата 4.13 може да се разгледува и како специјален случај на теоремата 1.3 од глава 2.

<u>Теорема 4.14</u> (*Теорема за согласност и комплетност*) Нека $\wp_n = (\mathcal{L}_n, C_n)$ е n-вредносното исказно сметање, $\mathcal{L}_n = (P, FP)$ и нека $t \in FP$. Следните тврдења се еквивалентни:

(a) t е теорема;

(b) $v^*(t) = 1$ за секое вреднување $v: P \to P_n$, каде P_n е n-елементна алгебра на Post од ред n.

<u>Доказ</u>: Од (a) следува (b): Следува од теорема 4.12 и од теорема 2.1.

За доказ на обратното, да претпоставиме дека t не е теорема. Тогаш, за елементот $[t]$ од слободната алгебра на Post $FP/\approx$, според (4) од глава 2, ќе важи:

$[t] \neq 1,$

и бидејќи, заради лема 4.6(e),

$d_{n-1}([t]) \leq [t],$

ќе следува дека

$d_{n-1}([t]) \neq 1,$

каде 1 е единицата во $FP/\approx$.

Нека F_1 е D-филтерот во $FP/\approx$ што се состои само од 1. Тогаш, јасно,

$d_{n-1}([t]) \notin F_1,$

па, според лема 4.8 и лема 4.9, постои прост филтер F', таков што $[t] \notin F'$.

Според лема 4.11, фактор алгебрата $(FP/\approx)_{/F'}$ е n-елементна алгебра на Post од ред n. Нека $h: FP/\approx \to (FP/\approx)_{/F'}$ е индуцираниот епиморфизам. Бидејќи $[t] \notin F'$, заклучуваме, според теорема 4.10 дека $h([t])$ е различно од единицата на $(FP/\approx)_{/F'}$.

Нека v_0 е каноничното вреднување на P во $FP/\approx$ ($v_0(p) = [p]$, за секој $p \in P$). Тогаш, $h \circ v_0$ вреднување на P во $(FP/\approx)_{/F'}$ и притоа имаме:

$$(h \circ v_0)(t) = h\big(v_0^*(t)\big) = h([t]) \neq 1,$$

со што е покажано дека од (b) следува (a).

Глава 5: Повеќевредносни логики со (3,2)-операции

5.1 Дефиниција на (3,2)-операциите за конјункција и дисјункција

Нека X е непразно конечно множество (ќе го викаме *универзум*). Нека $A \subseteq X$ и нека $\chi_A: X \to \{0,1\}$ е карактеристичната функција на множеството A. Тогаш еден елемент $x \in X$ припаѓа во множеството A акко $\chi_A(x) = 1$, што значи дека множеството A е целосно определено со својата карактеристична функција. На овој начин природно се воспоставува биекција помеѓу партитивното множество на X, $\mathrm{P}(X)$, и множеството од сите функции од X во $\{0,1\}$, $\{0,1\}^X$, кој прераснува во изоморфизам помеѓу алгебарските структури од тип (2,2,1,0,0) (кои се Булови алгебри): $(\mathrm{P}(X), \cap, \cup, \overline{\ \ }, \emptyset, X)$, каде што операциите се пресек, унија, комплемент на множества, празно множество и универзално множество, соодветно, и $(\{0,1\}^X, \wedge, \vee, \sim 0,1)$, каде што операциите $\wedge$, $\vee$, $\sim$ се дефинирани со:

$$(\chi_A \wedge \chi_B)(x) = \min\,[\chi_A(x), \chi_B(x)],$$

$$(\chi_A \vee \chi_B)(x) = \max\,[\chi_A(x), \chi_B(x)],$$

$$(\sim \chi_A)(x) = 1 - \chi_A(x),$$

за секои $A, B \subseteq X$, и за секој $x \in X$.

Ако „$x \in A$“ го разгледуваме како исказ, тогаш $\chi_A(x)$ ќе биде неговата вистинитосна вредност (во класична смисла), па така, горниот изоморфизам ни дава: врска помеѓу подмножествата на даден универзум X и извесно множество класични искази во врска со елементите од X; аналогија на операциите пресек и унија на множества со конјункција и дисјункција на искази; како и соодветсво помеѓу празното множество и универзумот од една страна, и вистинитосните вредности 0 и 1, соодветно, од друга страна.

Ги разгледуваме векторско-вредносните операции на множеството $\mathrm{P}(X)$:

$$\cap_3^2\,(A,B,C) = (A \cap B \cap C, (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (A \cap C)),$$
$$\cup_3^2\,(A,B,C) = ((A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (A \cup C),\ A \cup B \cup C).$$

$(A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (A \cap C) = (A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (A \cup C)$ е множество што се наоѓа помеѓу пресекот и унијата на множествата A, B и C (во однос на инклузија на множества).

