INDICE

PROLOGO

La preocupación del hombre por ver el futuro y de los científicos por formular teorías que sirvan de soporte a técnicas que faciliten ese conocimiento y prognosis, es casi una constante en la historia de la Humanidad.

El avance que supuso la difusión del conjunto de técnicas, hoy conocidas bajo la denominación genérica de *«investigación operativa»* (operacional research), con su aplicación eficaz a la resolución de complejos problemas en la II Guerra Mundial, llevó a un desarrollo que podemos calificar de «acelerado» en el estudio de teorías y en la profundización de investigaciones en este campo. Este proceso de investigación y descubrimiento ha estado informado por la preocupación de su aplicación. Científicos e investigadores se han movido en torno a estas ideas, pensando en la solución de problemas económicos y sin duda alguna, debido a este empuje y al avance de la tecnología, se están alcanzando logros muy importantes en el orden de la predicción, tanto en la macroeconomía como en la microeconomía.

El desarrollo de la informática ha hecho posible que los logros obtenidos por la investigación no quedaran reducidos a un mero diletantismo intelectual y hoy todos nos sorprendemos con los resultados que se están consiguiendo en aspectos tales como la ordenación y utilización de la información y de las predicciones racionales fundamentadas en ella.

En este campo de investigación y respondiendo al reto de la *praxis* empresarial, se desarrolla el libro que hoy tenemos el honor de presentar a los lectores. A nuestro juicio, se trata de la primera obra que expone con el rigor y la sencillez que caracteriza a sus autores, la aplicación de la teoría de los *subconjuntos borrosos* a la gestión empresarial. El libro ofrece, por tanto, interés no sólo en el campo de la ciencia, sino también en el de la empresa.

La obra de los profesores Kaufmann y Gil Aluja constituye, pues, una primera aportación al estudio de los problemas de la empresa a través de la teoría de los *subconjuntos borrosos*. Hasta ahora, la gestión de la empresa disponía de unos instrumentos matemáticos aptos para el desarrollo de modelos en el ámbito de la certeza y en ambiente de riesgo, sin embargo quedaban una gama de situaciones cuyo tratamiento no era posible como consecuencia de la falta de una técnica capaz de cuantificar situaciones regidas por la incertidumbre.

Se trata de un intento de acercar el análisis formal a la solución de los problemas que la realidad de la empresa plantea, realizado desde un punto de vista cuantitativo, a través de una técnicas que se intuyen muy fructíferas, dado el contexto socio-económico actual.

El origen de la Teoría de los Subconjuntos Borrosos se remonta a 1965 con la definición de *conjunto borroso* realizada por Lofti Zadeh. A partir de esta fecha, se publican unos pocos trabajos, fundamentalmente en el ámbito de las Ciencias Formales y tienen que transcurrir diez años para que despierten la atención de algunos investigadores que intentan aplicar los esquemas borrosos a otras ramas del saber.

Esta obra es el primer ensayo en el que se utilizan estas técnicas a las distintas áreas de la gestión de las empresas. En efecto, si la ya tradicional teoría de conjuntos y el álgebra booleana, con su lógica de pertenencia o no pertenencia, permiten la formalización de determinadas situaciones que en la realidad de las empresas se ha venido planteando, existen otras que resultan difíciles de modelizar tomando como base estos esquemas matemáticos.

En el terreno del quehacer cotidiano, aparecen multitud de ejemplos en los que se puede comprobar esta indiscutible realidad. Así, cuando se considera el conjunto de todos los hombres y se quiere delimitar el subconjunto de los hombres-jóvenes, se plantea un problema, dado que los límites de tal subconjunto no quedan bien definidos ya que habrá algunos para los que será necesario establecer un «*grado*» o «*nivel de pertenencia*», es decir, que pertenecerán bastante mientras que otros pertenecerán poco al citado subconjunto.

En el ámbito de la gestión de empresas, en donde la complejidad de los problemas y la imprecisión de las situaciones han hecho necesario introducir esquemas matemáticos más flexibles y adecuados a la realidad, la aplicación de los conceptos borrosos permitirá la solución de aquellos problemas en los que la incertidumbre aparece de manera fundamental.

El trabajo de los profesores Kaufmann y Gil Aluja está concebido de tal manera que, con la definición de unos conceptos previos y la configuración del ámbito de estudio, en el primer capítulo, y en base a unas técnicas elementales e imprescindibles, en el segundo, es posible introducirse en el tratamiento de unos problemas concretos que se plantean en la gestión de empresas.

Para ello, los autores han escogido determinados fenómenos de la empresa tales como la decisión de invertir, la decisión de renovar equipos, la gestión de stocks, la selección de personal, la distribución, etc., y han planteado cada uno de estos problemas desde un punto de vista tradicional, con objeto de que sean captados con facilidad. Para cada uno de estos fenómenos han descrito una técnica, generalmente bien conocida, unas veces en el ámbito de la certeza y otras en el campo de la probabilidad, para transformarla posteriormente en un modelo borroso. Se incorpora así una nueva metodología de manera sencilla, lo que da al texto un alto valor pedagógico.

Cuando en un tema surge la necesidad de utilizar un conocimiento específico, incorporan una somera explicación, que siempre resulta suficiente para que el modelo sea seguido en su totalidad.

Facilita la comprensión de este trabajo el gran número de ejemplos numéricos que lo integran, que hacen fácil su lectura a pesar de la dificultad aparente de las técnicas empleadas.

En síntesis y si tuviéramos que exponer un juicio resuntivo de la obra, tendríamos que decir que estamos ante un estudio riguroso en el ámbito científico, que ofrece a su vez un instrumento importante al empresario en el orden de planteamiento de sus problemas y de acotación de los riesgos inherentes a sus decisiones.

Jose M.ª Fernández Pirla.
Catedrático de Economía de la Empresa
de la Universidad Complutense.
Presidente del Tribunal de Cuentas de España.

LA INCERTIDUMBRE EN LA GESTION EMPRESARIAL

CAPITULO I

LA INCERTIDUMBRE EN LA GESTION EMPRESARIAL

Los problemas de gestión en las empresas

En el campo de la investigación científica los esfuerzos se dirigen en dos sentidos: hacia el conocimiento objetivo, es decir, hacia los hechos y hacia los llamados entes ideales cuya existencia queda localizada únicamente en la mente humana. Esta es la base que permite clasificar el saber científico en Ciencias Formales y Ciencias Empíricas. Se puede decir, pues, que el soporte de las Ciencias Empíricas es la realidad.

Dentro de las Ciencias Empíricas existe un grupo que, por actuar sobre una realidad social, se ha denominado Ciencias Sociales. Entre ellas aparece el conjunto de las llamadas Ciencias Económicas las cuales, aunque utilizan determinadas técnicas que son comunes para cualquiera de sus ramas, cada una de ellas posee las suyas propias. Dentro de la Economía y Gestión de Empresas, caben destacar las llamadas técnicas de medición que intentan, siguiendo el precepto de Galileo Galilei «medir lo que es mensurable e intentar hacer mensurable lo que todavía no lo es».

Ahora bien, no todo lo que tiene interés en la vida de las empresas puede ser cuantificado. En realidad sólo ciertas partes de los fenómenos, hechos y relaciones son actualmente medibles y queda por realizar una ingente labor hasta que se consiga ampliar el campo cuantificable a todos los aspectos de la gestión empresarial.

Dentro del ámbito de las empresas se da, generalmente, un cierto proceso de carácter cíclico que constituye en líneas generales el esquema material de los hechos económicos que en la misma acontecen: tiene lugar una fase de producción, eventualmente una acumulación de bienes, la transferencia de los mismos y una fase de consumo. Las características principales de este proceso son: la circulación de bienes y la transformación de los mismos.

En el ámbito microeconómico la «empresa» es el centro de este flujo material de la que es a la vez receptor e iniciador de la transferencia y lugar donde se consuma la transformación de las «cosas».

En síntesis la empresa tomada en sentido amplio constituye el centro de los esfuerzos humanos dirigidos a modificar cualitativamente y/o cuantitativamente los bienes hasta hacerlos más capaces para las necesidades que deben satisfacer.

La empresa, como realidad económico-social, es una fuente creadora de dos corrientes: por una parte, una corriente de bienes y servicios que van a formar parte del Producto Nacional. Por otra parte, establece una corriente monetaria como remuneración a los factores que han intervenido en la función productiva.

Es propio de la gestión de empresa el estudio de este núcleo de esfuerzos materializados en una conducta, la del empresario, y secundados por unas actuaciones dirigidas a un mismo objetivo fundamental.

Cuando se aborda un problema, las preguntas que aparecen hacen referencia al *qué es* lo que se estudia e inmediatamente aparece el *cómo* se puede estudiar. Conocimiento del qué o indagación de un cómo implican preguntas que deben proporcionar las primeras respuestas en torno a los fenómenos de la empresa. Así, pues, el objeto material de la gestión de la empresa vendrá fundado por la realidad empresarial, es decir, lo que constituye la empresa, y su objeto formal estará constituido por el «tratamiento de los problemas que la misma presenta en torno a la consecución y mantenimiento del equilibrio en cada una de las esferas *cuantificables* directa o indirectamente.»

Podría parecer a primera vista que han sido separados de la gestión de las empresas todos aquellos fenómenos que tienen lugar en la empresa, que constituyen un *problema* y que no son susceptibles de cuantificación inmediata. Ahora bien, un detenido examen de esta cuestión lleva a la conclusión de que incluso estos fenómenos es posible que, en parte, sean mensurables en un futuro, mientras que otros lo son ya ahora, pero de una manera indirecta.

Es importante pues, subrayar que la determinación del objeto formal de la Gestión de la Empresa la une al concepto de cuantificación, pero no cuantificación actual y directa, sino posibilidad de que de manera indirecta o en un futuro sean cuantificados los fenómenos.

Por otra parte aparece con fuerza el concepto de equilibrio y, por tanto, la posibilidad de que existan diversos tipos de equilibrio: equilibrio de contraposición, equilibrio de fusión, etc. Para la consecución de estos equilibrios se recurre con frecuencia a las técnicas que las matemáticas proporcionan. De ahí que en cada uno de los campos se presente como problema fundamental la obtención de unos máximos con unas determinadas condiciones y en el campo ya más concreto aparecerá el problema de obtener máximo rendimiento, máxima rentabilidad de una inversión, optimización de las existencias en stocks, etc. La gestión de las empresas tiene, pues, como objetivo, la obtención del equilibrio y sus magnitudes son o pueden ser cuantificables.

La medición de los fenómenos empresariales

Los estudiosos de los problemas de la empresa intentan servirse de todas aquellas técnicas que son susceptibles de permitir una mejor captación de los fenómenos que la vida diaria plantea en toda su complejidad, con objeto de poder formalizarlos y así actuar sobre ellos.

Esta captación de la realidad ha tenido lugar tradicionalmente, a través de unos razonamientos basados en el concepto de precisión y que, frecuentemente, eran plasmados para su cuantificación a través de los esquemas clásicos de la matemática. Esto dio lugar a que se formalizara una «realidad modificada» adaptada a los modelos matemáticos, en lugar de hacer lo contrario, es decir, una adaptación de los modelos a los hechos reales.

Es así que la realidad, aunque precisa en sí misma, sólo ha podido ser captada a través de alguno de sus aspectos, lo que ha llevado a simplificarla y le ha quitado precisión. Ello no es óbice para que el modelo elaborado sea incluso más perfecto que la propia realidad.

El hecho de que la formalización, normalmente, comporta una visión restringida, obliga al investigador a elegir entre realizar desde el inicio una *selección* de elementos a considerar, para poder operar después con un instrumental preciso, o bien captar la realidad con toda su imprecisión y operar con estas informaciones «borrosas», aún sabiendo que los resultados vendrán dados de manera imprecisa. La decisión se reduce a elegir entre un modelo preciso pero que no refleja la realidad y un modelo vago pero más adecuado a la realidad.

También el cerebro humano capta su entorno de una manera simplificada. Y ello es así por cuanto cualquier cosa que se examine, por minúscula que sea, y valga el ejemplo del átomo, resulta tan compleja que su captación sólo puede conseguirse a través de un esquema simplificado. Incluso cuando miramos un objeto, nuestros ojos lo perciben de manera grosera, esquemática, que se iría perfilando a medida que se utilizaran lentes cada vez más potentes. Pero no existe microscopio alguno que sea capaz de mostrarlo «tal cual es» en realidad.

Pero es que, además, tanto el pensamiento como las acciones humanas son una mezcla de intuiciones y de rigor lógico. Sin embargo, su estudio, al ser realizado a través de determinados esquemas simplificados, no puede ser a la vez perfectamente representativo de la realidad y totalmente preciso en su cuantificación. Será necesario, pues, supeditar un objetivo a otro. Esto ha dado lugar a que exista una tendencia refractaria a la utilización de la matemática para el estudio de los fenómenos propios de las ciencias humanas. Se considera, con demasiada frecuencia, que las matemáticas «complican» inutilmente los hechos y las relaciones que en la realidad son sencillos.

Por otra parte, la evolución de la vida misma, con una permanente aceleración, hace que los fenómenos cambien con inusitada rapidez, de tal manera que cuando se ha conseguido un modelo apto para una determinada situación, hay que modificarlo, porque ésta ya ha variado. Nos encontramos ante un mundo regido tanto por la mutabilidad como por la incertidumbre. La formalización matemática tendrá que adaptarse, también, a estas circunstancias.

En este contexto, hay que señalar también que no es posible admitir que los conocimientos sólo puedan ser considerados como científicos si son susceptibles de medición, ya que en este caso las ciencias sociales carecerían de tal carácter. Sin embargo ésta ha sido una posición mantenida en muchas circunstancias con total intransigencia. La noción de azar se halla asociada a una idea de medida a través de la probabilidad. Sin embargo la incertidumbre es recogida de manera subjetiva asociándose hechos no probabilizables, como el concepto de sensación y la noción de estimación. Tanto una cosa como otra son fundamentalmente subjetivas.

Si en los acontecimientos que se dan en la realidad, aparece una superposición de lo que es medible y lo que no lo es, resultará útil para su tratamiento la existencia de esquemas formales que permitan unir el azar y la incertidumbre, a través de conceptos tales como la probabilidad de un subconjunto borroso, números híbridos, funciones de credibilidad, etc. Su interés reside en el hecho de que son capaces de reflejar los fenómenos reales y este reflejo debe permitir un mayor pragmatismo tanto en lo que se refiere al pensamiento como a la gestión.

Ligado con el problema de la mensurabilidad se halla el de la incertidumbre que es consustancial con el pensamiento humano y preside no pocos de sus razonamientos. En los intentos de formalizar los comportamientos en general y las actividades económicas en particular ha resultado cada vez más necesario introducir la incertidumbre, aunque no fuera susceptible de cuantificación, incorporando hipótesis que aún cuando no sean medibles hoy sí son susceptibles de estimación, comparación, gradación, relación, etc..., lo que constituye, en definitiva, una importante actividad del cerebro humano.

Los modelos matemáticos de previsión en general y la investigación operativa en particular han dado lugar, en los últimos treinta años, a un importante avance en la interpretación de la realidad, lo que ha permitido obtener unos esquemas aptos para tomar decisiones de una manera racional. Y ha quedado demostrado que, contrariamente a lo que algunos científicos afirmaban, ha resultado que la intuición juega un papel importantísimo en este proceso de establecimiento de modelos realistas. Ha quedado también patente que los esquemas formales permiten comprender mejor la realidad, cuando no se considera el conocimiento objetivo como finalidad y no se suponen más reales los modelos que los propios acontecimientos.

Es por ello que las estimaciones subjetivas constituyen un importante avance hacia un mejor conocimiento de los fenómenos. Si una situación no puede ser precisada, pero se puede afirmar que es mejor que otra, ya se pasa a un estado superior de conocimiento. Pero cuando se dice que en un futuro un acontecimiento es más «posible» que otro, se está abriendo un campo fundamental en las perspectivas del razonamiento y de la decisión, dado que, con ello, el conocimiento subjetivo puede ser sometido, prácticamente, a todos los mecanismos de la lógica. Resulta entonces fundamental la distinción entre imprecisión e inexactitud. Lo impreciso, lo borroso, no tiene por qué ser inexacto. La teoría de los subconjuntos borrosos agrupa unos conocimientos imprecisos pero exactos. En la lógica formal una cosa es verdadera o falsa, pero no puede ser las dos cosas a la vez, al no admitir interpretaciones diversas, mientras que los estudios de la borrosidad asignan una importancia fundamental al «grado» o nivel de verdad.

Y ello es así por cuanto el pensamiento humano está, en sí mismo, lleno de imprecisiones. A pesar de ello pretendemos que desarrolle unos razonamientos lógicos. Hace casi 150 años, cuando George Boole escribió sus LAWS OF THOUGHT, se produjo el nacimiento de una lógica formal, cuya utilidad ha quedado suficientemente demostrada mientras ha sido utilizada dentro de sus propias limitaciones. Pero, afortunadamente, la lógica del pensamiento humano, no cabe dentro de estos límites.

El desarrollo de la matemática ha impulsado una lógica de razonamiento que consiste en considerar dos valores: el sí y el no, la pertenencia y la no pertenencia, en definitiva, el blanco y el negro. Pero la realidad no siempre permite este acto simplificativo, sino que existen situaciones intermedias (toda una gama de grises) que hasta no hace mucho quedaban fuera de los tratamientos científicos. No se puede olvidar, que a diferencia del ordenador, el cerebro humano acostumbra a pensar en términos imprecisos, es decir, «borrosos».

El ser humano precisa, dado que su cerebro no es una máquina secuencial al estilo de los ordenadores, considerar determinados hechos que son difíciles de adscribir si se tiene en cuenta solamente el todo o la nada. En definitiva, siente la necesidad de asociar el rigor y las impresiones.

A lo largo de la historia aparece habitualmente la preocupación por este hecho incuestionable. Así, se encuentra ya en Platón y Aristóteles la proposición según la cual el pensamiento se balancea siempre entre lo que es cierto y lo que es falso. Multitud de autores se han planteado posteriormente este problema.

Si se considera el aspecto más simple de nuestra mente constituido por los mecanismos que encadenan los pensamientos y su estudio se esquematiza a través de las llamadas inferencias cuya base se halla en el todo o nada, lo que es cierto o lo que es falso, no se consigue reflejar el pensamiento humano, tanto en lo que se refiere a la comunicación externa como a la interna. Se olvida algo tan fundamental como la entropía mental.

La experiencia ha permitido poner de manifiesto, después de la excitación que ha proporcionado la informática, la que proporciona todavía y quizás la que va a proporcionar, que no es suficiente operar con conceptos que son matemáticamente muy correctos, pero que sólo pueden representar con deficiencia el pensamiento profundo del hombre.

En la vida real se encuentran fenómenos que plantean dificultades para su definición y que sólo pueden ser estimados de manera subjetiva. Teniendo en cuenta que la pretensión de la ciencia es ante todo la investigación de nociones objetivas se tropieza con la dificultad, desde esta perspectiva, de representar la realidad en toda su dimensión. Este problema es mucho más agudo en las ciencias humanas cuyo contenido abarca una zona mayor de subjetividad que de aspectos objetivos.

Se dispone ahora de unos instrumentos matemáticos que permiten tener en cuenta de una manera más adecuada, aunque no de manera perfecta, esta realidad. Se dice que no será posible jamás la perfección en el proceso de formalización del acontecer real ya que el cerebro humano, con sus miles de millones de neuronas, es decir, de conexiones especializadas, es una inmensa y complicada máquina paralela que aún cuando sólo es utilizada parcialmente, está muy lejos del ordenador carente de imaginación.

La Teoría de los Subconjuntos Borrosos

La teoría de los subconjuntos borrosos es una parte de las matemáticas que se halla perfectamente adaptada al tratamiento tanto de lo subjetivo como de lo incierto. Es un intento de recoger un fenómeno tal cual se presenta en la vida real y realizar su tratamiento sin intentar deformarlo para hacerlo preciso y cierto.

El nuevo tratamiento de la incertidumbre, a partir de los conceptos borrosos, ha dado lugar a una distinta manera de pensar que reune el rigor del razonamiento secuencial con la riqueza de la imaginación inherente a la borrosidad, asociando las posibilidades secuenciales de la máquina a las posibilidades del cerebro humano.

Aunque pueda parecer lo contrario este instrumental matemático no es mucho más complicado que el utilizado normalmente e incluso resulta más simple y mucho más cercano a la manera habitual de pensar del hombre.

La teoría de los subconjuntos borrosos es un intento, por el momento parcialmente logrado, de rehabilitar científicamente el subjetivismo y la imprecisión.

La utilización de los esquemas borrosos tiene lugar actualmente, en la práctica totalidad de los campos de estudio de las ciencias. Se encuentra ya en la gestión de las empresas, en biología, en medicina, en geología, en sociología, en fonética y hasta en música, por sólo citar algunos. Todo problema situado en el ámbito de la incertidumbre es susceptible de ser tratado a través de la teoría de los subconjuntos borrosos ya que a medida que transcurre el tiempo cada vez resulta más factible introducir, en los esquemas formales, mecanismos del pensamiento tales como las sensaciones y las opiniones numéricas.

La utilización de la teoría de los subconjuntos borrosos ha llegado ya a los estudios de medicina. Concretamente el empleo de la noción «metaimplicación borrosa» está jugando un importante papel en los problemas de preparación de las decisiones y ha resultado muy positiva en el prediagnóstico médico.

Desde hace más de 50 años un elevado número de matemáticos se ha interesado por las lógicas multivalentes, entre ellos cabe citar a RUSELL, LUKACIEWICZ, POST, etc., pero es en 1965 cuando LOFTI A. ZADEH publica su primer artículo sobre los «Fuzzy sets» y tienen que pasar 10 años para que se produzca una cierta expansión, ya que hasta 1975 sólo se habían publicado 2 libros sobre este tema. Hoy se estima que existen más de 10.000 investigadores dedicados al estudio y desarrollo de esta teoría, entre los que figuran BELLMAN, GOTTWALD, KANDEL, NEGOITA, NGUYEN, SUGENO, el propio ZADEH, ZHANG y ZIMMERMANN, junto con los autores de esta obra.

En la actualidad, ya no es posible hablar de una sola lógica, sino que pueden existir tantos desarrollos lógicos como se quieran imaginar. Bastará, para ello, establecer unos axiomas para que, a partir de los mismos, se encadenen correctamente las proposiciones evitando entrar en contradicción.

Así, pues, se concibe hoy una «lógica borrosa» de la misma manera que no existió problema en su momento en concebir una lógica booleana. Es más, si para las relaciones hombre-ordenador en la situación actual resulta imprescindible el recurrir a la lógica secuencial, para la relación entre el hombre y sus semejantes parece más adecuada la utilización de la teoría de los subconjuntos borrosos.

La tradicional teoría de conjuntos y el álgebra booleana, con su lógica de pertenencia o no pertenencia, ha permitido la formalización de determinadas situaciones que la realidad plantea, pero existen otras que resultaban difíciles de modelizar a través de estos esquemas.

En el terreno del quehacer diario, aparecen multitud de ejemplos, en los que se puede comprobar esta indiscutible realidad. Así, cuando se considera el conjunto de todos los hombres y se quiere delimitar el subconjunto de los «hombres jóvenes», se plantea un problema dado que los límites de tal subconjunto no quedan bien definidos.

Cuando desde una loma lejana se divisa una playa con un conjunto de bañistas, y se quiere determinar el subconjunto formado por aquellos que se hallan en el agua es posible señalar los que con certeza están allí y los que se hallan «seguro» en la arena, pero habrán algunos para los que sea necesario establecer un «grado o nivel de pertenencia», es decir, que *pertenecerán bastante* mientras que otros *pertenecerán poco* al citado subconjunto.

Con ello se puede observar que se está operando con conceptos definidos de manera imprecisa, pero que pueden ser jerarquizados.

Resulta evidente que los conjuntos borrosos tienen un distinto grado de borrosidad, por lo que se habla de subconjuntos «casi nítidos», «algo borrosos», «muy borrosos»... Resulta curioso pensar que, en cierto modo, la borrosidad también constituye un concepto borroso.

La relación existente entre el hombre y el mundo que lo rodea no puede ser descrito solamente a través de la noción de conjunto en su acepción tradicional, sino que es preciso recurrir a los subconjuntos borrosos, que permiten expresar conceptos con límites imprecisos y en los que la pertenencia a una determinada «clase» permite una cierta gradación. La teoría de los subconjuntos borrosos, como dice Zadeh, es un paso hacia el acercamiento entre la precisión de las matemáticas clásicas y la sutil imprecisión real.

La borrosidad en los estudios de la empresa

El entorno económico, social y tecnológico de las empresas resulta en la actualidad mucho menos previsible y se halla en situación más inestable que en un pasado inmediato. Esta realidad ha motivado que, tanto desde el punto de vista macroeconómico como desde una perspectiva microeconómica, se hayan buscado nuevos caminos para estudiar las situaciones por las que los sistemas económicos por una parte, y las empresas por otra, están atravesando. De aquí que la investigación económica para el estudio de la actividad de los estados y la investigación operativa para el tratamiento de los problemas de las empresas, hayan experimentado una evolución que en los últimos años ha alcanzado un ritmo acelerado.

Con la divulgación del uso de los ordenadores se ha avanzado, de manera espectacular, en el tratamiento de los datos que las empresas podían disponer permitiendo, con ello, mejorar la gestión de las mismas. Así, pues, este aspecto, por demás fundamental, ha quedado resuelto en gran medida, pero ha aparecido un nuevo problema derivado de la obtención misma de los datos necesarios. Así, pues, el problema se ha trasladado a la búsqueda de unos procesos que permitieran introducir determinada información primaria para su posterior tratamiento. Ni siquiera el recurso a esquemas probabilísticos permite avanzar excesivamente en determinados campos de la actividad de las empresas. En otras palabras, el propio progreso ha hecho que el entorno económico se haya convertido en incierto.

Los matemáticos y los economistas se han visto obligados a investigar en este campo y han conseguido obtener nuevos esquemas que permiten una consideración más completa de la realidad, evitando en lo que tiene de posible su tradicional deformación cuando se recurre a una precisión numérica, que hace que los esquemas formales no puedan establecerse de acuerdo con los hechos reales.

En el ámbito de la empresa se plantean, pues, problemas que exigen la toma de decisiones en un ambiente en el que los objetivos que se pretenden alcanzar, las limitaciones a que se ven sometidos e incluso las consecuencias para cada una de las alternativas planteadas, aparecen de manera imprecisa.

Con objeto de cuantificar esta imprecisión se han utilizado tradicionalmente las técnicas suministradas por la teoría de la probabilidad, y más concretamente, por la teoría de la decisión. Esto implica aceptar que los hechos imprecisos son equivalentes a los aleatorios.

En un nuevo marco decisional de los fenómenos de la empresa se pasa de la aleatoriedad a la borrosidad, cuando la imprecisión se formaliza a través de situaciones en las que existe una gradación entre la pertenencia absoluta y la no pertenencia.

Mientras el concepto de probabilidad se halla asociado al de aleatoriedad, la llamada función característica de pertenencia lo está al de borrosidad. Existe, de hecho, un cierto paralelismo, incluso por la circunstancia que, tanto las probabilidades como los valores de la función de pertenencia, se hallan comprendidos entre cero y uno. Sin embargo, dado que ambos conceptos tienen un distinto origen, gozan también de propiedades diferentes.

Los conceptos de azar y de incertidumbre tienden a confundirse en el lenguaje habitual, pero, en el lenguaje científico, se ha realizado una separación, desde tiempo ya lejano, en sus respectivas significaciones. Con la aparición de la teoría de los subconjuntos borrosos se ha conseguido una mejor clarificación, al haberse aportado una clara descripción de aquello que no puede ser medido a través de la probabilidad. Resulta indudable que los «números inciertos» no tienen las mismas reglas aritméticas que las «variables aleatorias» de la misma manera que la noción «entropía probabilística» no debe confundirse con el concepto de «desorden en el campo de la incertidumbre».

En el estudio de los problemas económicos de las empresas se suele utilizar el instrumental que proporcionan las matemáticas, en su intento de describir la realidad, aunque se trate de elementos totalmente abstractos. Se utiliza todo aquello que es susceptible de conducir a este objetivo: llegar lo más cerca posible de la realidad, aún a sabiendas de la existencia de una multitud de cosas que nos son totalmente desconocidas. Resulta totalmente indispensable adoptar un sentido realista, aún cuando no debe olvidarse, evidentemente, el sueño de una teoría con validez exclusivamente formal. Sin embargo, siempre existe un momento en el cual es necesario descender a los mecanismos del sistema económico de la empresa para poder actuar sobre ellos. Es por ello que los conocimientos deben tener un carácter adaptativo ya que nada en la empresa es eterno ni permanente sino que evoluciona sobre todo a causa de la imaginación de los hombres que la componen.

Cada vez resulta más patente que este mismo problema se reproduce también con la utilización intensiva de los ordenadores en la gestión de las empresas. En efecto, si se examina cómo se han construido hasta ahora los mejores programas de informática, puede observarse que constituyen un intento de reproducir de manera excesivamente esquematizada, aunque muy útil, lo que sucede en el ámbito económico de las empresas al constatarse frecuentemente que existían una gran cantidad de hechos para los que no era posible su objetivización. Dado que el ámbito de la gestión de las empresas pertenece al campo de las ciencias humanas, tiene que reflejar el algo de aventura que se produce en la vida de las empresas. Esta aventura, paralela a la de la propia vida humana, no debe eliminarse en aras a la comodidad que proporciona la utilización de automatismos, sino que resulta conveniente considerar la compleja realidad para poder comprenderla mejor. No hay nada peor en economía que los esquemas rígidos. La matemática de la borrosidad permite, esencialmente, una flexibilidad de la que tan faltados se hallan los modelos de los ámbitos de la certeza y riesgo.

Las obras que tratan los problemas derivados de la gestión de las empresas contienen gran variedad de modelos matemáticos cuya base se halla en la necesidad de una total precisión en sus datos. Pero también se ha ido comprobando que esta exigencia de precisión hace que sus esquemas se alejen sustancialmente del mundo real, caracterizado por múltiples imprecisiones.

La complejidad de los problemas y la imprecisión de las situaciones han hecho necesario introducir esquemas matemáticos más flexibles y adecuados a la realidad. La teoría de los subconjuntos borrosos ha permitido el nacimiento de unas técnicas que van a facilitar la solución de aquellos problemas en los que la incertidumbre aparece de manera fundamental.

La decisión en el ámbito empresarial resulta cada vez más compleja como consecuencia de los avances tecnológicos, la diversidad de mercados, la multiplicidad y diversidad de productos que han motivado la necesidad de que la intuición del empresario deba ser completada por esquemas científicos cada vez más complejos.

Las posibilidades que los subconjuntos borrosos ofrecen para abordar los problemas de decisión en el campo de actuación de las empresas son tan amplias, que, a no dudar, van a enriquecer las técnicas operativas de la gestión de las empresas.

Desde el punto de vista de la empresa, las posibilidades de utilización de estos esquemas son numerosas y van desde las previsiones a largo y corto plazo, pasando por la selección de inversiones, gestión de stocks, renovación de equipos, investigación de nuevos productos, decisiones multicriterio, selección de personal, círculos de calidad, hasta la planificación con datos híbridos, y un largo etcétera. Sin embargo el entusiasmo por estos modelos no puede hacer olvidar un hecho incuestionable: las técnicas tradicionales no pueden ser relegadas sino que resultan muy útiles cuando un fenómeno puede ser mensurable. Pero, cuando la realidad plantea una gama de circunstancias que escapan todavía a la medición, conviene realizar una estimación susceptible de ser tratada a través de los criterios borrosos.

En estos momentos se está viviendo una época que exige un realismo en la gestión de las empresas, y aunque creemos que no ha llegado el momento de prescindir del genio y la intuición del empresario, la complejidad del entorno en que nos ha sido dado vivir provoca la exigencia de investigar las nuevas técnicas para que, a través de ellas, sea posible avanzar en el camino del progreso.

Es frecuente, en la actividad de las empresas, escuchar la siguiente manifestación: «Las ventas de este mes han alcanzado un nivel satisfactorio». En el ámbito de la teoría de los subconjuntos borrosos, se diría que este mes pertenecerá al subconjunto borroso de los «meses de venta satisfactorios» con un «determinado» grado de satisfacción, que será necesario indicar, entre 0 y 1 (por ejemplo 0,9).

Otra cosa muy distinta es decir que la probabilidad de que las ventas de este mes sean satisfactorias es del 90 % ya que esto implica una «claridad» debida al hecho aleatorio de que existe una probabilidad del 0,9 de que este mes pertenezca al subconjunto vulgar (nítido) de los meses de venta satisfactorios.

Con estas técnicas será posible el esclarecimiento formal de las actitudes empresariales, aumentando así la coherencia entre la evolución de procesos reales y los esquemas elaborados para su tratamiento. Es por ello que pueden constituir una importante ayuda al empresario en aquellos procesos de decisión que se desarrollan en un ambiente borroso, es decir, cuando adquiere carta de naturaleza la noción «vaguedad».

Con la aparición de la teoría de los subconjuntos borrosos, los esquemas que tradicionalmente han sido utilizados para resolver los problemas de decisión del empresario, pueden ser complementados por un nuevo núcleo de técnicas de decisión que, a no dudar, van a permitir resultados fructíferos para la solución de los problemas, cada vez más complejos, que la actividad económica plantea.

ELEMENTOS BASICOS DE LA TEORIA DE LOS SUBCONJUNTOS BORROSOS

CAPITULO II

ELEMENTOS BASICOS DE LA TEORIA DE LOS SUBCONJUNTOS BORROSOS

Fundamentos de la Teoría de los Subconjuntos Borrosos

La Teoría de Conjuntos constituye un cuerpo científico extraordinariamente sólido y estas llamadas matemáticas modernas son estudiadas y utilizadas en todo el mundo. Su reconocimiento reviste carácter de generalidad por la creencia de que, en el futuro, no existirá persona alguna que no sienta la necesidad de servirse de la informática y ésta se halla construida precisamente alrededor de esta teoría.

La significación intuitiva que se da a la palabra conjunto en matemáticas es simple: «Se trata de un grupo de objetos, diferentes los unos a los otros y muy bien especificados». Un grupo de piezas para la construcción de un coche, el personal de una empresa, la relación de números enteros, los puntos de una recta, etc... pueden ser presentados a través de un conjunto. Un conjunto se halla frecuentemente especificado por una o varias propiedades. Un subconjunto de un conjunto no comprende forzosamente la totalidad de los elementos del conjunto, aunque, a veces por comodidad, los matemáticos admiten que un conjunto es un subconjunto de sí mismo. Cuando se considera un elemento de un conjunto, es posible determinar su pertenencia o no pertenencia a un determinado subconjunto. Al conjunto de referencia se le llama frecuentemente «referencial». Dado un referencial tal como:

(2.1) $\quad E = \{a,b,c,d,e,f,g\}$

se puede escribir:

(2.2) $A = \{b,c,e,g\}$

en donde, evidentemente, A es un subconjunto de E. Resulta que b, c, e y g pertenecen a A; mientras que a, d, y f no pertenecen a A.

En el ámbito de la empresa, existen multitud de situaciones en las que surge la noción de subconjunto. Así, un supuesto bajo el cual se pretende realizar una política de renovación del personal para rejuvenecer la plantilla de una empresa, se observa que las edades de los trabajadores van desde los 18 hasta los 70 años. Aquellas personas cuya edad se halla comprendida entre los 18 y los 35 años constituyen un subconjunto de este referencial «obreros jóvenes» de la misma manera que también pueden formar uno aquellos que tienen una edad comprendida entre 60 y 70 años: «obreros viejos».

Resulta cómodo asociar un símbolo a aquellos elementos que pertenecen a un determinado subconjunto. Se puede convenir que se asignará un 1 para la pertenencia y un 0 para la no pertenencia. De esta manera (2.1) y (2.2) se escribirá:

(2.3) E =

a	b	c	d	e	f	g
1	1	1	1	1	1	1

(2.4) A =

a	b	c	d	e	f	g
0	1	1	0	1	0	1

Esta nomenclatura no se adapta de una manera perfecta a los referenciales infinitos, entre los que se encuentran los puntos de una recta, por ejemplo. Es por ello que resulta más cómodo utilizar una figura en un sistema de coordenadas, en la que se representan las situaciones de no pertenencia o pertenencia a través de las posiciones 0 ó 1, tal como aparece en las figuras 2.1 y 2.2.

