Geometriai alapismeretek

A geometria alapfogalmai a tapasztalat útján absztrakcióval alakultak ki.

<u>Térelemek:</u> pont, egyenes, sík

<u>Térelemek kölcsönös helyzete, fontosabb alapesetek:</u>

Egy pont vagy illeszkedik egy másik térelemre, vagy nem..

Két egyenes metsző, ha pontosan egy közös pontjuk van, párhuzamosak, ha egy síkban vannak és nincs közös pontjuk, kitérőek, ha nincsenek egy síkban , egybeesőek, ha egynél több közös pontjuk van.

Két sík metsző, ha pontosan egy közös egyenesük van, párhuzamosak, ha nincs közös pontjuk. Két sík azonos, ha van legalább három nem egy egyenesre illeszkedő közös pontjuk.

Egy egyenes vagy illeszkedik egy síkra, vagy pontosan egy közös pontja van vele, vagy nincs közös pontja. Ez utóbbi esetben az egyenes párhuzamos a síkkal.

<u>Térelemek metrikus jellemzése</u>

Szögek, forgásszögek, szögek mérése

Egy pontból kiinduló két félegyenes a síkot két részre, két szögtartományra osztja.
Nevezetes szögek: Teljes szög, egyenes szög, derékszög.

Szöget úgy is származtathatunk, hogy az egy pontból kiinduló két félegyenes közül az egyiket rögzítetten tartjuk, míg a másikat forgatjuk. Az így létrehozott szögeket **forgásszögeknek** nevezzük. A forgatás két irányban történhet (pozitív, negatív) és egy teljes körülforgatás után folytatható.
A szögek nagyságát kétféle egységgel mérhetjük fokban vagy radiánban.

Szögpárok

Nevezetes szögpárok: Párhuzamos szárú szögek (egyállású szögek, váltószögek, csúcsszögek, mellékszögek, kiegészítő szögek), merőleges szárú szögek, pótszögek

Térelemek hajlásszöge

Két metsző egyenes hajlásszöge: Két metsző egyenes az általuk meghatározott síkot négy, két-két egybevágó szögtartományra bontja. A két egyenes hajlásszöge a derékszögnél nem nagyobb szög nagysága.
Két kitérő egyenes hajlásszöge: Két kitérő egyenes hajlásszögén azt a szöget értjük, amelyet egy tetszőleges ponton átmenő, velük párhuzamos egyenesek alkotnak.
Síkra merőleges egyenes definíciója: Egy egyenes és egy sík akkor merőleges egymásra, ha az egyenes merőleges a sík minden egyenesére.
Síkra merőleges egyenes tétele: Ha egy egyenes merőleges a sík két egymást metsző egyenesére, akkor merőleges a sík minden egyenesére, azaz merőleges a síkra.
Pont merőleges vetülete, egyenes merőleges vetülete egy síkra.
Egyenes és sík hajlásszöge: Ha egy egyenes metszi a síkot , de nem merőleges rá, akkor az egyenes és sík hajlásszöge az egyenes és síkra vetett merőleges vetületének hajlásszöge. Egy síknak és a vele párhuzamos (vagy rá illeszkedő) egyenesnek a hajlásszöge 0^o.

Két sík hajlásszöge: Két metsző sík hajlásszögének keresésénél a két sík metszésvonalának egy tetszőleges pontjában a két sík mindegyikén merőlegest állítunk a metszésvonalra. Az így kapott két egyenes hajlásszöge a két sík hajlásszöge. Két párhuzamos (vagy egybeeső) sík hajlásszöge 0^{o}.