Нека a, b и c се вредности на карактеристичните функции на множествата A, B и C во фиксен елемент $x \in X$. Ако $\cup$ и $\cap$ во горните равенства ги замениме со аналогните на нив операции $\vee$ и $\wedge$, ги добиваме следните (3,2)-вредносни операции на множеството$\{0,1\}$:

$$\wedge_3^2\,(a,b,c) = (\min(a,b,c)\,, \max(\min(a,b)\,, \min(a,c)\,, \min(b,c))),$$
$$\vee_3^2\,(a,b,c) = (\min(\max(a,b)\,, \max(a,c)\,, \max(b,c))\,, \max(a,b,c)).$$

Операциите $\wedge_3^2$ и $\vee_3^2$ претставуваат вистинитосно-вредносни операции. Во досега разгледаните логики, се среќававме со унарни, бинарни вистинитосно-вредносни операции, и константи. Специјално, вистинитосните функции за исказните сврзници конјункција и дисјункција во сите разгледани случаи беа бинарни операции, односно операции кои од вистинитосните вредности на два или повеќе искази даваат една вредност, како вистинитост на конјункцијата, односно дисјункцијата на двата изкази. Горедефинираните операции $\wedge_3^2$ и $\vee_3^2$ нудат начин за определување на две вредности за конјункција и дисјункција на три искази. Тие две вредности (двете координати на вредностите на операциите $\wedge_3^2$ и $\vee_3^2$) можат да се толкуваат како долна и горна граница на вистинитост на конјункцијата и дисјункцијата на три искази, соодветно.

Вистинитосните табели за операциите $\wedge_3^2$ и $\vee_3^2$ се следните:

$\wedge_3^2$	0,0)	0,1)	1,0)	1,1)
(0,	(0,0)	(0,0)	(0,0)	(0,1)
(1,	(0,0)	(0,1)	(0,1)	(1,1)

$\vee_3^2$	0,0)	0,1)	1,0)	1,1)
(0,	(0,0)	(0,1)	(0,1)	(1,1)
(1,	(0,1)	(1,1)	(1,1)	(1,1)

Разгледувајќи ги горните табели, можеме да го дадеме следното толкување на вака дефинираните конјункција и дисјункција: ако во конјункција на три искази, двата се неточни, тогаш и конјункцијата е неточна, но ако два од исказите се точни, тогаш 0 и 1 се долна и горна вредност за вистинитоста на конјункцијата, што значи дека конјункцијата во овој случај „и не е толку неточна“. Слично и за дисјункцијата на три искази: ако само еден е точен, тогаш дисјункцијата „и не е толку точна“, а за дисјункцијата да е дефинитивно точна, потребно е барем два од исказите да се точни. Така, на пример, ако кажеме: „Ќе дојдам во 8:00, ќе го прочитам договорот и ќе го потпишам.“, а ако притоа сме дошле во 8:15, сме го прочитале и потпишале договорот, не сме излажале многу.

5.2 Повеќевредносни логики со (3,2) - операции

Операциите $\wedge_3^2$ и $\vee_3^2$ дефинирани во претходниот дел можат да се дефинираат и на било кое множество вистинитосни вредности V ($V \subseteq \mathbb{R}$), односно да се дефинираат како операции од $V^3 \to V^2$. Во тој случај втората компонента од операцијата $\wedge_3^2$, $\max(\min(a,b), \min(a,c), \min(b,c))$, односно првата компонента од операцијата $\vee_3^2$, $\min(\max(a,b), \max(a,c), \max(b,c))$, ќе ја примат како вредност средната по големина (во однос на стандарното подредување на реални броеви) од вредностите a, b и c.

И така, кога ќе имаме конјункција на три искази (во било каков контекст и за било кое множество вистинитосни вредности), најмалата од вистинитосните вредности на трите искази ќе се земе за степен на вистинитост на конјункција во построга смисла, а средната по големина вредност ќе се земе за вистинитосна вредност на конјункција во поширока смисла. Аналогно на ова, средната по големина вредност и најголемата вредност ќе се земат за вистинитосни вредности на дисјункцијата на трите искази во построга и поширока смисла, соодветно. (Ако меѓу a, b и c има само две различни вредности, тогаш за средна се зема онаа вредност што се повторува)

На пример, ако $V = \{0, ½, 1\}$, $\wedge_3^2$ и $\vee_3^2$ ќе бидат дадени со следните табели:

$\wedge_3^2$	0,0)	0, ½)	0,1)	½,0)	½,½)	½,1)	1,0)	1, ½)	1,1)
(0,	(0,0)	(0,0)	(0,0)	(0,0)	(0, ½)	(0, ½)	(0,0)	(0, ½)	(0,1)
(½,	(0,0)	(0, ½)	(0, ½)	(0, ½)	(0, ½)	(½,½)	(0, ½)	(½,½)	(½,1)
(1,	(0,0)	(0, ½)	(0,1)	(0, ½)	(½, ½)	(½,1)	(0,1)	(½,1)	(1,1)

$\vee_3^2$	0,0)	0, ½)	0,1)	½,0)	½,½)	½,1)	1,0)	1, ½)	1,1)
(0,	(0,0)	(0, ½)	(0,1)	(0, ½)	(½,½)	(½,1)	(0,1)	(½,1)	(1,1)
(½,	(0, ½)	(½,½)	(½,1)	(½, ½)	(½,½)	(½,1)	(½,1)	(½,1)	(1,1)
(1,	(0,0)	(½,1)	(1,1)	(½,1)	(½,1)	(½,1)	(1,1)	(1,1)	(1,1)

Специјално, овие операции можат да се дефинираат на единечниот интервал, како операции од $[0,1]^3 \to [0,1]^2$, заради контекстот на фази множествата образложен во наредниот дел.