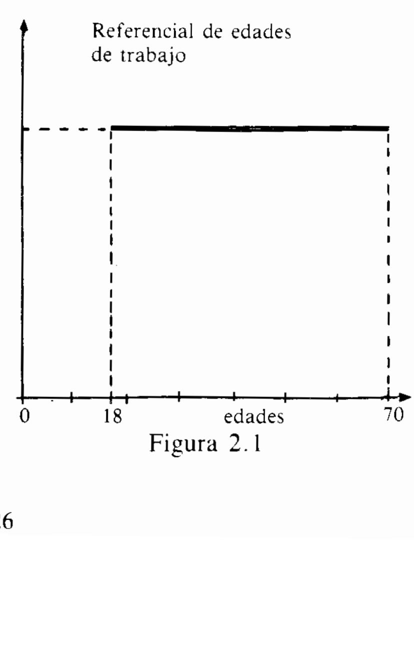


Figura 2.1

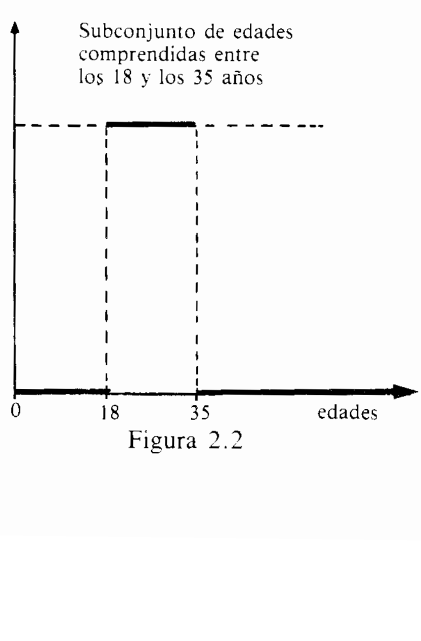


Figura 2.2

En este supuesto, el hecho de pertenecer o no a un subconjunto resulta totalmente diferenciado. Se trata de una cosa o de otra, sin posibilidad de matización. Pero la realidad no siempre se plantea en estos términos, sino que resulta necesario, en una cantidad de casos, introducir matizaciones.

Si se considera la propiedad «edad de vigor en el trabajo» se podrá aceptar, sin ningún tipo de duda, que a partir de los 60 años el empuje laboral se halla en su declive. Se podrá discutir si ello es así a los 55 años; resulta difícilmente admitido a los 50, y evidentemente por debajo de los 35 no habrá discusión alguna. De esta manera se podrá admitir una representación del subconjunto «edad de vigor en el trabajo» a través de la figura 2.3.

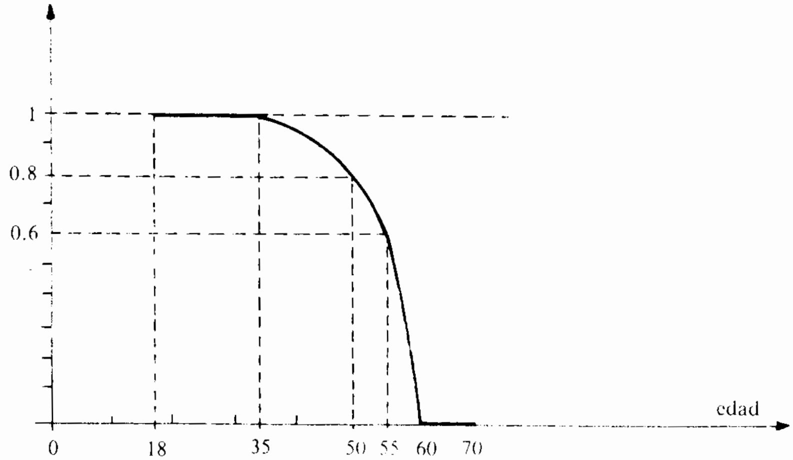


Figura 2.3

De esta manera una persona de 18 años pertenecerá al subconjunto «edad de vigor en el trabajo» con un nivel (1) lo mismo que la de 35 años. Pero una persona de 50 años sólo pertenecerá con un nivel (0,8), una persona de 55 con un nivel (0,6) y una persona de más de 60, con un nivel (0). El subconjunto «edad de vigor en el trabajo» se llamará «borroso» o «impreciso». La palabra borrosa utilizada aquí puede resultar justificada por determinadas consideraciones y criticada por otras, pero dado que ha sido admitida con carácter de generalidad, creemos que no existe inconveniente alguno para aceptarla.

Si se toma el referencial E dado en (2.3) un subconjunto de E, podría ser:

(2.5) $\underset{\sim}{B}$ =

a	b	c	d	e	f	g
0.2	0.7	1	0.4	0	0.3	0.9

El aspecto borroso del subconjunto queda indicado a través de un tilde debajo de la letra. Los decimales tomados entre 0 y 1 podrían ser sustituidos por otros símbolos con la única condición de que fueran capaces de representar los distintos niveles de pertenencia.

Así pues, tanto en los subconjuntos vulgares como en los borrosos, a todos los elementos se les adscribe la llamada función característica de pertenencia $\mu_p(x)$ que en un caso debe tomar los valores 0 ó 1 según que no pertenezcan o sí al subconjunto A, y en otros adquieren cualquier valor del segmento [0,1].

La construcción de la teoría de conjuntos a partir de estas bases ha hecho posible realizar uniones, intersecciones, sumas y cualquier tipo de operaciones que tradicionalmente se realizaban en matemáticas. Un inmenso trabajo ha tenido lugar posteriormente: las teorías matemáticas sobre las estructuras, la teoría de los espacios vectoriales, la actual topología, etc... son una prueba de ello.

Sin embargo, se ha podido constatar que existen determinados hechos, una gran cantidad de fenómenos, que se adaptan mal a una lógica de pertenencia o no pertenencia, sobre todo cuando se compara este mecanismo con la estructura del cerebro humano, en el que resulta difícil imaginar que las cosas se hallen estrictamente delimitadas entre el sí y el no. A veces se dice que un producto es caro o es barato, sin embargo las posibilidades no terminan con esta alternativa, ya que puede ser un «poco caro», «muy caro», «bastante caro», etc... La información «es caro» incluye en la lógica formal otra información «no es barato». Sin embargo, la falta de matización hace que este esquema no resulte suficiente.

Cuando se trata de contratar personal para una empresa y encontramos una persona que puede realizar una determinada actividad cuyas características son conocidas, es difícil imaginar que se consiga hallar una persona que posea de manera absoluta las características requeridas. Puede estar «un poco por debajo» o «un poco más allá» de ciertas características que han sido consideradas como ideales.

En nuestro sistema de comunicación no todo funciona con el «todo» o «nada» sino que es preciso realizar matizaciones. De ahí la utilidad de una teoría como la de los subconjuntos borrosos. Se hace hincapié en el hecho de que son precisamente los subconjuntos quienes son borrosos. Terminológicamente aparece aquí una cierta divergencia con los americanos, quienes acostumbran a hablar de «fuzzy-set» en lugar de «fuzzy subset».

Nadie puede pretender que los fundamentos de la teoría de los subconjuntos borrosos sean recientes ya que existen antecedentes, remotos o próximos, de estudios que recuerdan las bases sobre las que se sustenta esta teoría. En el campo de la ciencia, no se abren nunca puertas totalmente cerradas, casi siempre se abren puertas entreabiertas. Cuando Zadeh analizaba el hecho de que la función de pertenencia a un subconjunto ordinario tenía que tomar los valores 0 ó 1, pensó en introducir una matización ¿por qué no era posible tomar el intervalo o el segmento de 0 a 1, en lugar de sus 2 valores extremos? Es así que los matices se han establecido, generalmente, a través de los decimales. De esta manera, en el ejemplo anterior, «a» se halla incluida a un nivel (0,2), «b» a un nivel (0,7), «c» a un nivel (1), «d» a un nivel (0,4), «e» (0), «f» (0,3), «g» (0,9).

En el supuesto de una empresa que busca una persona para la realización de determinado trabajo, surge con claridad el problema de la matización. En efecto, cuando se compara una determinada persona con el perfil ideal que se desea conseguir, no se puede obtener un resultado apto o no apto de manera absoluta, sino que al analizar sus características, y sus cualidades técnicas, será necesario determinar su «grado» de aptitud, su «grado» de comportamiento profesional, su «grado» de convivencia con los demás en el centro de trabajo, etc..., realizando unas estimaciones numéricas para cada una de estas características. En definitiva, resulta posible determinar su capacidad global a través de una gradación que puede ser explicada a través de los subconjuntos borrosos, estimando la desviación, la «distancia» existente entre el perfil ideal y la persona que se está analizando.

Surge así un concepto importante: el de entropía o «valoración del desorden». En una información formal, en una instrucción destinada a un ordenador, debe excluirse la noción de desorden, ya que en ella sólo cabe una interpretación unitaria. En este caso la entropía es nula. Sin embargo no sucede lo mismo en las relaciones de los hombres entre sí, en los que la borrosidad constituye la esencia misma de la semántica.

La entropía no interviene en la teoría clásica de los conjuntos, en la que de manera directa no se considera la borrosidad. Sin embargo, para las matemáticas borrosas, este concepto interviene de manera fundamental y es posible realizar una cierta estimación de la entropía en un subconjunto borroso. Existe una multitud de procesos aptos para la valoración de la entropía de un subconjunto borroso, la cual puede ser asimilada, en muchos casos, a una «distancia».

Si se toma, por ejemplo (2,5) y se considera un subconjunto vulgar B, tal que para todo valor superior a 0,5, se le hace corresponder el valor 1 y para todo valor igual o menor a 0,5, el valor 0, se obtiene:

(2.6) $\underset{\sim}{B}$ =

a	b	c	d	e	f	g
0.2	0.7	1	0.4	0	0.3	0.9

(2.7) $\underset{\approx}{B}$ =

a	b	c	d	e	f	g
0	1	1	0	0	0	1

Si se calcula la suma de las desviaciones, en términos absolutos, entre $\underset{\sim}{B}$ y $\underset{\approx}{B}$, se obtiene:

$$\begin{aligned} d\,(\underset{\sim}{B}, \underset{\approx}{B}) &= |0\cdot2-0| + |0\cdot7-1| + |1-1| + |0.4-0| + |0-0| + |0.3-0| + \\ &+ |0.9-1| = 0.2+0.3+0+0.4+0+0.3+0.1 = 1.3 \end{aligned} \tag{2.8}$$

Si se divide este resultado por 7, número de los elementos del referencial, se obtiene:

$$\delta\,(\underset{\sim}{B}, \underset{\approx}{B}) = \frac{1.3}{7} = 0.185 \tag{2.9}$$

Se ha realizado la división por la cantidad de elementos con objeto de tener siempre un número comprendido entre 0 y 1. El número 0,185 es una valoración de la entropía o desorden en sentido científico, que existe en $\underset{\sim}{B}$. Se puede observar que la entropía relativa definida por un número comprendido entre 0 y 1 depende de la especificación del referencial y que comporta diversos problemas teóricos importantes, fundamentalmente cuando el referencial no es finito.

El ejemplo expuesto anteriormente, relativo a la selección de personal para un determinado puesto de trabajo, es significativo, y, a pesar de ello, prácticamente en todos los países, como consecuencia del desconocimiento de las posibilidades de la teoría de los subconjuntos borrosos, se utilizan las teorías formales que son menos adaptables a la solución de este problema. Significaría, pues, un indiscutible avance la utilización de unos cuestionarios que pudieran contener matizaciones, ya que los posibles candidatos llegarían a expresar más adecuadamente sus conocimientos como su manera de pensar. A una persona le puede gustar un oficio de manera absoluta, sin embargo no es este el caso normal, sino que normalmente existe una gradación: mucho, poco, bastante. Los seres humanos no son autómatas, y su descripción no puede realizarse como si lo fueran.

Lo importante es, en definitiva, saber traducir los matices en símbolos matemáticos para que, a través de ellos, se puedan obtener unas conclusiones también matizadas. Este ha sido el gran avance que representa la teoría de los subconjuntos borrosos.

Operaciones elementales con subconjuntos borrosos

Con los subconjuntos vulgares se pueden realizar diversas operaciones que corresponden a ciertos operadores habituales del lenguaje: y, y/o, o, no.

Si se parte del referencial (2.3) y se consideran 2 subconjuntos ordinarios de este referencial:

(2.10) $A_1 =$

a	b	c	d	e	f	g
1	0	0	1	0	1	1

(2.11) $A_2 =$

a	b	c	d	e	f	g
1	0	1	1	0	0	1

se puede buscar el subconjunto A_3 tal que todo elemento que pertenezca a A_3 debe pertenecer a A_1 y A_2, se observa que *a* pertenece a A_1 y a A_2 por lo que *a* pertenece también a A_3; *b* no pertenece ni a A_1, ni a A_2. Por lo tanto *b* no pertenece a A_3. Y así sucesivamente se puede obtener:

(2.12) $A_3 =$

a	b	c	d	e	f	g
1	0	0	1	0	0	1

Se puede escribir esta operación llamada «intersección» de la siguiente manera:

(2.13) $$A_3 = A_1 \cap A_2$$

La intersección $\cap$ proporciona el subconjunto de elementos que tienen simultaneamente las propiedades de A_1 y de A_2.

Otra operación clásica que se realiza con los subconjuntos ordinarios es la «reunión» llamada también «unión» y corresponde al operador *y/o*, es decir, el uno, el otro o los dos. Si se recogen los ejemplos (2.10) y (2.11), se puede buscar el subconjunto A_4 tal que todo elemento que pertenezca a A_4 debe pertenecer a A_1 ó a A_2, o bien a los dos. Se observa que *a* pertenece a A_1 y a A_2, entonces *a* pertenece a A_4; *b* no pertenece ni a A_1 ni a A_2, entonces *b* no pertenece a A_4, y así sucesivamente. Se obtiene con ello:

(2.14) $A_4 =$

a	b	c	d	e	f	g
1	0	1	1	0	1	1

Se puede escribir mediante el símbolo $\cup$ el operador utilizado, por lo que queda:

(2.15) $$A_4 = A_1 \cup A_2$$

La reunión $\cup$ proporciona el subconjunto de elementos que tienen las propiedades de A_1 o las de A_2 o incluso de A_1 y de A_2.

Otra operación que no debe confundirse con la anterior, es «la suma disyuntiva» que corresponde al *o*, es decir, el uno, el otro, pero no los dos. Esto permite escribir para (2.10) y (2.11):

(2.16) $A_5 =$

a	b	c	d	e	f	g
0	0	1	0	0	1	0

Existe a veces una cierta confusión en los lenguajes naturales entre el «o» y el «y/o»; lo que trasladado al ambiente matemático puede conducir a resultados incorrectos. Se escribe mediante el símbolo $\oplus$ la operación realizada para la obtención de A_5:

(2.17) $$A_5 = A_1 \oplus A_2$$

La negación se introduce por la llamada operación de «complementación». Así, el complementario de A_1 se obtendrá como sigue:

a pertenece a A_1, entonces *a* no pertenece a A_6. Si A_6 es el complementario de A_1, *b* al no pertenecer a A_1, pertenece a A_6. *c* no pertenece a A_1, entonces *c* pertenece a A_6. Y así sucesivamente se obtiene:

	a	b	c	d	e	f	g
(2.18) $A_6 =$	0	1	1	0	1	0	0

Esta operación se indica mediante una barra encima del símbolo correspondiente al subconjunto considerado de la siguiente manera:

$$A_6 = \bar{A}_1 \tag{2.19}$$

A_6 posee las propiedades que no posee A_1, y A_6 no posee las propiedades que tiene A_1.

Así pues, cuando se hace referencia a un subconjunto vulgar es posible realizar la unión, la intersección, la complementación y todas las combinaciones que estos operadores permitan. Pero sin más porque no es posible realizar matizaciones. Y sin embargo éstas existen en los problemas de la empresa. En efecto, a través de los subconjuntos ordinarios se puede decir que una cosa es cara o es barata, pero el término caro no describe algo totalmente exacto. Se puede encontrar un producto que por 50 ptas. sea caro, y otro que por 500 ptas. no lo sea. Ahora bien, ¿cómo se puede analizar que un producto sea barato o caro?, ¿es posible que sea las dos cosas a la vez? La intersección entre barato y caro en la teoría de subconjuntos borrosos no es el vacío, como sucede en el ámbito de los subconjuntos vulgares.

Se puede observar también que en el lenguaje coloquial «no barato» no es exactamente igual que «caro», y también «no caro» no es igual que «barato», ya que existe una propiedad que puede expresarse como sigue: si en los subconjuntos vulgares de la intersección de un subconjunto y su complementario resulta el vacío, en el ámbito de la borrosidad, como consecuencia de los niveles de pertenencia, no puede afirmarse lo mismo. Es más, se puede realizar toda una serie de combinaciones que no es posible realizar utilizando la lógica booleana: muy caro, carísimo, y otras muchas, simplemente desplazando en un cierto sentido las funciones características de pertenencia.

Estos mismos operadores son utilizados en el ámbito de la borrosidad.

En efecto, si se parte del referencial (2.3) y se consideran los subconjuntos borrosos de E, tales como $\underset{\sim}{B}_1$ y $\underset{\sim}{B}_2$:

	a	b	c	d	e	f	g
(2.20) $\underset{\sim}{B}_1 =$	0.3	1	0.2	0	0.9	0.5	0.7

	a	b	c	d	e	f	g
(2.21) $\underset{\sim}{B}_2 =$	0.4	0.1	0	1	0.8	0.6	0.7

la intersección de estos dos conjuntos $\cap$ se realiza de la siguiente manera: el elemento *a* pertenece a $\underset{\sim}{B}_1$ con un nivel 0.3 y a $\underset{\sim}{B}_2$ con un nivel 0.4: se toma para $\underset{\sim}{B}_1 \cap \underset{\sim}{B}_2$ el nivel más pequeño, es decir 0.3. La justificación es simple: al nivel 0.3

y más bajo *a* pertenece a $\underset{\sim}{B}_1$ y a $\underset{\sim}{B}_2$ pero por encima sólo pertenece a $\underset{\sim}{B}_2$ hasta 0.4 y a niveles superiores a ninguno de los dos. Para *b* hay que tomar 0.1; para *c*, 0; para d, 0; para *e*, 0.8; etc... Así pues, se tendrá:

	a	b	c	d	e	f	g
$\underset{\sim}{B}_1 \cap \underset{\sim}{B}_2$ =	0.3	0.1	0	0	0.8	0.5	0.7

Generalizando, se podrá decir que: Dado un conjunto referencial E, la intersección entre $\underset{\sim}{B}_1$ y $\underset{\sim}{B}_2$ se obtendrá asignando a cada elemento el menor valor de la función característica de pertenencia en cada subconjunto borroso contenido a la vez en $\underset{\sim}{B}_1$ y $\underset{\sim}{B}_2$, es decir:

$$\forall\, x \in E: \qquad \mu_{\underset{\sim}{B}_1 \cap \underset{\sim}{B}_2}(x) = \mathrm{Min}\,(\mu_{\underset{\sim}{B}_1}(x),\ \mu_{\underset{\sim}{B}_2}(x))$$

cuando x $\in$ { a, b, c, d, e, f, g } en el ejemplo anterior, también se podrá escribir:

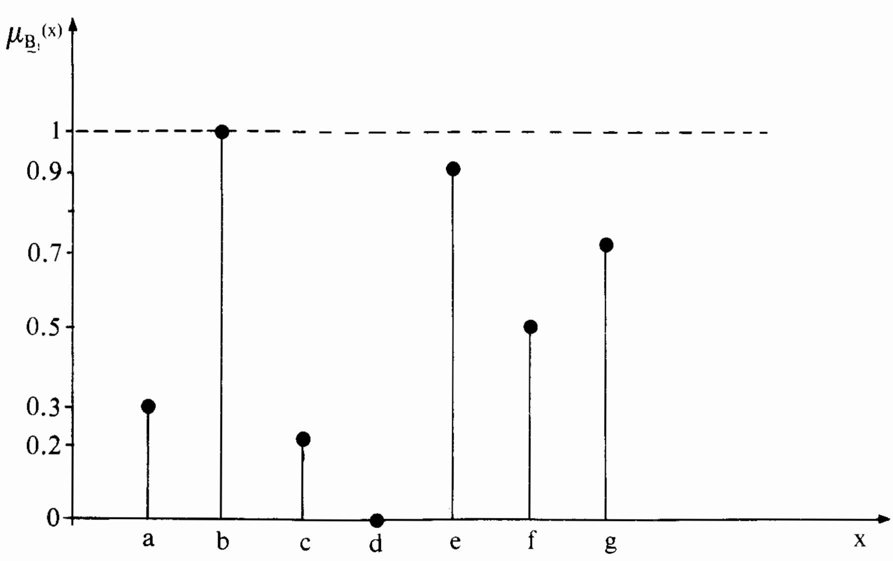
$\underset{\sim}{B}_1$ = { (a, 0.3), (b, 1), (c, 0.2), (d, 0), (e, 0.9), (f, 0.5), (g, 0.7) }

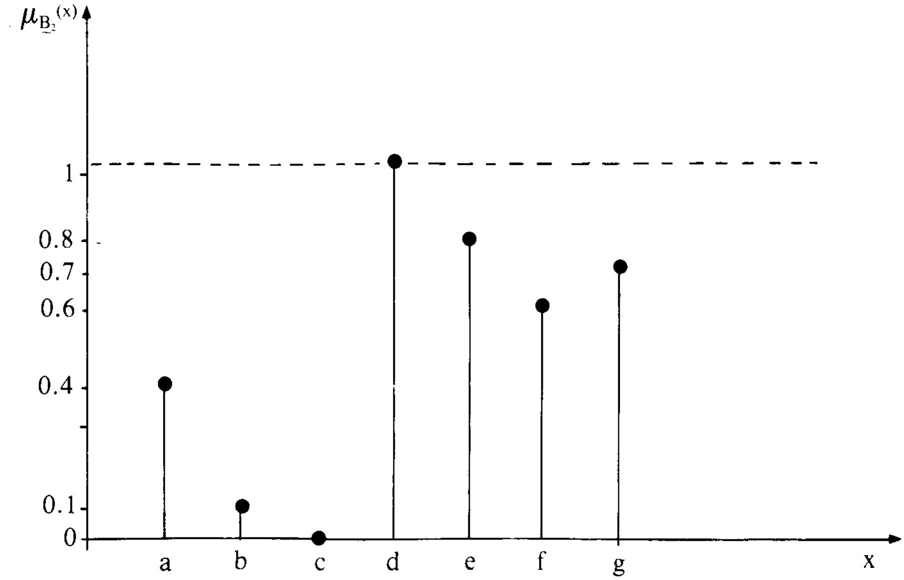
$\underset{\sim}{B}_2$ = { (a, 0.4), (b, 0.1), (c, 0), (d, 1), (e, 0.8), (f, 0.6), (g, 0.7) }

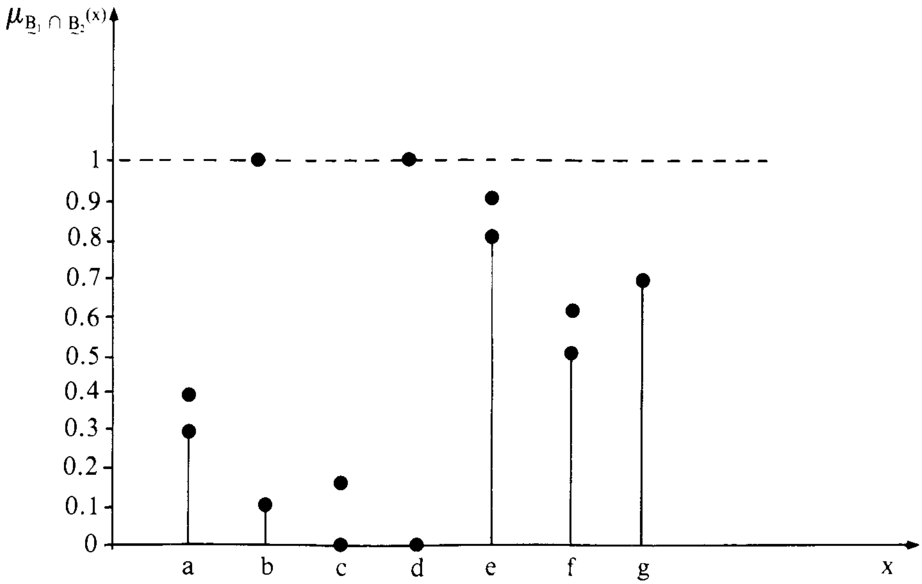
y también:

$\underset{\sim}{B}_1 \cap \underset{\sim}{B}_2$ = { (a, 0.3), (b, 0.1), (c, 0), (d, 0), (e, 0.8), (f, 0.5), (g, 0.7) }

Gráficamente podría expresarse así:




$\mu_{\underset{\sim}{B}_2}(x)$
1
0.8
0.7
0.6
0.4
0.1
0
a
b
c
d
e
f
g
x


$\mu_{\underset{\sim}{B}_1 \cap \underset{\sim}{B}_2}(x)$
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
a
b
c
d
e
f
g
x

La reunión $\cup$ se realizará escogiendo para cada elemento el mayor nivel de cada subconjunto. Así, para *a* será 0.4; para *b* será 1; etc..., con lo que se obtiene:

	a	b	c	d	e	f	g
$\underset{\sim}{B}_1 \cup \underset{\sim}{B}_2$ =	0.4	1	0.2	1	0.9	0.6	0.7

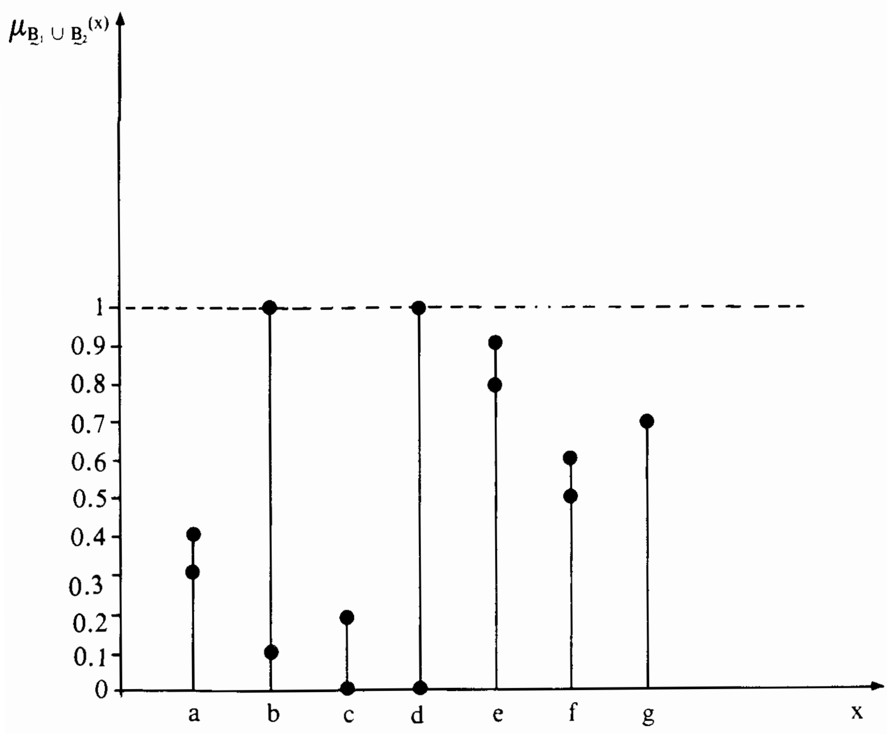
Generalizando, se puede establecer que: Dado un conjunto referencial E, la unión de $\underset{\sim}{B}_1$ y $\underset{\sim}{B}_2$ tiene lugar escogiendo para cada elemento el mayor valor de la función característica de cada subconjunto borroso, que contiene $\underset{\sim}{B}_1$ y $\underset{\sim}{B}_2$, es decir:

$$\forall x \in E \qquad \mu_{\underset{\sim}{B}_1 \cup \underset{\sim}{B}_2}(x) = \text{Max}\,(\mu_{\underset{\sim}{B}_1}(x),\ \mu_{\underset{\sim}{B}_2}(x))$$

dado el supuesto anterior, en que $x \in \{ a, b, c, d, e, f, g \}$ se podrá escribir:

$$\underset{\sim}{B}_1 \cup \underset{\sim}{B}_2 = \{ (a, 0.4), (b, 1), (c, 0.2), (d, 1), (e, 0.9), (f, 0.6), (g, 0.7) \}$$

y gráficamente:



Para realizar la complementación bastará recoger, para cada elemento, el complemento a la unidad en el valor de la función característica. Así el complemento de $\underset{\sim}{B}_1$ y de $\underset{\sim}{B}_2$ será, respectivamente:

$\overline{\underset{\sim}{B}}_1 =$

a	b	c	d	e	f	g
0.7	0	0.8	1	0.1	0.5	0.3

(2.24)

$\overline{\underset{\sim}{B}}_2 =$

a	b	c	d	e	f	g
0.6	0.9	1	0	0.2	0.4	0.3

Generalizando, se puede decir que:

$$\forall\ x \in E:\ \mu_{\overline{\underset{\sim}{B}}}(x) = 1 - \mu_{\underset{\sim}{B}}(x)$$

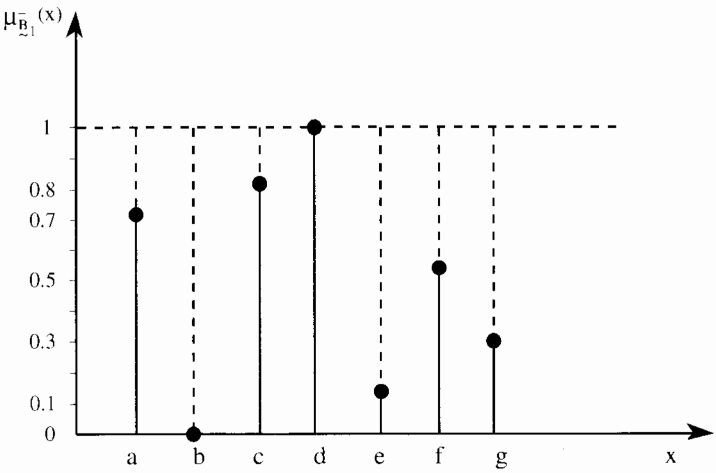
En el caso anterior se puede escribir también:

$$\overline{\underset{\sim}{B}}_1 = \{ (a, 0.7), (b, 0), (c, 0.8), (d, 1), (e, 0.1), (f, 0.5), (g, 0.3) \}$$

Resultará además evidente que:

$$\overline{\overline{\underset{\sim}{B}}}_1 = \underset{\sim}{B}_1$$

Gráficamente:



La suma disyuntiva de los subconjuntos borrosos, se define, a partir de la unión y la intersección, de la siguiente manera:

	a	b	c	d	e	f	g
$\underset{\sim}{B}_1 \cap \bar{\underset{\sim}{B}}_2$ =	0.3	0.9	0.2	0	0.2	0.4	0.3

	a	b	c	d	e	f	g
$\bar{\underset{\sim}{B}}_1 \cap \underset{\sim}{B}_2$ =	0.4	0	0	1	0.1	0.5	0.3

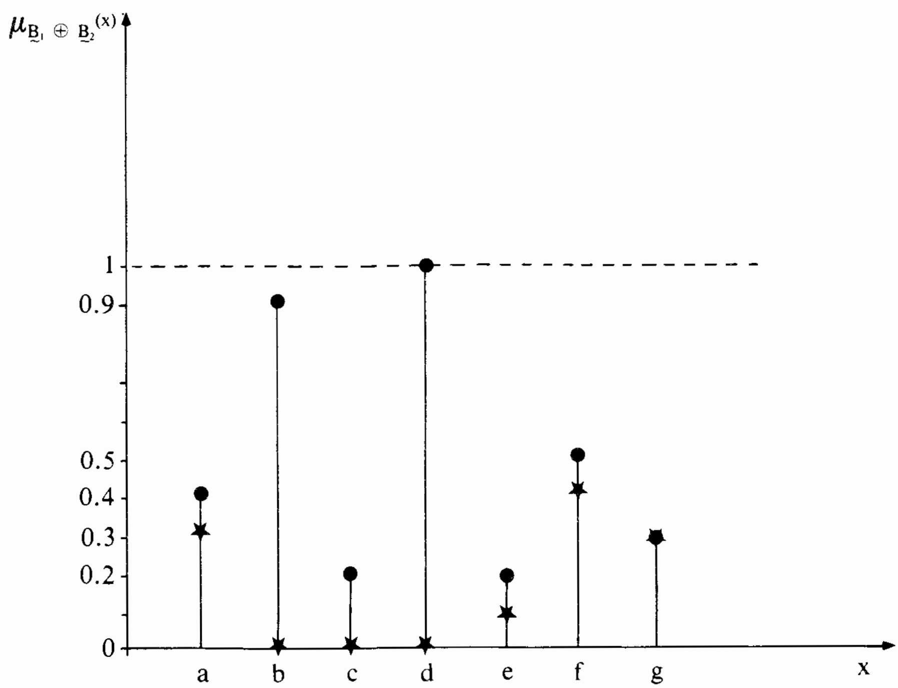
$$\underset{\sim}{B}_1 \oplus \underset{\sim}{B}_2 = (\underset{\sim}{B}_1 \cap \bar{\underset{\sim}{B}}_2) \cup (\bar{\underset{\sim}{B}}_1 \cap \underset{\sim}{B}_2) =$$

	a	b	c	d	e	f	g
=	0.4	0.9	0.2	1	0.2	0.5	0.3

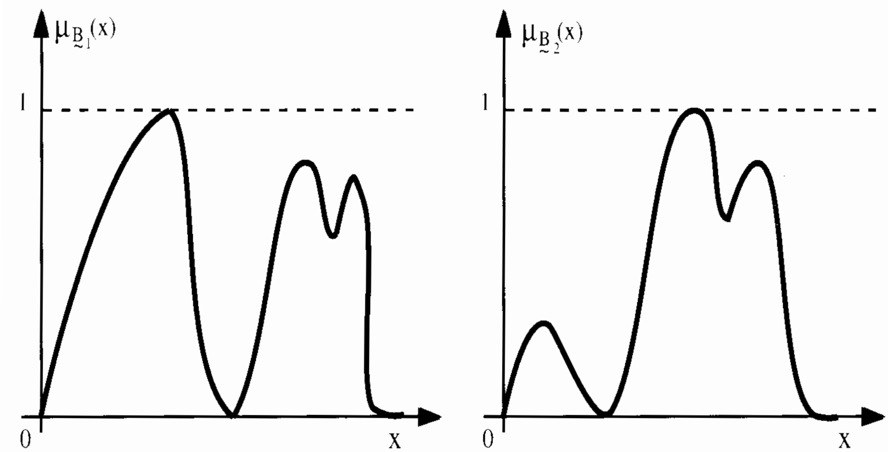
lo que se puede escribir también:

$\underset{\sim}{B}_1 \oplus \underset{\sim}{B}_2 = \{ (a, 0.4), (b, 0.9), (c, 0.2), (d, 1), (e, 0.2), (f, 0.5), (g, 0.3) \}$

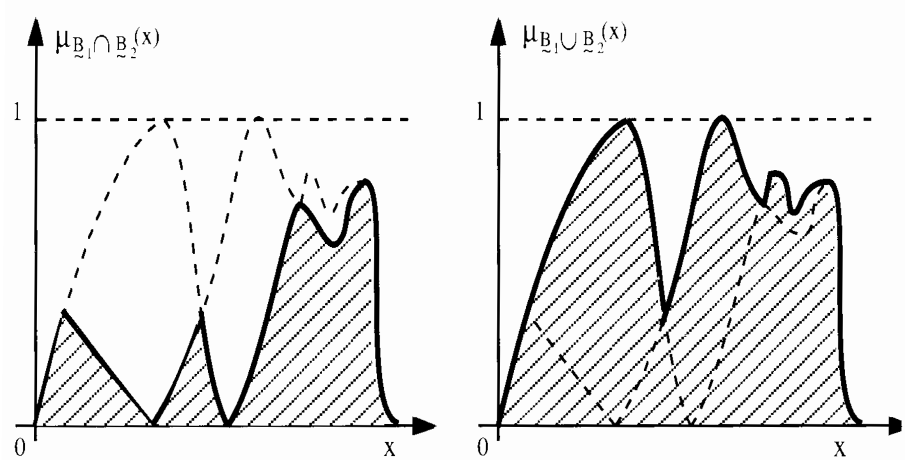
Gráficamente:



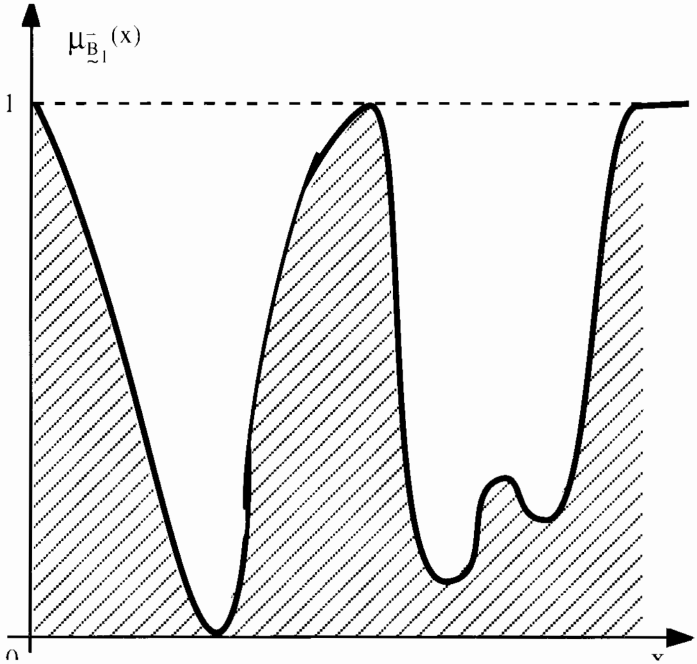
Cuanto se ha establecido hasta ahora para referenciales finitos, es también válido cuando el conjunto referencial es infinito. En este caso, se representa la evolución de los valores asignados a las funciones características de $\underset{\sim}{B}_1$ y $\underset{\sim}{B}_2$ en un sistema de coordenadas, de la siguiente manera:



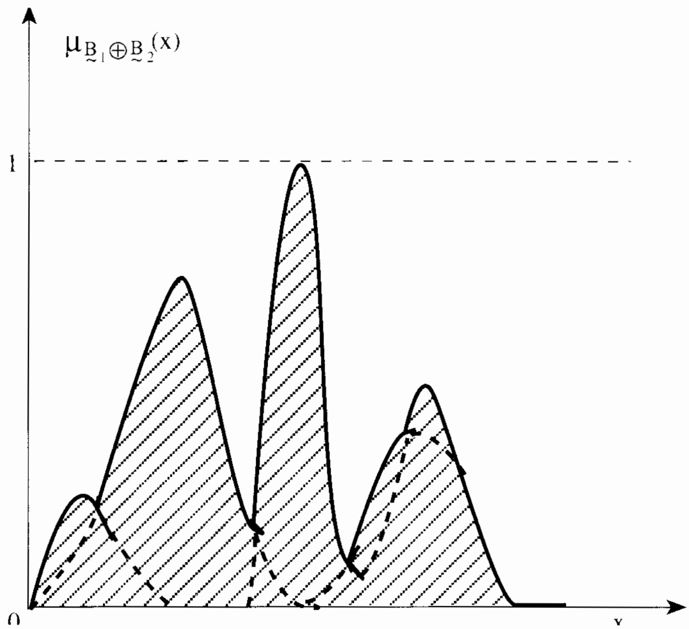
Resultará para la intersección y la unión, respectivamente:



Para la complementación:



Y, para la suma disyuntiva:



Medida y valuación

El concepto de *medida*, utilizado en teoría de conjuntos, significa un dato que es aceptado con carácter general porque se le supone *objetivo*. Teóricamente debe satisfacer determinadas propiedades entre las que se encuentra la «aditividad». Así, cuando se consideran dos subconjuntos vulgares A y B que son disjuntos (no poseen ningún elemento común) se puede escribir:

$$m\ (A \cup B) = m\ (A) + m\ (B)$$

En el campo de las probabilidades, la noción de medida adquiere toda su significación, ya que el «evento» constituye un concepto objetivo.