Térelemek távolsága

Ha két alakzatnak van közös pontja, akkor távolságuk 0.
Két pont távolságán az őket összekötő szakasz hosszát értjük.
Pont és egyenes távolságának meghatározásához merőlegest állítunk a pontból a megadott egyenesre az általuk meghatározott síkban, s tekintjük az eredeti egyenes és a merőleges metszéspontját. Az adott pont és a metszéspont távolsága a pont és egyenes távolsága. (Egy pont és egy rá nem illeszkedő egyenes egyértelműen meghatároz egy síkot.)
Pont és sík távolságán a pontnak és a síkon lévő merőleges vetületének távolságát értjük. (d(P;S)). Erre a definícióra vezetjük vissza a síkkal párhuzamos egyenes, valamint két párhuzamos sík távolságát.
Két párhuzamos egyenes távolsága megegyezik ez egyik egyenes tetszőleges pontjának a másik egyenestől vett távolságával.
Két kitérő egyenes **normáltranszverzális-egyenesének** (egyértelmű**)** nevezzük azt az egyenest, mely metszi mindkét megadott egyenest, s merőleges rájuk. A két nevezett metszéspont közé eső szakasz a **normáltranszverzális-szakasz**.
Két kitérő egyenes távolsága normáltranszverzális-szakaszuk hossza.

Nevezetes ponthalmazok

Körvonal: A körvonal azon pontok összessége a síkban, melyek a sík egy adott pontjától egyenlő távolságra vannak.
Körlap: A körlap azon pontok összessége a síkban, melyek a sík egy megadott pontjától megadott távolságnál nem nagyobb távolságra vannak.
Gömbfelület: A gömbfelület azon pontok összessége a térben, melyek a tér egy megadott pontjától megadott távolságra vannak.
Gömbtest: A gömbtest azon pontok összessége a térben , melyek a tér egy megadott pontjától megadott távolságnál nem nagyobb távolságra vannak.
Parabola: A parabola azon pontok összessége a síkban, melyek a sík egy egyenesétől és egy rá nem illeszkedő pontjától egyenlő távolságra vannak.
Ellipszis: Az ellipszis azon pontok összessége a síkban , melyeknek a sík két megadott pontjától vett távolság összege egy (a két pont távolságánál nagyobb) előírt hosszúság.
Hiperbola: A hiperbola a sík azon pontjainak összessége a síkban, melyeknek a sík két megadott pontjától vett távolság eltérése egy (a két pont távolságánál kisebb) előírt távolság.

Síkidomokra vonatkozó ismeretek

Sokszögnek, vagy **sokszögtartománynak** nevezzük az egyszerű, zárt, töröttvonallal (sokszögvonal) határolt korlátos részét a síknak A határoló sokszögvonal oldalai és csúcsai a sokszög oldalai és csúcsai.

Háromszögek

A határoló sokszögvonalnak három oldala, három csúcsa van

Alapvető ismeretek:

Egy háromszöget három megfelelő adatával adhatunk meg. A háromszög oldalai és szögei közül a három meghatározó adatot négyféle módon választhatjuk ki. Egyértelműen megadhatjuk a háromszöget

- három oldalával,
- két oldalával és közbezárt szögével,
- egy oldalával és megadott helyzetű két szögével,
- két oldalával és a hosszabb oldallal szemközti szögével.

Háromszög-egyenlőtlenség: A háromszög bármely két oldalának összege nagyobb mint harmadik oldal
Oldalak és szögek közötti összefüggés: A háromszögben egyenlő oldalakkal szemben egyenlő szögek nagyobb oldallal szemben nagyobb szög van . A tétel megfordítása is igaz.
Tétel a háromszög belső szögeinek összegére vonatkozóan: A háromszög belső szögeinek összege 180^o

Geometriai transzformációk

Egybevágóság
Párhuzamos szelők tétele
Hasonlóság
Egy adott síkra vonatkozó merőleges vetítés (H-184)

A háromszög nevezetes vonalai és pontjai

Szögfelezők, beírható kör

Szögfelező-tétel: Háromszögben egy belső szög szögfelezője a szemközti oldalt a szomszédos oldalak arányában osztja két részre.

Oldalfelező merőlegesek, köré írt kör

Magasságvonalak, magasságpont

Súlyvonalak, súlypont

Középvonalak

Derékszögű háromszögekre vonatkozó ismeretek

Thalész tétele: Azon pontok összessége a síkban, melyekből egy adott szakasz derékszög alatt látszik, a szakasz mint átmérő fölé írt kör, kivéve a szakasz két végpontja.