Додатно може да се дефинира и унарна операција на V што ќе го интерпретира сврзникот негација. Под претпоставка дека множеството V тоа го дозволува, оваа операција $\sim: V \to V$ ќе ја дефинираме со:

$\sim a = 1 - a,$

каде $-$ е операцијата одземање на реални броеви. Под претпоставка дека $1 \in V$, матрицата:

$M_3^2 = (V, \{1\}, \sim, \wedge_3^2, \vee_3^2),$

може да претставува минимална матрица за *повеќевредносна логика со (3,2) – операции.*

5.3 Стандардни фази логики со (3,2) - операции

Дефиниција 5.1: Нека X е множество и $\mu_A: X \to [0,1]$ пресликување. Тогаш парот (X, μ_A) го викаме ***фази множество*** на ***универзум*** X, и го означуваме со:

$A = \{(x, \mu_A) | \ x \in X\}.$

Пресликувањето μ_A го викаме ***функција на припадност*** во A; а за секој $x \in X$, $\mu_A(x)$ претставува ***степен на припадност*** на x во A.

Дефиниција 5.2: Нека A и B се две фази множества на даден универзум X. ***Стандарден пресек, стандардна унија и стандарден комплемент*** на фази множествата A и B се дефинираат како фази множества на универзумот X, со функции на припадност $\mu_{A\cap B}$, $\mu_{A\cup B}$ и $\mu_{\bar{A}}$, соодветно, дадени со:

$\mu_{A\cap B}(x) = \min\,[\mu_A(x), \mu_B(x)],$

$\mu_{A\cup B}(x) = \max\,[\mu_A(x), \mu_B(x)],$

$\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x).$

Ако A е фази множество (*фази подмножество*) на даден универзум X, тогаш улогата на карактеристичната функција кај обичните, класични множества (подмножества на X), ја презема функцијата на припадност во множеството A, μ_A. Сега, ако ги побараме структурите аналогни на Буловите алгебри од делот 5.1 во случајот на фази множества, ќе ги добиеме следните структури: $(\mathcal{F}(X), \cap, \cup, \bar{\ }, \emptyset, X)$, каде што $\mathcal{F}(X)$ е множеството од сите фази множества на универзумот X, $\cap$, $\cup$, $\bar{\ }$ се стандарден пресек, унија и комплемент на фази множества, $\emptyset$ е фази множество на X со константна функција на припадност со вредност 0, а X е фази множество на X со константна функција на припадност со вредност 1; и $([0,1]^X, \wedge, \vee, \sim 0, 1)$, каде $\wedge$, $\vee, \sim$ се операции во множеството функции на припадност, дефинирани исто како во случајот на карактеристични функции. Овие структури не само што се изоморфни, туку и наполно се совпаѓаат ако го поистоветиме поимот *фази множество* со поимот *функција на припадност во фази множество*.

Бидејќи степенот на припадност на еден елемент $x \in X$ во фази множеството A, $\mu_A(x)$, може да се разгледува како вистинитосна вредност на (фази) исказот „x припаѓа во A“, операциите $\wedge$, $\vee$, $\sim$ може да се разгледуваат како вистинитосно-вредносни операции на конјункција, дисјункција и негација на искази.

Значи, ако множеството [0,1] е множество вистинитосни вредности, ако 1 се земе за единствена назначена вредност, и ако операциите $\sim$, $\wedge_3^2$, $\vee_3^2$ се дефинирани со:

$$\sim a = 1 - a,$$

$$\wedge_3^2\,(a,b,c) = (\min(a,b,c)\,, \max(\min(a,b)\,, \min(a,c)\,, \min(b,c))),$$

$$\vee_3^2\,(a,b,c) = (\min(\max(a,b)\,, \max(a,c)\,, \max(b,c))\,, \max(a,b,c),$$

тогаш со следната матрица е дефинирана логика што може да се нарече *стандардна фази-логика со (3,2)-операции*:

$$M_3^2 = ([0,1], \{1\}, \sim, \wedge_3^2, \vee_3^2).$$

5.3 Својства на (3,2)-операциите $\wedge_3^2$, $\vee_3^2$. Дефиниција на (*n*,2)-операции

Операциите $\wedge_3^2$, $\vee_3^2$ дефинирани во претходните делови задоволуваат некои очигледни својства:

1. *Комутативност*.

Од комутативноста на операциите min и max се добива комутативност и на (3,2)-операциите $\wedge_3^2$ и $\vee_3^2$, односно:

$$\wedge_3^2\,(t_1, t_2, t_3) = \wedge_3^2\,(a,b,c),$$

$$\vee_3^2\,(t_1, t_2, t_3) = \vee_3^2\,(a,b,c),$$

каде t_1, t_2, t_3 е произволна пермутација на елементите од $\{a, b, c\}$.