Sin embargo cuando se hace referencia a una «sensación» o «percepción» de tipo subjetivo que no es posible o no se sabe medir, se recurre a otro concepto: el de valuación, utilizado en la teoría de los subconjuntos borrosos.

Así, dados $\underset{\sim}{A}$ y $\underset{\sim}{B}$, si se supone que $\underset{\sim}{A}$ está incluido en $\underset{\sim}{B}$, es decir, que para cada elemento el nivel de pertenencia es siempre igual o mayor en $\underset{\sim}{B}$ que en $\underset{\sim}{A}$, se podrá escribir que, dado que $\underset{\sim}{A}$ se halla incluido en $\underset{\sim}{B}$:

$$v\ (\underset{\sim}{A}) \leqslant v\ (\underset{\sim}{B})$$

Como puede observarse, esta propiedad se sustenta en el concepto subjetivo de *sensación*.

Con demasiada frecuencia en el lenguaje diario, se confunden las nociones azar e incertidumbre y las de probabilidad y posibilidad.

En efecto, resulta muy normal, cuando se encuentran dos amigos, oír la expresión: «tenía pocas probabilidades de encontrarte aquí». Se ha utilizado la palabra *probable*, y esto indicaría que se ha vigilado durante un período suficiente de tiempo las veces que ha pasado por aquella calle y las que no ha pasado y se ha realizado una pequeña estadística para poder decir que la probabilidad estaba allí. Cuando se pronuncia la palabra azar se sobreentiende que existe una ley de probabilidad. La palabra adecuada hubiera sido *posibilidad* y en lugar del azar se debiera hacer referencia a la incertidumbre. Se trata de errores etimológicos cuando no semánticos.

Se habla de una probabilidad cuando es posible realizar una medida, pero cuando ello no resulta factible se puede recurrir a la posibilidad. En matemáticas existe una teoría de la posibilidad de la misma manera que existe una teoría de la probabilidad y aunque son distintas se pueden asociar en muchos casos. En efecto, cuando se reciben en una empresa determinados datos relativos a futuras ofertas de materias primas, es posible que una parte de esta información sea objetiva y por tanto mensurable, mientras que otra se halle basada en sensaciones. En realidad es poco frecuente que los datos de las magnitudes empresariales relativos al futuro puedan tener una medida.

Existe un solo concepto de probabilidad; en cambio existen una infinidad de conceptos de valuación. El profesor ZADEH utiliza una valuación denominada «posibilidad».

Si se considera el referencial (2.3) y se designa por $\underset{\sim}{H}$ un subconjunto borroso de E llamado «subconjunto borroso de comparación», también designado «ley de posibilidad», tal como el siguiente:

	a	b	c	d	e	f	g
$\underset{\sim}{H}$ =	0.3	0.8	0	1	0.4	0.2	0.5

Dado, ahora, un subconjunto $\underset{\sim}{A}$ de E:

	a	b	c	d	e	f	g
$\underset{\sim}{A}$ =	0.7	0.4	0.6	0.2	0	0.9	0.2

al realizar la intersección $\underset{\sim}{A}$ y $\underset{\sim}{H}$, resulta:

	a	b	c	d	e	f	g
$\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{H}$ =	0.3	0.4	0	0.2	0	0.2	0.2

La «posibilidad» de $\underset{\sim}{A}$ para la «ley» $\underset{\sim}{H}$ vendrá determinada por el máximo nivel obtenido en $\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{H}$. En el supuesto anterior resultará:

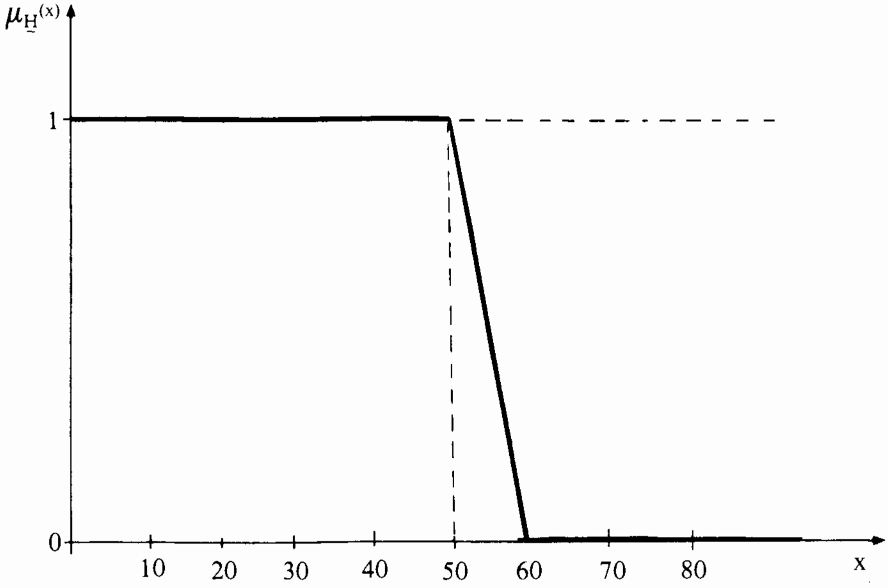
$$v_{\underset{\sim}{H}} (\underset{\sim}{A}) = \text{Max } (0.3, 0.4, 0, 0.2, 0, 0.2, 0.2) = 0.4$$

Desde un punto de vista general la noción de posibilidad podrá expresarse, siendo $\mu_H(x)$ la función característica de pertenencia para $\underset{\sim}{H}$ y $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)$ la correspondiente a $\underset{\sim}{A}$, de la siguiente manera:

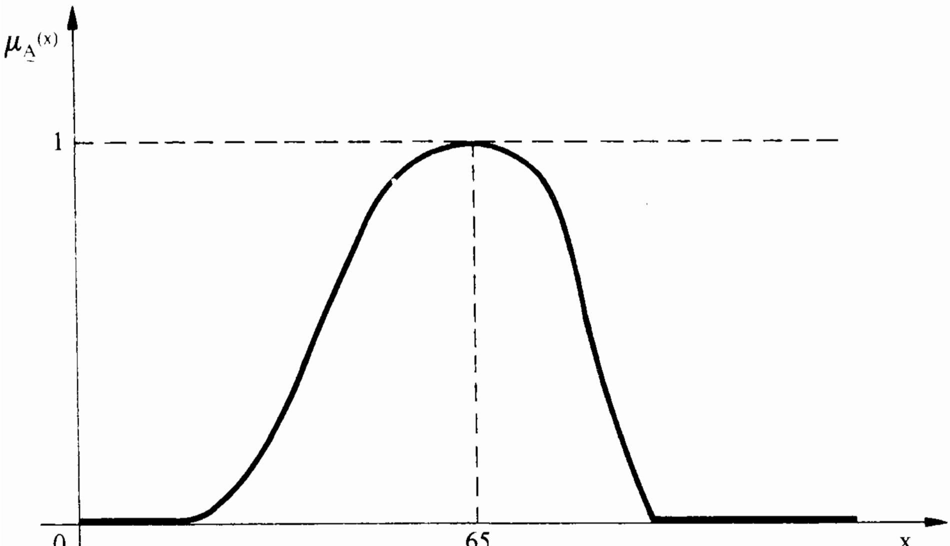
$$v_{\underset{\sim}{H}} (\underset{\sim}{A}) = \text{Max } \mu_{\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{H}}(x)$$

Las empresas presentan multitud de situaciones en las que puede resultar útil el empleo de este concepto. Así, ante la perspectiva de una oferta por parte de un proveedor en la que se especifica calidad y cantidad de una materia prima, la conveniencia de aceptarla no se plantea, normalmente, de una manera rígida en relación a su precio (hasta 50 sí, más de 50 no), sino que puede existir una cierta flexibilidad, a través de una gradación en el interés de aceptarla. Así, se puede establecer que hasta 50 la pertenencia es total (se acepta la oferta) y a un precio superior a 60 también es nítida la no pertenencia (rechazo de la oferta), pero las situaciones intermedias pueden ser estudiadas de acuerdo con una cierta gradación de interés.

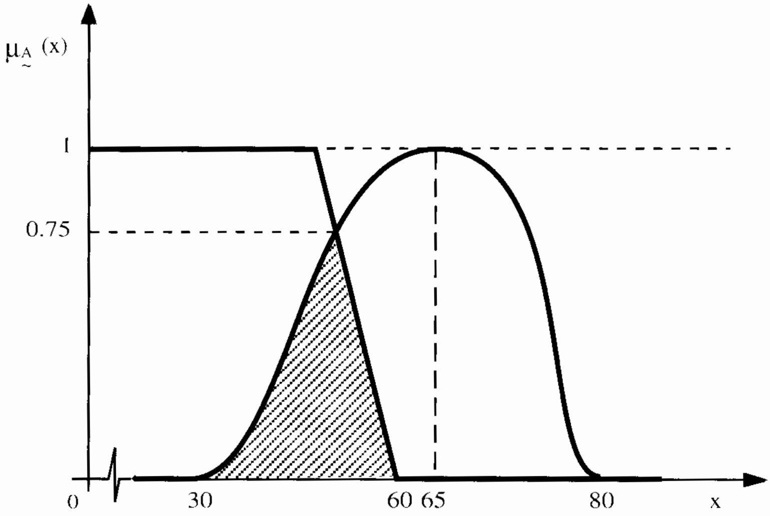
En este caso, la «ley de posibilidad» puede ir representada así:



Si se representa ahora un subconjunto borroso $\underset{\sim}{A}$ relativo a las sensaciones de la oferta que va a recibirse:



Se puede representar $\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{H}$ de la siguiente manera:



en donde se observa que el máximo de $\mu_{\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{H}}(x)$ en relación a x es 0.75, que constituye la posibilidad de $\underset{\sim}{A}$ en relación a la ley $\underset{\sim}{H}$.

Esta ley representa el umbral que no puede traspasar, de una manera borrosa el subconjunto $\underset{\sim}{A}$; se trata de la posibilidad de $\underset{\sim}{A}$ para la ley $\underset{\sim}{H}$.

Hay que tener en cuenta que la ley de posibilidad $\underset{\sim}{H}$ representada no es más que un caso concreto y es posible cualquier generalización a una forma distinta con la condición de que por lo menos un valor $\mu_{\underset{\sim}{H}}(x)$ ha de ser igual a la unidad.

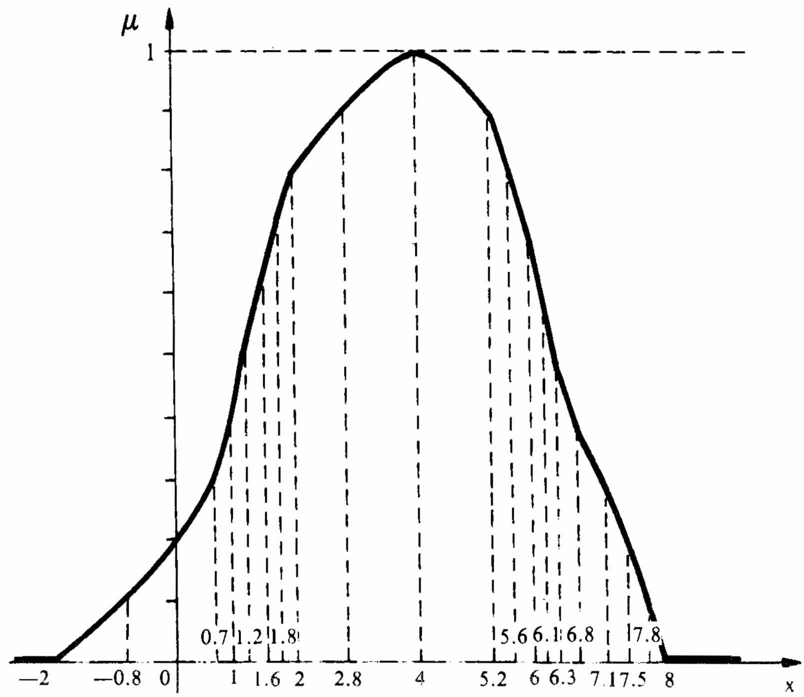
Finalmente se puede afirmar que el concepto de valuación desempeña un papel paralelo en el campo de la borrosidad, que el que juega la esperanza matemática en el campo de las probabilidades.

Los números borrosos

En el ámbito de la gestión de las empresas se han utilizado tradicionalmente números exactos: el balance presenta unos beneficios de 2 millones; la facturación para el próximo mes será de 600 mil unidades monetarias. Recientemente se ha intentado construir una teoría de los números borrosos que permite una cuantificación de la fenomenología real más acorde con la estructura del pensamiento humano.

Se define un número borroso como un subconjunto borroso del referencial de los reales, que tiene una función de pertenencia normal (debe existir una x_i para la que $\mu(x)$toma el valor uno) y convexa (cualquier desplazamiento a la derecha e izquierda de este valor x_i, $\mu(x)$ va disminuyendo).

Un número borroso puede ser representado a través de los segmentos formados al «cortar» (asignar un valor) la función de pertenencia a unos determinados niveles. En efecto, si se representa, de la siguiente manera, un número borroso:



podrá escribirse así:

$\alpha = 1$	$A_1 = [4 \quad , 4 \;]$
$\alpha = 0.9$	$A_{0.9} = [2.8 \quad , 5.2]$
$\alpha = 0.8$	$A_{0.8} = [2 \quad , 5.6]$
$\alpha = 0.7$	$A_{0.7} = [1.8 \quad , 6 \;]$
$\alpha = 0.6$	$A_{0.6} = [1.6 \quad , 6.1]$
$\alpha = 0.5$	$A_{0.5} = [1.2 \quad , 6.3]$
$\alpha = 0.4$	$A_{0.4} = [1 \quad , 6.8]$
$\alpha = 0.3$	$A_{0.3} = [0.7 \quad , 7.1]$
$\alpha = 0.2$	$A_{0.2} = [0 \quad , 7.5]$
$\alpha = 0.1$	$A_{0.1} = [-0.8, 7.8]$
$\alpha = 0$	$A_0 = [-2 \quad , 8 \;]$

Como puede observarse, a medida que el «nivel de presunción» α disminuye, los segmentos obtenidos se encajan progresivamente. La teoría de los números borrosos puede considerarse como una ampliación de la teoría de los intervalos de confianza, cuando se consideran estos intervalos a todos los niveles desde 0 hasta 1, en lugar de considerar un solo nivel.

Si se consideran los niveles de pertenencia 0.1, 0.2, ..., 0.9 y 1 para especificar un número borroso entero, se pueden encajar, por superposición, los «intervalos de confianza». Veámoslo en un nuevo ejemplo:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
α = 1				1	1				
α = 0.9				1	1	1			
α = 0.8				1	1	1			
α = 0.7			1	1	1	1			
α = 0.6			1	1	1	1			
α = 0.5			1	1	1	1	1		
α = 0.4			1	1	1	1	1		
α = 0.3			1	1	1	1	1		
α = 0.2		1	1	1	1	1	1		
α = 0.1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Esto permite escribir:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.1	0.2	0.7	1	1	0.9	0.5	0.1	0.1

Con lo que se ha obtenido un número entero borroso a partir de los niveles de pertenencia, llamados también «niveles de presunción», desde $\alpha = 1$ hasta $\alpha = 0.1$. Es evidente que al nivel $\alpha = 0$ es válido cualquier número entero.

También es posible, a partir de un número borroso, conocer los intervalos de confianza, para cada uno de los niveles desde 0.1 hasta 1 para un determinado número borroso, tal como el siguiente:

4	5	6	7	8	9	10	11	12
0.1	0.2	0.7	0.9	1	0.8	0.7	0.4	0.1

Se obtiene:

	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\alpha = 0.1$	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\alpha = 0.2$		1	1	1	1	1	1	1	
$\alpha = 0.3$			1	1	1	1	1	1	
$\alpha = 0.4$			1	1	1	1	1	1	
$\alpha = 0.5$			1	1	1	1	1		
$\alpha = 0.6$			1	1	1	1	1		
$\alpha = 0.7$			1	1	1	1	1		
$\alpha = 0.8$				1	1	1			
$\alpha = 0.9$				1	1				
$\alpha = 1$					1				

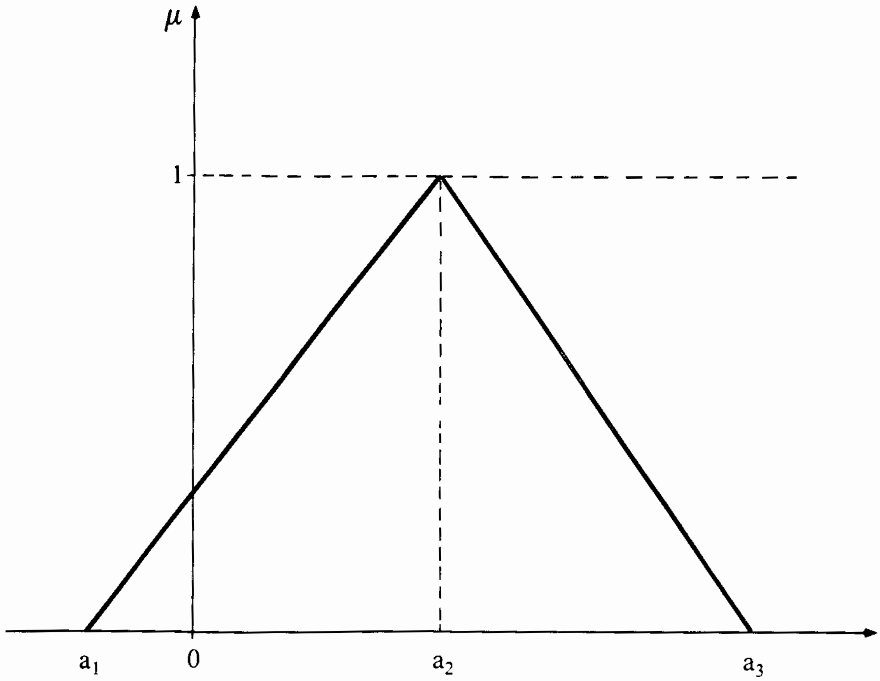
De todo ello se deduce que un número borroso se caracteriza por los pares «nivel de presunción», «intervalo de confianza», ya que a cada nivel de presunción se le adscribe un intervalo de confianza.

Para realizar operaciones con números borrosos se actúa de la misma manera que con los números reales ordinarios, operando nivel por nivel tal como se hace con los intervalos de confianza.

Se recordará, por ejemplo, que en la teoría de los intervalos de confianza, la suma, la resta, la multiplicación y la división se realizan de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
&[2,\ 6]\ (+)\ [4,\ 9] = [2+4,\ 6+9] = [6,\ 15]\\
&[3,\ 5]\ (-)\ [4,\ 8] = [3-8,\ 5-4] = [-5,\ 1]\\
&[4,\ 7]\ (\cdot)\ [3,\ 6] = [4 \cdot 3,\ 7 \cdot 6] = [12,\ 42]\\
&[5,\ 12]\ (:)\ [4,\ 10] = [5/10,\ 12/4] = [0.5,\ 3]
\end{aligned}
$$

De entre todos los números borrosos aparece, por su facilidad de utilización, el *número borroso triangular* cuya singularidad consiste en que se halla determinado por tres cantidades: una por debajo de la cual no va a descenderse, otra en la que por encima no será posible llegar, y finalmente, aquella que representa el máximo nivel de presunción. La representación gráfica del número borroso triangular (a_1, a_2, a_3) queda reflejado, en un sistema de coordenadas, de la siguiente manera:



El número borroso triangular permite formalizar de manera muy fidedigna gran cantidad de situaciones de la empresa en la que se estiman magnitudes localizadas en el futuro. Así, en la estimación del coste de un producto a elaborar, es frecuente pensar que su precio no va a ser inferior a 40 ni superior a 70, siendo el precio que tiene la máxima posibilidad 55 unidades monetarias: se ha definido en el campo de la incertidumbre un número borroso triangular.

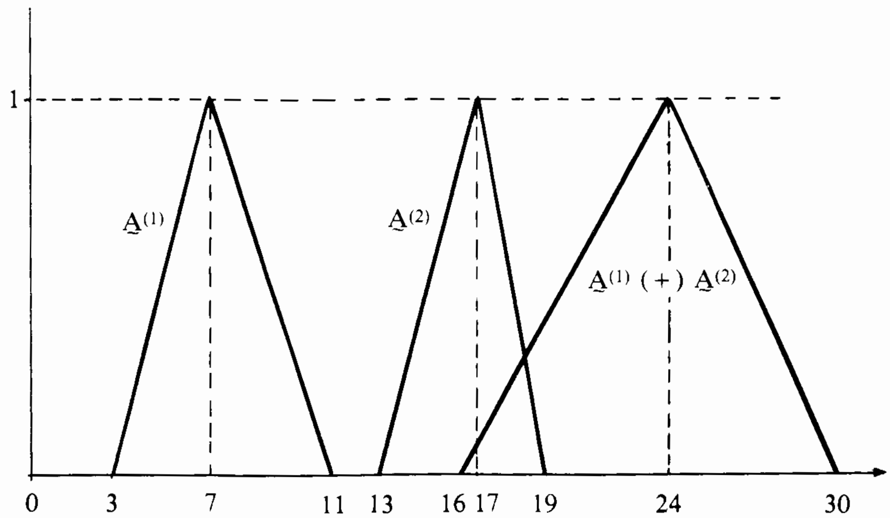
Dado que en el ámbito de la economía y gestión de las empresas se estudian problemas cuyas magnitudes se proyectan hacia el futuro, no exigen, frecuentemente, una extrema precisión sino la mayor adaptación posible a la realidad. Un presupuesto no precisa de una exactitud al céntimo sino que refleje lo que va a suceder en la realidad con una «buena aproximación». Una estimación de ventas para un período no puede realizarse de una manera totalmente rígida, pues hay demasiados elementos que influyen en ella. Los ejemplos surgen a millares. En actividades repetitivas, el camino de la probabilidad resulta altamente fructífero, pero en la gestión de las empresas, la repetitividad constituye la excepción. De ahí el interés en la utilización de los números borrosos en general y de los triangulares en particular.

Con los números borrosos triangulares se realizan las operaciones habituales en los números ordinarios, tales como sumas, restas, etc... Así, dados (a_1, a_2, a_3) y (b_1, b_2, b_3) se obtendrá:

$$(a_1, a_2, a_3)\ (+)\ (b_1, b_2, b_3) = (a_1+b_1,\ a_2+b_2,\ a_3+b_3)$$

y así sucesivamente. Ahora bien, cuando se realizan productos y divisiones los resultados constituyen una aproximación triangular, dado que el número borroso resultante ha quedado deformado.

Si se consideran dos números borrosos triangulares (3, 7, 11) y (13, 17, 19) la suma sería (16, 24, 30), lo que podría representarse así:



Se podría observar que, a medida que se van realizando operaciones tales como sumas, restas,... los números borrosos se van ensanchando en términos absolutos, aunque no se produce un aumento de la desviación relativa.

LOS PRESUPUESTOS EN LA EMPRESA

CAPITULO III

LOS PRESUPUESTOS EN LA EMPRESA

La planificación en la gestión de empresas

Uno de los conceptos más importantes que intervienen en el ámbito de estudio de la gestión de empresas es el de la eleccción. Pero la elección exige, en la generalidad de los casos, unos cálculos relativos a magnitudes situadas en el futuro. De ahí que surja la necesidad de elaborar un proceso de planificación. Se atribuye al economista austríaco MAYER la introducción del concepto de *plan* en el ámbito de los estudios económicos, por primera vez, en 1925.

El concepto de planificación ha sido asociado frecuentemente con el de intervención. En sentido general se entiende por *intervención* una actuación en un ámbito cualquiera. Dentro de la gestión de empresas la intervención, en este sentido tan amplio, recoge aspectos tales como la organización de la empresa, la estimación de los costes de compra de materias primas, la elaboración de un presupuesto, etc. Este concepto agrupa pues, hechos y fenómenos tan diversos que no es suficiente para dar una idea exacta de lo que significa planificar.

En otro orden de ideas y desde un punto de vista ético-moral, el resultado de la intervención económica puede desembocar en cuestiones tan diversas como son la formación de una coalición oligopolista y el establecimiento de un sistema de incentivos para conseguir tiempos mínimos.

La planificación en la empresa constituye una forma de intervención a través de una normativa destinada a la solución de determinados problemas, que aporta, a la vez, una estructura y una descripción del funcionamiento de ciertos órganos de la misma. Así como *la intervención económica* consiste en una actuación racional, la planificación, concepto más restringido, penetra en la misma realidad económica en sus dos dimensiones, funcionalidad y estructura, mediante una actuación sistemática. La introducción de la planificación en las disciplinas que estudian la empresa ha dado lugar a un cambio importante en la perspectiva de algunos problemas que la empresa tenía planteados.

Entre los elementos de la empresa que se han visto más afectados por este cambio, destaca el relativo a la *información.* No es posible olvidar que la decisión de planificar lleva consigo la necesidad de disponer de un conjunto de datos. El trabajo planificador presupone un conocimiento de los fenómenos no sólo en el aspecto cualitativo sino también cuantitativamente. Este conocimiento sirve, y esto es quizás lo más importante, para anticipar una información, base del establecimiento de los planes que se irán contrastando a medida que se avance en la materialización de los mismos.

Así pues, la actuación planificadora en la empresa implicará el establecimiento de una corriente de información que desciende desde los órganos rectores de la dirección hasta las unidades orgánicas de los estratos más bajos. Desde un punto de vista práctico se parte de un orden inicial que se transmite a cada uno de los eslabones en sentido descendente, de tal manera que las directrices iniciales van tomando forma específica en cada dependencia.

Una vez plasmados los planes son discutidos, adoptados o transformados. Cuando son aprobados adquieren la categoría de obligación ejecutiva para aquellos sectores de la empresa a los que van destinados.

Es como consecuencia de una amplia confrontación entre datos económicos, situaciones técnico-administrativas y proyectos del empresario, que es posible elaborar este instrumento fundamental en el estudio económico de la empresa.

Desde un punto de vista general la elaboración de los planes en la empresa consiste en adecuar formalmente los futuros acontecimientos de tal manera que éstos queden alterados por el esquema teórico y resulte un acontecer económico dirigido.

Por otra parte, y también paralelamente a lo ocurrido en el ámbito macroeconómico, como consecuencia de esta intervención sistemática que es la planificación, algunos conceptos clásicos utilizados en el estudio de la empresa han experimentado un cambio de perspectiva sin llegar, desde luego, a modificar su significado íntimo.

Esta evolución se puede observar en el concepto de beneficio. El «beneficio», cuando las magnitudes económicas se hallan sujetas a unos planes, queda establecido partiendo de un *precio de coste.* A este importe se le añade un *beneficio estimado,* dando lugar a un precio de venta que sin embargo podrá o no ser tenido en cuenta según las necesidades del mercado.

Este beneficio fijado «ex ante» y dado como idóneo será comparado con el que realmente se produce al finalizar un ejercicio. Los beneficios efectivos de la empresa dependen principalmente de una estimación apriorística y de unas desviaciones.

Conocido es, por otra parte, que en la Teoría Económica clásica el beneficio puede ser consecuencia o bien de la imperfección del mercado o de una fricción en el sistema económico.

Los procedimientos de control y corrección de los planes llevan inherentes un análisis dirigido a poner de manifiesto la gama de desviaciones que con respecto a la previsión se ha producido.

Para poner de manifiesto la importancia de los procesos de control y corrección que constituyen la tarea última de la planificación es necesario considerar dos características importantes:

1.—La plaza fundamental que en la planificación de la empresa adquiere el establecimiento de situaciones «físicas» que describen relaciones reales dentro de cada uno de los órganos de la misma: Compras, Producción, Ventas, etc... Con esta base se impone la necesidad de realizar un control físico.

2.—El establecimiento de los planes no queda reducido a una simple enumeración de las relaciones físicas existentes dentro de cada centro orgánico, sino que deben ser traducidas en términos monetarios.

Los estudios clásicos de la empresa describen, en general, las relaciones entre magnitudes monetarias. Cuando se procede a la planificación en el ámbito empresarial se dirige además la atención a las magnitudes físicas: adquiridas, producidas y distribuidas. Surge pues, al lado de un *equilibrio monetario*, también un *equilibrio físico*. La coordinación entre los elementos físicos y monetarios adquiere de esta manera una importancia primordial.

En el ámbito microeconómico el plan constituye un instrumento sintetizador de la vida económica empresarial. Si el plan queda integrado monetariamente en un presupuesto general, entonces el balance abarcará a la vez el resultado de los planes de aprovisionamiento, de producción, de ventas, etc...

La planificación y el control aplicados a la empresa han permitido independientemente de su función estrictamente práctica, una renovación de los conceptos y sistemas cuyos frutos han sido muy estimados en los últimos años.

El establecimiento de los presupuestos en la empresa

El proceso de planificación en la empresa es una de las tareas más importantes que se plantean en el ámbito económico-financiero de la misma. Y esta importancia se pone de manifiesto por cuanto la empresa precisa estimar sus necesidades globales de medios financieros con los cuales hacer frente a los desembolsos que deberán producirse por la realización de su actividad. Muchos han sido los esquemas que se han elaborado para intentar una estimación lo más adecuada posible a la realidad.

Existe una innegable relación entre las necesidades de activos por parte del empresario y el volumen de ventas que se estima realizará la empresa a lo largo de los ejercicios futuros. Es evidente también, que una empresa en expansión precisa de nuevas inversiones con objeto de aumentar su capacidad total necesaria para ampliar su proceso productivo y por tanto ofrecer unos productos susceptibles de ser posteriormente vendidos. Ahora bien, estas inversiones precisan de una adecuada financiación y ésta, en la mayor parte de las ocasiones, no puede ser obtenida a través de los excedentes normales de la propia empresa, sino que resulta imprescindible recurrir a fuentes de financiación externas. Estos medios financieros tienen un precio, que viene dado por los tipos de interés.

Pero además de estas necesidades a largo plazo, existen también unas necesidades de medios monetarios a plazo corto, que provienen, principalmente, de la actividad normal de la empresa la cual viene condicionada en un grado cada vez más elevado, por elementos externos a la propia empresa, como pueden ser los procesos de inflación del sistema económico e incluso las variaciones en los gustos de los consumidores, que pueden provocar la necesidad de cambiar los productos que la empresa fabrica. Así pues, independientemente de la importancia que adquieren los presupuestos a largo plazo, se establecen también los llamados presupuestos a corto plazo o presupuestos de efectivo, como son denominados en la práctica financiera.

Los presupuestos de la empresa pueden ser considerados como unos planes financieros. La planificación financiera existe de una manera expresa o tácita en todos los núcleos sociales. Así, una familia establece en cierto modo un presupuesto cuando determina cuáles son sus ingresos y cómo utilizará estos ingresos en los diversos canales de gastos, tales como la alimentación, la educación de los hijos, la vivienda, la diversión, la compra de bienes de uso duradero (televisores, neveras, coches, etc.) e incluso cuando establece que una parte residual pase a ser ahorrada. De una manera semejante los Estados también elaboran sus presupuestos de ingresos y gastos en los cuales aparecen, por una parte las fuentes de financiación, concretadas principalmente en impuestos y otros ingresos y unos presupuestos de gastos en distintas áreas tales como Defensa, Educación, Agricultura, Industria, Cultura, etc.

De la misma manera las empresas pueden elaborar un plan en el que aparezcan cuantificados conceptos que sirvan para obtener unos medios financieros con los que hacer frente a los costes de la empresa por la utilización de mano de obra, por la compra de materias primas, por la asunción de unos gastos generales y por la adquisición de unos bienes de equipo que serán adscritos, contablemente, a las cuentas del inmovilizado.

Si inicialmente el presupuesto se había concebido como un instrumento dirigido a la limitación de los gastos que se producen en la empresa, en la actualidad su objetivo es mucho más amplio ya que con él se pretende, además, la utilización más racional, y, por tanto, mejor desde el punto de vista económico, de los recursos que la empresa dispone para atender las necesidades de cada una de sus áreas. La actividad presupuestaria se ha convertido en un importante instrumento destinado a mejorar la actividad de la empresa y conseguir que los trabajos realizados en el seno de la misma tengan una mejor coherencia con los objetivos que se pretenden alcanzar.

Para la elaboración de un presupuesto se precisan unas determinadas normas de actuación. Esta normativa inherente al presupuesto debe establecerse de manera rigurosa pero realista, ya que el establecimiento de unos presupuestos «ideales» puede llevar a un desencanto, a una frustración y a un sentimiento de fracaso por parte de los elementos que deben llevar a cabo las funciones encaminadas al cumplimiento de las actividades programadas. En el otro extremo, cuando se establece un presupuesto sin ninguna ambición se provoca una falta de incentivos y la ineficacia de los instrumentos de control que lo hacen totalmente supérfluo.

El presupuesto permite estimar generalmente, con la debida antelación, los cambios que la empresa precisa para poder conseguir sus objetivos y mantener unas perspectivas de futuro. Al constituir el presupuesto una síntesis de los valores entre los que deberá moverse la empresa, permite, además, una mejor comprensión del funcionamiento de la misma, lo que a la larga puede mejorar su capacidad para la consecución de sus objetivos.

Las tareas encaminadas a la realización de un presupuesto llevan aparejados unos trabajos de análisis que frecuentemente conducen a un aumento de la coordinación interna, ya que permiten separar tareas que, sin estos estudios, son muchas veces realizadas por más de un centro de decisión de una misma sociedad.

En cada una de las actividades de la empresa: inversión, producción, personal, financiera, de mercado, las decisiones englobadas en el ámbito presupuestario ejercen una influencia decisiva en los beneficios que la empresa pretende conseguir. De ahí la importancia que adquieren. A través de los presupuestos se consigue obtener una estimación del balance general de la sociedad para los períodos futuros y una cuenta de explotación con el estado de pérdidas y ganancias previstas.

La asignación de valores para obtener un presupuesto se inicia normalmente expresando los objetivos que se pretenden obtener. Estos objetivos se acostumbran a establecer a largo plazo, partiendo de una previsión de ventas en la cual se determinan la cantidad y los tipos de producto que se van a fabricar en los períodos que abarca el proceso planificador. En base a esta planificación a largo plazo, se formulan los presupuestos a corto plazo.

Es evidente que las ventas estimadas darán lugar a la necesidad de realizar determinadas inversiones que deben ser financiadas a través de la corriente de cobros esperada, así como por el recurso a la financiación externa.

La comparación entre el presupuesto y las magnitudes reales dará lugar a unas desviaciones que pueden ser debidas a dos tipos de causas: unas externas como consecuencia de elementos que inciden en el sistema económico en general y otras internas debidas al propio funcionamiento de la empresa. Este segundo aspecto permite un mejor control por parte de los elementos rectores de la misma. Es probablemente por esta doble influencia que han nacido los llamados presupuestos flexibles en los cuales a distintos niveles de venta y por tanto de producción, se producirán distintos volúmenes de gastos. En este caso, una empresa puede autorizar un desembolso distinto para cada nivel alternativo de ventas. Se trataría entonces de determinar, entre los diversos presupuestos alternativos, aquél que debe ser considerado para el período correspondiente. La base sobre la que se apoyan los partidarios de los presupuestos flexibles se halla en su capacidad de ser modificados cuando cambian las circunstancias.