Arányossági tételek a derékszögű háromszögben

Befogótétel: A derékszögű háromszögben az egyik befogó átfogóra vetett vetületének és az átfogónak a mértani közepe megegyezik a nevezett befogó hosszával.
Magasságtétel: Derékszögű háromszögben az átfogóhoz tartozó magasság megegyezik a befogók átfogóra vetett merőleges vetületeinek mértani közepével.
Pitagorasz tétele: Derékszögű háromszögben a két befogó négyzetének összege egyenlő az átfogó négyzetével.

Trigonometrikus összefüggések a háromszögben

Derékszögű háromszög trigonometriája

- Sinustétel
- Cosinustétel

Négyszögek és osztályozásuk

Négyszögnek négy oldala, négy csúcsa van. Belső szögeinek összege 360^o (két háromszögre bontható).

- **Trapézok** azok a négyszögek, melyeknek van két párhuzamos oldaluk
- **Paralelogrammák**nak két-két oldala párhuzamos
- **Deltoidok** azok a négyszögek, melyeknek két-két (átellenes) szomszédos oldala egyenlő hosszúságú

Paralelogrammák tulajdonságai:

- Szemközti szögei egyenlők
- Két szomszédos belső szögének összege 180^o
- Szemközti oldalai egyenlő hosszúak
- Két szemközti oldala párhuzamos és egyenlő hosszú
- Két átlója felezi egymást
- Van szimmetria középpontja

Tétel: Egy négyszög akkor és csak akkor paralelogramma, ha középpontosan szimmetrikus

- A paralelogramma **rombusz,** ha minden oldala egyenlő hosszú
- A paralelogramma **téglalap**, ha minden szöge egyenlő.
- A paralelogramma **négyzet**, ha minden szöge és minden oldala egyenlő hosszú.

Sokszögek, sokszögek átlói, sokszögek szögei

Konvex a sokszög (ponthalmaz), ha bármely két pontjával együtt annak összekötőszakaszát is tartalmazza.

Tétel: Az n oldalú konvex sokszög bármely csúcsából n-3 átló húzható és a sokszögnek összesen $\frac{n(n-3)}{2}$ átlója van.
Tétel: Az n-oldalú sokszög belső szögeinek összege $(n-2)180^0$
Konvex sokszög szögeinek mellékszögeit a **sokszög külső szögeinek** nevezzük.
Tétel: Konvex sokszög külső szögeinek összege 360°

Szabályos sokszögek

Egy síkbeli egyszerű sokszög akkor szabályos, ha minden oldala és minden szöge egyenlő. A szabályos sokszög szimmetrikus minden oldalának felezőmerőlegesére, valamint minden szögének szögfelezőjére. Minden szimmetria tengely egy ponton a szabályos sokszög középpontján halad át.
Szabályos háromszög, négyszög, hatszög szerkesztése.

Aranymetszés

Aranymetszésnek nevezzük egy szakasz kettéosztását úgy, hogy a kisebbik szelet aránya a nagyobbik szelethez megegyezik a nagyobbik szeletnek az egész szakaszhoz viszonyított arányával.
Az aranymetszést a képzőművészeti alkotásokban gyakran alkalmazzák. (**Kepler háromszögek:** Kepler háromszögnek nevezzük azt a derékszögű háromszöget, melynek átfogóját a hozzátartozó magasság talppontja aranymetszésben vágja ketté.)
Az aranymetszés szerepet játszik a szabályos tíz- illetve ötszög szerkesztésében.
Tétel: A szabályos tízszög oldala annak az aranymetszésnek kisebbik szelete, amelynek nagyobbik szelete a kör sugara. (H-163)
Tétel A kör sugarával és a körbe írt szabályos tízszög oldalával mint befogókkal szerkesztett derékszögű háromszög átfogója a körbe írt szabályos ötszög oldala.(H-164)
Szabályos ötszög szerkesztése.

Síkidomok területe

A terület fogalma (H-136)
A sokszög területmérésénél minden sokszöghöz hozzárendelünk egy pozitív számot az alábbi megállapodásokat betartva
- Az egybevágó sokszögekhez ugyanazt a számot rendeljük
- Ha egy sokszöget véges számú részre feldarabolunk, akkor az egyes részek területének összege az eredeti sokszög területével egyenlő.
- Egy egységnyinek mondjuk annak a négyzetnek a területét, melynek oldalai egy hosszúságegységek.