2. *Асоцијативност*

Заради асоцијативноста, пак, на операциите min и max, се добива и асоцијативност на (3,2)-операциите $\wedge_3^2$ и $\vee_3^2$, односно:

$$\wedge_3^2 (\wedge_3^2 (a, b, c), d) = \wedge_3^2 \left(a, \wedge_3^2 (b, c, d)\right)$$
$$= (\min(a, b, c, d), \max(\min(a, b, c), \min(a, b, d), \min(a, c, d), \min(b, c, d)))$$

$$\vee_3^2 (\vee_3^2 (a, b, c), d) = \vee_3^2 \left(a, \vee_3^2 (b, c, d)\right)$$
$$= (\min(\max(a, b, c), \max(a, b, d), \max(a, c, d), \max(b, c, d)), \max(a, b, c, d))$$

3. *Неутрални елементи*

$$\wedge_3^2 (a, b, 0) = (0, \min(a, b))$$
$$\wedge_3^2 (a, 0,0) = (0,0)$$
$$\wedge_3^2 (a, b, 1) = (\min(a, b), \max(a, b))$$
$$\wedge_3^2 (a, 1,1) = (a, 1)$$

$$\vee_3^2 (a, b, 0) = \left(\min(a, b), \max(a, b)\right) = \wedge_3^2 (a, b, 1)$$
$$\vee_3^2 (a, 0,0) = (0, a)$$
$$\vee_3^2 (a, b, 1) = (\max(a, b), 1)$$
$$\vee_3^2 (a, 1,1) = (1,1)$$

$$\vee_3^2 (a, 0,1) = (a, 1)$$
$$\wedge_3^2 (a, 0,1) = (0, a)$$

4. *Идемпотентност*

$$\wedge_3^2 (a, a, b) = (\min(a, b), a)$$
$$\wedge_3^2 (a, a, a) = (a, a)$$

$$\vee_3^2 (a, a, b) = (a, \max(a, b))$$
$$\vee_3^2 (a, a, a) = (a, a)$$

5. *Ослабена дистрибутивност*

$$\wedge_3^2 \left(a, \vee_3^2 (a, b, c)\right) = (\min(a, \max(b, c)), \max(a, \min(b, c))) =$$
$$= \vee_3^2 (a, \wedge_3^2 (a, b, c)) = \wedge_3^2 (\vee_3^2 (a, b, c), a)$$

$=\vee_3^2\,(\wedge_3^2\,(a,b,c),a).$

Заради асоцијативноста на операциите $\wedge_3^2$ и $\vee_3^2$, можеме да дефинираме и (4,2)-операции $\wedge_4^2$ и $\vee_4^2$ на следниот начин:

$$\wedge_4^2\,(a,b,c,d)=\wedge_3^2\,(\wedge_3^2\,(a,b,c),d)=\wedge_3^2\,\big(a,\wedge_3^2\,(b,c,d)\big)$$
$$=(\min(a,b,c,d)\,,\max(\min(a,b,c)\,,\min(a,b,d)\,,\min(a,c,d)\,,\min(b,c,d))),$$

$$\vee_4^2\,(a,b,c,d)=\vee_3^2\,(\vee_3^2\,(a,b,c),d)=\vee_3^2\,\big(a,\vee_3^2\,(b,c,d)\big)$$
$$=(\min(\max(a,b,c)\,,\max(a,b,d)\,,\max(a,c,d)\,,\max(b,c,d))\,,\max(a,b,c,d)).$$

Да забележиме дека во овој случај важи неравенството:

$$\max(\min(a,b,c)\,,\min(a,b,d)\,,\min(a,c,d)\,,\min(b,c,d))$$
$$\leq\min(\max(a,b,c)\,,\max(a,b,d)\,,\max(a,c,d)\,,\max(b,c,d)),$$

равенство во општ случај не важи.

Понатаму, (n,2)-операции, за $n\geq 4$, можат да се дефинираат рекурзивно:

$$\vee_n^2\,(a_1,\dots,a_n)=\vee_3^2\,(\vee_{n-1}^2\,(a_1,\dots,a_{n-1}),a_n)=\vee_3^2\,(a_1,\vee_{n-1}^2\,(a_2,\dots,a_n)).$$

$$\wedge_n^2\,(a_1,\dots,a_n)=\wedge_3^2\,(\wedge_{n-1}^2\,(a_1,\dots,a_{n-1}),a_n)=\wedge_3^2\,(a_1,\wedge_{n-1}^2\,(a_2,\dots,a_n)).$$

Па така, ако ставиме $\wedge_2^2$ и $\vee_2^2$ да бидат:

$$\wedge_2^2\,(a,b)=(\min(a,b)\,,\min(a,b)),$$
$$\vee_2^2\,(a,b)=(\max\,(a,b),\max\,(a,b)),$$

матрицата $M_n^2=([0,1],\{1\},\sim,\wedge_n^2,\vee_n^2)$, во која $n\geq 2$ е произволен природен број ни дава начин на пресметување на „двовредносна“ конјункција и дисјункција на произволен број фази искази.