Aquellos presupuestos que se elaboran tomando como base los datos registrados en los períodos anteriores ocultan frecuentemente ineficiencias, habida cuenta de que incorporan unos gastos existentes anteriormente que se arrastran a los años siguientes, dando lugar a desembolsos no deseables. Es por ello que, en los últimos años, ha alcanzado gran expansión una nueva técnica de elaboración de los presupuestos de la empresa denominada PRESUPUESTO BASE CERO (PBC).

El Presupuesto Base Cero (P.B.C.)

Uno de los problemas más importantes que se señalan al enjuiciar los presupuestos tradicionales, se refiere al hecho de que por tener sus raíces en situaciones precedentes y constituir sus datos una proyección de éstas hacia el futuro, se recogen de alguna manera todas las deficiencias e ineficiencias que han existido en períodos anteriores. El Presupuesto Base Cero pretende eliminar, entre otros, este inconveniente. Para ello establece, como principio, la necesidad de justificar cualquier tipo de desembolso que puede tener lugar en el futuro, rehusando tomar como base presupuestos de años anteriores y así «partir de cero».

Nace esta técnica en 1970 de la mano de Peter PYHRR, pero su desarrollo tiene lugar unos años más tarde siendo necesarios cinco o seis años para que conozca una cierta expansión. Los objetivos principales que se pretenden alcanzar a través del P.B.C. no difieren excesivamente de las metas buscadas por los presupuestos clásicos, es decir, establecer un proceso de planificación, conseguir una mejor asignación de los recursos, llevar los gastos a su dimensión adecuada, y, evidentemente, mejorar la actividad decisional de las empresas.

Para que un presupuesto elaborado según los modelos tradicionales pueda ser considerado coherente, debería cumplir las siguientes condiciones:

1.º) que todas las actividades de la empresa sean igualmente importantes para el normal funcionamiento de la misma;

2.º) que en el futuro se siga con el mismo grado de eficiencia que en épocas anteriores y

3.º) que la asignación de recursos se haya realizado de una manera adecuada.

Es evidente que, en la actualidad, las empresas se mueven en un contexto en el cual los cambios se producen con una gran rapidez y el futuro no puede vislumbrarse como una simple proyección del pasado. De ahí que se haya llegado a la conclusión de que el presupuesto elaborado de acuerdo con los esquemas clásicos no puede ser aceptado en la realidad de las empresas actuales.

Es por ello que los principios en los que se asienta el Presupuesto Base Cero son distintos. Se pretende una distribución de los recursos de la empresa de acuerdo con unos objetivos previamente fijados para cada *centro de decisión*, de tal manera que se consigan los fines establecidos. Ahora bien, si el problema de la escasez es esencial en la empresa como unidad económica, será necesario «señalar un sistema de gradación de estas necesidades». En otras palabras será necesario determinar la importancia relativa de cada uno de los objetivos señalados, frente a los demás.

Para materializar este orden de prioridades cada centro de decisión deberá justificar todas y cada una de las masas monetarias que solicite. Y esto sólo se conseguirá en primer lugar identificando las actividades, en segundo lugar valorándolas y en tercer lugar estableciendo un orden de prioridad para las mismas. En los Presupuestos Base Cero adquiere un interés significativo la preparación de las propuestas concretas, paso previo al establecimiento de un orden de prelación en las mismas.

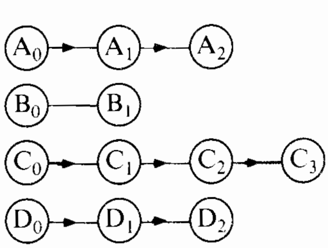
Es evidente que en el contenido de estas propuestas específicas deben existir determinados elementos lo suficientemente claros para que se pueda adoptar una decisión consistente en realizar o no la actividad propuesta, es decir, incluir o no los desembolsos que comporta en el presupuesto correspondiente. A título indicativo se pueden consignar como elementos necesarios: la descripción de la actividad en relación con los objetivos generales de la empresa; los gastos que presupone, es decir, los desembolsos monetarios que comportará; así como los resultados económicos que se esperan conseguir con la realización de la misma. También es conveniente determinar cuáles serían las consecuencias de no incluir esta actividad entre las previstas por la empresa durante el tiempo que ampara el presupuesto.

Una de las ventajas más importantes de los Presupuestos Base Cero proviene del hecho de que cada una de las propuestas específicas se formula para *distintos niveles de actividad* y por tanto para distintos niveles de coste. Esta característica constituye una adecuación a la realidad económica de las empresas, en las que una misma actividad puede ser realizada con distintos grados de intensidad. Para ello será necesario considerar una base mínima de actividad, una máxima y otras intermedias, siempre teniendo en cuenta de que a cada nivel se conconseguirá el cumplimento de los objetivos también en un determinado grado. El hecho de que los distintos centros de decisión puedan realizar sus propuestas a varios niveles de actividad hace pensar en la posibilidad de incluir, cuando se utiliza este esquema, la teoría de los subconjuntos borrosos.

Con objeto de ilustrar esta exposición se puede considerar el siguiente ejemplo:

Una empresa dispone de cuatro centros de decisión A, B, C y D. Se definen para A tres presupuestos A_0, A_1 y A_2; para B dos presupuestos B_0 y B_1; para C cuatro C_0, C_1, C_2 y C_3; y para D otros tres D_0, D_1 y D_2. Los presupuestos con índice cero son los mínimos indispensables para la existencia del correspondiente centro de decisión, ya que por debajo de ellos no podría funcionar. Los presupuestos con índice 1, 2, 3,... contienen mejoras, evidentemente justificadas.

Como es habitual en el método P.B.C. uno de los primeros pasos consiste en una elección secuencial, empezando por el presupuesto con índice 0. Un ejemplo de elección secuencial puede verse con el paso de la figura 3.1 a la 3.2, en donde puede observarse que se ha elegido C_0; etc.



grafo inicial

Figura 3.1.

Se elige C_0:

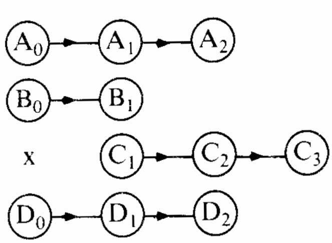


Figura 3.2.

Se elige D_0:

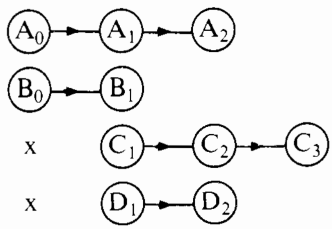


Figura 3.3.

Se elige C_1:

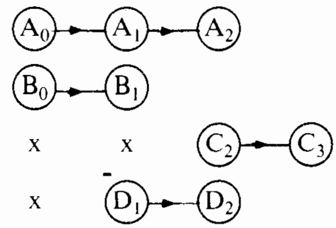


Figura 3.4.

Se elige A_0:

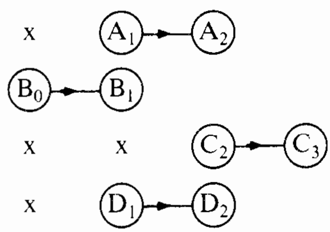


Figura 3.5.

Se elige A_1:

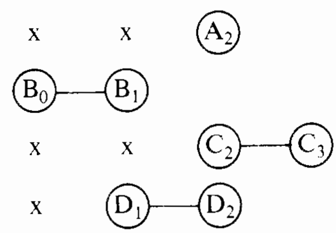


Figura 3.6.

Se elige B_0:

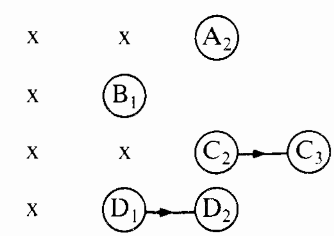


Figura 3.7.

Se elige A_2:

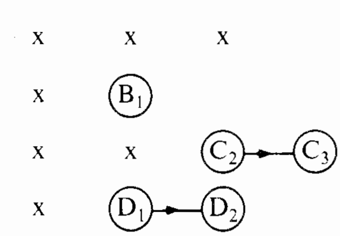


Figura 3.8.

Se elige C_2:

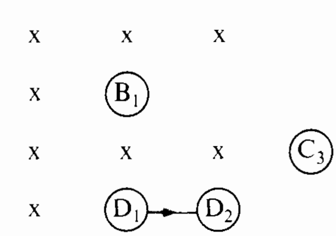


Figura 3.9.

Se elige B_1:

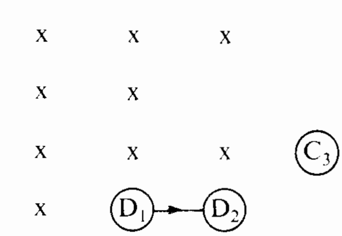


Figura 3.10.

Se elige C_3:

$$\begin{array}{cccc} x & x & x & \\ x & x & & \\ x & x & x & x \\ x & D_1 & \rightarrow & D_2 \end{array}$$

Figura 3.11.

Se elige, evidentemente D_1:

$$\begin{array}{cccc} x & x & x & \\ x & x & & \\ x & x & x & x \\ x & x & D_2 & \end{array}$$

Figura 3.12.

Según la selección especificada en las figuras 3.1 a 3.12, los presupuestos proporcionan un orden total para valores crecientes:

$$\begin{gathered} C_0,\ C_0+D_0,\ C_1+D_0,\ A_0+C_1+D_0,\ A_1+C_1+D_0, \\ A_1+B_0+C_1+D_0,\ A_2+B_0+C_1+D_0,\ A_2+B_0+C_2+D_0, \\ A_2+B_1+C_2+D_0,\ A_2+B_1+C_3+D_0,\ A_2+B_1+C_3+D_1, \\ A_2+B_1+C_3+D_2. \end{gathered} \tag{3.1}$$

Si se supone, ahora, que se dispone de un presupuesto total L, que no puede ser rebasado, tal que:

$$A_2+B_1+C_3+D_0 \leqslant L \leqslant A_2+B_1+C_3+D_1 \tag{3.2}$$

resultará que serán aceptados los presupuestos A_2, B_1, C_3 y D_0.

Si, en cambio, el presupuesto total fuera tal que:

$$A_1+C_1+D_0 \leqslant L' \leqslant A_1+B_0+C_1+D_0 \tag{3.3}$$

serían aceptados A_1, C_1 y D_0 y el centro de decisión B desaparecería y con él las actividades que comportara.

La incorporación de números borrosos en el P.B.C.

Con objeto de introducir la teoría de los subconjuntos borrosos en la elaboración de un presupuesto por el método P.B.C., se puede suponer que los presupuestos A, B, C y D son números borrosos (subconjuntos borrosos convexos y normales), tales como $\underset{\sim}{A}_i$, $i=0,1,2$; $\underset{\sim}{B}_j$, $j=0,1$; $\underset{\sim}{C}_k$, $k=0,1,2,3$; $\underset{\sim}{D}_l$, $l=0,1,2$.

Se supone que se verifican las propiedades enumeradas a continuación.

Si $\underset{\sim}{M}_\beta$ es un presupuesto borroso de índice β correspondiente al centro de decisión M, su α-corte se escribe:

$$M_\alpha = [m'^{\alpha}_{\beta},\ m''^{\alpha}_{\beta}] \tag{3.4}$$

deberá verificarse la siguiente propiedad

$$(3.5) \qquad (\beta < \beta') \Rightarrow (m'^{\alpha}_{\beta} \leq m'^{\alpha}_{\beta'}, \; m''^{\alpha}_{\beta} \leq m''^{\alpha}_{\beta'}) \qquad \forall \alpha \in [0,1]$$

y esta propiedad de monotonía podrá expresarse:

$$(3.6) \qquad \underset{\sim}{M}_{\beta} \preccurlyeq \underset{\sim}{M}_{\beta'}$$

En la práctica los símbolos $\leq$ y $\preccurlyeq$ se sustituyen por $<$ y $\prec$.

Si se recoge el mismo ejemplo del epígrafe anterior, con la misma clasificación, se escribirá:

$$\underset{\sim}{C}_0, \underset{\sim}{C}_0 (+) \underset{\sim}{D}_0, \underset{\sim}{C}_1 (+) \underset{\sim}{D}_0, \underset{\sim}{A}_0 (+) \underset{\sim}{C}_1 (+) \underset{\sim}{D}_0, \underset{\sim}{A}_1 (+) \underset{\sim}{C}_1 (+) \underset{\sim}{D}_0,$$

$$\underset{\sim}{A}_1 (+) \underset{\sim}{B}_0 (+) \underset{\sim}{C}_1 (+) \underset{\sim}{D}_0, \underset{\sim}{A}_2 (+) \underset{\sim}{B}_0 (+) \underset{\sim}{C}_1 (+) \underset{\sim}{D}_0,$$

$$(3.7) \quad \underset{\sim}{A}_2 (+) \underset{\sim}{B}_0 (+) \underset{\sim}{C}_2 (+) \underset{\sim}{D}_0, \underset{\sim}{A}_2 (+) \underset{\sim}{B}_1 (+) \underset{\sim}{C}_2 (+) \underset{\sim}{D}_0,$$

$$\underset{\sim}{A}_2 (+) \underset{\sim}{B}_1 (+) \underset{\sim}{C}_3 (+) \underset{\sim}{D}_0, \underset{\sim}{A}_2 (+) \underset{\sim}{B}_1 (+) \underset{\sim}{C}_3 (+) \underset{\sim}{D}_1,$$

$$\underset{\sim}{A}_2 (+) \underset{\sim}{B}_1 (+) \underset{\sim}{C}_3 (+) \underset{\sim}{D}_2.$$

en donde, como se recordará, (+) es el operador de convolución maxmin para la suma:

$$\forall \; x, y, z \in R^+$$

$$\mu_{\underset{\sim}{M}_\beta (+) \underset{\sim}{M}_{\beta'}}(z) = \bigvee_{z=x+y} \left(\mu_{\underset{\sim}{M}_\beta}(x) \wedge \mu_{\underset{\sim}{M}_{\beta'}}(y) \right) \qquad (1)$$

Veamos un ejemplo de suma de dos números borrosos:

$$\forall \; x, y, z \in R^+$$

$$\mu_{\underset{\sim}{M}_\beta (+) \underset{\sim}{M}_{\beta'}}(z) = \bigvee_{x+y=z} \left(\mu_{\underset{\sim}{M}_\beta}(x) \wedge \mu_{\underset{\sim}{M}_{\beta'}}(y) \right)$$

	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$\underset{\sim}{M}_\beta$ =	0	.1	.5	.8	1	.9	.4	.2	0

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$\underset{\sim}{M}_{\beta'}$ =	0	.1	.2	.7	1	.8	.3	0	0

	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
$\underset{\sim}{M}_\beta (+) \underset{\sim}{M}_{\beta'}$ =	0	.1	.1	.2	.5	.7	.8	1	.9	.8	.4	.3	.2	0

---

(1) Como es sobradamente conocido, los símbolos $\vee$ y $\wedge$ significan que debe «tomarse el más grande» y «tomarse el más pequeño», respectivamente.

Para 4 la función de pertenencia es:

$$\mu_{\underset{\sim}{M}_\beta}(4) \wedge \mu_{\underset{\sim}{M}_{\beta'}}(0) = .1 \wedge 0 = 0$$
$$\mu_{\underset{\sim}{M}_\beta}(3) \wedge \mu_{\underset{\sim}{M}_{\beta'}}(1) = 0 \wedge .1 = 0$$
$$\mu_{\underset{\sim}{M}_\beta}(2) \wedge \mu_{\underset{\sim}{M}_{\beta'}}(2) = 0 \wedge .2 = 0$$
... ...
$$\boxed{\bigvee_{x+y=4} (\mu_{\underset{\sim}{M}_\beta}(x) \wedge \mu_{\underset{\sim}{M}_{\beta'}}(y)) = 0}$$

Para 5:

$$\mu_{\underset{\sim}{M}_\beta}(5) \wedge \mu_{\underset{\sim}{M}_{\beta'}}(0) = .5 \wedge 0 = 0$$
$$\mu_{\underset{\sim}{M}_\beta}(4) \wedge \mu_{\underset{\sim}{M}_{\beta'}}(1) = .1 \wedge .1 = .1 \longleftarrow$$
$$\mu_{\underset{\sim}{M}_\beta}(3) \wedge \mu_{\underset{\sim}{M}_{\beta'}}(2) = 0 \wedge .2 = 0$$
... ...
$$\boxed{\bigvee_{x+y=5} (\mu_{\underset{\sim}{M}_\beta}(x) \wedge \mu_{\underset{\sim}{M}_{\beta'}}(y)) = .1}$$

Para 6:

$$\mu_{\underset{\sim}{M}_\beta}(6) \wedge \mu_{\underset{\sim}{M}_{\beta'}}(0) = .8 \wedge 0 = 0$$
$$\mu_{\underset{\sim}{M}_\beta}(5) \wedge \mu_{\underset{\sim}{M}_{\beta'}}(1) = .5 \wedge .1 = .1 \longleftarrow$$
$$\mu_{\underset{\sim}{M}_\beta}(4) \wedge \mu_{\underset{\sim}{M}_{\beta'}}(2) = .1 \wedge .2 = .1 \longleftarrow$$
$$\mu_{\underset{\sim}{M}_\beta}(3) \wedge \mu_{\underset{\sim}{M}_{\beta'}}(3) = 0 \wedge .7 = 0$$
... ...
$$\boxed{\bigvee_{x+y=6} (\mu_{\underset{\sim}{M}_\beta}(x) \wedge \mu_{\underset{\sim}{M}_{\beta'}}(y)) = .1}$$

Para 7:

$$\mu_{\underset{\sim}{M}_\beta}(7) \wedge \mu_{\underset{\sim}{M}_{\beta'}}(0) = 1 \wedge 0 = 0$$
$$\mu_{\underset{\sim}{M}_\beta}(6) \wedge \mu_{\underset{\sim}{M}_{\beta'}}(1) = .8 \wedge .1 = .1$$
$$\mu_{\underset{\sim}{M}_\beta}(5) \wedge \mu_{\underset{\sim}{M}_{\beta'}}(2) = .5 \wedge .2 = .2 \longleftarrow$$
$$\mu_{\underset{\sim}{M}_\beta}(4) \wedge \mu_{\underset{\sim}{M}_{\beta'}}(3) = .1 \wedge .7 = .1$$
... ...
$$\boxed{\bigvee_{x+y=7} (\mu_{\underset{\sim}{M}_\beta}(x) \wedge \mu_{\underset{\sim}{M}_{\beta'}}(y)) = .2}$$

y así sucesivamente.

Se puede suponerque el presupuesto total disponible es tambien borroso y ser considerado como un «techo borroso». Tendrá una forma parecida a la de la figura 3.13.

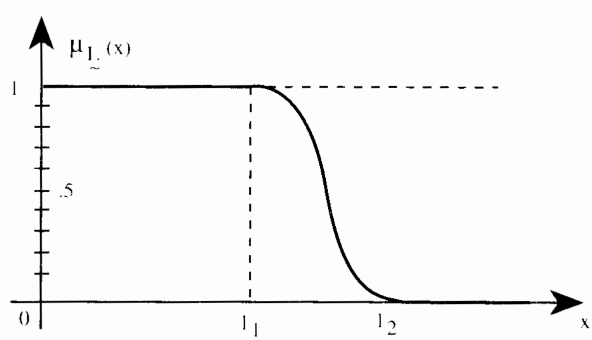


Figura 3.13.

en la que se puede observar que:

$$\mu_{\underset{\sim}{L}}(x) = 1 \qquad\qquad , \ x \leqslant l_1$$
$$= \text{función monótona decreciente}, \ l_1 \leqslant x \leqslant l_2$$
$$= 0 \qquad\qquad , \ l_2 \leqslant x.$$

Si se considera a $\underset{\sim}{X}$ como uno de los presupuestos acumulativos reflejados en (3.7), utilizando el concepto de posibilidad se tendrá:

$$\text{pos. } (\underset{\sim}{X}) = \bigvee_x \left(\mu_{\underset{\sim}{X}}(x) \wedge \mu_{\underset{\sim}{L}}(x)\right)$$

En este caso, en lugar de utilizar un proceso de decisión sin matización alguna ni posibilidad de transacción como en (3.1) o (3.2), la decisión comportará la comparación de pares tales como:

$$(\underset{\sim}{X}, \text{ pos. } (\underset{\sim}{X}))$$

Se dispondrá, pues, de un criterio de decisión para la selección de presupuestos según el esquema P.B.C. borroso.

Con objeto de consolidar estas ideas se puede recurrir al siguiente ejemplo:

Supongamos que cada presupuesto borroso tiene una función de pertenencia triangular, como la representada en la figura 3.14, lo que no es difícil de admitir en el caso del P.B.C. borroso.

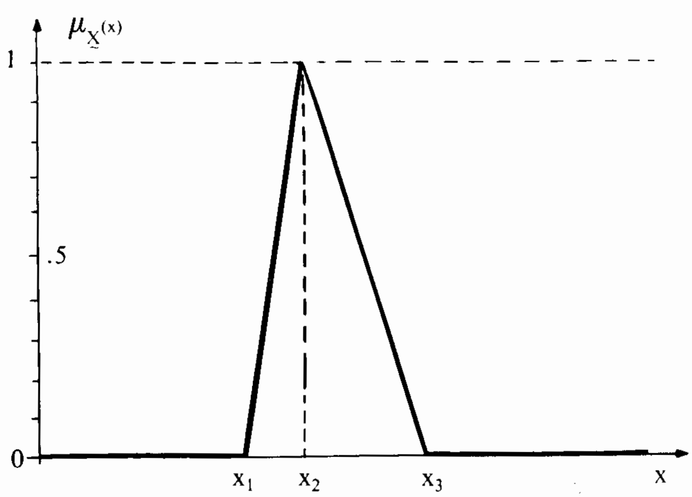


Figura 3.14

Con esta hipótesis los números borrosos pueden representarse a través de (x_1,x_2,x_3) y su convolución es sencilla e inmediata.

$$\underset{\sim}{X} = (x_1, x_2, x_3)$$

$$\underset{\sim}{Y} = (y_1, y_2, y_3)$$

$$\underset{\sim}{X} (+) \underset{\sim}{Y} = (x_1, x_2, x_3) (+) (y_1, y_2, y_3)$$

$$= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$$

Como es lógico, se ha tomado para simplificar una hipótesis triangular, pero el razonamiento es válido utilizando la convolución correspondiente al caso general.

Se puede suponer, ahora, que el «techo borroso» es lineal entre l_1 y l_2, tal como aparece en la figura 3.15. También es ésta una hipótesis simplificativa, que permite una inmediata generalización.

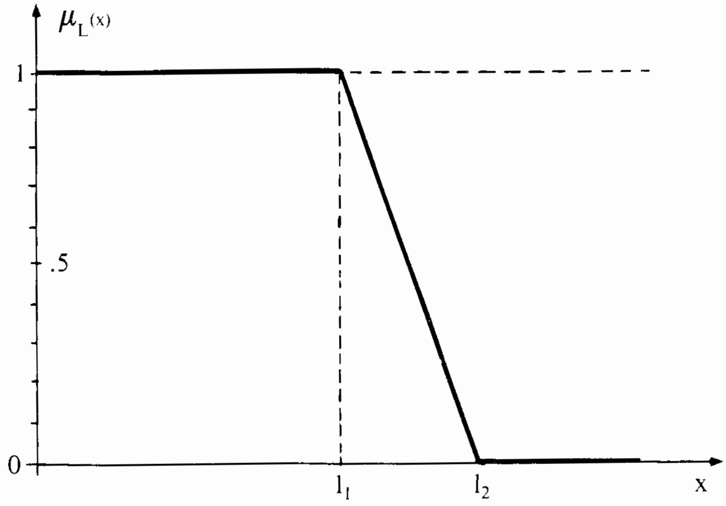


Figura 3.15.

Establecidas estas hipótesis, vamos a proceder a la asignación de valores numéricos:

$\underset{\sim}{A}_0$ = (1000, 1100, 1250),
$\underset{\sim}{A}_1$ = (1200, 1250, 1400),
$\underset{\sim}{A}_2$ = (1500, 1600, 1900),
$\underset{\sim}{B}_0$ = (800, 1000, 1300),
$\underset{\sim}{B}_1$ = (1300, 1400, 1700),
$\underset{\sim}{C}_0$ = (400, 500, 700),
$\underset{\sim}{C}_1$ = (500, 650, 800),
$\underset{\sim}{C}_2$ = (650, 800, 950),
$\underset{\sim}{C}_3$ = (800, 1000, 1200),
$\underset{\sim}{D}_0$ = (1000, 1200, 1300),

$\underset{\sim}{D}_1 = (1250, 1400, 1700)$,
$\underset{\sim}{D}_2 = (1500, 1700, 1800)$,

Se obtienen, ahora, los presupuestos acumulados:

1) $\underset{\sim}{C}_0 = (400, 500, 700)$,
2) $\underset{\sim}{C}_0 \ (+) \ \underset{\sim}{D}_0 = (400+1000, 500+1200, 700+1300)$
$= (1400, 1700, 2000)$,
3) $\underset{\sim}{C}_1 \ (+) \ \underset{\sim}{D}_0 = (500+1000, 650+1200, 800+1300)$
$= (1500, 1850, 2100)$,
4) $\underset{\sim}{A}_0 \ (+) \ \underset{\sim}{C}_1 \ (+) \ \underset{\sim}{D}_0 = (2500, 2950, 3350)$,
5) $\underset{\sim}{A}_1 \ (+) \ \underset{\sim}{C}_1 \ (+) \ \underset{\sim}{D}_0 = (2700, 3100, 3500)$,
6) $\underset{\sim}{A}_1 \ (+) \ \underset{\sim}{B}_0 \ (+) \ \underset{\sim}{C}_1 \ (+) \ \underset{\sim}{D}_0 = (3500, 4100, 4800)$,
7) $\underset{\sim}{A}_2 \ (+) \ \underset{\sim}{B}_0 \ (+) \ \underset{\sim}{C}_1 \ (+) \ \underset{\sim}{D}_0 = (3800, 4450, 5300)$,
8) $\underset{\sim}{A}_2 \ (+) \ \underset{\sim}{B}_0 \ (+) \ \underset{\sim}{C}_2 \ (+) \ \underset{\sim}{D}_0 = (3950, 4600, 5450)$,
9) $\underset{\sim}{A}_2 \ (+) \ \underset{\sim}{B}_1 \ (+) \ \underset{\sim}{C}_2 \ (+) \ \underset{\sim}{D}_0 = (4450, 5000, 5850)$,
10) $\underset{\sim}{A}_2 \ (+) \ \underset{\sim}{B}_1 \ (+) \ \underset{\sim}{C}_3 \ (+) \ \underset{\sim}{D}_0 = (4600, 5200, 6100)$,
11) $\underset{\sim}{A}_2 \ (+) \ \underset{\sim}{B}_1 \ (+) \ \underset{\sim}{C}_3 \ (+) \ \underset{\sim}{D}_1 = (4850, 5400, 6500)$,
12) $\underset{\sim}{A}_2 \ (+) \ \underset{\sim}{B}_1 \ (+) \ \underset{\sim}{C}_3 \ (+) \ \underset{\sim}{D}_2 = (5100, 5700, 6600)$,

Por otra parte, supongamos que el «techo borroso» viene dado por

$$\begin{aligned}
\mu_{\underset{\sim}{L}}(x) &= 1 && , x \leq 5000 \\
&= 6 - \frac{x}{1000} && , 5000 \leq x \leq 6000 \\
&= 0 && , 6000 \leq x
\end{aligned}$$

La figura 3.16 indica de una manera gráfica el cálculo de la posibilidad de los presupuestos del 7) al 12)

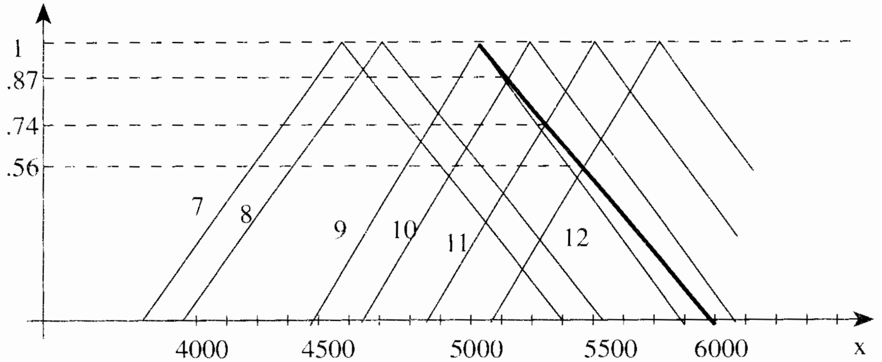


Figura 3.16.

Se pueden considerar las posibilidades siguientes a las que llamaremos «niveles de consentimiento».

	Presupuesto acumulativo	Nivel de consentimiento
1)	$\underset{\sim}{A}_2$ (+) $\underset{\sim}{B}_0$ (+) $\underset{\sim}{C}_1$ (+) $\underset{\sim}{D}_0$	1
8)	$\underset{\sim}{A}_2$ (+) $\underset{\sim}{B}_0$ (+) $\underset{\sim}{C}_2$ (+) $\underset{\sim}{D}_0$	1
9)	$\underset{\sim}{A}_2$ (+) $\underset{\sim}{B}_1$ (+) $\underset{\sim}{C}_2$ (+) $\underset{\sim}{D}_0$	1
10)	$\underset{\sim}{A}_2$ (+) $\underset{\sim}{B}_1$ (+) $\underset{\sim}{C}_3$ (+) $\underset{\sim}{D}_0$	0,87
11)	$\underset{\sim}{A}_2$ (+) $\underset{\sim}{B}_1$ (+) $\underset{\sim}{C}_3$ (+) $\underset{\sim}{D}_1$	0,74
12)	$\underset{\sim}{A}_2$ (+) $\underset{\sim}{B}_1$ (+) $\underset{\sim}{C}_3$ (+) $\underset{\sim}{D}_2$	0,56

Así todos los presupuestos hasta el 9) son aceptados con el nivel 1, pero a partir de éste el «nivel» de aceptación decrece con rapidez. Este ejemplo demuestra, de manera sencilla, que la utilización del P.B.C. borroso resulta muy cómodo para una empresa.

Se puede también emplear como criterio asociado al de importe global del presupuesto.

En la figura 3. 17 se ha representado un presupuesto acumulado borroso $\underset{\sim}{A}$ y un techo borroso $\underset{\sim}{L}$. Se llamará «índice de consentimiento» a:

$$K(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{L}) = \frac{\text{área de } \underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{L}}{\text{área de } \underset{\sim}{A}}$$

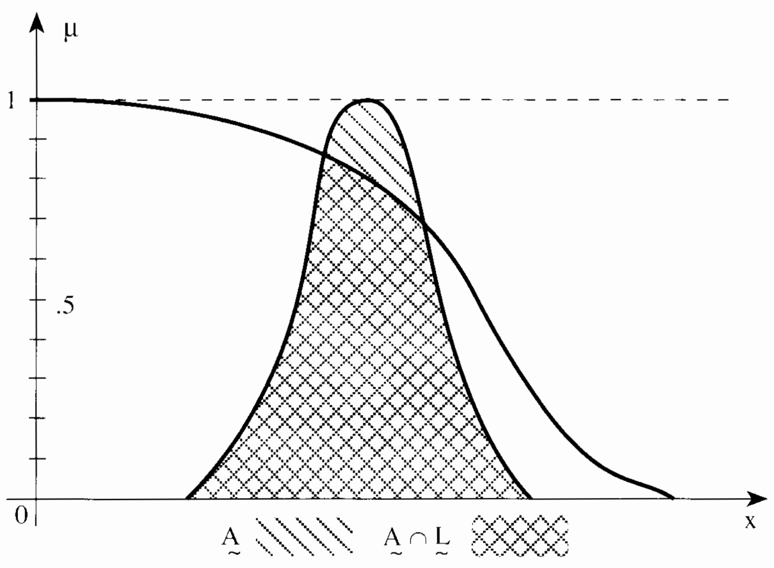


Figura 3.17.

Este índice puede resultar muy significativo para la aceptación de un presupuesto acumulado en el esquema P.B.C. Sin embargo hay que indicar que este índice, a diferencia del de posibilidad, no es una valuación. Parece superfluo añadir que existen otros criterios tales como la admisibilidad, etc.

El análisis del Presupuesto Base Cero pone de manifiesto el interés que adquieren los conceptos borrosos en la solución de los problemas en los que los datos son conocidos de una manera ambigua.

EL PROCESO MICROECONOMICO DE INVERSION

CAPITULO IV

EL PROCESO MICROECONOMICO DE INVERSION

El planteamiento de la inversión en la empresa

Los medios financieros de que dispone la empresa en un determinado período de tiempo tienen por objeto atender unas necesidades de tesorería provocadas de alguna manera por el proceso de producción, entendido éste en un sentido muy amplio.

Al ser considerado por una parte de la gestión de la empresa el fin a que van destinados los recursos financieros, se acostumbra a establecer una separación de los mismos tomando como base la teoría de la periodificación contable. De ahí que nazca, por aplicación de recursos no consumidos en un mismo ejercicio, el concepto de inversión. Se puede decir, pues, que la materialización de medios monetarios en un objeto de la inversión, queda plasmada en determinadas masas patrimoniales que constituyen la Estructura Fija de la Empresa.

Al centrar la atención en el problema inversionista se puede observar que los efectos monetarios que ha provocado dan lugar a la existencia de magnitudes localizadas en momentos distintos. El tiempo, en este caso, aparece como un elemento pasivo en el planteamiento de la situación, sin que intervenga como parte activa y fundamental en los valores que toman las variables principales del estudio que formaliza el proceso. El tiempo constituye, en esta primera aproximación, una base sobre la que tienen lugar los acontecimientos.

Cuando estos hechos, que se dan en el tiempo, tienen un carácter económico, adquieren importancia para el empresario por cuanto han tenido consecuencias monetarias o pueden constituir una «esperanza» transformable en términos monetarios. Esta conexión entre pasado y futuro de la actividad inversionista permite considerar, *además del sujeto* de la misma que queda centrado en la persona del *empresario*, tres elementos principales: *el objeto de la inversión*, el *coste* de la inversión, y la *esperanza* de conseguir «algo» como fruto de la misma.

Ante este contexto, no es de extrañar que para el estudio del proceso inversionista desde el punto de vista económico se haya recurrido a un concepto que la Matemática Financiera utiliza con frecuencia. Nos referimos al llamado «capital financiero». La ventaja de su utilización viene dada en cuanto, por si mismo, comprende dos elementos: la masa monetaria y el instante de tiempo en que se localiza, sea porque se reciba o porque se entregue.

Al entrar ya en el campo de estudio de las inversiones se puede observar que la mayor parte de los modelos elaborados al efecto parten de la existencia de un sistema económico estacionario, lo que les lleva a considerar explícita o implícitamente, que los tipos de interés que van a regir en el futuro, así como las demás magnitudes son conocidas con absoluta certeza.

Ahora bien, en la realidad la situación económica resulta cambiante y el número de elementos que intervienen en la determinación de la inversión óptima es elevado. La gestión de la empresa, con objeto de ayudar al imprescindible genio e intuición del empresario, establece la coordinación de proposiciones empíricas y de hipótesis en un sistema axiomático, para elaborar los modelos que pretende sean una representación lo más exacta posible del proceso real de inversión. El modelo deberá ser siempre cuantificable, por lo que sus reglas, es decir, las normas de actuación, tendrán su base en las Matemáticas; las repercusiones que tienen las variables de algunos de los elementos vendrán expresados mediante símbolos; y los resultados globales de la aplicación del sistema serán cuantitativos.

Habida cuenta de la enorme complejidad que presenta la fenomenología inversionista, queda patente desde un principio, que los modelos que sobre ella se han elaborado no pueden ser un reflejo perfecto de la realidad, sino una aproximación y su formulación será tanto más idónea cuanto mejor sean captados los elementos que en el proceso intervienen.

Aquí aparece la primera observación sobre la ayuda real que la gestión de empresas puede prestar. A pesar de que los resultados obtenidos no sean ni pretendan ser exactos, su conocimiento por parte del empresario limitará, por lo menos, su campo decisional, y por lo tanto su posibilidad de error.

Cuando una empresa reconsidera sus posibilidades productivas y desea cambiar su equipo de fabricación se le plantean unas alternativas entre las cuales hay que tomar la decisión oportuna, que puede ir dirigida a:

1.ª) La realización de inversiones en nuevos equipos.

2.ª) La renovación de los ya existentes.

Tanto en el uno como en el otro supuesto se ponen en juego unas masas monetarias que significan para la empresa un desembolso al que intenta buscar una rentabilidad.

Con objeto de conseguir un rendimiento óptimo de los medios de pago colocados se impone un estudio de todas y cada una de las diversas posibilidades.

El problema que se plantea es, pues, fundamentalmente un *problema de elección*.

La elección puede centrarse en la hipótesis más simple entre la alternativa de comprar un elemento para el inmovilizado o dejar de hacerlo. Sin embargo, en una situación como la actual caracterizada por la multiplicidad de empresas dedicadas a la construcción de bienes de equipo que están lanzando al mercado diversidad de tipos y marcas, no es arriesgado suponer como más frecuente la existencia de diversos objetos de inversión sobre los que puede recaer la decisión de invertir.