Tétel: Ha két téglalap egy-egy oldala egyenlő hosszúságú, akkor területük aránya egyenlő a másik oldalhosszuk arányával.(H-136)
Téglalap területe, paralelogramma területe, háromszögek területe, trapézok területe, sokszögek területe.(H 137-142)
A kör területe: A körbe és a kör köré szabályos sokszögeket írunk. A beírt sokszögek területe kisebb a kör területénél, az érintősokszögek területe nagyobb a kör területénél. Ha a szabályos sokszögek oldalszámát növeljük, akkor a beírt sokszögek területe növekszik, az érintősokszögek területe csökken. Belátható, hogy az oldalszámok minden határon túli növelésével a körbe írt szabályos sokszögek területe és a kör köré írt szabályos sokszögek

területe egyetlen számot fog közre. Ez a szám a kör területének mértékszáma. Az r sugarú kör területe $\pi \cdot r^2$ (H-148)

<u>Körcikk területe</u>: $t = \frac{ir}{2}$, ahol i jelöli a körcikkhez tartozó ívnek a hosszát. (H 148-149)

<u>Körszelet területe</u>: $t = \frac{ir - h(r - m)}{2}$, ahol r a kör sugara, i a körív, h a húr hossza és m a körszelet magassága.

<u>Tétel</u>: Egy sokszög területe egy síkra vetett merőleges vetületének területénél kisebb nem lehet, s azzal egyenlő is csak akkor, ha a sokszög síkja a vetületi síkkal egyező állású. (H-192)

<u>Tétel:</u> Egy T területű sokszög merőleges vetületének területe $T_v = T \cos\alpha$, ahol α az eredeti sokszög síkjának és a vetületi síknak a hajlásszöge. (H-324)

Testek térfogata, felszíne

Testek osztályozása

A geometriai test fogalma az anyagi tárgyak által elfoglalt térrész geometriai leírásából ered. **Testnek nevezzük** a térnek valamely zárt felület által határolt korlátos részét.
Véges sok sokszögtartomány által határolt korlátos részét a térnek **poliédernek** nevezzük. (síklapú test)
A **poliéder egyszerű**, ha közönséges, (összefüggő és minden csúcsánál az azt tartalmazó lapok egyetlen ciklust alkotnak) felülete egyszeresen összefüggő (összefüggő és minden a poliéderfelületen elhelyezkedő sokszögvonal részekre darabolja) és minden lapja egyszerű sokszög. (H-26)
A **poliéder konvex**, ha bármely két pontjával együtt azok összekötő szakaszát is tartalmazza
<u>Euler-tétel</u>: Ha egy konvex poliéder csúcsainak a számát c, éleinek számát e és lapjainak számát l jelöli, akkor l+c=e+2 (H-195)
<u>Tétel</u>: A poliéder egy lapjának területe a többi lap területének összegénél kisebb. (H-197)

Szabályos testnek nevezzük az olyan konvex poliédert, amelynek élei, élszögei és lapszögei egyenlők. Az élek és élszögek egyenlőségéből következik, hogy a szabályos test lapjai egybevágó szabályos sokszögek. Az élszögek és lapszögek egyenlőségéből következik, hogy a szabályos test szögletei egybevágó szabályos szögletek.
<u>Tétel:</u> Ötféle szabályos test van. Ezeknek az adatait a következő táblázat tartalmazza.
(n jelöli a határoló szabályos sokszögek oldalszámát, m az egy csúcsba befutó élek számát) (H-203)

	n	m	c	e	l
Tetraéder	3	3	4	6	4
Hexaéder	4	3	8	12	6
Oktaéder	3	4	6	12	8
Dodekaéder	5	3	20	30	12
Ikozaéder	3	5	12	30	20