5.4 (3,2)-операции дефинирани преку триаголна норма и конорма

Својствата на векторско-вредносните операции $\wedge_3^2$ и $\vee_3^2$ дадени во претходниот дел произлегуваат од соодветните својства на бинарните операции $\min$ и $\max$. Тоа не наведува во дефиницијата на $\wedge_3^2$ и $\vee_3^2$ наместо $\min$ и $\max$ да употребиме и друг пар бинарни операции со слични својства. Тоа може да бидат било кои бинарни вистинитосно-вредносни функции на конјункција и дисјункција (дефинирани во претходните делови), а може да биде и било кој пар од *триаголна норма* и *триаголна конорма*. Триаголна норма дефиниравме во глава 3, а триаголна конорма е дефинирана во следната дефиниција.

Дефиниција 5.3: ***Триаголна конорма (т-конорма)***, $\oplus$, претставува пресликување од $[0,1] \times [0,1]$ во $[0,1]$, такво што за секои $a, b, c \in [0,1]$ е важат следните услови:

(C1) $a \oplus b = b \oplus a$;	(*комутативност*)
(C2) $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$;	(*асоцијативност*)
(C3) $a \oplus 0 = a$;	(*неутрален елемент*)
(C4) $a \oplus b \leq a \oplus c$, ако $b \leq c$.	(*монотоност*)

Во некои случаи е позгодно да се користат имплицитни ознаки за т-нормите и конормите. Така, во следната теорема, која ја дава врската меѓу нормите и конормите, ќе користиме $T(a, b)$ наместо $a \otimes b$, и $C(a, b)$ наместо $a \oplus b$.

Теорема 5.1: Операцијата $C: [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ е т-конорма акко постои т-норма T, таква што за сите $(x, y) \in [0,1] \times [0,1]$ важи:

$$C(x, y) = 1 - T(1 - x, 1 - y).$$

Доказ: Ако T е т-норма, тогаш лесно се проверува дека опарацијата C дефинирана со горното равенство ги задоволува условите (C1)-(C4), па е т-конорма; обратно, ако C е т-конорма, тогаш ќе дефинираме операција $T: [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ на следниот начин:

$$T(x, y) = 1 - C(1 - x, 1 - y),$$

па лесно се проверува дека вака дефинираната операција е т-норма.

Ако триаголна норма T и триаголна конорма C се поврзани меѓусебно со едно (двете) равенства од претходната теорема, тогаш велиме дека се меѓусебно ***дуални***. Операциите $T_M = min$ и $C_M = max$ се триаголна норма и конорма, соодветно, кои се меѓусебно дуални. Други основни парови дуални т-норми и т-конорми се следните:

- Производ т-норма T_P и т-конорма C_P, дефинирани со:

$$T_P(a, b) = a \cdot b,$$

$C_P(a,b) = a + b - a \cdot b$;

- Lukasiewicz т-норма T_L и т-конорма C_L, дадени со:

$$T_L(a,b) = \max(0, a + b - 1),$$
$$C_L(a,b) = \min(a + b, 1);$$

- Драстичен производ T_D и драстична сума C_D, дадени со:

$$T_D(a,b) = \begin{cases} 0, & \text{ако } (a,b) \in [0,1)^2 \\ \min(a,b), & \text{инаку} \end{cases}$$

$$C_D(a,b) = \begin{cases} 1, & \text{ако } (a,b) \in (0,1]^2 \\ \max(a,b), & \text{инаку} \end{cases}.$$

Нека во дефиницијата на $\wedge_3^2$ и $\vee_3^2$ наместо min и max употребиме било кој пар меѓусебно дуални триаголна норма и конорма, T и C. Тогаш $\wedge_3^2$ и $\vee_3^2$ преминуваат во (3,2)-операциите T_3^2, C_3^2:$[0,1]^3 \to [0,1]^2$ дефинирани со:

$$T_3^2(a,b,c) = (T(a,b,c), C(T(a,b), T(a,c), T(b,c))),$$

$$C_3^2(a,b,c) = (T(C(a,b), C(a,c), C(b,c)), C(a,b,c)).$$

Да забележиме дека заради асоцијативноста на т-нормите и конормите, ќе сметаме дека тие се определени и како пресликувања со три аргументи, т.е., дека $T(a,b,c)$ и $C(a,b,c)$ се определени ($T(a,b,c) = T(T(a,b),c)$ и $C(a,b,c) = C(C(a,b),c)$).

Во додаток 2 се дадени табели со пробни вредности за операциите T_3^2 и C_3^2, кога T и C се Lukasiewicz т-норма и т-конорма, и кога T и C се производ т-норма и конорма. И во двете табели, со T1 и T2 се означени колоните со првата и втората кооордината на вредностите на T_3^2, а со C1 и C2 соодветните колони во врска со C_3^2. Од табелите може да се забележи дека (3,2)-конјункцијата и (3,2)-дисјункцијата на класични искази примаат класични вистинитосни вредности и се однесуваат како (3,2)-конјункција и дисјункција со min и max норма и конорма.