Se pretende, de esta manera, conocer qué equipo concreto reunirá una serie de condiciones que se deben determinar para que resulte más conveniente que los demás desde el punto de vista económico.

Es incuestionable que en los últimos años los estudios relativos al proceso de inversión han experimentado un cambio extraordinario, habida cuenta de la modificación que se ha producido en los métodos matemáticos que han servido para dar un sesgo metodológico a las direcciones existentes hasta este momento.

La hipótesis de certeza común, hasta no hace mucho, a todos los modelos microeconómicos de inversión ha sido completada por la introducción del concepto de azar, lo que ha motivado que en el ámbito de estudio del proceso de inversión de las empresas hayan aparecido modelos en los que se ha incorporado la noción de probabilidad. Pero el tratamiento estocástico exige la necesidad de conocer ciertas informaciones que se recogen en dos categorías diferentes: la primera hace referencia al conjunto de situaciones posibles (es el denominador de una fracción cuyo límite define la probabilidad); la segunda está constituida por los casos favorables. Así pues, todo el anunciado probabilístico numérico señala «algo» acerca de la frecuencia relativa con que acontece un determinado evento de una sucesión de acontecimientos.

La introducción del concepto de probabilidad en los modelos de inversiones, aunque ha permitido sustanciales avances, también ha puesto de manifiesto numerosos problemas a la hora de llevar a la realidad los esquemas teóricos.

Resulta muy difícil, en el campo de las ciencias sociales, que un fenómeno sea repetible un número suficiente de veces para que sea válida la introducción de la probabilidad. *La apertura de nuevas perspectivas en el campo matemático* ha permitido dar una renovada orientación a las técnicas económicas utilizables en el campo de las inversiones. Se dispone para ello, además de los elementos clásicos, de un posible empleo sistemático de *la Teoría de los Subconjuntos Borrosos*, que también en otros campos ha representado un importante avance en el intento de resolver los problemas que la sociedad tiene planteados. La teoría de los subconjuntos borrosos, puede dar a estos estudios el impulso necesario para adaptarlos a las necesidades de un mundo real cada vez más inmerso en el campo de la incertidumbre.

La determinación de los tipos de interés

Los elementos de las corrientes monetarias de una inversión no son indiferentes cuando se conciben en momentos distintos de tiempo.

Esto ha motivado que un mismo bien fuera considerado como si se tratara de dos bienes económicos diferentes cuando es poseído en momentos distintos. Por ello no es posible realizar sumas u otras operaciones directamente. Para solventar esta dificultad *se recurre a un sistema de precios*. En efecto, cuando se tratan problemas en los cuales las magnitudes deben ser consideradas en distintos momentos, el precio, que juega un papel fundamental, *lo constituye el tipo de interés* el cual puede considerarse como vínculo entre el presente y diversas etapas del futuro.

La existencia de un tipo de interés determinado ejerce indudable influencia sobre las decisiones del empresario. En efecto, existe, en principio, una tendencia a pedir préstamos cuando el tipo de interés es bajo, mientras que el empresario retendrá o limitará sus actividades cuando éste sea elevado, ya que puede obtener buen «precio» de su colocación en el mercado de capitales.

Pero es de esta manera indirecta cuando la consideración del tipo de interés tiene más importancia, ya que representa una *base de comparación* que, junto con el concepto de equilibrio, constituye un concepto importante en todo estudio microeconómico de inversión.

Al reducir una serie de masas monetarias disponibles en momentos de tiempos diferentes a un solo valor, utilizando la técnica de la actualización, se resuelve el problema del «orden de preferencia» entre series de capitales. Con este concepto surgen, a su vez, otros dos: el de orden parcial y el de orden completo.

Con el orden parcial se intentan realizar comparaciones entre masas monetarias concretas, dentro del conjunto formado por cada una de las corrientes de cobros y pagos. Así, cuando para cada período la diferencia entre cobros y pagos correspondientes a un objeto es superior a la de los demás, no hay duda con respecto a la elección basada en criterios económicos.

La elección presenta dudas cuando es preciso comparar inversiones que implican diferencias mayores para un objeto en unos períodos, y menores que alguno de los demás en otros.

De aquí la necesidad de homogeneizar valores que, por corresponder a períodos de tiempos distintos, aparecen, en un primer momento, heterogéneos. Es precisamente el tipo de interés, base del concepto de actualización, el que asume este papel de «convertidor».

A este respecto se pueden establecer las siguientes afirmaciones:

1) Todo anticipo de un cobro tiene la misma significación que la obtención de una masa positiva (beneficio).
2) La operación de diferir un pago a un momento posterior resulta beneficiosa.

Entonces es necesario hallar una técnica que permita establecer cuantitativamente la comparación entre series de capitales (tanto si se trata de cobros como de pagos) que por sentido común no es posible realizar.

En el mercado de capitales, 1 unidad monetaria de hoy se cambia por $1 + i_1$ unidades, dentro de un año. El número i_1 es positivo, ya que la generalidad de los individuos prefieren «una unidad monetaria actual» a «una unidad monetaria dentro de un año».

El tipo de interés se halla vinculado a la noción económica de «equivalencia», como consecuencia de que el tipo de interés permite, en el campo de las inversiones, constatar la equivalencia entre una masa monetaria disponible hoy y esta misma masa monetaria disponible dentro de un número determinado de años. Así M de hoy equivale a $M + M.i$ dentro de un año, si el tipo de interés es i. En cambio, la noción de coeficientes de equivalencia entre los dos momentos será para la comparación entre un año y el siguiente:

$$\frac{M}{M + M.i}$$

En la hipótesis de previsión perfecta (ámbito de la certeza) se suponen conocidos los tipos de interés anual $i_1, i_2, \ldots, i_n$ que regirán en los años 1, 2, ... n. En muchas ocasiones se considerará formalmente que el tipo de interés es constantemente igual a lo largo de todos los años, es decir, que: $i_1 = i_2 \ldots = i_n =$ i. En este supuesto, el valor de 1 peseta dentro de n años será: $(1 + i)^n$.

Es evidente el hecho de que una determinada cantidad de dinero disponible hoy no es indiferente a esta misma cantidad de dinero cuando se dispone dentro de n años. Si el tipo de interés que rige en el mercado es i_1 entonces 1 unidad monetaria de hoy, se cambia por $1 + i_1$ dentro de un año; $(1 + i_1)(1 + i_2)$ dentro de dos años, ..., $(1 + i_1)(1 + i_2) \ldots (1 + i_n)$ al cabo de n años. Mediante una regla de tres simple se concluye que 1 unidad monetaria poseida dentro de n años equivale a:

$$\frac{1}{(1 + i_1)(1 + i_2) \ldots (1 + i_n)}$$

unidades monetarias de hoy

Uno de los problemas más importantes que se plantean ante la realización de un estudio de inversiones es la *determinación del tipo de interés calculatorio*.

La determinación de un tipo de interés único implica, formalmente, que se cumpla:

1) Que exista un mercado de capital perfecto.
2) Que el tipo de interés calculatorio corresponda al equilibrio entre la oferta y la demanda de capitales.

Pero la hipótesis de un tipo de interés calculatorio único es difícil de admitir en la realidad y su sentido es susceptible de discusión.

Un sencillo análisis de la actividad financiera de las empresas demuestra que éstas recurren a unas fuentes de financiación ajenas de muy diversa índole, que van desde el Crédito Oficial, con tipos de interés reducidos, hasta el recurso a fuentes extraordinarias y de emergencia para evitar que la incidencia de la falta de liquidez bancaria produzca situaciones irreversibles.

Pero, al hablar de tipo de interés implica traspasar los límites de un estudio económico por contener elementos que son propios de filósofos y juristas. Sin embargo, en el ámbito que nos ocupa, deben ser soslayados los aspectos éticos y legales para centrar la atención en el aspecto principalmente microeconómico.

Desde el punto de vista formal, el estudio de la determinación del tipo de interés, así como las funciones que el mismo desempeña en el Sistema Económico dieron lugar al nacimiento de la llamada «Teoría del Capital» como escisión de la «Teoría de la distribución y de los precios». En su estudio destaca Böhm-Bawerk por la publicación en 1889 de su «Positive Theory of Capital» así como por la formulación de los tres *motivos* de existencia del tipo de interés:

1.—El sujeto económico espera encontrarse *en el futuro* en mejor posición que *hoy*, lo que le hace dar a los bienes presentes mayor valor que a los futuros.

2.—Por un conjunto de razones, el sujeto económico subestima sistemáticamente las necesidades futuras.

3.—Los métodos de producción largos son más fructíferos que los cortos, y por tanto, disponer de bienes de consumo hoy permiten la subsistencia mientras se inician procesos productivos más prolongados.

Importante fue también, en este campo, la publicación de la obra de Irving Fisher en 1907 «The Rate of Interest», tratado con alto rigor metodológico, en el que se pone de manifiesto, entre otras importantes cuestiones, que el tipo de interés se determina por la interacción de dos factores:

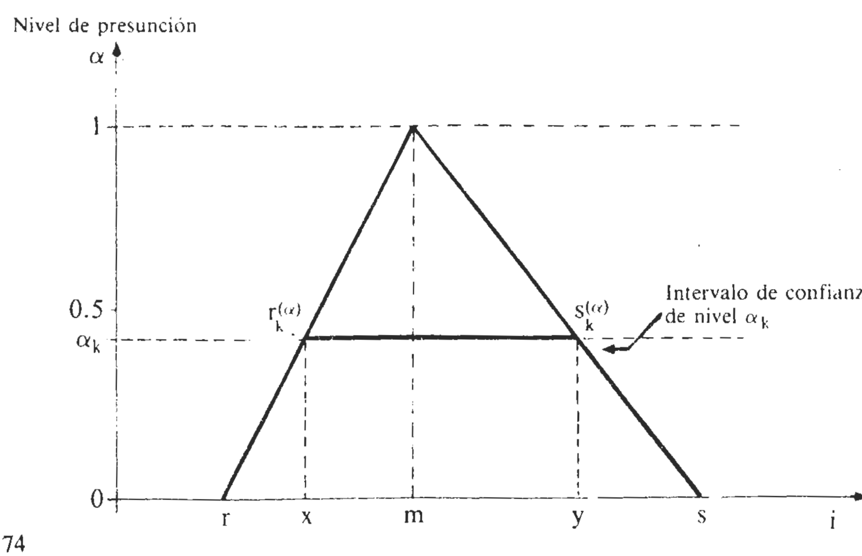
1.—La «oportunidad de la inversión», que tiene su correspondencia con la tercera causa de Böhm-Bawerk.

2.—La «preferencia temporal» o impaciencia por gastar, que corresponde a la segunda causa de Böhm-Bawerk.

Pero el establecimiento formal del tipo de interés no presupone la posibilidad de su utilización a la cambiante realidad del Sistema Económico, por lo que uno de los problemas más importantes que se plantean ante la realización de un proyecto de inversión viene dado por la fijación del tipo de interés que se debe tomar como base de cálculo. Estas dificultades, que ya son señaladas en los estudios clásicos, adquieren en los momentos actuales una importancia especial como consecuencia de que no sólo existe una gran variedad de tipos en el mercado, según el momento y la empresa a quien corresponde realizar la inversión, sino que éstas resultan variables a lo largo del tiempo. Si a esto se añade la incertidumbre con que se plantea el futuro no es extraño que se haya recurrido a la utilización de *tipos de interés borrosos*.

Con objeto de presentar un esquema sencillo, se puede considerar un número borroso triangular, en el bien entendido de que los razonamientos resultan también válidos para cualquier forma de número borroso.

En la figura siguiente se representa un tipo de interés i, borroso y de forma triangular. El «nivel de presunción» α del número borroso puede variar, evidentemente, de 0 a 1:



Se puede observar que a cada nivel $0 \leq \alpha_k \leq 1$ aparece un «intervalo de confianza» $[r_k^{(\alpha)}, s_k^{(\alpha)}]$ que es posible expresar en función de α_k, de la siguiente manera:

$$[r_k^{(\alpha)}, s_k^{(\alpha)}] = [r + (m—r)\, \alpha_k,\ s—(s—m)\, \alpha_k]$$

$$\alpha \in [0.1]$$

En efecto, por semejanza de triángulos:

$$\frac{m—r}{x—r} = \frac{1}{\alpha_k}$$

$$x = r + \alpha_k \cdot (m\text{-}r)$$

y de la misma manera:

$$\frac{s-y}{s-m} = \frac{\alpha_k}{1}$$

$$y = s - \alpha_k(s - m)$$

Como es conocido, a partir de los intervalos de confianza se pueden realizar las operaciones siguientes:

$$\begin{aligned}
[a, b]\ (+)[c, d] &= [a+c,\ b+d] \\
[a,b]\ \ (\cdot)\ [c, d] &= [a \cdot c,\ b \cdot d] \\
& \quad a, b, c, d \in R^+ \\
[a, b]\ \ (:)\ [c, d] &= [a/d,\ b/c] \\
& \quad a, b, c, d \in R^+ \text{ y } c > 0 \\
[1, 1]\ \ (:)\ [c, d] &= [1/d,\ 1/c] \\
& \quad c, d \in R^+ \text{ y } c > 0
\end{aligned}$$

lo que permite escribir el tipo de actualización en forma borrosa, como sigue:

$$\frac{1}{1 + [r_k^{(\alpha)}, s_k^{(\alpha)}]} = \frac{1}{[1 + r_k^{(\alpha)},\ 1 + s_k^{(\alpha)}]} = \left[\frac{1}{1 + s_k^{(\alpha)}}, \frac{1}{1 + r_k^{(\alpha)}}\right]$$

El tratamiento del problema de la estimación futura de los tipos de interés ha dado un paso importante con la incorporación, en su ámbito de estudio, de la teoría de los números borrosos.

La optimización en la selección de inversiones a través de los subconjuntos borrosos

Se puede decir que la decisión de adquirir «un objeto de la inversión» cuando el tipo de interés calculatorio es constante y conocido resulta adecuada cuando el valor actualizado al momento de iniciar la inversión no es negativo.

Esta es una condición previa para tomar una decisión entre varias alternativas relativas a varios objetos de la inversión posibles.

Si se supone que existen para un objeto n + 1 pagos, A_0, a_1 ,,, a_n en los momentos 0,1... n-ésimo, y n cobros, b_1 ... b_n, en los momentos 1,2... n-ésimo, la inversión será conveniente si se cumple que el valor actualizado de los cobros es mayor o igual que el de los pagos, es decir:

$$\sum_{j=1}^{n} b_j (1+i)^{-j} \geqslant A_0 + \sum_{j=1}^{n} a_j(1+i)^{-j}$$

por lo tanto, cuando

$$V_n = \sum_{j=1}^{n} (b_j - a_j)(1+i)^{-j} - A_0 \geqslant 0$$

expresión conocida del valor actual, en este caso relativo al momento 0, de una serie de rentas.

La diferencia b_j - a_j puede también ser expresada por A_j, y entonces V_n será:

$$V_n = \sum_{j=1}^{n} A_j (1+i)^{-j} - A_0$$

En el supuesto de una inversión las A_j comprenden las diferencias entre los cobros y los pagos, y la suma algebraica actualizada de los mismos tiene el carácter de un beneficio total actualizado.

La técnica de la actualización presupone, pues, comparar series de capitales, (tanto si se trata de ingresos como de gastos) que por sentido común no es posible clasificar debido al diferente ritmo de los vencimientos. *Esta técnica conduce al «orden completo»* entre todas las series posibles de capitales.

Una vez determinado que un objeto de la inversión es conveniente desde el punto de vista económico, debe procederse a su comparación con los demás objetos sobre los que se puede elegir. El criterio que puede seguirse es el siguiente: bajo el supuesto de que pueda pedirse y darse cualquier cantidad de dinero al tipo de interés calculatorio, *será conveniente escoger aquella inversión cuyo valor actualizado sea mayor*.

Estas condiciones pueden ser escritas de la siguiente manera:

$$V_n^A - V_n^B \gtrless 0 \begin{array}{l}\text{Conviene A}\\ \text{Conviene B}\end{array}$$

Cuando se considera un tipo de interés variable pero conocido, el valor actualizado toma la forma:

$$V_n = -A_0 + \frac{A_1}{(1+i_1)} + \frac{A_2}{(1+i_1)(1+i_2)} + \ldots + \frac{A_n}{(1+i_1)(1+i_2)\ldots(1+i_n)}$$

Pero cuando el entorno inversionista se plantea en términos de incertidumbre, el tipo de interés no sólo es variable con el tiempo, sino que adopta una forma imprecisa. Es entonces cuando es posible utilizar los tipos de actualización borrosos, y la expresión anterior podrá escribirse, para un determinado «nivel de presunción»:

$$V_n^{(\alpha)} = -A_0 \,(+)\, \frac{A_1}{1+[r_1^{(\alpha)}, s_1^{(\alpha)}]} \,(+)\, \frac{A_2}{(1+[r_1^{(\alpha)}, s_1^{(\alpha)}])\cdot(1+[r_2^{(\alpha)}, s_2^{(\alpha)}])} \,(+)$$

$$(+)\, \frac{A_3}{(1+[r_1^{(\alpha)}, s_1^{(\alpha)}])\cdot(1+[r_2^{(\alpha)}, s_2^{(\alpha)}])\cdot(1+[r_3^{(\alpha)}, s_3^{(\alpha)}])} \,(+)\, \ldots. \,(+)$$

$$(+)\, \frac{A_n}{(1+[r_1^{(\alpha)}, s_1^{(\alpha)}])\cdot(1+[r_2^{(\alpha)}, s_2^{(\alpha)}]) \ldots (1+[r_n^{(\alpha)}, s_n^{(\alpha)}])}$$

pero como ya se ha señalado en el epígrafe anterior:

$$\frac{1}{1+[r_k^{(\alpha)}, s_k^{(\alpha)}]} = \left[\frac{1}{1+s_k^{(\alpha)}}, \frac{1}{1+r_k^{(\alpha)}}\right]$$

$$V_n^{(\alpha)} = -A_0 \,(+)\, A_1 \cdot \left[\frac{1}{1+s_1^{(\alpha)}}, \frac{1}{1+r_1^{(\alpha)}}\right]$$

$$+ \; A_2 \cdot \left[\frac{1}{(1+s_1^{(\alpha)})\cdot(1+s_2^{(\alpha)})}, \frac{1}{(1+r_1^{(\alpha)})\cdot(1+r_2^{(\alpha)})}\right]$$

$$(+) \ldots.$$

$$(+)\, A_n \cdot \left[\frac{1}{(1+s_1^{(\alpha)})\cdot(1+s_2^{(\alpha)})\ldots(1+s_n^{(\alpha)})}, \frac{1}{(1+r_1^{(\alpha)})\cdot(1+r_2^{(\alpha)})\ldots(1+r_n^{(\alpha)})}\right]$$

Esta expresión permite obtener, para cada nivel α, el abanico de posibilidades entre las cuales confiamos encontrar el resultado real. Ligado al nivel de presunción se consigue, además, dado un umbral (formal o borroso) poder determinar con qué nivel α de posibilidad serán aceptados la elección de los A_j, para $j=0,1,2,\ldots n$, y las hipótesis sobre los intervalos $[r_k^{(\alpha)}, s_k^{(\alpha)}]$.

Con objeto de hacer más asequible la anterior exposición, se puede completar con un ejemplo numérico.

Dada la posibilidad de invertir en un objeto cuya vida útil se estima en 3 años, es decir t = 0,1,2,3, se puede suponer que los tipos de interés para este horizonte económico son borrosos, y dados por los siguientes números triangulares:

Año 1: $(r_1, m_1, s_1) = (8, 10, 13)$ en %

Año 2: $(r_2, m_2, s_2) = (9, 12, 15)$ en %

Año 3: $(r_3, m_3, s_3) = (7, 10, 12)$ en %

Por otra parte, si los valores de A_0, A_1, A_2 y A_3 son:

$A_0 = 7.000$ unidades monetarias

$A_1 = 5.000$ unidades monetarias

$A_2 = 4.000$ unidades monetarias

$A_3 = 2.000$ unidades monetarias

se puede calcular $V_n^{(\alpha)}$ nivel por nivel tomando 11 valores de α: $\alpha = 0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1$. Para ello se determinarán los intervalos de confianza para cada nivel, según la fórmula conocida:

$$[r_1^{(\alpha)}, s_1^{(\alpha)}] = [8+2\alpha,\ 13—3\alpha], \text{ en } \%,$$

$$[r_2^{(\alpha)}, s_2^{(\alpha)}] = [9+3\alpha,\ 15—3\alpha], \text{ en } \%,$$

$$[r_3^{(\alpha)}, s_3^{(\alpha)}] = [7+3\alpha,\ 12—2\alpha], \text{ en } \%,$$

A partir de estos datos se calcula $V_3^{(\alpha)}$, de la siguiente manera:

$$V_3^{(\alpha)} = —7{,}000\ (+)\ 5.000 \cdot \left[\frac{100}{100+13—3\alpha}, \frac{100}{100+8+2\alpha}\right]$$

$$+ 4.000 \cdot \left[\frac{100}{100+13—3\alpha} \cdot \frac{100}{100+15—3\alpha}, \frac{100}{100+8+2\alpha} \cdot \frac{100}{100+9+3\alpha}\right]$$

$$+ 2.000 \cdot \left[\frac{100}{100+13—3\alpha} \cdot \frac{100}{100+15—3\alpha} \cdot \frac{100}{100+12—2\alpha}, \right.$$

$$\left. \frac{100}{100+8+2\alpha} \cdot \frac{100}{100+9+3\alpha} \cdot \frac{100}{100+7+3\alpha}\right]$$

así se obtiene, para el año 1:

α	$8+2\alpha$	$13—3\alpha$	$100/113—3\alpha$	$100/108+2\alpha$
0	8	13	.8849	.9259
.1	8.2	12.7	.8873	.9242
.2	8.4	12.4	.8896	.9225
.3	8.6	12.1	.8920	.9208
.4	8.8	11.8	.8944	.9191
.5	9	11.5	.8968	.9174
.6	9.2	11.2	.8992	.9157
.7	9.4	10.9	.9017	.9140
.8	9.6	10.6	.9041	.9124
.9	9.8	10.3	.9066	.9107
1	10	10	.9090	.9090

para el año 2:

α	$9+3\alpha$	$15—3\alpha$	$(100/113—3\alpha)\cdot(100/115—3\alpha)$
0	9	15	.7694
.1	9.3	14.7	.7735
.2	9.6	14.4	.7775
.3	9.9	14.1	.7817
.4	10.2	13.8	.7859
.5	10.5	13.5	.7900
.6	10.8	13.2	.7942
.7	11.1	12.9	.7986
.8	11.4	12.6	.8028
.9	11.7	12.3	.8072
1	12	12	.8115

$(100/108+2\alpha)\cdot(100/109+3\alpha)$
.8494
.8455
.8416
.8378
.8339
.8301
.8264
.8226
.8189
.8152
.8115

para el año 3:

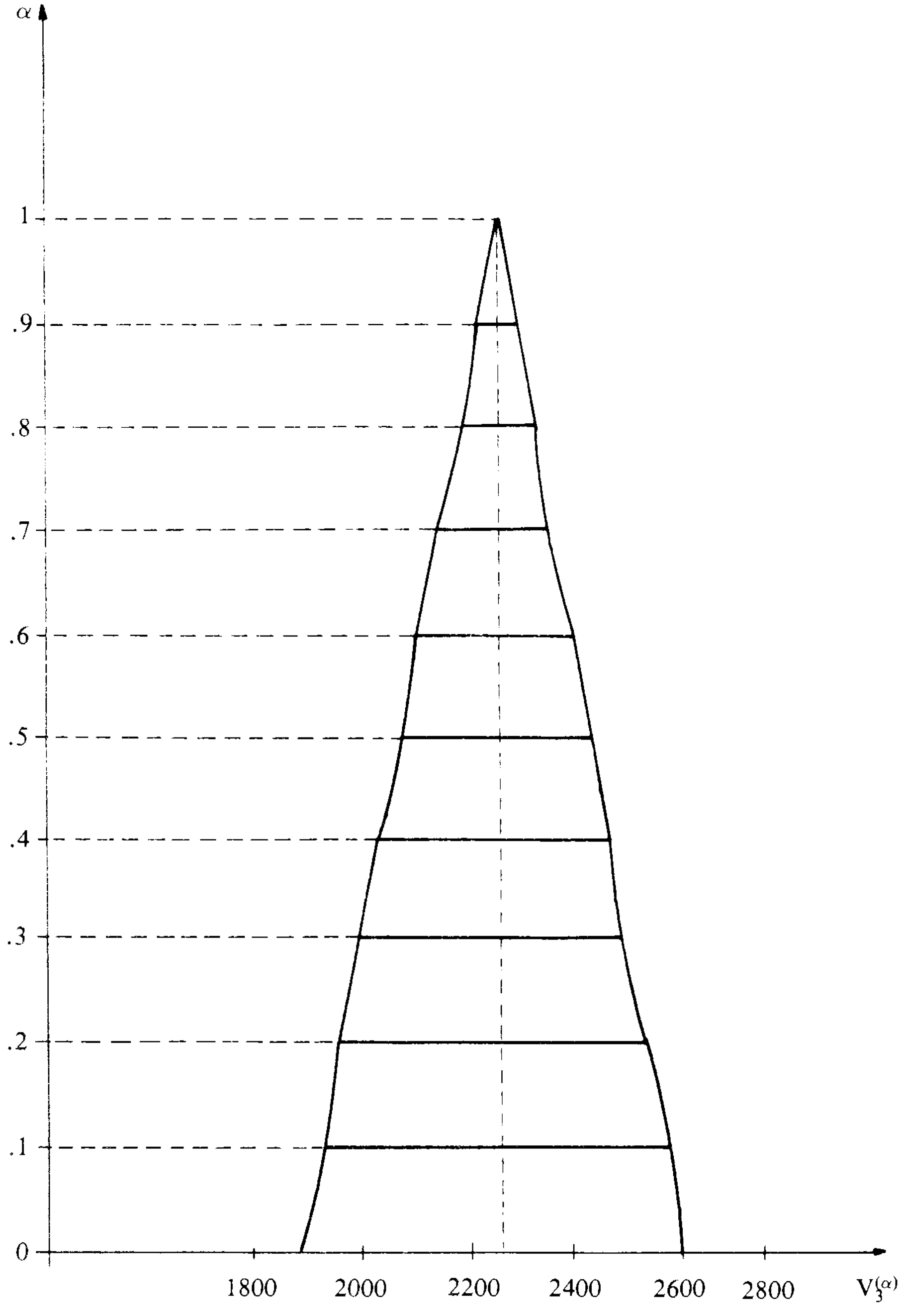
α	$7+3\alpha$	$12—2\alpha$	$(100/113—3\alpha)\cdot(100/115—3\alpha)\cdot(100/112—2\alpha)$
0	7	12	.6869
.1	7.3	11.8	.6918
.2	7.6	11.6	.6966
.3	7.9	11.4	.7016
.4	8.2	11.2	.7066
.5	8.5	11	.7117
.6	8.8	10.8	.7167
.7	9.1	10.6	.7220
.8	9.4	10.4	.7270
.9	9.7	10.2	.7324
1	10	10	.7376

$(100/108+2\alpha)\cdot(100/109+3\alpha)\cdot(100/107+3\alpha)$
.7937
.7879
.7820
.7763
.7706
.7650
.7595
.7539
.7484
.7430
.7376

Sustituyendo los valores obtenidos, en la expresión $V_3^{(\alpha)}$ se obtiene:

α	$V_3^{(\alpha)}$
0	[1875.9, 2614.5]
0.1	[1914.1, 2578.8]
0.2	[1951.2, 2542.9]
0.3	[1990.0, 2507.8]
0.4	[2028.8, 2472.3]
0.5	[2067.4, 2437.4]
0.6	[2106.2, 2403.1]
0.7	[2146.9, 2368.2]
0.8	[2185.7, 2334.4]
0.9	[2226.6, 2300.3]
1	[2266.2, 2266.2]

Estos resultados pueden ser reflejados en el gráfico siguiente:



Se puede observar, por la figura anterior, que la curva resultante no es generalmente triangular, aunque su forma se le asemeja. Por otra parte, aunque se han considerado tipos de interés de forma triangular, para simplificar la presentación, se puede generalizar a números de cualquier forma sin graves complicaciones.

Asimismo, este esquema puede combinarse con el método FUZZY ZERO BASE BUDGETING cuando existen limitaciones financieras (formales o borrosas) que vienen dadas por los presupuestos generales de la empresa.

Aparece pues, con evidencia, que la utilización de tipos de interés borrosos resulta adecuada en el supuesto de que sea muy difícil e incluso imposible de preveer a medio y largo plazo el entorno inversionista de las empresas.

LA RENOVACION ECONOMICA DE EQUIPOS INDUSTRIALES

CAPITULO V

LA RENOVACION ECONOMICA DE EQUIPOS INDUSTRIALES

La Empresa y las necesidades de renovación

Para que una industria pueda realizar su función productiva debe recurrir a unos medios o factores de la producción entre los que destacan los bienes de equipo. Desde el punto de vista de la gestión de las empresas, una de las características más importantes de los mismos es que su incorporación implica adscribirlos a la Estructura Fija del Balance.

Ahora bien, la constante evolución de la situación empresarial lleva consigo que este concepto de fijeza sólo puede ser considerado de manera relativa dadas las modificaciones que se producen en las expectativas empresariales.

En el momento actual los empresarios, cada vez más, sienten la necesidad de realizar un estudio que les permita determinar, en las mejores condiciones posibles, el momento en que debe retirarse un equipo del servicio para ser reemplazado por otro.

Una de las afirmaciones que con más asiduidad se encuentra en las obras de microeconomía hace referencia a la necesidad de combinar los factores de la producción de tal manera que se consiga una minimización de costes para una determinada cantidad de producto por unidad de tiempo. Esto exige un análisis del estado en que se encuentra el equipo industrial. El aspecto económico de este análisis es abordado, en la Gestión de Empresas, por lo que se acostumbra a denominar «renovación económica de equipos industriales». Evidentemente, un equipo en funcionamiento habrá perdido su valor económico-funcional cuando uno de nuevo permita una producción a costes más reducidos.

El problema de la renovación de equipos industriales se puede plantear en dos vertientes distintas. La primera hace referencia a la obtención de una cadena óptima, es decir, el mejor programa desde un momento inicial a un momento final, futuro, que representa lo que los técnicos denominan *horizonte económico*. La segunda consiste en abordar el problema de la renovación en el sentido de determinar en qué momento futuro el equipo deberá ser retirado del servicio siguiendo criterios económicos. Esta fecha vendrá dada por el momento en que se estime que la funcionalidad del equipo caduca.

En cualquier caso, es evidente que la retirada de servicio de un equipo implica un elevado coste, por lo que el problema de la renovación de equipos industriales se presenta, para el empresario, con un especial interés.

Por otra parte, la duración de la vida útil de un equipo, y en consecuencia el momento de la renovación, tiene una influencia especial en los costes. De ahí la conocida clasificación de las empresas tomando como base la edad de los equipos que tienen en funcionamiento. Así, se puede considerar determinadas empresas con un equipo productivo medio, comparadas con empresas denominadas *expansivas* cuyo equipo tiene una edad pequeña y con empresas en recesión, con equipos viejos, es decir, de elevada edad. Evidentemente, los costes de explotación de estas empresas son generalmente variados, sobre todo si existe este elemento que juega de manera tan importante en los sistemas económicos actuales que se denomina progreso técnico.

El campo decisional de la renovación de equipos constituye una posibilidad que el empresario tiene para actuar sobre la realidad económica de su empresa. Aunque es posible que en el entorno del momento óptimo de la renovación no existan diferencias importantes para los costes, a medida que la decisión de renovar se aleja del momento óptimo los aumentos pueden ser cada vez más acelerados. Así pues, una actuación sistemática puede permitir obtener resultados satisfactorios tanto a corto como a largo plazo. Y ello es así porque en la realidad de la empresa no siempre la intuición de renovar coincide con el resultado de los estudios técnicos.

En determinados momentos la empresa se plantea la posible conveniencia de la renovación. La estructura del problema general de la RENOVACION DE EQUIPOS puede ser descrita tomando como base dos aspectos:

1º) Causas de la renovación.

2º Técnicas para el tratamiento óptimo de la renovación.

En cuanto a las causas de la renovación aparecen dos hechos fundamentales que las determinan: el *envejecimiento funcional* y el *envejecimiento económico*.

Normalmente los equipos industriales son objeto de mantenimiento, reparaciones y modificaciones que, evidentemente, alargan su vida útil. Sin embargo, la existencia del fenómeno de la obsolescencia (envejecimiento económico) lleva consigo la necesidad de comparar no solamente las consecuencias de adquirir un equipo nuevo con uno viejo de las mismas características, sino con otro que sea capaz de realizar la misma función que tiene encomendada, en mejores condiciones.

Si el desgaste físico y las averías determinan el envejecimiento funcional, el fenómeno de la obsolescencia aparece, principalmente, cuando se dan algunas de las circunstancias siguientes:

1.º) Aparición en el mercado de *variaciones tecnológicas* que pueden inducir a la creencia de que con ellas se conseguirán aumentos de rentabilidad.
El rápido progreso en determinados campos tecnológicos hace surgir un curioso fenómeno: existe un cierto estímulo en esperar al nuevo equipo... que será siempre el próximo. Esta evolución conduce, paradójicamente, al inmovilismo.
Es éste el fenómeno más frecuente mediante el cual la irrupción de innovaciones tecnológicas hace surgir en el mercado nuevos equipos capaces de producir más rápidamente y/o obtener bienes de calidad superior. En este supuesto se produciría un descenso en los costes y/o un aumento en los ingresos.
Hay que hacer constar que el aumento en los ingresos puede proceder tanto de una venta superior, como de la venta más cara de productos de mayor calidad.

2.º) También hay que considerar el supuesto de cambios tecnológicos motivados por el encarecimiento de algún factor de la producción, que convierten en eficaz un equipo con estructura productiva diferente. Es el supuesto de encarecimiento de la mano de obra típico de la década de los años 60 y el de la energía aparecida a partir de 1973.

3.º) Reorganización de la empresa cuyos nuevos procesos pueden acarrear la necesidad de equipos distintos a los existentes.

Sea cual fuere el tipo de envejecimiento, surge la necesidad de tomar conciencia de una situación cuya salida constituye una decisión que puede consistir en proceder o no a la renovación.

Los estudios económicos han dedicado especial atención a los equipos industriales, debido a que tanto el coste de los productos obtenidos como su calidad dependen del «grado de capitalización» y del «estado de funcionamiento o uso» en que se encuentran.

Para tomar uno u otro camino en la encrucijada decisional de la renovación, se hace cada vez más necesario un *estudio previo* que en la literatura económica actual empieza a separarlo del ámbito estricto de la Elección de las Inversiones en donde, hasta hace poco, se hallaba incluido.

El análisis de las técnicas económicas necesarias para el tratamiento del problema de la renovación lleva consigo la consideración de la magnitud *tiempo* tanto en su aspecto material, duración del objeto de la posible renovación, como en el formal, por la posibilidad de realizar estudios estáticos, de estática comparativa, y dinámicos. La gestión de las empresas puede dar nuevas soluciones a los problemas planteados por esta característica de los momentos actuales, que es la *constante incorporación de nuevas técnicas empresariales*.

Existen diversos escalones importantes en la evolución de los estudios relativos a la renovación de equipos. Nos referimos a:

1.º) Modelos basados en la economía de la certeza.
2.º) Modelos en el ámbito de las probabilidades.
3.º) Modelos en el campo de la incertidumbre.

En la actualidad algunos de estos caminos se hallan cerrados como consecuencia de que las empresas no disponen de los datos necesarios para utilizarlos. Por otra parte, no pueden ser adoptados los modelos más perfectos para la totalidad de los estudios que la realidad necesita, ya que resultan demasiado complejos para que sirvan de pauta a una comparación continuada y sistemática en aquellos equipos para los que se desea saber el momento en que procede realizar la renovación.

Planteamientos probabilísticos en la renovación de equipos

Los estudios que podrían ser considerados como tradicionales han tomado en consideración supuestos generales basados, con demasiada frecuencia, en razonamientos cuyos ejes son *la analogía, el precedente y la extrapolación*. Para huir de ellos se ha recurrido a la introducción del concepto de probabilidad, lo que ha resucitado el viejo problema de su validez en el campo empresarial. En efecto, conocidas son las dificultades derivadas de la necesidad de:

a) Conocer casos favorables y casos posibles: o

b) que todos los casos sean igualmente probables; o bien

c) que se disponga de una serie de observaciones de un fenómeno repetible.

Las dificultades que plantean estas consideraciones no han impedido, sin embargo, un empleo sistemático del cálculo de probabilidades en la teoría de renovación de equipos industriales. La aparición de los principios de la estadística moderna en la gestión de las empresas ha proporcionado excelentes resultados al abrir perspectivas nuevas a viejos problemas y soluciones muy útiles en las decisiones empresariales.

Pero la falta de datos históricos y la neblina en que queda envuelto el futuro hacen confiar, cada vez menos, en la utilización de las probabilidades. Esto, unido a la apertura de nuevas perspectivas en el campo de la incertidumbre, han permitido dar una nueva orientación al quehacer científico, surgiendo algunos trabajos cuya base se halla en la Teoría de los Subconjuntos Borrosos, que también en otros campos ha permitido un positivo avance en los planteamientos formales.