Vannak testek, amelyeket síkidomok és görbült felületek vagy csak görbült felületek határolnak (henger, kúp, gömb,…) Ezek között vannak olyanok, amelyek görbült felületét a síkba kiteríthetjük (hengerpalást , kúppalást) és vannak olyanok, amelyek görbült felülete nem teríthető ki a síkba (gömbfelület).
Hengerszerű testek: Egy síkidom határolóvonalán önmagával párhuzamosan körülvezetünk egy olyan egyenest, amelynek a síkidom síkjával egyetlen közös pontja van. Az így kapott palástfelületet az eredeti síkidom síkjával és egy vele párhuzamos síkkal elmetszük. A körülhatárolt térrészt hengerszerű testnek nevezzük.
Hasábok, szabályos hasábok, téglatest, paralelepipedon, körhengerek (egyenes, ferde)
Kúpszerű testek: Kúpszerű testek azok, amelyeket megkaphatunk úgy, hogy egy síkidom határolóvonalán körülvezetünk egy egyenest, amely állandóan illeszkedik egy a síkidom síkján kívül lévő pontra (csúcspont)
Gúlák, szabályos gúlák, kúpok (egyenes, ferde)

Ha egy kúpszerű testet az alaplapjával párhuzamos síkkal két részre vágunk, akkor a csúcs felöli rész az eredeti testhez hasonló, az alaplap felöli testet **csonkakúpszerű** (csonkagúla) testnek nevezzük

Gömbfelület: Ha egy félkört valamelyik átmérője körül megforgatunk, akkor gömböt kapunk. A gömb minden síkmetszete kör.

A testek felszínét – testektől függően – különböző módon határozzuk meg.

- Ha a test poliéder, akkor felszíne a testet határoló sokszögek területének összege.
  Téglatestek felszíne, kocka felszíne, gúlák felszíne, csonkagúlák felszíne
- Ha a testet síkidomok és olyan görbült felületek határolják, amelyeket a síkba kiteríthetünk, akkor a felszín meghatározásakor a kiterített felület területét kell meghatároznunk.
  Egyenes hengerszerű testek felszíne, egyenes körkúpok felszíne, egyenes csonkakúpok felszíne
- Ha a testet olyan görbült felület határolja, amelyet síkba nem teríthetünk ki, akkor felszínének meghatározásához egyéb matematikai fogalmakra, eszközökre van szükség.
  Gömb felszíne

A térfogat fogalma (H-207)

Testek térfogatának mérésénél minden testhez hozzárendelünk egy pozitív számot úgy, hogy az alábbi megállapodások teljesüljenek:

- Egybevágó testekhez ugyanazt a számot rendeljük
- Ha egy testet véges sok részre feldarabolunk, akkor a részek térfogatának összege az eredeti test térfogatával egyezik meg.
- Térfogategységnek azt a kockát tekintjük, melynek élei egységnyi hosszúak.

Tétel: Ha két téglatest alaplapja egybevágó, akkor a magasságuk aránya egyenlő a térfogatuk arányával. (H-208)
Téglatestek térfogata, paralelepipedonok térfogata, háromoldalú hasábok térfogata, hasábok térfogata, hengerek térfogata. (H 209-210) (H-205)

A kúpszerű testek térfogatának meghatározásához szükség van az ún. Cavalieri-elvre.
Tétel (Cavalieri –elv) : Ha két test úgy helyezkedik el egy féltérben, hogy a féltér határsíkja által tartalmazott lapjaiknak és bármely a határsíkkal párhuzamos sík által kivágott metszeteiknek van területük, és ezek páronként egyenlők, hogy továbbá mindkét testhez található egy-egy egyenes, amellyel párhuzamos egyeneseknek a testhez tartozó pontjai (amennyiben ilyenek vannak) egy a féltér határsíkján végződő szakaszt alkotnak, akkor a két testnek van térfogata és térfogatuk egyenlő. (H-226)
Tetraéderek térfogata, gúlák térfogata, csonkagúlák térfogata, kúpok térfogata, csonkakúpok térfogata, gömb térfogata. (H 210-211, 229, 240)

Felhasznált irodalom

[1.] Hajnal Imre, Matematikai fogalmak, tételek (Középiskolások kézikönyve) Mozaik Oktatási Stúdió, Szeged 1994.

[2.] Hajós György, Bevezetés a geometriába, Tankönyvkiadó, Budapest 1966

[3.] H.S.M. Coxeter, A geometriák alapjai, Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1987

[4.] Matematikai kislexikon, Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1972