Во врска со T_3^2 и C_3^2 кога T и C се Lukasiewicz т-норма и конорма, може да се забележи следното: за двете вредности на T_3^2 да бидат различни од нула, потребно е барем еден од исказите што влегуваат во конјункцијата да има вистинитост поголема од 0,5; а за „строгата конјункција“, чијашто вредност е претставена во колона T1, да биде ненулта, потребно е збирот од вредностите на трите искази да е поголем од 2. На сличен начин, од табелата, а и од аналитичките изрази за T_3^2 и C_3^2 ако се имаат во предвид дефинициите на T_L и C_L, може да се заклучи дека потребно е да се премине некаков „праг на збирна вистинитост“ на сите три искази, или на два по два, за вредностите во Т1, Т2, С1 и С2 да преминат нула, да станат 1 и сл.

Кога во T_3^2 и C_3^2 , T и C се Производ т-норма и конорма, добиваме (3,2)-конјункција и дисјункција што поконтинуирано се менуваат споредено со претходниот случај, меѓутоа она што може да се забележи како можен недостаток при евентуална примена на овие операции, е дека строгата дисјункција прима помали вредности од слабата конјункција. Многу поприфатливи резултати имаме во колоната С2 кои се однесуваат на слабата дисјункција.

* * *

Ако унарната операција $\sim: [0,1] \to [0,1]$ која го определува сврзникот негација и е дефинирана со:

$$\sim a = 1 - a,$$

ја прошириме и ја дефинираме покомпонентно, како (n, n)-вредносна операција на $[0,1]$, за $n = 1,2,3$, тогаш ќе може да ја комбинираме со операциите T_3^2 и C_3^2, на следниот начин:

$$\begin{aligned}
&\sim T_3^2(a,b,c) =\sim \Big(T(a,b,c),\ C\big(T(a,b),T(b,c),T(a,c)\big)\Big) = \\
&= (\sim T(a,b,c), \sim C\big(T(a,b),T(b,c),T(a,c)\big)) = \\
&= (1 - T(a,b,c), 1 - C\big(T(a,b),T(b,c),T(a,c)\big) = \\
&= (C(1-a,1-b,1-c),\ T(1-T(a,b),1-T(b,c),1-T(a,c)) = \\
&= (C(1-a,1-b,1-c), \\
&\qquad T(C(1-a,1-b),C(1-b,1-c),C(1-a,1-c))) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (*)
\end{aligned}$$

Ако ги воведеме ознаките:

$$\bar{T}_3^2(a,b,c) = (C\big(T(a,b),T(b,c),T(a,c)\big),\ T(a,b,c)),$$

$$\bar{C}_3^2(a,b,c) = (C(a,b,c),\ T(C(a,b),C(b,c),C(a,c))),$$

тогаш од (*) добиваме:

$$\sim (T_3^2(a,b,c)) = \bar{C}_3^2(1-a,1-b,1-c) = \bar{C}_3^2(\sim a, \sim b, \sim c) = \bar{C}_3^2(\sim (a,b,c))$$

или: $\quad \sim T_3^2 \sim (a,b,c) = \bar{C}_3^2(a,b,c).$

Слично се добива и:

$\sim C_3^2 \sim (a,b,c) = \overline{T}_3^2(a,b,c).$

Равенствата:

$$\sim (T_3^2(a,b,c)) = \overline{C}_3^2(\sim (a,b,c)),$$
$$\sim (C_3^2(a,b,c)) = \overline{T}_3^2(\sim (a,b,c)),$$

можат да се сметаат за аналогни на De Morgan-овите закони од класичната логика. Со соодветна замена на (3,2)-операциите, матрицата M_3^2 сега преминува во:

$$M(T,C) = ([0,1],\{1\},\sim,T_3^2,C_3^2).$$

5.4 Повеќевредносни логики со (3,2)-операции и импликација

Логичките матрици дефинирани во претходните делови од оваа глава, би можеле да се дополнат со дефинирање на импликација. Ќе дефинираме две операции за импликација на искази: првата ќе биде операција за импликација со два искази во претпоставка и еден во заклучок; а втората, операција за импликација со еден исказ во претпоставка и два во заклучок. И двете операции ќе ги дефинираме како (3,1)-операции:

$$(a,b) \Rightarrow_2^1 c = \begin{cases} \min(a,b), & \text{ако } \min(a,b) \le c \\ c, & \text{ако } \min(a,b) > c \end{cases},$$

$$a \Rightarrow_1^2 (b,c) = \begin{cases} a, & \text{ако } a \le \max(b,c) \\ \max(b,c), & \text{ако } a > \max(b,c) \end{cases}.$$