Evidentemente, una de las dificultades más importantes que entraña la utilización de los modelos basados en la probabilidad, viene dada por la necesidad de disponer de unos datos que una gran mayoría de las empresas no pueden obtener y que pueden resumirse en los siguientes:

— Conocimiento de todos los eventos probables, así como la relación entre los mismos.

— Probabilidad de supervivencia. Probabilidad de que un equipo pueda realizar su función productiva después de un determinado año.

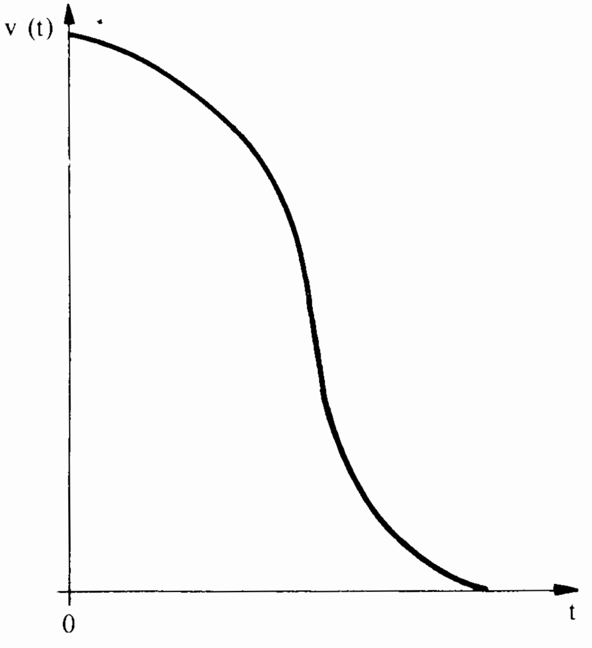
— Probabilidad condicional de avería. Probabilidad de que el equipo, suponiendo que haya llegado a un año sin dificultades, «muera» en el tiempo que va desde este año al siguiente.

La llamada «ley de supervivencia» de un equipo, que dará lugar a una curva de supervivencia, se puede obtener si se dispone de un suficiente número de casos idénticos, de los que se conoce la duración de su vida útil. Para ello bastará determinar en cada momento t los equipos que se hallan en servicio. Suponiendo una función continua se obtiene una curva n (t) que mostrará para cada momento los equipos «vivos», la cual expresada en términos relativos da lugar a la «curva de supervivencia»:

$$\frac{n\ (t)}{n\ (0)} = v\ (t)$$

que representa, aproximadamente, la probabilidad de supervivencia de un equipo en cada momento.

La curva de supervivencia suele ser representada de la siguiente manera:



Por otra parte la «probabilidad de que un equipo haya sufrido una avería» entre un momento determinado y el siguiente, vendrá dado por:

$$\frac{n\ (t-1)-n\ (t)}{n\ (0)} = \frac{n\ (t-1)}{n\ (0)} - \frac{n\ (t)}{n\ (0)} = v\ (t-1)-v\ (t)$$

Así, pues, se puede deducir que la probabilidad de que un equipo resulte averiado entre t y t + Δt será v(t) -v(t + Δt). Pero si se supone que Δt es infinitamente pequeño será, por definición:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{v\ (t)-v\ (t+\Delta t)}{\Delta t} = -v'\ (t)$$

así pues, $-v'(t) . \triangle t = v(t) - v(t + \triangle t)$ será la probabilidad de que un equipo sea renovado entre t y $t + \triangle t$ cuando $\triangle t \rightarrow 0$.

Se conoce como «probabilidad condicional de avería» de un determinado equipo en un momento preciso t, $p_c(t)$ a la probabilidad de que este equipo, habiendo llegado en buen estado a t-1, sufra una avería entre t-1 y t. Se trata, pues, de una probabilidad condicionada.

Se define la probabilidad de avería de un equipo entre t-1 y t, p(t) como el producto de la probabilidad de que este equipo haya sobrevivido hasta t-1, es decir, v(t-1), por la probabilidad condicional de avería $p_c(t)$. Así pues:

$$p(t) = v(t-1) \cdot p_c(t)$$

en donde resulta que:

$$p_c(t) = \frac{p(t)}{v(t-1)}$$

Es lógico pensar que para cada tipo de equipo le corresponderá una curva de supervivencia y que conocida la forma de ésta, se podrá determinar qué clase de equipo representa.

«En cuanto la forma de la curva de supervivencia se aproxima más a una exponencial decreciente tanto más la probabilidad de avería tiende hacia una constante». En efecto, si se parte de una función de supervivencia, cuya forma es la de una exponencial continua:

$$v(t) = e^{-K \cdot t}$$

Como se ha dicho la probabilidad de que un equipo sea renovado entre t y t + + $\triangle t$, cuando $\triangle t \rightarrow 0$, es:

$$-v'(t) \cdot \triangle t$$

Si se designa por $\lambda(t)$ la probabilidad condicional de avería entre t y $t + \triangle t$, cuando $\triangle t \rightarrow 0$, se podrá escribir:

$$-v'(t) \cdot \triangle t = v(t) \cdot \lambda(t) \cdot \triangle t$$

Por lo que la «probabilidad de renovación entre t y $t + \triangle t$ será igual a la probabilidad de supervivencia en t por la probabilidad condicional de avería entre t y $t + \triangle t$»; y en definitiva:

$$\lambda(t) = -\frac{v'(t)}{v(t)}$$

y sustituyendo en la función exponencial:

$$\lambda(t) = -\frac{-K e^{Kt}}{e^{-Kt}} = K$$

Todo este tratamiento es apto para ser trasladado al ámbito de la incertidumbre a través de la teoría de los subconjuntos borrosos. Para ello se puede suponer que la vida útil del objeto de la inversión T es un número borroso, es decir, un subconjunto borroso normal y convexo en el que la función de pertenencia $\mu_{\underset{\sim}{A}}(t)$ toma valores en $[0,1]$, siendo $\underset{\sim}{A} \subset R^+$. Se establece también que: $\mu_{\underset{\sim}{A}}(0) = 0$ es decir, que la función de pertenencia es nula en el momento cero.

La renovación en el ámbito de la incertidumbre

Se puede considerar que este número borroso $\underset{\sim}{A}$ constituye una «ley de posibilidad» en cuyo caso este número borroso $\underset{\sim}{A}$ representaría la posibilidad de avería en el momento t.

Así se escribiría:

$$\pi(t) = \mu_{\underset{\sim}{A}}(t)$$

Si se designa mediante θ el primer momento en que $\pi(t) = 1$ ($\underset{\sim}{A}$ no tiene porque ser unimodal y puede poseer una plataforma), se puede considerar una ley que constituirá la posibilidad de que un equipo E tenga una avería en el intervalo $[0,t]$. Esta ley podrá escribirse de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \bigvee_{\tau=0}^{t} \pi(t), \quad t \leqslant \theta \\ &= 1 \qquad\qquad\;\; , \quad t \geqslant \theta \end{aligned} \qquad (1)$$

En otras palabras $\varphi(t) = \pi(t)$, hasta el momento θ y $\varphi(t) = 1$, para $t = \theta$ y valores superiores.

Con estas bases se puede definir otra ley que representa la «posibilidad de que E se halle en estado de servicio en el momento t»

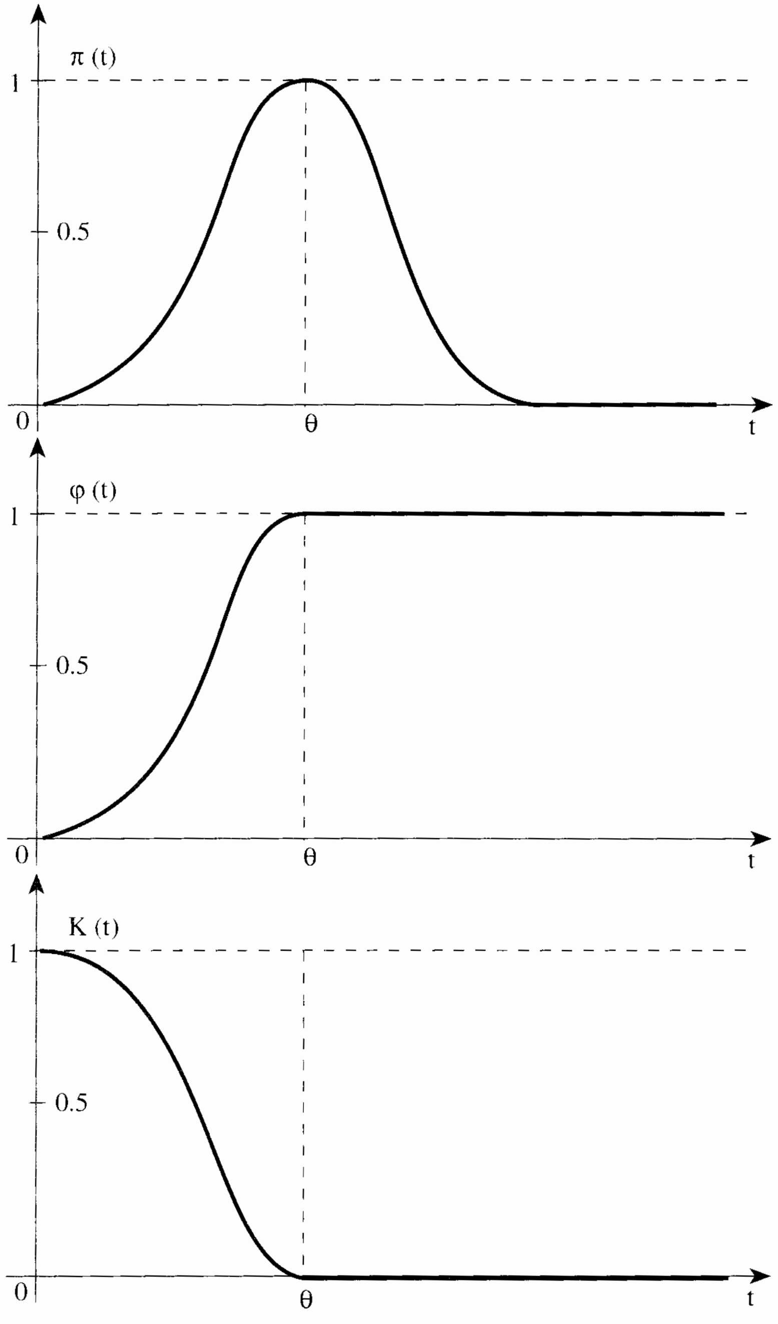
$$K(t) = 1 - \varphi(t)$$

La función K (t) juega, en esta teoría, el mismo papel que la «curva de supervivencia» en la teoría probabilística, por lo que puede seguir designándose con este mismo nombre.

---

(1) Se indica normalmente mediante el símbolo $\wedge$ cuando debe tomarse el valor más pequeño y se utiliza $\vee$ cuando hay que tomar el más grande.

Estas tres leyes pueden ser representadas gráficamente así:



Hay que señalar que la función φ(t) no es la derivada de la función K(t) con el signo cambiado. No se puede pues, definir el equivalente de:

$\lambda(t) = \dfrac{v'(t)}{v(t)}$ correspondiente al campo probabilístico, pero se puede definir una magnitud que va a jugar el mismo papel.

Se puede obtener la «posibilidad condicional» de que el equipo E, habiendo llegado al momento a, funcione todavía un tiempo t después de a, es decir, no sufre avería en el intervalo [0,a+t]. Se escribirá:

$$K(t + a) = K(a).\ K_a(t)$$

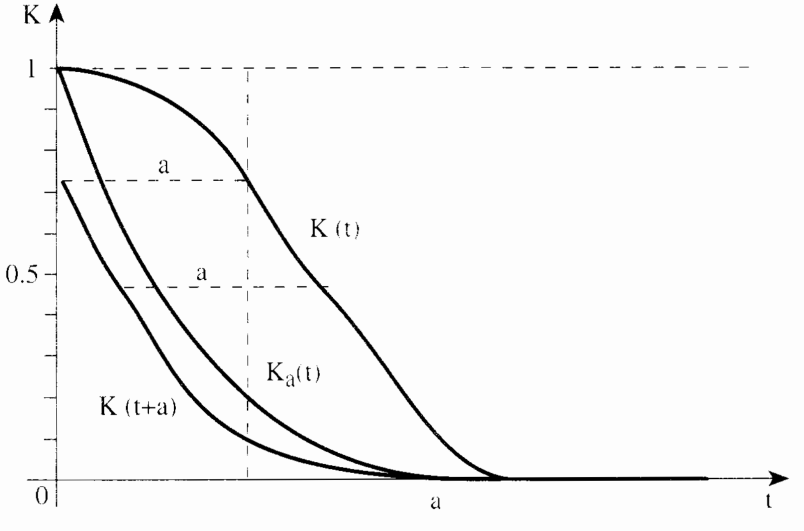
en donde K (t+a) no es una ley de posibilidad ya que K (a) < 1 si a > 0. De la fórmula anterior se deduce que:

$$K_a(t) = \frac{K(t + a)}{K(a)}$$

Esta expresión corresponde a la ley de supervivencia de un equipo ya utilizado sin avería hasta el momento a y que puede llegar a la fecha a + t sin avería. Si se hace que t tienda a 0, se observa que se puede tomar K(a) como «tipo de avería» en un sentido distinto del que tiene en el ámbito de la probabilidad.

$$\lambda(t) = \frac{v'(t)}{v(t)}$$

El gráfico siguiente pone de manifiesto cómo puede construirse $K_a(t)$:



Se puede observar que, para un valor de a, si la forma de la función K(t) es la de una campana, se obtiene para K_a (t) una curva de forma exponencial.

Algunos ejemplos pueden ilustrar cuanto se acaba de exponer. Así, cuando se parte de:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
π(t):	0	0.1	0.2	0.5	0.8	1	0.7	0.6	0.1	0

resultará:

	0	1	2	3	4	5	6
φ(t):	0	0.1	0.2	0.5	0.8	1	1

	0	1	2	3	4	5	6
K(t):	1	0.9	0.8	0.5	0.2	0	0

	0	1	2	3	4
$K_a(t)$: a = 2	0	0.625	0.25	0	0

Otro ejemplo, siempre en N, en donde se adopta la ley de Poisson normalizada con objeto de obtener una ley de posibilidad:

$$\begin{aligned}
\pi(t) &= 0 &&, \quad t = 0 \\
&= \frac{b\,!}{t\,!} \,.\, b^{t-b} &&, \quad t \in N_0^+,\ b \in N \\
K(t) &= 1 &&, \quad t = 0 \\
&1 - \frac{b\,!}{t\,!} \,.\, b^{t-b} &&, \quad t = 1, 2, \ldots, b-1, \\
& && \quad\ b \in N \\
&= 0 &&, \quad t = b-1, b, b+1, \ldots
\end{aligned}$$

Si se considera b = 5, se tiene:

	0	1	2	3	4	5	6
π(t):	0	0.192	0.480	0.800	1	1	0.833

7	8	9	10	11	12	13
0.595	0.372	0.206	0.103	0.047	0.019	0.007

14	≥ 15
0.002	0

	0	1	2	3	4	5
φ (t) =	0	0.192	0.480	0.800	1	1

	0	1	2	3	4	5
K(t) =	1	0.808	0.520	0.200	0	0

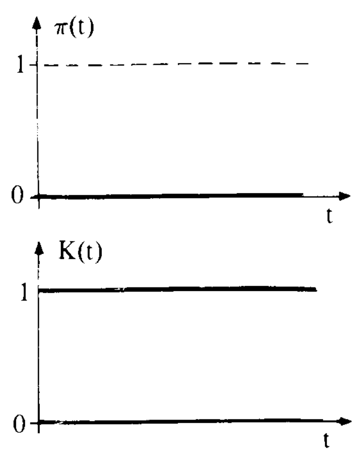
	0	1	2	3	4
$K_1(t)$ =	1	0.643	0.247	0	0

Finalmente se puede observar un ejemplo con un número borroso triangular en R^+:

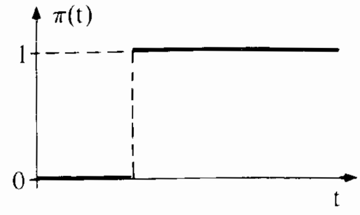
$$
\begin{aligned}
\pi(t) &= \frac{t}{b} , && 0 \leqslant t \leqslant b \\
&= 2-\frac{t}{b} , && b \leqslant t \leqslant 2b \\
&= 0 , && t \geqslant 2b \\
\varphi(t) &= \frac{t}{b} , && 0 \leqslant t \leqslant b \\
&= 1 , && t \geqslant b \\
K(t) &= 1-\frac{t}{b} , && 0 \leqslant t \leqslant b \\
&= 0 , && t \geqslant b
\end{aligned}
$$

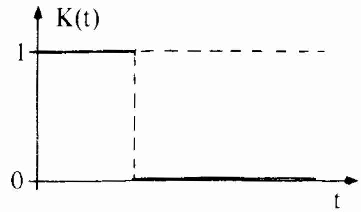
Resulta interesante poner de manifiesto algunas leyes de posibilidad específicas, tales como las reflejadas en las figuras siguientes:

1.º) Hipótesis de un equipo con duración infinita (imposible en la práctica).

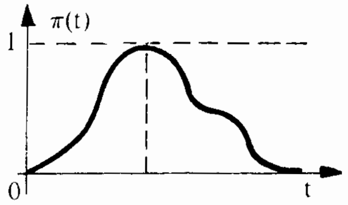


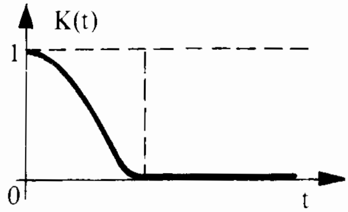
2.º) Hipótesis de un equipo con fecha fija de retirada de servicio (situación ideal).



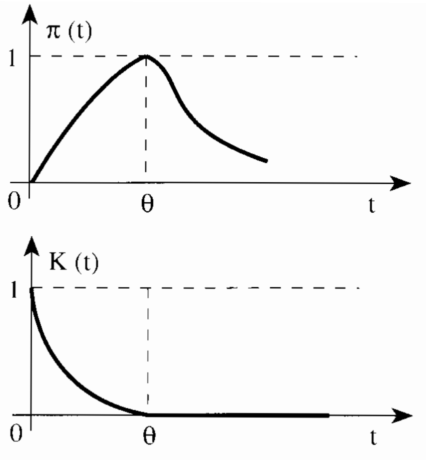


3.º) Hipótesis de un equipo con fecha de retirada de servicio incierta.

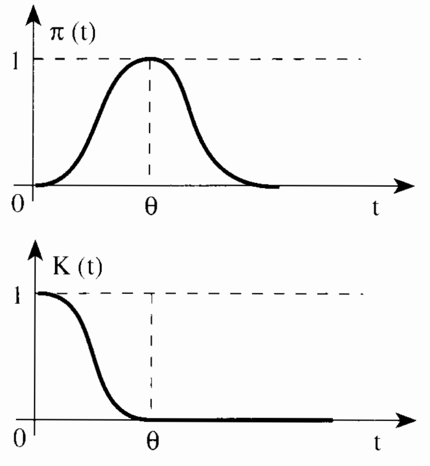




4.º) Hipótesis de una ley de supervivencia K (t) de tipo exponencial (se produce generalmente por efecto de la «fatiga» del equipo).



5º) Hipótesis de una ley de supervivencia K (t) en forma de campana (se produce generalmente por efecto del «desgaste físico» del equipo).



Otro de los elementos importantes a considerar en el estudio de la renovación de equipos es la llamada «ley de posibilidad de consumo».

Se parte del supuesto de que un equipo nuevo forma parte de un conjunto de equipos y que es reemplazado en el momento que finaliza su vida útil. El objetivo consiste en hallar cuál es la posibilidad P_m (t) que hayan existido m sustituciones de este tipo de equipos por otros nuevos exactamente iguales (hipótesis de un sistema económico estacionario) en el intervalo de tiempo que transcurre de 0 a t. Se llama «consumo» al número de equipos suministrados en este intervalo de tiempo.

La posibilidad de un consumo nulo, es decir, ningún reemplazamiento ($m = 0$) es, evidentemente:

$$P_0(t) = K(t)$$

Para calcular $P_1(t)$ se considerará que entre el intervalo de *0* a *u* habrá una y sólo una sustitución, y ninguna en el intervalo de *u* a *t*. Se puede escribir, entonces, para todos los momentos u a considerar:

$$P_1(t) = \bigvee_{u=0}^{t} (\pi(u) \wedge K(t-u))$$

Generalizando, se puede decir que existe una relación por la cual se obtiene $P_m(t)$ en función de $\pi(t)$ y $P_{m-1}(t)$. En efecto, para que exista un «consumo» de m equipos desde *0* a *t*, es suficiente que haya habido 1 reemplazamiento entre *0* y *u*, y además $m-1$ reemplazamientos de *u* de hasta t (o también al contrario: $m-1$ y luego 1). Será:

$$P_m(t) = \bigvee_{u=0}^{t} (\pi(u) \wedge P_{m-1}(t-u))$$

$$= \bigvee_{u=0}^{t} (\pi(t-u) \wedge P_{m-1}(u))$$

Obteniéndose así las fórmulas de recurrencia:

$$P_1(t) = \bigvee_{u=0}^{t} (\pi(u) \wedge K(t-u))$$

$$P_2(t) = \bigvee_{u=0}^{t} (\pi(u) \wedge P_1(t-u))$$

$$P_3(t) = \bigvee_{u=0}^{t} (\pi(u) \wedge P_2(t-u))$$

$$P_m(t) = \bigvee_{u=0}^{t} (\pi(u) \wedge P_{m-1}(t-u))$$

Veamos un ejemplo. Si se toman, como se ha hecho anteriormente para $\pi(t)$ y $K(t)$:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	⩾9
$\pi(t)$:	0	0.1	0.2	0.5	0.8	1	0.7	0.6	0.1	0

	0	1	2	3	4	5	6
$K(t)$:	1	0.9	0.8	0.5	0.2	0	0

será:

$P_1(t) =$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	≥9
0	0.1	0.2	0.5	0.8	1	0.7	0.6	0.1	0

(+)

0	1	2	3	4	5
1	0.9	0.8	0.5	0.2	0

=

=

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0.1	0.2	0.5	0.8	1	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5

11	12	≥13
0.2	0.1	0

$P_2(t) =$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0.1	0.2	0.5	0.8	1	0.7	0.6	0.1	0

(+)

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0.1	0.2	0.5	0.8	1	0.9	0.8	0.7	0.6

10	11	12	≥13
0.5	0.2	0.1	0

=

=

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	0	0.1	0.1	0.2	0.2	0.5	0.5	0.8	0.8	1	0.9

12	13	14	15	16	17	18	19	20	≥21
0.8	0.7	0.7	0.6	0.6	0.5	0.2	0.1	0.1	0

y así sucesivamente.

Es posible desarrollar también otro ejemplo, tomando ahora en R^+ las mismas funciones π (t) y K (t) que en el supuesto anterior.

Resulta entonces que:

$$P_1(t) = \bigvee_{u=0}^{t} (\pi(u) \wedge K\,(t-u)) = \frac{t}{b}, \qquad 0 \leqslant t \leqslant b$$

$$= \frac{3}{2} - \frac{t}{2b} \qquad , \qquad b \leqslant t \leqslant 3b$$

$$= 0 \qquad , \qquad t \geqslant 3b$$

$$P_2(t) = \bigvee_{u=0}^{t} (\pi(u) \wedge P_1\,(t-u)) = \frac{t}{2b}, \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2b$$

$$= \frac{5}{3} - \frac{t}{3b} \qquad , \qquad 2b \leqslant t \leqslant 5b$$

$$= 0 \qquad , \qquad t \geqslant 5b$$

$$P_3(t) = \frac{t}{3b} \qquad , \qquad 0 \leqslant t \leqslant 3b$$

$$= \frac{7}{4} - \frac{t}{4b} \qquad , \qquad 3b \leqslant t \leqslant 7b$$

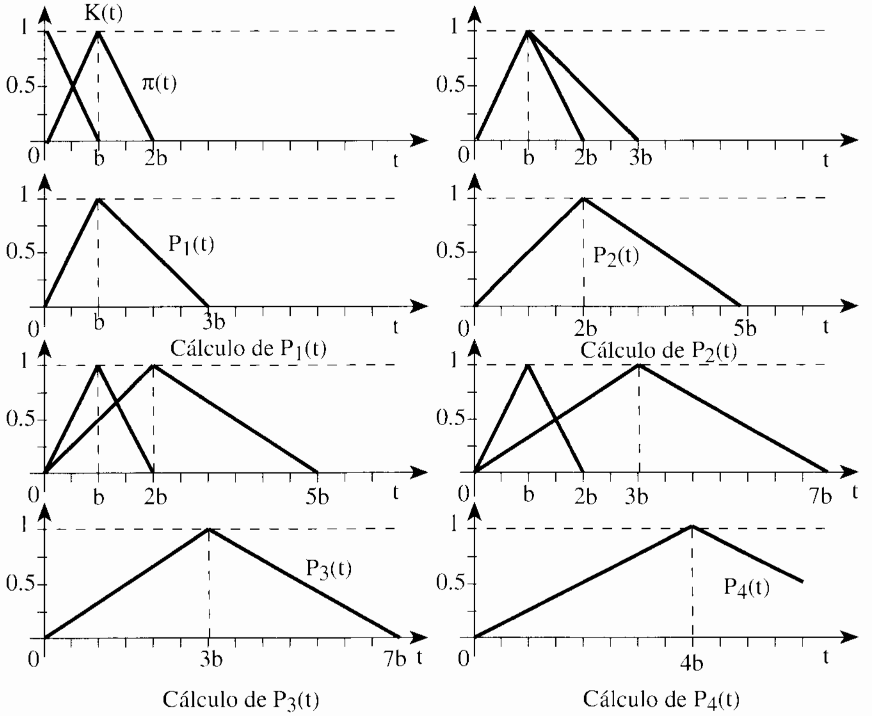
$$= 0 \qquad , \qquad t \geqslant 7b$$

$$P_4(t) = \frac{t}{4b} \qquad , \qquad 0 \leqslant t \leqslant 4b$$

$$= \frac{9}{5} - \frac{t}{5b} \qquad , \qquad 4b \leqslant t \leqslant 9b$$

$$= 0 \qquad , \qquad t \geqslant 9b$$

y así sucesivamente. Gráficamente estos resultados pueden ser expresados de la siguiente manera:



Cálculo de $P_3(t)$ Cálculo de $P_4(t)$

Se observará que:

$\underset{\sim}{P}_1\ (t) = (0, 0, b)\ (+)\ (0, b, 2b) = (0, b, 3b)$

$\underset{\sim}{P}_2\ (t) = (0, b, 3b)\ (+)\ (0, b, 2b) = (0, 2b, 5b)$

$\underset{\sim}{P}_3\ (t) = (0, 2b, 5b)\ (+)\ (0, b, 2b) = (0, 3b, 7b)$

... ...

$\underset{\sim}{P}_m\ (t) = (0, (m-1)b, (2m-1)b)\ (+)\ (0, b, 2b) = (0, mb, (2m+1)b)$

Pasemos ahora a estudiar el supuesto de una red de equipos que se hallan dispuestos de diferente manera los unos con relación a los otros, sabiendo que la posibilidad de retirada de servicio de cada equipo E_i se halla definida por un número borroso $\underset{\sim}{A}_i$, es decir, una vez más la ley $\pi_i\ (t)$ será tal que $\pi_i\ (t) = \mu_{\underset{\sim}{A}_i}\ (t)$.

Se puede partir de un supuesto simple en el que se dispone de 2 equipos tales que el sistema sólo funciona cuando los dos equipos E_1 y E_2 funcionan simultáneamente y la avería de uno de ellos hace que todo el sistema deje de funcionar.

Se dirá que los equipos funcionan en «serie» y se escribirá:

$\underset{\sim}{A}_s = \underset{\sim}{A}_1\ (\wedge)\ \underset{\sim}{A}_2$ y también: $\pi_s\ (t) = \pi_1\ (t) \wedge \pi_2\ (t)$

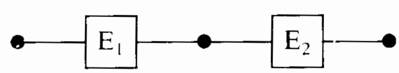
Una situación alternativa a la precedente será aquella en la cual será necesario que los dos equipos se hallen averiados para que el sistema deje de funcionar. En este caso se dirá que los equipos funcionan «en paralelo» y se escribirá:

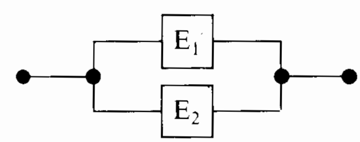
$$\underset{\sim}{A}_p = \underset{\sim}{A}_1 \ (\vee) \ \underset{\sim}{A}_2$$

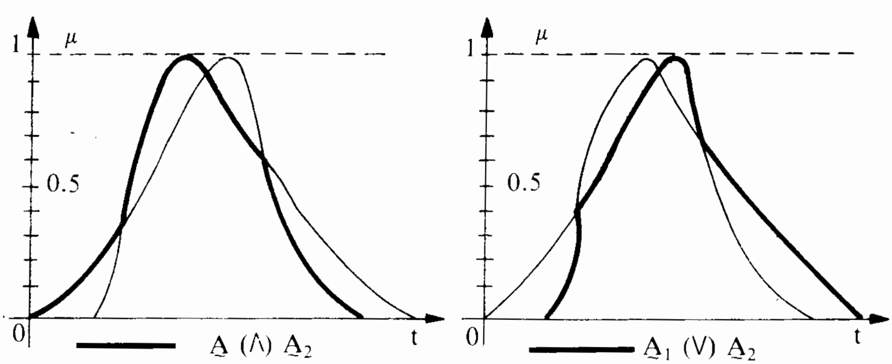
y también:

$$\pi_p \ (t) = \pi_1 \ (t) \ \vee \ \pi_2 \ (t)$$

De esta manera el *montaje en serie* corresponde al mínimo de dos números borrosos y el *montaje en paralelo* al de su máximo borroso. Gráficamente:







A partir de estos dos montajes-tipo se pueden imaginar montajes serie-paralelo y paralelo-serie que corresponden a todas las condiciones lógicas de funcionamiento que se colocan en un retículo distributivo construido con $(\wedge)$ y $(\vee)$. Pero este retículo no puede ser complementado ya que el complemento de un número borroso $\underset{\sim}{A}$ carece de significación para la teoría que trata la vida de los equipos.

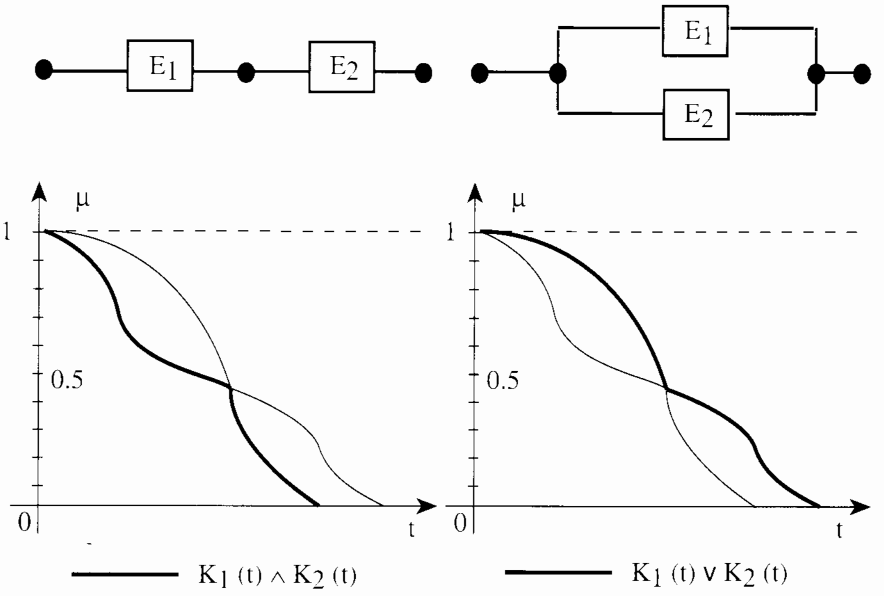
Ahora bien, además de las condiciones lógicas relativas a $(\wedge)$ y $(\vee)$, también se puede hacer intervenir el operador $(+)$ en la renovación de equipos tratando situaciones que se dan en la realidad de manera frecuente. Se puede estudiar, también, la vida de un sistema utilizando las funciones de supervivencia con los mismos operadores $(\wedge)$ y $(\vee)$.