Или, ако min и max се заменат со произволна т-норма и т-конорма, се добиваат *општи импликации* $\Rightarrow_1^2$ и $\Rightarrow_2^1$:

$$\Rightarrow_2^1 (a,b,c) = \begin{cases} T(a,b), & \text{ако } T(a,b) \le c \\ c, & \text{ако } T(a,b) > c \end{cases},$$

$$\Rightarrow_1^2 (a,b,c) = \begin{cases} a, & \text{ако } a \le C(b,c) \\ C(b,c), & \text{ако } a > C(b,c) \end{cases}.$$

Значи, ако T и C се произволна т-норма и т-конорма, соодветно, тогаш матрицата:

$$M(T,C,i) = ([0,1],\{1\},\sim,T_3^2,C_3^2,\Rightarrow_1^2,\Rightarrow_2^1),$$

каде што T_3^2, C_3^2 се дефинирани со (3,2)-операциите за конјункција и дисјункција на три искази дефинирани преку дуален пар на т-норма и конорма, $\sim$ е претходно дефинираната негација како (n, n)-вредносна операција на $[0,1]$, за $n = 1,2,3,..$, а $\Rightarrow_1^2, \Rightarrow_2^1$ се општите операции за импликации дефинирани за истиот дуален пар T и C, ќе претставува минимална логичка матрица за фази логика со (3,2)-операции, негација и импликација.

Иако во горната матрица множеството [0,1] е земено за множество вистинитосни вредности, а 1 за единствена назначена вредност, поради (3,2)-операциите во матрицата, ќе сметаме дека вистинитосните вредности можат да бидат и парови од $[0,1] \times [0,1]$, а парот (1,1) исто така ќе го сметаме за назначена вредност. Со воведување на оваа измена во претходно дадените дефиниции за семантичко следство и тавтологија, тие би биле природно применети и во овој случај.

Додаток 1:

Доказ на дел од теоремите во Лема 3.1

(f) $\vdash \sim t \Rightarrow (t \Rightarrow s)$

1. $\sim t \Rightarrow (\sim s \Rightarrow \sim t)$ (L1)
2. $(\sim s \Rightarrow \sim t) \Rightarrow (t \Rightarrow s)$ (L3)
3. $\sim t \Rightarrow (t \Rightarrow s)$ (L2, 1, 2 и MP)

(g) $\vdash t \Rightarrow t$

1. $t \Rightarrow \sim \sim t$ (k)
2. $\sim \sim t \Rightarrow t$ (j)
3. $t \Rightarrow t$ (L2, 1, 2 и MP)

(j) $\vdash \sim \sim t \Rightarrow t$

1. $\sim \sim t \Rightarrow (\sim t \Rightarrow \sim (t \Rightarrow \sim t))$ (f)
2. $\big(\sim t \Rightarrow \sim (t \Rightarrow \sim t)\big) \Rightarrow ((t \Rightarrow \sim t) \Rightarrow t)$ (L3)
3. $\sim \sim t \Rightarrow ((t \Rightarrow \sim t) \Rightarrow t)$ (L2, 1, 2 и MP)
4. $((t \Rightarrow \sim t) \Rightarrow t) \Rightarrow t$ (L3)
5. $\sim \sim t \Rightarrow t$ (L2, 3, 4 и MP)

(k) $\vdash t \Rightarrow \sim \sim t$

1. $\sim \sim \sim t \Rightarrow \sim t$ (j)
2. $t \Rightarrow \sim \sim t$ (L3, 1 и MP)

(m) $\vdash \sim (t \Rightarrow s) \Rightarrow t$

1. $(\sim t \Rightarrow (t \Rightarrow s)) \Rightarrow (\sim (t \Rightarrow s) \Rightarrow \sim\sim t)$ (l)
2. $\sim (t \Rightarrow s) \Rightarrow \sim\sim t$ (f, 1, MP)
3. $\sim (t \Rightarrow s) \Rightarrow t$ (3, j, L2 и MP)

(n) $\vdash \sim (t \Rightarrow s) \Rightarrow \sim s$

1. $s \Rightarrow (t \Rightarrow s)$ (L1)
2. $\big(s \Rightarrow (t \Rightarrow s)\big) \Rightarrow (\sim (t \Rightarrow s) \Rightarrow \sim s)$ (l)
3. $\sim (t \Rightarrow s) \Rightarrow \sim s$ (1, 2 и MP)

(3,2)-операции на конјункција и дисјункција со Производ норма и конорма

a	b	c	T(a,b)	T(b,c)	T(a,c)	C(T(a,b),T(b,c))	T 1	T2	C(a,b)	C(b,c)	C(a,c)	T(C(a,b),C(b,c))	C1	C2
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1
0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0	1
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0,9	0,9	0,9	0,81	0,81	0,81	0,9639	0,729	0,993141	0,99	0,99	0,99	0,9801	0,970299	0,999
0	0,9	0,9	0	0,81	0	0,81	0	0,81	0,9	0,99	0,9	0,891	0,8019	0,99
0,2	0,3	0,4	0,06	0,12	0,08	0,1728	0,024	0,238976	0,44	0,58	0,52	0,2552	0,132704	0,664
1	0,2	0,2	0,2	0,04	0,2	0,232	0,04	0,3856	1	0,36	1	0,36	0,36	1
0,5	0,5	0,5	0,25	0,25	0,25	0,4375	0,125	0,578125	0,75	0,75	0,75	0,5625	0,421875	0,875
0,5	0,5	0	0,25	0	0	0,25	0	0,25	0,75	0,5	0,5	0,375	0,1875	0,75
0,5	0	0	0	0	0	0	0	0	0,5	0	0,5	0	0	0,5
0,5	0,2	0,2	0,1	0,04	0,1	0,136	0,02	0,2224	0,6	0,36	0,6	0,216	0,1296	0,68
0,5	0,5	0,2	0,25	0,1	0,1	0,325	0,05	0,3925	0,75	0,6	0,6	0,45	0,27	0,8
0,1	0,2	0,3	0,02	0,06	0,03	0,0788	0,006	0,106436	0,28	0,44	0,37	0,1232	0,045584	0,496
0,1	0,6	0,8	0,06	0,48	0,08	0,5112	0,048	0,550304	0,64	0,92	0,82	0,5888	0,482816	0,928
0,1	0,7	1	0,07	0,7	0,1	0,721	0,07	0,7489	0,73	1	1	0,73	0,73	1
0	0,3	1	0	0,3	0	0,3	0	0,3	0,3	1	1	0,3	0,3	1
0	0,7	1	0	0,7	0	0,7	0	0,7	0,7	1	1	0,7	0,7	1
0,1	0,8	0,9	0,08	0,72	0,09	0,7424	0,072	0,765584	0,82	0,98	0,91	0,8036	0,731276	0,982
0,1	0,1	0,1	0,01	0,01	0,01	0,0199	0,001	0,029701	0,19	0,19	0,19	0,0361	0,006859	0,271
0,4	0,4	0,4	0,16	0,16	0,16	0,2944	0,064	0,407296	0,64	0,64	0,64	0,4096	0,262144	0,784
0,6	0,6	0,6	0,36	0,36	0,36	0,5904	0,216	0,737856	0,84	0,84	0,84	0,7056	0,592704	0,936
0,3	0,6	0,5	0,18	0,3	0,15	0,426	0,09	0,5121	0,72	0,8	0,65	0,576	0,3744	0,86

Литература:

[1] Avron A. (1991) *Natural 3-valued Logics-Characterization and Proof Theory*, The Journal of Symbolic Logic

[2] Bolc L. and Borowic P. (1992) *Many-Valued Logic*, *Theoretical Foundations*, Springer, Berlin

[3] Bonacina M. P. and Anantharaman S. (1989) *Automated Proofs in Lukasiewicz Logic*

[4] Dubois D. and Prade H. (1997) *Fuzzy Sets and Systems*: *Theory and Applications*, Academic Press, Inc., Orlando, FL.

[5] Gottwald, S., (2001) *A Treatise on Many-Valued Logics*, Research Studies Press, Baldock, Hertfordshire.

[6] Gottwald S. (2005) *Many-Valued Logic*, Preprint to Elsevier Science

[7] Goldberg H., Leblanc H. and Weaver G. (1974) *A Strong Completeness Theorem for 3-valued Logic*, Notre Dame Journal of Formal Logic, Volume XV, Number 2

[8] Johnstone P.T. (1987) *Notes on Logic and Set Theory*, Cambridge University Press

[9] Klir G.J. and Yuan B., (1995), *Fuzzy Set and Fuzzy logic Theory and Application*, Prentice Hall, New Jersey

[10] Klement P., Mesiar R. and Pap E. (2000), *Triangular Norms*, Kluwer Academic Publishers

[11] Kosko B., (1993) *Fuzzy Thinking: The New Science of Fuzzy Logic*, New York

[12] Mendelson E., (1964) *Introduction to Mathematical Logic*, Van Nestrand Reinhold

[13] Minari P., (2003) *A note on Lukasiewicz's three-valued logic*, Annali del Dipartimento di. Filosofia dell'Universita` di Firenze, pp. 163–190.

[14] Moraga C., *Basics of Fuzzy Logic*, lectures

[15] Rasiowa H., (1974) *An Algebraic Approach to Non-Classical Logics*, Studies in logic and the Foundation of Mathematics, Volume 78

[16] Setlur R. V., (1969), *Duality in Finite Many-Valued Logic*, Notre Dame Journal of Formal Logic Volume XII, Number 2, April 1971

[17] Stanford Encyclopedia of Philosophy, (2004) *Many-Valued Logic*

[18] Seselja, B. and Tepavcevic, A. (2001) *Weak Congruences in Universal Algebra,* Institute of Mathematics, Symbol, Novi Sad

[19] Смирнов Д. М., (1992), *Многообразиа Алгебр*, Новосибирск

[20] Wajsberg M., (1967) *Axiomatization of the 3-valued Propositional Calculus*, Polish Logic, Oxford University Press

[21] Čupona G., Celakoski N., Markovski S., Dimovski D., *Vector Valued Semigroups and Groups*, Macedonian Academy of Sciences and Arts

[22] Zadeh L. A., (1965) *Fuzzy Sets*, Information and Control, 8, 338-353.