Se escribirá en este caso:

$K_s \ (t) = K_1 \ (t) \wedge K_2 \ (t)$ para el montaje en serie

$K_p \ (t) = K_1 \ (t) \vee K_2 \ (t)$ para el montaje en paralelo

Gráficamente se tendría respectivamente:



Hay que señalar que las fórmulas habituales de convolución maxmin pueden ser utilizadas tanto para los números $\underset{\sim}{A}$ como para las curvas de supervivencia K(t). Así:

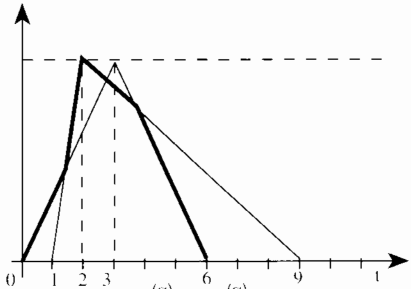
$$\mu_{\underset{\sim}{A}_1(\wedge)\underset{\sim}{A}_2}(t) = \bigvee_{t=u\wedge v} \left(\mu_{\underset{\sim}{A}_1}(u) \wedge \mu_{\underset{\sim}{A}_2}(v) \right),$$

$$\mu_{\underset{\sim}{A}_1(\vee)\underset{\sim}{A}_2}(t) = \bigvee_{t=u\vee v} \left(\mu_{\underset{\sim}{A}_1}(u) \wedge \mu_{\underset{\sim}{A}_2}(v) \right),$$

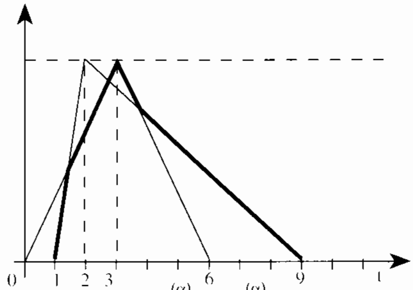
$$\mu_{\underset{\sim}{K}_1(t)(\wedge)\underset{\sim}{K}_2(t)}(t) = \bigvee_{t=u\wedge v} \left(\mu_{\underset{\sim}{K}_1(t)}(u) \wedge \mu_{\underset{\sim}{K}_2(t)}(v) \right),$$

$$\mu_{\underset{\sim}{K}_1(t)(\vee)\underset{\sim}{K}_2(t)}(t) = \bigvee_{t=u\vee v} \left(\mu_{\underset{\sim}{K}_1(t)}(u) \wedge \mu_{\underset{\sim}{K}_2(t)}(v) \right),$$

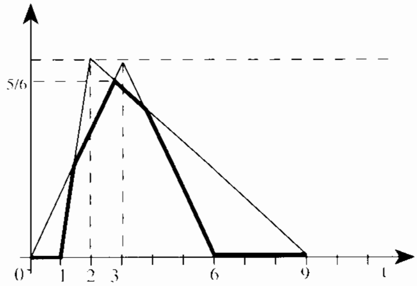
No se debe confundir el operador ($\wedge$) con la intersección ($\cap$) ni tampoco ($\vee$) con la ($\cup$). Veamos un ejemplo:



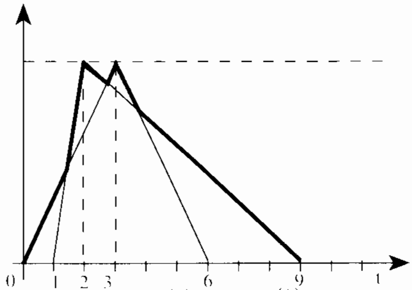
$A_1^{(\alpha)}(\wedge)\,A_2^{(\alpha)}$



$A_1^{(\alpha)}(\vee)\,A_2^{(\alpha)}$



$\mu_{\pi_1(t)}(t) \cap \mu_{\pi_1(t)}(t)$



$\mu_{\pi_1(t)}(t) \cup \mu_{\pi_1(t)}(t)$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$\pi_1(t)$:	0	1/3	2/3	1	2/3	1/3	0	0	0

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\pi_2(t)$:	0	1	6/7	5/7	4/7	3/7	2/7	1/7	0

	1	2	3	4	5	6
$\mu_{\pi_1(t)}(t) \cap \mu_{\pi_2(t)}(t)$:	0	2/3	6/7	2/3	1/3	0

no es un número borroso

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\mu_{\pi_1(t)}(t) \cup \mu_{\pi_2(t)}(t)$:	0	1/3	1	1	5/7	4/7	3/7	2/7	1/7	0

no es un número borroso
(véase gráficamente lo que sucede entre 2 y 3)

$\mu_{\underset{\sim}{A}_1}(4) \wedge \mu_{\underset{\sim}{A}_2}(4) = 2/3 \quad \mu_{\underset{\sim}{A}_1}(5) \wedge \mu_{\underset{\sim}{A}_2}(4) = 1/3$

$\mu_{\underset{\sim}{A}_1}(4) \wedge \mu_{\underset{\sim}{A}_2}(5) = 4/7$

$\mu_{\underset{\sim}{A}_1}(4) \wedge \mu_{\underset{\sim}{A}_2}(6) = 3/7$

$\mu_{\underset{\sim}{A}_1}(4) \wedge \mu_{\underset{\sim}{A}_2}(7) = 2/7$

$\mu_{\underset{\sim}{A}_1}(4) \wedge \mu_{\underset{\sim}{A}_2}(8) = 1/7$

el mayor de todos estos números será: 2/3

$\mu_{\underset{\sim}{A}_1}(5) \wedge \mu_{\underset{\sim}{A}_2}(5) = 1/3 \quad \mu_{\underset{\sim}{A}_1}(6) \wedge \mu_{\underset{\sim}{A}_2}(5) = 0$

$\mu_{\underset{\sim}{A}_1}(5) \wedge \mu_{\underset{\sim}{A}_2}(6) = 1/3$

$\mu_{\underset{\sim}{A}_1}(5) \wedge \mu_{\underset{\sim}{A}_2}(7) = 2/7$

$\mu_{\underset{\sim}{A}_1}(5) \wedge \mu_{\underset{\sim}{A}_2}(8) = 1/7$

el mayor de todos estos números será : 1/3

$\mu_{\underset{\sim}{A}_1}(6) \wedge \mu_{\underset{\sim}{A}_2}(6) = 0 \quad \mu_{\underset{\sim}{A}_1}(7) \wedge \mu_{\underset{\sim}{A}_2}(6) = 0$

a partir de aquí será siempre **cero**

El número borroso $\underset{\sim}{A}_1$ (V) $\underset{\sim}{A}_2$ es, pues:

	0	1	2	3	4	5	6
$\underset{\sim}{A}_1 (\wedge) \underset{\sim}{A}_2$:	0	1/3	1	6/7	2/3	1/3	0

Para obtener el número borroso $\underset{\sim}{A}_1$ $(\wedge)$ $\underset{\sim}{A}_2$ se compara cada $\mu_{\underset{\sim}{A}}(t)$ con los valores de t menores del otro número. Así:

$\mu_{\underset{\sim}{A}_1 (v) \underset{\sim}{A}_2}(0) = 0$

$\mu_{\underset{\sim}{A}_1 (v) \underset{\sim}{A}_2}(1) = 0 \quad \mu_{\underset{\sim}{A}_1 (v) \underset{\sim}{A}_2}(5) = 4/7$

$\mu_{\underset{\sim}{A}_1 (v) \underset{\sim}{A}_2}(2) = 2/3 \quad \mu_{\underset{\sim}{A}_1 (v) \underset{\sim}{A}_2}(6) = 3/7$

$\mu_{\underset{\sim}{A}_1 (v) \underset{\sim}{A}_2}(3) = 1 \quad \mu_{\underset{\sim}{A}_1 (v) \underset{\sim}{A}_2}(7) = 2/7$

$\mu_{\underset{\sim}{A}_1 (v) \underset{\sim}{A}_2}(4) = 5/7 \quad \mu_{\underset{\sim}{A}_1 (v) \underset{\sim}{A}_2}(8) = 1/7$

de ahí se obtiene:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\underset{\sim}{A}_1 (v) \underset{\sim}{A}_2$:	0	2/3	1	5/7	4/7	3/7	2/7	1/7	0

Si se pasa a obtener: $\mu_{\underset{\sim}{A}_1 (\wedge) \underset{\sim}{A}_2}(t) = \bigvee_{t=u \wedge v} (\mu_{\underset{\sim}{A}_1}(u) \wedge \mu_{\underset{\sim}{A}_2}(v))$ en el ejemplo anterior se tiene:

$\mu_{\underset{\sim}{A}_1}(0) \wedge \mu_{\underset{\sim}{A}_2}(0) = 0$ (las combinaciones en las que aparezca una t=0 serán siempre **cero**)

$\mu_{\underset{\sim}{A}_1}(1) \wedge \mu_{\underset{\sim}{A}_2}(1) = 0$ $\mu_{\underset{\sim}{A}_1}(2) \wedge \mu_{\underset{\sim}{A}_2}(1) = 0$

$\mu_{\underset{\sim}{A}_1}(1) \wedge \mu_{\underset{\sim}{A}_2}(2) = 1/3$ serán **cero** el resto de combinaciones en las que aparezca $\mu_{\underset{\sim}{A}_2}(1)$

$\mu_{\underset{\sim}{A}_1}(1) \wedge \mu_{\underset{\sim}{A}_2}(3) = 1/3$

$\mu_{\underset{\sim}{A}_1}(1) \wedge \mu_{\underset{\sim}{A}_2}(4) = 1/3$

$\mu_{\underset{\sim}{A}_1}(1) \wedge \mu_{\underset{\sim}{A}_2}(5) = 1/3$

$\mu_{\underset{\sim}{A}_1}(1) \wedge \mu_{\underset{\sim}{A}_2}(6) = 1/3$

$\mu_{\underset{\sim}{A}_1}(1) \wedge \mu_{\underset{\sim}{A}_2}(7) = 2/7$

$\mu_{\underset{\sim}{A}_1}(1) \wedge \mu_{\underset{\sim}{A}_2}(8) = 1/7$

el mayor de todos estos números será: 1/3

$\mu_{\underset{\sim}{A}_1}(2) \wedge \mu_{\underset{\sim}{A}_2}(2) = 2/3$ $\mu_{\underset{\sim}{A}_1}(3) \wedge \mu_{\underset{\sim}{A}_2}(2) = 1$

$\mu_{\underset{\sim}{A}_1}(2) \wedge \mu_{\underset{\sim}{A}_2}(3) = 2/3$ $\mu_{\underset{\sim}{A}_1}(4) \wedge \mu_{\underset{\sim}{A}_2}(2) = 2/3$

$\mu_{\underset{\sim}{A}_1}(2) \wedge \mu_{\underset{\sim}{A}_2}(4) = 2/3$ $\mu_{\underset{\sim}{A}_1}(5) \wedge \mu_{\underset{\sim}{A}_2}(2) = 1/3$

$\mu_{\underset{\sim}{A}_1}(2) \wedge \mu_{\underset{\sim}{A}_2}(5) = 4/7$

$\mu_{\underset{\sim}{A}_1}(2) \wedge \mu_{\underset{\sim}{A}_2}(6) = 3/7$

$\mu_{\underset{\sim}{A}_1}(2) \wedge \mu_{\underset{\sim}{A}_2}(7) = 2/7$

$\mu_{\underset{\sim}{A}_1}(2) \wedge \mu_{\underset{\sim}{A}_2}(8) = 1/7$

el mayor de todos estos números será: 1

$\mu_{\underset{\sim}{A}_1}(3) \wedge \mu_{\underset{\sim}{A}_2}(3) = 6/7$ $\mu_{\underset{\sim}{A}_1}(4) \wedge \mu_{\underset{\sim}{A}_2}(3) = 2/3$

$\mu_{\underset{\sim}{A}_1}(3) \wedge \mu_{\underset{\sim}{A}_2}(4) = 5/7$ $\mu_{\underset{\sim}{A}_1}(5) \wedge \mu_{\underset{\sim}{A}_2}(3) = 1/3$

$\mu_{\underset{\sim}{A}_1}(3) \wedge \mu_{\underset{\sim}{A}_2}(5) = 4/7$

$\mu_{\underset{\sim}{A}_1}(3) \wedge \mu_{\underset{\sim}{A}_2}(6) = 3/7$

$\mu_{\underset{\sim}{A}_1}(3) \wedge \mu_{\underset{\sim}{A}_2}(7) = 2/7$

$\mu_{\underset{\sim}{A}_1}(3) \wedge \mu_{\underset{\sim}{A}_2}(8) = 1/7$

el mayor de todos estos números será : 6/7

Se pueden realizar tambiém todos los cálculos para los valores de $0 \le \alpha \le 1$, nivel por nivel. Así con $\alpha \in [0,1]$:

$$A_{1\alpha} = [a_1^{(\alpha)}, b_1^{(\alpha)}], \qquad A_{2\alpha} = [a_2^{(\alpha)}, b_2^{(\alpha)}]$$

$$A_{\alpha_s} = [a_1^{(\alpha)} \wedge a_2^{(\alpha)}, b_1^{(\alpha)} \wedge b_2^{(\alpha)}] = [a_s^{(\alpha)}, b_s^{(\alpha)}]$$

$$A_{\alpha_p} = [a_1^{(\alpha)} \vee a_2^{(\alpha)}, b_1^{(\alpha)} \vee b_2^{(\alpha)}] = [a_p^{(\alpha)}, b_p^{(\alpha)}]$$

Ejemplo:

$$\underset{\sim}{A}_1 = (0, 3, 6) \qquad \underset{\sim}{A}_2 = (1, 2, 9)$$

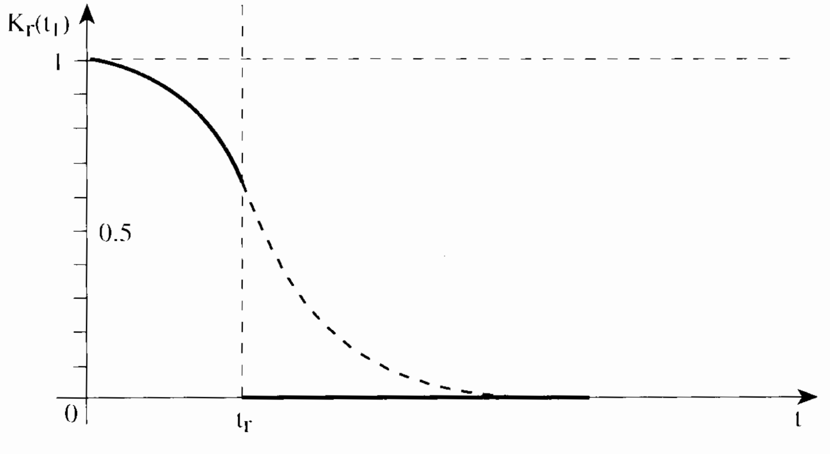
$$A_1^{(\alpha)} = [3\alpha, 6 - 3\alpha] \qquad A_2^{(\alpha)} = [\alpha + 1, 9 - 7\alpha]$$

α	3α	$\alpha + 1$	$(3\alpha)\wedge(\alpha+1)$	$(3\alpha)\vee(\alpha+1)$
0	0	1	0	1
.1	0.3	1.1	0.3	1.1
.2	0.6	1.2	0.6	1.2
.3	0.9	1.3	0.9	1.3
.4	1.2	1.4	1.2	1.4
.5	1.5	1.5	1.5	1.5
.6	1.8	1.6	1.6	1.8
.7	2.1	1.7	1.7	2.1
.8	2.4	1.8	1.8	2.4
.9	2.7	1.9	1.9	2.7
1	3	2	2	3

α	$6 - 3\alpha$	$9 - 7\alpha$	$(6 - 3\alpha)\wedge(9 - 7\alpha)$	$(6 - 3\alpha)\vee(9 - 7\alpha)$
0	6	9	6	9
.1	5.7	8.3	5.7	8.3
.2	5.4	7.6	5.4	7.6
.3	5.1	6.9	5.1	6.9
.4	4.8	6.2	4.8	6.2
.5	4.5	5.5	4.5	5.5
.6	4.2	4.8	4.2	4.8
.7	3.9	4.1	3.9	4.1
.8	3.6	3.4	3.4	3.6
.9	3.3	2.7	2.7	3.3
1	3	2	2	3

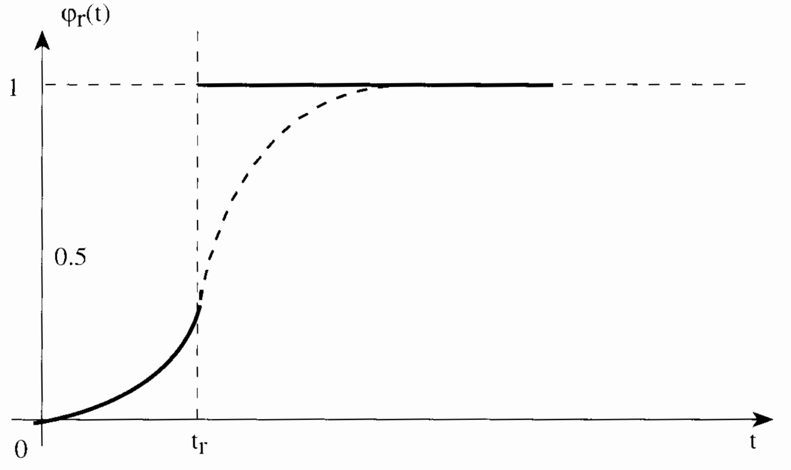
α	$A_1^{(\alpha)}(\wedge)A_2^{(\alpha)}$	$A_1^{(\alpha)}(\vee)A_2^{(\alpha)}$
0	[0, 6]	[1, 9]
.1	[0.3, 5.7]	[1.1, 8.3]
.2	[0.6, 5.4]	[1.2, 7.6]
.3	[0.9, 5.1]	[1.3, 6.9]
.4	[1.2, 4.8]	[1.4, 6.2]
.5	[1.5, 4.5]	[1.5, 5.5]
.6	[1.6, 4.2]	[1.8, 4.8]
.7	[1.7, 3.9]	[2.1, 4.1]
.8	[1.8, 3.4]	[2.4, 3.6]
.9	[1.9, 2.7]	[2.7, 3.3]
1	2	3

El mismo proceso se seguiría para las funciones de supervivencia truncadas (renovación preventiva, revisión a fecha fija). La curva de supervivencia se presentará entonces de la siguiente manera:



Evidentemente el momento elegido t_r debe ser anterior a la fecha θ del número borroso $\underset{\sim}{A}$. Se opera con las funciones de supervivencia truncadas K_r (t) de la misma que con cualquier curva K (t).

Por otra parte se puede obtener la curva $\varphi_r(t)$ correspondiente a la curva $K_r(t)$:



En ella se observa un salto brusco para $t = t_r$. Retirar del servicio voluntariamente a un equipo en un determinado momento t_r, es lo mismo que considerar que a partir de $t = t_r$ la posibilidad de avería es igual a uno, o el de supervivencia igual a cero.

De este esquema surge una primera función, la de programación de necesidades de materiales, que estará en conexión con unas previsiones de producción, debidas, a su vez, a una estimación de ventas resultantes de los estudios de mercado.

LA COLOCACION DE MEDIOS MONETARIOS EN STOCKS

CAPITULO VI

LA COLOCACION DE MEDIOS MONETARIOS EN STOCKS

El Problema del Aprovisionamiento en la Empresa

El proceso de producción ha sido considerado desde los estudios clásicos de la economía como el núcleo central sobre el que gira la actividad de la empresa. Este proceso tiene lugar gracias a la incorporación de determinados factores de la producción, algunos de los cuales pueden ser englobados en unos epígrafes de materiales que se suelen denominar «materias primas» y «productos semielaborados».

El proceso de producción precisa, pues, del suministro de ciertos tipos de materiales en determinados momentos. De ahí la necesidad de considerar el concepto de aprovisionamiento a los centros productivos, lo que le permite poner de manifiesto un hecho que, por evidente, no debe ser olvidado. El suministro sólo podrá ser garantizado, en principio, si se cumple el supuesto de que la empresa tiene en su mano, y no se halla en la de sus proveedores, la posibilidad de recibir un determinado tipo y cantidad de materiales en cada momento.

Surge así, con evidencia, la necesidad de establecer un eficaz programa de entregas de materiales al proceso productivo, ya que en caso contrario podría encontrarse ante una situación de inactividad que implicaría soportar unos costes de inacción de los otros factores productivos entre los que destacan la mano de obra y los equipos industriales.

Esta incidencia en los costes, como consecuencia de un deficiente aprovisionamiento de los materiales, ha intentado subsanarse con la acumulación de unas cantidades de materiales en el ámbito interno de la empresa formando unos almacenes. Con ello se trata de conseguir que las deficiencias en los suministros desde el exterior no incidan o quede minimizada su incidencia en el proceso de fabricación.

En los procesos de producción rudimentarios la función de compras y la gestión de stocks están íntimamente ligados entre sí, de tal manera que es muy difícil la disociación entre estos dos conceptos.

Las empresas de tipo comercial realizan las compras de unos bienes para venderlos en el mismo estado que han sido adquiridos. Entre la compra y la venta existe un espacio de tiempo en el cual generalmente se almacenan los productos para poder venderlos en el momento en que son pedidos por los clientes.

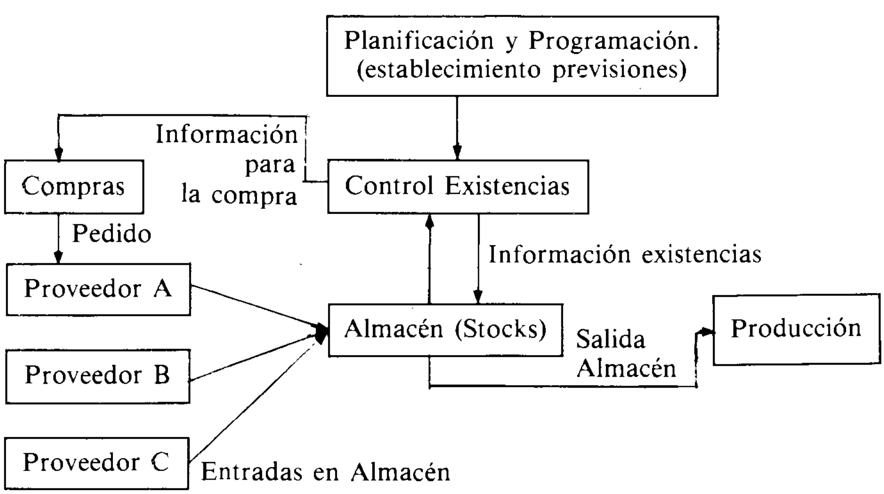
Las empresas de transformación compran materias primas, productos semielaborados y materiales auxiliares, realizan una serie de operaciones en los mismos para luego proceder a la venta de los correspondientes productos. La entrega de los factores de la producción a los talleres y líneas de fabricación exige una cierta acumulación de stocks.

Desde el punto de vista formal la creación de los almacenes ha permitido separar un problema complejo en dos partes: la primera trata de la adquisición de materias primas o productos semielaborados al exterior, y la segunda del suministro desde los almacenes de la propia empresa hasta las líneas de fabricación, quedando así como centro y eje de esta función de aprovisionamiento la existencia de unos stocks de materias primas y productos semielaborados cuyo objeto es, precisamente, el normal funcionamiento del proceso de producción.

En este planteamiento pueden ser consideradas tres fases relativas a la función general de aprovisionamiento de materiales para la producción.

La primera hace referencia a la compra, cuyo reflejo físico consiste en una entrada de materias primas y productos semielaborados a los almacenes. La segunda se refiere al volumen de existencias en almacén, es decir, a los stocks. La tercera lleva consigo un flujo desde los almacenes hasta las secciones de producción. Si se consideran estas funciones independientemente de las restantes, el cuadro que sigue aparecerá como una sección de otro, de carácter más general, que rige la actividad global de una empresa.

Esquema general del movimiento provocado por los stocks



Una vez establecidos los programas de necesidades, se exige el mantenimiento de unas determinadas existencias que físicamente están formadas por los stocks de almacenes.

Posteriormente tiene lugar una nueva función de tipo administrativo con base en los estudios realizados que dará lugar a un movimiento que hace surgir la necesidad de que se realice una compra de materiales. Esta tarea quedará materializada con la elaboración y posterior envío a proveedores de los correspondientes pedidos en los que figurarán normalmente, entre otros datos, la previsión de los plazos de entrega.

El funcionamiento físico del almacén consiste en un movimiento de materiales en dos sentidos. Por una parte tiene lugar la entrada procedente del exterior de la empresa y por otra un flujo que va desde el almacén hasta el proceso de producción. En este esquema quedan delimitadas las tres funciones a que se ha hecho referencia anteriormente.

Cuando se plantea en términos generales el problema de los stocks queda de manifiesto que existen, en el ánimo del empresario, dos impulsos contrapuestos en relación con la magnitud de los mismos.

En un sentido, el empresario tiende a disponer de la mayor cantidad posible de materiales para que, en todo momento, pueda poner a disposición de los centros usuarios las cantidades que por ellos le sean demandadas.

Por otra parte, sin embargo, el mantenimiento de un depósito con elevadas cantidades exige el desembolso de masas monetarias que, evidentemente, comportan un coste por el interés del capital, así como la necesidad de poseer unos edificios y una organización suficiente para poder custodiarlos.

Con esta manera intuitiva de enfocar el problema aparece la necesidad de encontrar un equilibrio de contraposición que deberá satisfacer determinadas condiciones para que pueda ser considerado como un óptimo económico.

El ámbito económico de los estudios empresariales fija un interés especial en el estudio de los stocks o existencias en almacén, por cuanto resultan aptos para ser sometidos a un estudio cuantitativo que puede llevar a una posición de equilibrio, relegando a un segundo término las funciones de compra, por una parte, y el suministro de material por otra, por considerar que poseen un carácter fundamentalmente administrativo.

El origen de los conceptos modernos de gestión de stocks se puede situar entre 1915 y 1922, cuando algunos estudiosos trabajando independientemente consiguieron una fórmula que proporcionaba el lote económico de fabricación minimizando la suma de los costes de compra (1) y de mantenimiento de stocks en el caso de una demanda constante. Wilson desarrolló esta cuestión en los años que siguieron y su nombre quedó ligado al método del punto de pedido fijo. Más tarde, en la década de los 40 e inicios de 1950, se produce una evolución en la teoría de stocks y su aplicación práctica. Hoy la multiplicidad de artículos que se refieren a ella, tanto en las revistas técnicas como en las de organización, muestran claramente el interés que este tema ha adquirido.

---

(1) Si en lugar de comprar materiales a los proveedores se fabrican en la misma empresa el coste de compra queda sustituido por el coste de lanzamiento.

Es evidente que la gestión de stocks en la empresa no se limita a la tarea de conseguir unos materiales para la producción o para la venta, sino que, dado que los stocks constituyen, en esencia, una inmovilización financiera equiparable a la realizada en equipos industriales o en acciones, constituye, en cierto modo, un problema financiero. La diferencia con los otros elementos productivos se halla en el plazo de la inmovilización.

En el ámbito de la teoría pura se pueden aplicar a los stocks, como lo ha hecho Arrow, los tres motivos que obligan a conservar las disponibilidades, de acuerdo con el planteamiento de Keynes en su análisis del mercado de capitales. Los empresarios mantienen los stocks de materiales cuando podrían colocar en otras cosas el dinero así inmovilizado por tres razones fundamentales:

1) La existencia de la actividad productiva hace inevitable que se mantenga un cierto volumen de stocks.
2) Una actitud de prudencia en relación a un futuro que se considera incierto dado que en muchos casos no es posible prever la demanda de productos con exactitud. Solamente en contadas ocasiones se puede prescindir de un stock de seguridad cuando las materias primas son obtenidas inmediatamente sin coste excesivo, o bien la ruptura de stocks o el retraso de los pedidos no entrañarán coste significativo alguno.
3) El aspecto especulativo surge cuando se espera un aumento rápido de los precios o existe una expectativa de aumento en las ventas futuras, con lo que se da la posibilidad de obtener un beneficio por las modificaciones de los parámetros citados.

Se pone así de manifiesto la necesidad de un coste por el almacenamiento de materiales, cuyo objetivo consistirá en mantener un nivel de servicio tendente a la obtención de un beneficio para la empresa. Por ello será necesario el tratamiento formal del problema de los stocks para conseguir así la optimización de las magnitudes económicas que les afectan.

En la base de estos estudios se halla el conocimiento de la demanda futura, la cual, siguiendo el camino tradicional, se puede resumir en tres categorías:

— La empresa conoce exactamente cuál va a ser la demanda futura. Esta situación plantea el llamado problema de stocks en el campo de la certeza.
— La empresa está en condiciones de conocer la distribución probabilística de la demanda futura. Existe la posibilidad de que se disponga de esta información para un material cuando se cuenta con suficientes datos anteriores y el fenómeno es repetible.
— La empresa desconoce los niveles que alcanzará la demanda futura, aunque no es verosímil la ignorancia completa. Por ello es posible aprovechar la experiencia en este ambiente de incertidumbre.

La gestión de stocks para una demanda constante

Uno de los supuestos más conocidos, en el tratamiento de la gestión de stocks, se basa en la hipótesis del conocimiento tanto de los costes de lanzamiento, o en su caso de compra, como de almacenaje. Se supone, además, que existe una demanda constante, k piezas por unidad de tiempo, de unos determinados materiales. No se admite posibilidad de ruptura y las piezas son aprovisionadas en series o «lotes».

El coste de lanzamiento, o de compra, de un lote es independiente del número de piezas que lo componen. Se llamará a este coste constante C_l. El coste de almacenamiento por pieza y unidad de tiempo (como ejemplo se puede tomar el día) será C_s. La demanda total para un intervalo de tiempo θ será N. Si además se supone que los lotes tienen siempre el mismo número de piezas n, hay que hallar el valor de n para que el coste global del lanzamiento de N piezas sea mínimo. Se determinará también el número de lotes r así como el período T de reaprovisionamiento del stock.

La gestión de un stock en estas condiciones puede quedar representada de la siguiente manera:

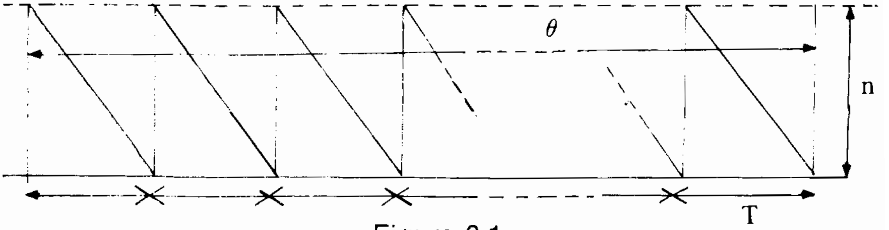


Figura 6.1

El nivel medio del stock para un período T es n/2, según se observa en el gráfico siguiente:

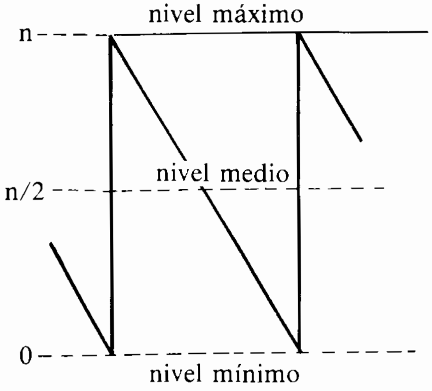


Figura 6.2

El coste de almacenamiento para cada intervalo de tiempo será: $1/2 \text{ n} \,.\, C_s \,.\, T$ y el coste total para un lote:

$$C_l + 1/2 \text{ n} \,.\, C_s \,.\, T$$

Con la adopción de la hipótesis de linearidad, se puede escribir que:

$$n = kT$$

Se tiene también:

$$r = \frac{N}{n} = \frac{\theta}{T}$$

El coste total para el intervalo de tiempo θ es:

$$\Gamma = (C_l + 1/2\ nTC_s) \cdot r = (C_l + \frac{nT}{2} C_s) \frac{N}{n} =$$

$$= \frac{NC_l}{n} + \frac{NT}{2} C_s = \frac{NC_l}{n} + \frac{\theta \cdot C_s}{2} n$$

Habida cuenta que se suponen conocidas las magnitudes N, θ, C_l y C_s queda, pues, expresada Γ en función de la cantidad variable n:

$$\Gamma(n) = \frac{N}{n} C_l + \frac{\theta \cdot n}{2} C_s$$

Si se llama a:

$\Gamma_l = \frac{N}{n} \cdot C_l$ gasto global de lanzamiento

$\Gamma_s = \frac{1}{2} \theta . n . C_s$ gasto de almacenamiento

se observa que Γ_l es inversamente proporcional a n, mientras que Γ_s es proporcional a n. Estas magnitudes pueden ser representadas en un sistema de coordenadas:

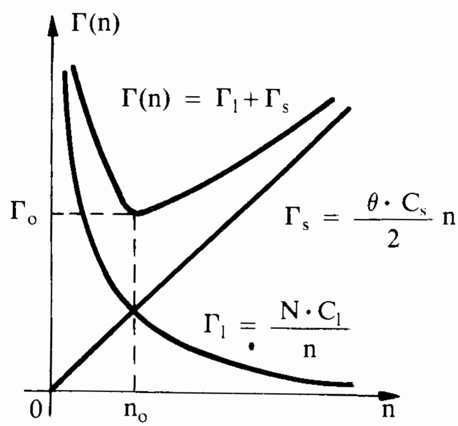


Figura 6.3

Se observa en este gráfico que la suma:

$$\Gamma(n) = \Gamma_l + \Gamma_s$$

alcanzará un mínimo para un determinado valor de n. Como es sobradamente conocido, el mínimo de la suma de dos magnitudes variables en las que su producto es constante, tiene lugar cuando estas magnitudes son iguales. Efectivamente:

$$\Gamma_l \cdot \Gamma_s = \frac{1}{2} N \cdot C_l \cdot C_s \cdot \theta = \text{constante}$$

por lo que el mínimo de $\Gamma_l + \Gamma_s$ se producirá cuando

$$\Gamma_l = \Gamma_s$$

es decir:

$$\frac{N \cdot C_l}{n} = \frac{\theta \cdot C_s}{2} n$$

Cuando:

$$n = n_o = \sqrt{2 \frac{N}{\theta} \frac{C_l}{C_s}}$$

Se obtiene el mismo resultado derivando con respecto a n:

$$\Gamma = \frac{N \cdot C_l}{n} + \frac{\theta \cdot C_s}{2} n$$

Hay que subrayar que en este esquema la única variable es n, mientras que N, θ, C_l y C_s son constantes.

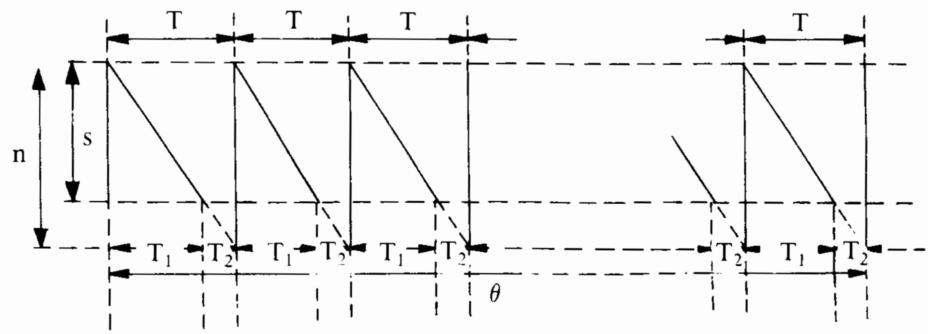
A partir del sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{N}{n} = \dfrac{\theta}{T} \\ n = \sqrt{\dfrac{2N}{\theta} \dfrac{C_l}{C_s}} \end{cases} \qquad \text{se obtiene: } T = T_o = \sqrt{2 \frac{\theta}{N} \cdot \frac{C_l}{C_s}}$$

y a partir de:

$$\begin{cases} n_o = \sqrt{2 \dfrac{N}{\theta} \cdot \dfrac{C_l}{C_s}} \\ \Gamma = \dfrac{N \cdot C_l}{n} + \dfrac{\theta . C_s}{2} n \end{cases} \qquad \text{se obtiene: } \Gamma_o = \Gamma(n_o) = \sqrt{2N . C_l . C_s . \theta}$$

Este mismo caso puede ser tratado teniendo en cuenta la existencia de unos costes cuando se produce una falta de material (costes de ruptura). Si se llama a este tipo de coste por unidad de tiempo Cp, al final de cada intervalo de tiempo T se realiza el lanzamiento de un lote n, destinado, por una parte, a suministrar la demanda s' = n-s que no ha podido ser entregada durante un tiempo T_2, y, por otra, a reconstruir el stock s. Gráficamente este esquema podría representarse de la siguiente manera:



A lo largo de un tiempo T_1 en cada período T, el nivel diario del stock resulta suficiente para satisfacer la demanda. Luego, durante un tiempo T_2, hay una carencia del material y el resto se aprovisiona con la entrada del stock del lote siguiente.

Sea s el nivel máximo del stock. Resulta sencillo comprobar en el gráfico anterior las siguientes relaciones:

$$\frac{T_1}{T} = \frac{s}{n}, \qquad \frac{T_2}{T} = \frac{n-s}{n}$$

de donde:

$$T_1 = \frac{s}{n} T, \qquad T_2 = \frac{n-s}{n} T$$

Se tiene sucesivamente:

— El coste del almacenamiento de un lote: 1/2 s . T_1 . C_s

— El coste del lanzamiento de un lote: C_l

— El coste de ruptura correspondiente a un lote: 1/2 (n-s) T_2 . C_p

El coste global será:

$$\Gamma(n, s) = \left[\frac{1}{2} s \cdot T_1 \cdot C_s + C_l + \frac{1}{2}(n-s)\, T_2 C_p\right] \cdot r$$

en donde:

$$r = \frac{N}{n} = \frac{\theta}{T}$$

sustituyendo T_1, T_2 y r, se obtiene:

$$\Gamma(n, s) = \frac{s^2 \cdot \theta}{2n} C_s + \frac{N}{n} C_1 + \frac{(n-s)^2 \cdot \theta}{2n} C_p$$

Para calcular el mínimo de esta función de dos variables *n* y *s*, se obtienen las derivadas parciales y se igualan a cero:

$$\frac{\delta \Gamma}{\delta n} = -\frac{s^2 \cdot C_s \cdot \theta}{2n^2} - \frac{N}{n^2} C_1 + \left(1 - \frac{s^2}{n^2}\right) \frac{\theta}{2} C_p = 0$$

$$\frac{\delta \Gamma}{\delta s} = \frac{s \cdot \theta}{n} C_s - \frac{n-s}{n} C_p \cdot \theta = 0$$

Reduciendo se llega:

$$s = n \frac{C_p}{C_p + C_s}$$

y:

$$n^2 \cdot C_p - (C_s + C_p) s^2 = \frac{2C_1 N}{\theta}$$

de donde:

(6.1) $$n = n_o = \sqrt{2 \frac{N}{\theta} \cdot \frac{C_1}{C_s}} \cdot \sqrt{\frac{C_s + C_p}{C_p}}$$

(6.2) $$s = s_o = \sqrt{2 \frac{N}{\theta} \cdot \frac{C_1}{C_s}} \cdot \sqrt{\frac{C_p}{C_s + C_p}} = n_o \cdot \frac{C_p}{C_s + C_p}$$

Se puede comprobar, perfectamente, que se trata de un mínimo, calculando las derivadas parciales segundas:

(6.3) $$\left(\frac{\delta^2 \Gamma}{\delta n \, \delta s}\right)^2 - \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta n^2} \cdot \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta s^2} < 0$$

(6.4) $$\frac{\delta^2 \Gamma}{\delta n^2} > 0$$

(6.5) $$\frac{\delta^2 \Gamma}{\delta s^2} > 0$$

y verificando que estas condiciones se cumplen para $n = n_o$ y $s = s_o$. El cociente

$$\varrho = \frac{C_p}{C_s + C_p}$$

se denomina «tipo de ruptura». Esta magnitud juega un papel esencial en el problema de los stocks, en donde se admite la ruptura del stock. En este problema se constata que las magnitudes n_o y s_o deben elegirse de tal manera que:

$$\frac{s_o}{n_o} = \varrho$$

lo que permite escribir:

$$\frac{T_1}{T} = \frac{s_o}{n_o} = \varrho$$

y también:

$$\frac{T_2}{T} = 1 - \varrho$$

Cuando se dice que existe un tipo de ruptura igual a ϱ, se acepta que se producen, en tanto por ciento, $(1-\varrho)$ veces una ruptura de stocks en el intervalo T.

A partir de (6.1) y (6.2) se obtiene:

$$T_o = \sqrt{2 \frac{\theta}{N} \frac{C_l}{C_s}} \cdot \sqrt{\frac{C_s + C_p}{C_p}}$$

$$\Gamma_o = \sqrt{2N\, C_s C_l \theta} \cdot \sqrt{\frac{C_p}{C_s + C_p}}$$

$$n_o = \frac{(n_o \text{ para } \varrho = 1)}{\sqrt{\varrho}}, \qquad s_o = (n_o \text{ para } \varrho = 1) \cdot \sqrt{\varrho}$$

$$T_o = \frac{(T_o \text{ para } \varrho = 1)}{\sqrt{\varrho}}, \qquad \Gamma_o = (\Gamma_o \text{ para } \varrho = 1) \cdot \sqrt{\varrho}$$

lo que pone de manifesto que el hecho de admitir un tipo $\varrho < 1$ aumenta n_o y T_o y disminuye s_o y Γ_o. Para un valor dado de ϱ, las magnitudes económicas n_o y s_o deberán ser elegidas de tal manera que cumplan la relación

$$\frac{s_o}{n_o} = \varrho$$

Incorporación de los números borrosos al problema de los stocks

Partiendo del mismo supuesto de *demanda constante* se puede incorporar la noción de borrosidad, cuando se parte de que tanto C_l como C_s no son conocidos con nitidez, lo cual sucede en una gran cantidad de situaciones reales. Se puede entonces admitir que C_l y C_s son números borrosos y que para más facilidad toman la forma triangular. Sean, pues:

$$\underset{\sim}{C}_l = (C_{1l}, C_{2l}, C_{3l})$$
$$\underset{\sim}{C}_s = (C_{1s}, C_{2s}, C_{3s})$$

Como es conocido, aunque $\underset{\sim}{C}_l$ y $\underset{\sim}{C}_s$ sean números borrosos triangulares, no lo son ni $\underset{\sim}{C}_l/\underset{\sim}{C}_s$, ni $\underset{\sim}{C}_l \cdot \underset{\sim}{C}_s$, ni, evidentemente, $\sqrt{\underset{\sim}{C}_l/\underset{\sim}{C}_s}$ y $\sqrt{\underset{\sim}{C}_l \cdot \underset{\sim}{C}_s}$. Para obtener los números borrosos correspondientes a n_o, T_o y Γ_o, deberá realizarse el cálculo para los $\alpha-$ cortes con independencia de que se puedan obtener los citados números borrosos triangulares, mediante aproximaciones cuando el proceso resulte, evidentemente, válido.

Se puede escribir para los $\alpha-$ cortes de C_l y C_s:

(6.6) $$C_l^{(\alpha)} = [C_{1l} + (C_{2l} - C_{1l})\,\alpha, \quad C_{3l} - (C_{3l} - C_{2l})\,\alpha] \qquad \alpha \in [0,1]$$

(6.7) $$C_s^{(\alpha)} = [C_{1s} + (C_{2s} - C_{1s})\,\alpha, \quad C_{3s} - (C_{3s} - C_{2s})\,\alpha] \qquad \alpha \in [0,1]$$

(6.8) $$\frac{C_l^{(\alpha)}}{C_s^{(\alpha)}} = \left[\frac{C_{1l} + (C_{2l} - C_{1l})\,\alpha}{C_{3s} - (C_{3s} - C_{2s})\,\alpha}, \quad \frac{C_{3l} - (C_{3l} - C_{2l})\,\alpha}{C_{1s} + (C_{2s} - C_{1s})\,\alpha}\right] \qquad \alpha \in [0,1]$$

(6.9) $$C_l^{(\alpha)} \cdot C_s^{(\alpha)} = [(C_{1l} + (C_{2l} - C_{1l})\,\alpha) \cdot (C_{1s} + (C_{2s} - C_{1s})\,\alpha), \quad (C_{3l} - (C_{3l} - C_{2l})\,\alpha) \cdot (C_{3s} - (C_{3s} - C_{2s})\,\alpha)] \qquad \alpha \in [0,1]$$

Por otra parte si $\underset{\sim}{A}$ es un número borroso en R^+ para el que los $\alpha-$ cortes son:

$$A^{(\alpha)} = [A_{1\alpha}, A_{2\alpha}]$$

se puede escribir que:

$$\sqrt{A^{(\alpha)}} = [\sqrt{A_{1\alpha}}, \sqrt{A_{2\alpha}}]$$

por lo cual se tendrá:

$$(6.10) \qquad \sqrt{C_l^{(\alpha)}/C_s^{(\alpha)}} = \left[\sqrt{\frac{C_{1l}+(C_{2l}-C_{1l})\,\alpha}{C_{3s}-(C_{3s}-C_{2s})\,\alpha}},\ \sqrt{\frac{C_{3l}-(C_{3l}-C_{2l})\,\alpha}{C_{1s}+(C_{2s}-C_{1s})\,\alpha}}\right]$$

$$(6.11) \qquad \sqrt{C_l^{(\alpha)}\cdot C_s^{(\alpha)}} = \begin{array}{l}[\sqrt{(C_{1l}+(C_{2l}-C_{1l})\,\alpha)\cdot(C_{1s}+(C_{2s}-C_{1s})\,\alpha)},\\ \sqrt{(C_{3l}-(C_{3l}-C_{2l})\,\alpha)\cdot(C_{3s}-(C_{3s}-C_{2s})\,\alpha)}]\end{array}$$

Habida cuenta que N y θ no son borrosos, se puede escribir, para los α-cortes de $\underset{\sim}{n}_o$, $\underset{\sim}{T}_o$ y $\underset{\sim}{\Gamma}_o$:

$$(6.12) \qquad n_{o\alpha} = \sqrt{2\,\frac{N}{\theta}}\cdot\sqrt{C_l^{(\alpha)}/C_s^{(\alpha)}},$$

$$(6.13) \qquad T_{o\alpha} = \sqrt{2\,\frac{\theta}{N}}\cdot\sqrt{C_l^{(\alpha)}/C_s^{(\alpha)}},$$

$$(6.14) \qquad \Gamma_{o\alpha} = \sqrt{2N\,\theta}\cdot\sqrt{C_l^{(\alpha)}\cdot C_s^{(\alpha)}}$$

por lo que entonces, al ser conocidos los $\alpha-$ cortes se podrán trazar las funciones de pertenencia de $\underset{\sim}{n}_o$, $\underset{\sim}{T}_o$ y $\underset{\sim}{\Gamma}_o$ correspondientes, con la precisión que se estime oportuna a través de los pasos elegidos para α.

Este esquema puede ser ilustrado a través del siguiente ejemplo numérico:

N = 120.000 unidades físicas

θ = 360 días

$\underset{\sim}{C}_l$ = (200.000, 300.000, 370.000) unidades monetarias

$\underset{\sim}{C}_s$ = (3, 3.5, 4.4) por unidad y día en unidades monetarias.

Se calculan primero los coeficientes no borrosos de (6.12), (6.13) y (6.14)

$$\sqrt{2\,\frac{N}{\theta}} = \sqrt{2\,\frac{120.000}{360}} = 25.8198$$

$$\sqrt{2\,\frac{\theta}{N}} = \sqrt{2\,\frac{360}{120.000}} = 0.07745$$

Ahora se calculan los números borrosos, para los que los α-cortes son $\sqrt{C_l^{(\alpha)}/C_s^{(\alpha)}}$ y $\sqrt{C_l^{(\alpha)}\cdot C_s^{(\alpha)}}$ a partir de (6.6), (6.7), (6.10) y (6.11)

$$C_l^{(\alpha)} = [200.000+100.000\alpha,\ 370.000-70.000\alpha]$$

$$C_s^{(\alpha)} = [3+0.5\alpha,\ 4.4-0.9\alpha]$$

$$\sqrt{C_1^{(\alpha)} / C_2^{(\alpha)}} = \left[\sqrt{\frac{200.000 + 100.000\alpha}{4.4 - 0.9\alpha}}, \sqrt{\frac{370.000 - 70.000\alpha}{3 + 0.5\alpha}} \right]$$

$$\sqrt{C_1^{(\alpha)} \cdot C_2^{(\alpha)}} =$$

$$= [\sqrt{(200.000 + 100.000\alpha)\ (3 + 0.5\alpha)}, \sqrt{(370.000 - 70.000)\ (4.4 - 0.9\alpha)}]$$

Va a procederse al cálculo de los $\alpha-$ cortes con un «paso» de 0.1 desde 0 hasta 1, cuyos resultados son los siguientes

Cuadro primero:

α	$\sqrt{C_1^{(\alpha)}\ (:)\ C_2^{(\alpha)}}$	
0	213.200	351.188
.1	220.734	344.987
.2	228.325	338.878
.3	235.987	332.856
.4	243.733	326.917
.5	251.577	321.055
.6	259.533	315.268
.7	267.615	309.549
.8	275.838	303.896
.9	284.218	298.304
1	292.770	

Cuadro segundo:

α	$\sqrt{C_i^{(\alpha)}(.)\,C_s^{(\alpha)}}$	
0	774.595	1275.931
.1	800.312	1250.811
.2	825.832	1225.691
.3	851.175	1200.570
.4	876.356	1175.448
.5	901.387	1150.326
.6	926.282	1125.202
.7	951.052	1100.077
.8	975.704	1074.951
.9	1000.249	1049.823
1	1024.695	

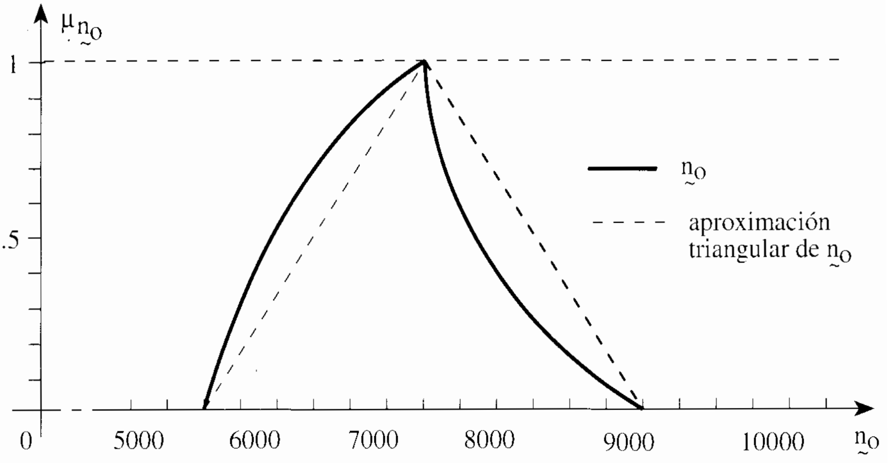
Se obtiene el siguiente número borroso: $n_{0\alpha}$ cuya aproximación triangular es:

$$\underset{\sim}{A} = (5504, 7559, 9067)$$

Cuadro tercero:

	Número borroso		Aproximación triangular	
α	$n_{0\alpha}$		$[5504+2055\alpha, 9067-1508\alpha]$	
0	5504	9067	5504	9067
.1	5699	8907	5709	8916
.2	5895	8749	5915	8765
.3	6093	8594	6120	8614
.4	6293	8440	6326	8463
.5	6495	8289	6531	8313
.6	6701	8140	6737	8162
.7	6909	7992	6942	8011
.8	7122	7846	7148	7860
.9	7338	7702	7353	7709
1	7559		7559	

Cuya representación gráfica es:

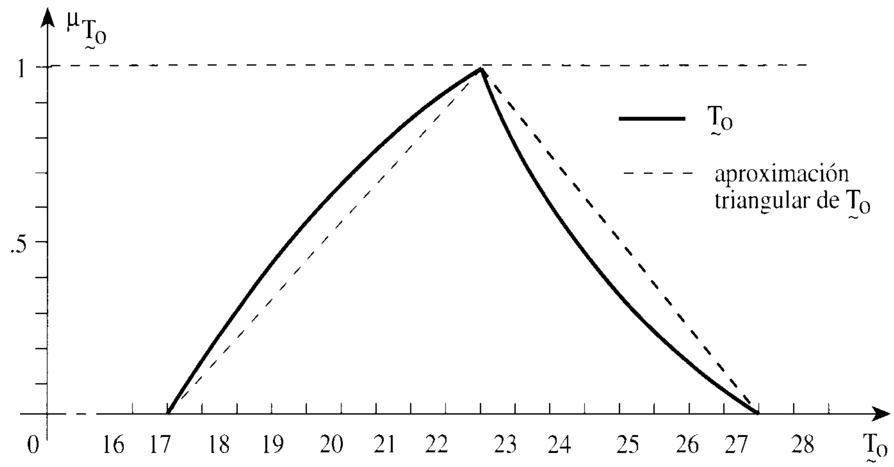


El tiempo que cubre cada lote vendrá expresado por $T_0\alpha$ cuya aproximación triangular es : $\tilde{A} = (16.51, 22.67, 27.19)$

Cuadro cuarto:

	Número borroso		Aproximación triangular	
α	$T_0\alpha$		$[16.51+6.16\alpha, 27.19-4.43\alpha]$	
0	16.51	27.19	16.510	27.190
.1	17.09	26.71	17.126	26.747
.2	17.68	26.24	17.742	26.304
.3	18.27	25.77	18.358	25.861
.4	18.87	25.31	18.974	25.418
.5	19.48	24.86	19.590	24.975
.6	20.10	24.41	20.206	24.532
.7	20.72	23.97	20.822	24.089
.8	21.36	23.53	21.438	23.646
.9	22.01	23.10	22.054	23.203
1	22.67		22.67	

que permite elaborar el gráfico siguiente:

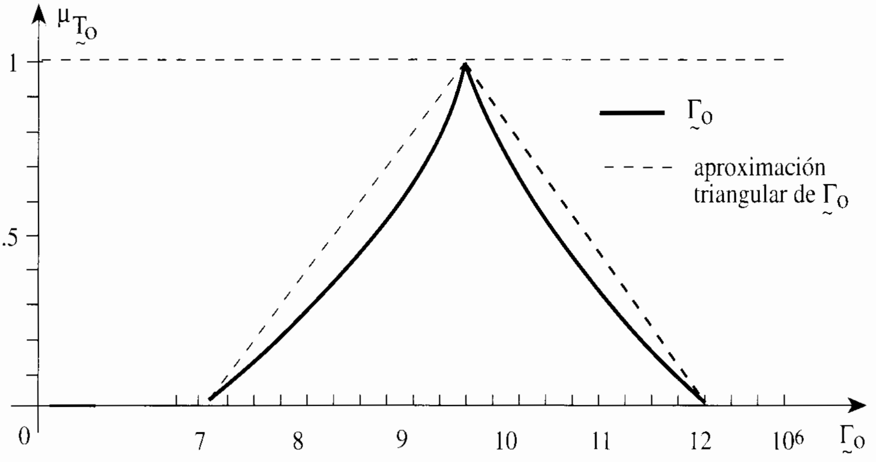


El coste global mínimo para los 360 días se expresa por $\Gamma_{0\alpha}$ cuya aproximación triangular es $\underset{\sim}{A} = (7199.984, 9524.703, 11859.982)$

Cuadro quinto:

	Número borroso		Aproximación triangular	
α	$\Gamma_{0\alpha}$		$[7199.984+2324.719\alpha,$ $11859.982-2334.497\alpha]$	
0	7199.984	11859.982	7199.9840	11859.982
.1	7439.028	11626.488	7432.4559	11626.532
.2	7676.240	11392.993	7664.9278	11393.083
.3	7911.807	11159.490	7897.3997	11159.633
.4	8145.869	10925.977	8129.8716	10926.183
.5	8378.536	10692.464	8362.3435	10692.734
.6	8609.939	10458.932	8594.8154	10459.284
.7	8840.180	10225.391	8827.2873	10225.834
.8	9069.324	9991.841	9059.7592	9992.384
.9	9297.474	9758.272	9292.2311	9758.934
1	9524.703		9524.7030	

cuyo gráfico será:



Se puede observar que la aproximación para un número borroso triangular es muy aceptable para los tres gráficos, por lo que creemos innecesario, en este contexto, el cálculo de las expresiones generales de desviación entre las curvas reales y sus aproximaciones, que por otra parte darán lugar a fórmulas muy complicadas.

Se puede incorporar también la posibilidad de que se produzca una *ruptura de los stocks* en el ámbito borroso. En efecto, si se parte de la expresión obtenida en el ámbito de la certeza:

$$\Gamma(n, s) = \frac{s^2\theta}{2n} C_S + \frac{N}{n} C_l + \frac{(n-s)^2\theta}{2n} C_P$$

y se consideran esta vez, los costes borrosos $\underset{\sim}{C}_l$, $\underset{\sim}{C}_s$ y $\underset{\sim}{C}_p$, así como los otros datos no borrosos N, n, s y θ, siendo N y θ constantes y n y s variables, el coste $\underset{\sim}{\Gamma}(n, s)$ será, también, un coste borroso:

$$(6.15) \qquad \underset{\sim}{\Gamma}(n, s) = \frac{s^2\theta}{2n} \underset{\sim}{C}_S \,(+)\, \frac{N}{n} \underset{\sim}{C}_l \,(+)\, \frac{(n-s)^2\theta}{2n} \underset{\sim}{C}_P$$

en donde se ha empleado el símbolo (+) en lugar del+ para recordar que se trata de la adición de números borrosos.

El problema que se plantea ahora consiste en examinar si el procedimiento utilizado en el epígrafe anterior de derivación y optimización para obtener (6.1), (6.2) continua siendo válido. Para cada valor que se adscriba a los tres costes C_l, C_s y C_p, aparecerá un valor óptimo de Γ, n y s. Analizando así los posibles valores, se van a construir unos números borrosos en los que las funciones de pertenencia serán conocidas a partir de las fórmulas (6.1) (6..2) (6.4) (6.5) en las que los números C_l, C_s y C_p, se convierten en números borrosos y, a través de ellos también $\underset{\sim}{p}$, $\underset{\sim}{s}$, $\underset{\sim}{\mathbf{T}}$ y $\underset{\sim}{\Gamma}$. Posteriormente se examinará todo lo que hace referencia a

Para simplificar, se va a suponer que los números $\underset{\sim}{C}_l$, $\underset{\sim}{C}_s$ y $\underset{\sim}{C}_p$ tienen forma triangular:

$\underset{\sim}{C}_l = (C_{1l}, C_{2l}, C_{3l})$
$\underset{\sim}{C}_s = (C_{1s}, C_{2s}, C_{3s})$
$\underset{\sim}{C}_p = (C_{1p}, C_{2p}, C_{3p})$

Con estos números borrosos, la expresión (6.15) se convierte:

$$\underset{\sim}{\Gamma}(n, s) = \frac{s^2\theta}{2n} (C_{1s}, C_{2s}, C_{3s})$$
$$(+) \frac{N}{n} (C_{1l}, C_{2l}, C_{3l})$$
$$(+) \frac{(n-s)^2\theta}{2n} (C_{1p}, C_{2p}, C_{3p})$$

Para los valores optimizados:

(6.16) $$\underset{\sim}{\Gamma}_o = \sqrt{2N\theta} \cdot \sqrt{(C_{1s}, C_{2s}, C_{3s})\ (\cdot)\ (C_{1l}, C_{2l}, C_{3l})}$$
$$(\cdot)\ \sqrt{(C_{1p}, C_{2p}, C_{3p})\ (:)\ ((C_{1s}, C_{2s}, C_{3s})\ (+)\ (C_{1p}, C_{2p}, C_{3p}))}$$

(6.17) $$\underset{\sim}{n}_o = \sqrt{\frac{2N}{\theta}} \cdot \sqrt{((C_{1l}, C_{2l}, C_{3l})\ (:)\ (C_{1s}, C_{2s}, C_{3s}))}$$
$$(\cdot)\ \sqrt{((C_{1s}, C_{2s}, C_{3s})\ (+)\ (C_{1p}, C_{2p}, C_{3p}))\ (:)\ (C_{1p}, C_{2p}, C_{3p})},$$

(6.18) $$\underset{\sim}{s}_o = \sqrt{\frac{2N}{\theta}} \cdot \sqrt{((C_{1l}, C_{2l}, C_{3l})\ (:)\ (C_{1s}, C_{2s}, C_{3s}))}$$
$$(\cdot)\ \sqrt{(C_{1p}, C_{2p}, C_{3p})\ (:)\ ((C_{1s}, C_{2s}, C_{3s})\ (+)\ (C_{1p}, C_{2p}, C_{3p}))},$$

(6.19) $$\underset{\sim}{T}_o = \sqrt{\frac{2\theta}{N}} \cdot \sqrt{((C_{1l}, C_{2l}, C_{3l})\ (:)\ (C_{1s}, C_{2s}, C_{3s}))}$$
$$(\cdot)\ \sqrt{((C_{1s}, C_{2s}, C_{3s})\ (+)\ (C_{1p}, C_{2p}, C_{3p}))\ (:)\ (C_{1p}, C_{2p}, C_{3p})}.$$

Vamos a examinar un ejemplo numérico. Si se toman los mismos datos que en el supuesto anterior, ampliado con la hipótesis de ruptura y el coste que provoca, se tiene:

N = 120.000 unidades
θ = 360 días
$\underset{\sim}{C}_l$ = (200.000, 300.000, 370.000) unidades monetarias
$\underset{\sim}{C}_s$ = (3, 3.5, 4.4) por unidad y día
$\underset{\sim}{C}_p$ = (20, 35, 40) por unidad y día

Se ha calculado:

$$(6.20) \qquad \sqrt{2\,\frac{N}{\theta}} = 25.8198$$

$$(6.21) \qquad \sqrt{2\,\frac{\theta}{N}} = 0.07745$$

$$(6.22) \qquad \sqrt{2N\theta} = 9295.16$$

Por otra parte $\sqrt{C_f^{(\alpha)}\ (:)\ C_s^{(\alpha)}}$ y $\sqrt{C_f^{(\alpha)}\ (\cdot)\ C_s^{(\alpha)}}$ han sido obtenidos en los cuadros primero y segundo anteriores. Hay que calcular ahora:

$$\sqrt{(C_s^{(\alpha)}\ (+)\ C_p^{(\alpha)})\ (:)\ C_p^{(\alpha)}}$$

y

$$\sqrt{C_p^{(\alpha)}\ (:)\ (C_s^{(\alpha)})\ (+)\ (C_p^{(\alpha)})}$$

teniendo en cuenta que una expresión es inversa de la otra. Se tiene:

$$C_s^{(\alpha)}\ (+)\ C_p^{(\alpha)} = (3,\ 3.5,\ 4.4)\ (+)\ (20,\ 35,\ 40) = (23,\ 38.5,\ 44.4)$$

en donde el α-corte es:

$$(6.23) \qquad [23 + 15.5\alpha,\ 44.4—5.9\alpha]$$

Por otra parte, el α-corte de $C_p^{(\alpha)}$ es:

$$(6.24) \qquad [20 + 15\alpha,\ 40—5\alpha]$$

El α-corte del cociente (6.23)/(6.24) es:

$$\left[\frac{23 + 15.5\alpha}{40—5\alpha},\ \frac{44.4—5.9\alpha}{20 + 15\alpha}\right]$$

y la raíz:

$$\left[\sqrt{\frac{23 + 15.5\alpha}{40—5\alpha}},\ \sqrt{\frac{44.4—5.9\alpha}{20 + 15\alpha}}\right]$$

Y su inversa:

$$\left[\sqrt{\frac{20 + 15\alpha}{44.4—5.9\alpha}},\ \sqrt{\frac{40—5\alpha}{23 + 15.5\alpha}}\right]$$

Los cuadros sexto y séptimo proporcionan los α – cortes con el paso habitual de 0.1.

Cuadro sexto:

$\sqrt{(C_s^{(\alpha)} (+) C_p^{(\alpha)}) (:) C_p^{(\alpha)}}$

α	$\left[\sqrt{\dfrac{23+15.5\alpha}{40-5\alpha}}, \sqrt{\dfrac{44.4-5.9\alpha}{20+15\alpha}}\right]$	
0	.758287	1.489966
.1	.788364	1.427471
.2	.818065	1.370813
.3	.847456	1.319090
.4	.876596	1.271582
.5	.905538	1.227710
.6	.934330	1.186998
.7	.963014	1.149055
.8	.991631	1.113552
.9	1.020218	1.080215
1	1.048808	

Cuadro séptimo:

$\sqrt{C_p^{(\alpha)} (:) (C_s^{(\alpha)}) (+) C_p^{(\alpha)})}$

α	$\left[\sqrt{\dfrac{20+15\alpha}{44.4-5.9\alpha}}, \sqrt{\dfrac{40-5\alpha}{23+15.5\alpha}}\right]$	
0	.671156	1.318760
.1	.700539	1.268448
.2	.729493	1.222396
.3	.758098	1.180002
.4	.786421	1.140775
.5	.814524	1.104315
.6	.842461	1.070285
.7	.870280	1.038405
.8	.898026	1.008438
.9	.925741	.980182
1	.953462	

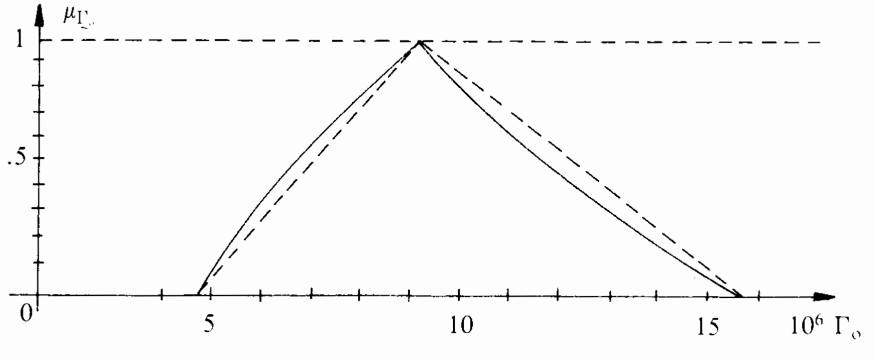
Se elaboran ahora los cuadros que corresponden a $\underset{\sim}{\Gamma}_o$, $\underset{\sim}{\mathbf{n}}_o$, $\underset{\sim}{\mathbf{s}}_o$ y $\underset{\sim}{\mathbf{T}}_o$.

Para el cuadro octavo, se toma (6.22) (cuadro 2.º) y (cuadro séptimo) de lo que resulta:

Cuadro octavo:

α	$\Gamma_o^{(\alpha)}$	
0	4832312	15640470
.1	5211329	14747596
.2	5599763	13926750
.3	5997925	13168220
.4	6406082	12464081
.5	6824518	11807848
.6	7253538	11194038
.7	7693432	10618097
.8	8144489	10076152
.9	8607053	9564883
1	9081443	

del que se obtiene el gráfico siguiente:

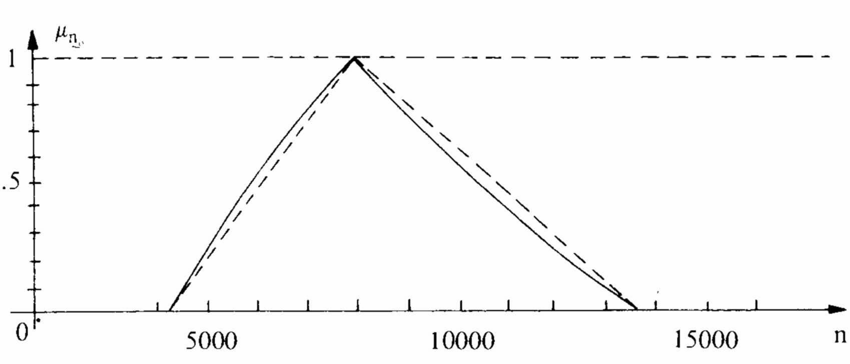


Y así sucesivamente, se obtiene

Cuadro noveno:

α	$n_0^{(\alpha)}$	
0	4174	13510
.1	4493	12715
.2	4822	11994
.3	5163	11336
.4	5516	10733
.5	5882	10177
.6	6261	9662
.7	6654	9183
.8	7062	8737
.9	7486	8319
1	7928	

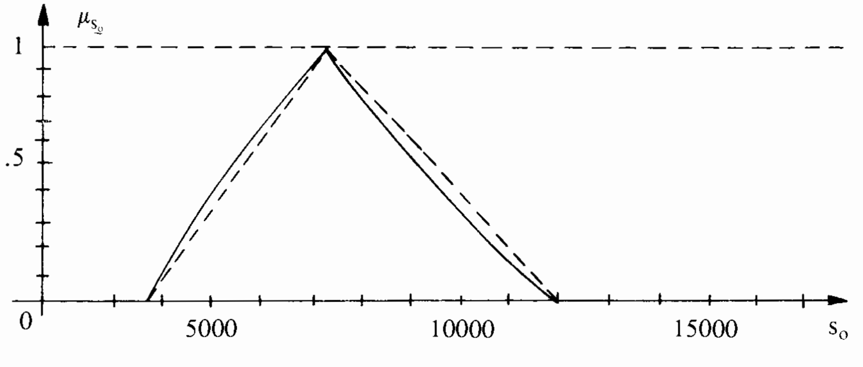
y su correspondiente gráfico:



Cuadro décimo:

α	$s_o^{(\alpha)}$	
0	3694	11957
.1	3992	11298
.2	4300	10695
.3	4619	10141
.4	4949	9629
.5	5290	9154
.6	5645	8712
.7	6013	8299
.8	6395	7912
.9	6793	7549
1	7207	

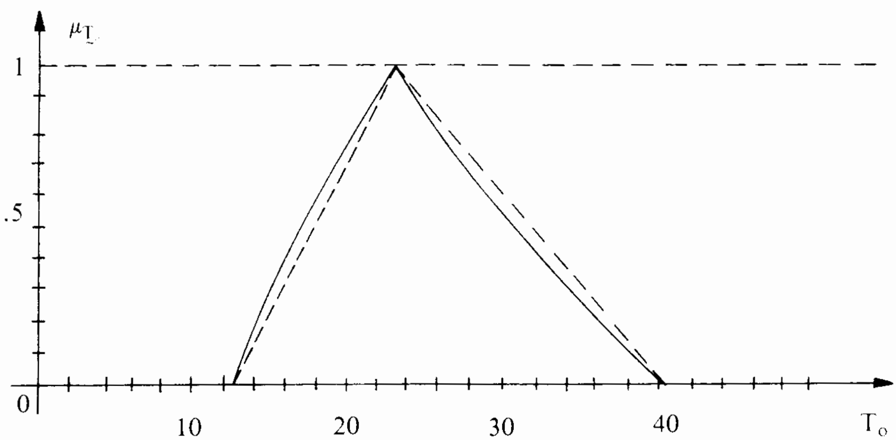
Con su correspondiente gráfico:



y finalmente el cuadro onceavo:

α	$T_{o}^{(\alpha)}$	
0	12.52	40.52
.1	13.47	38.14
.2	14.46	35.97
.3	15.48	34.00
.4	16.54	32.19
.5	17.64	30.52
.6	18.78	28.98
.7	19.96	27.54
.8	21.18	26.20
.9	22.45	24.95
1	23.78	

cuya representación gráfica es la siguiente:



En estos gráficos se ha presentado la comparación de los datos obtenidos con los números borrosos correspondientes. Se puede observar que la aproximación es muy aceptable, por lo que se escribirá:

$$\begin{aligned}
\underset{\sim}{\Gamma}_o &= (4832312,\ 9081443,\ 15640470)\\
\underset{\sim}{\mathbf{n}}_o &= (4173,\ 7928,\ 13510)\\
\underset{\sim}{\mathbf{s}}_o &= (3694,\ 7207,\ 11957)\\
\underset{\sim}{\mathbf{T}}_o &= (12.52,\ 23.78,\ 40.52)
\end{aligned}$$

En relación al concepto de tipo de ruptura definido anteriormente en (6.3), es necesario poner de manifiesto que, en el ámbito borroso, no puede ser considerado significativo ya que puede superar la unidad. En efecto, si se examina el cuadro 7.°, que proporciona:

$$\sqrt{\frac{\underset{\sim}{C}_p}{\underset{\sim}{C}_s\ (+)\ \underset{\sim}{C}_p}}$$

se puede observar que para obtener ϱ es necesario elevar esta expresión al cuadrado y, para la columna de la derecha de este cuadro 7.°, los resultados son mayores que 1. La aparición de valores de $\varrho^{(\alpha)}$ que pueden superar la unidad es consecuencia de la existencia de un cociente borroso.

Para solventar este inconveniente se aplicará un «coeficiente de ruptura» $k \in [1, \infty]$ que multiplicará a $\underset{\sim}{C}_s$, por lo que:

$$\underset{\sim}{C}_p = k.\underset{\sim}{C}_s$$

lo que significa que el coste de ruptura que se establece es k veces más importante que el coste del stock. Por ejemplo:

$$\underset{\sim}{C}_p = 10\ \underset{\sim}{C}_s$$

En el ejemplo expuesto se tendrá a partir de $\underset{\sim}{C}_s = (3,\ 3.5,\ 4.4)$ que:

$$\underset{\sim}{C}_p = 10\,\underset{\sim}{C}_s = 10\ (3,\ 3.5,\ 4.4) = (30,\ 35,\ 44)$$

en lugar de $\underset{\sim}{C}_p = (20,\ 35,\ 40)$ establecido anteriormente.

Resulta evidente que la transformación de datos formales en datos borrosos se puede aplicar a otros muchos problemas relativos a la gestión de stocks, así como al supuesto de que existan algunos datos aleatorios y otros borrosos, lo que permite la introducción de números aleatorios borrosos y en otros problemas de números híbridos.

LA INCORPORACION DEL FACTOR TRABAJO EN LA EMPRESA

CAPITULO VII

LA INCORPORACION DEL FACTOR TRABAJO EN LA EMPRESA

Importancia de la selección de personal

Uno de los elementos más importantes que intervienen en la actividad de las empresas es el factor trabajo, siendo desde una perspectiva histórica uno de los elementos que más han atraido la atención en los tratados de microeconomía.

Su estudio ha sido realizado, desde el punto de vista productivo, a través de ángulos muy diversos, pero desde una perspectiva económica su importancia viene dada por cuanto al incorporarse en el proceso de producción provoca un desembolso que, añadido a los demás factores productivos, dará lugar a los costes globales de la empresa. El análisis de la productividad del factor trabajo constituye así un elemento que tradicionalmente ha venido a formar un eje sobre el que han girado consideraciones de todo tipo, tanto económicas como jurídicas, sociales e incluso políticas. Merece, pues, un tratamiento en cualquier obra encaminada a poner de manifiesto los problemas de las empresas. Pero es que, además, una empresa será aquello que los hombres que la componen sean capaces de realizar.

El origen de la actividad humana en la empresa tiene lugar a través de la selección del personal que posteriormente prestará sus servicios en ella, y que se materializa en un conjunto de acciones encaminadas a incorporar aquellos elementos que resultarán idóneos para desarrollar el quehacer normal de la empresa. La incorporación de nuevo personal constituye una de las decisiones más importantes del empresario dado que del acierto en la elección depende el propio funcionamiento de la empresa y la calidad de sus productos.

Una selección adecuada provoca unos costes que se espera queden compensados por una mayor eficiencia del personal incorporado, más apto para realizar la actividad por la que ha sido contratado. Es evidente que la selección de un candidato que no reuna las características necesarias para un puesto de trabajo no constituye un error irreparable dado que puede ser separado del mismo. Sin embargo esta deficiencia en la selección habrá producido, independientemente de los daños morales infringidos a la persona seleccionada y luego separada, un triple coste para la empresa. En primer lugar, el derivado de la propia selección del personal, en segundo lugar, el producido por las ineficiencias habidas durante el tiempo que ha estado trabajando sin los resultados apetecidos y, en tercer lugar, el correspondiente a los costes de despido. Resulta, pues, evidente la necesidad de realizar un proceso de selección que permita reducir a un mínimo las posibilidades de error.

Planteado en estos términos la selección de personal consistirá en elegir a una persona para un puesto de trabajo con un determinado perfil, susceptible de ser definido a través de unas medidas o valuaciones que permitan ser comparadas con las cualidades del candidato.

El problema así descrito permite destacar además de la vertiente empresarial, la que hace referencia al candidato para quien la incorporación a una empresa puede solucionarle su futuro en dos vertientes para las que pretenderá conseguir un equilibrio: la una puramente económica y la otra de tipo inmaterial. El candidato pretende obtener unas retribuciones que le permitan subvenir a unas necesidades propias y familiares y, además, la realización de unas actividades laborales que le proporcionen la mayor satisfacción posible o la mínima penalidad. Se trata en cierto modo de intentar obtener una retribución económica suficiente y conseguir el mayor grado de realización personal.

La decisión de incorporar una persona a una empresa no es, en la mayor parte de los casos, una situación aislada, sino que se va repitiendo a lo largo de la vida de la misma, por lo que, a partir de una cierta dimensión, resulta conveniente establecer una política general de contratación a través de un plan que permita adecuar los recursos humanos a los objetivos que la empresa desea alcanzar.

Nace de esta manera la previsión de necesidades de personal de acuerdo con la actividad que la empresa espera realizar a medio y largo plazo, así como por la consideración de posibles acontecimientos externos que puedan influir en las necesidades laborales tales como cambios en la legislación, inestabilidad socio-política, etc.

La contratación de personal adquiere unas características diferenciadas cuando tiene lugar de manera temporal que cuando tiene caracteres de permanencia. El primer supuesto se produce, entre otras circunstancias, por aumentos súbitos o temporales en la producción como consecuencia de ventas punta o estacionales, así como por la necesidad de cubrir bajas temporales producidas por elementos internos o externos a la empresa. Es evidente que las necesidades de personal derivadas de una cobertura temporal o permanente adquieren una distinta significación y el personal que debe cubrir estos puestos de trabajo no exige la misma cualificación.

Entre las causas que provocan la necesidad de incorporar personal de manera permanente destaca la derivada de los cambios técnicos que se producen en la empresa, entendiendo el concepto técnico en un sentido suficientemente amplio que incluya tanto el aspecto económico como tecnológico, así como los derivados de una reestructuración organizativa o los cambios en los equipos productivos por el progreso tecnológico, ya que ambos pueden inducir a la incorporación de personal especializado en las nuevas tareas.

No hay que olvidar que existe una relación que es necesario optimizar: la eficiencia del factor trabajo y los costes derivados de su utilización, lo que se puede conseguir a través de una estimación coste-eficiencia derivada de la nueva incorporación a la empresa. Con objeto de cuantificar o valuar de la mejor manera posible esta relación será necesario tener en cuenta el perfil del puesto de trabajo y los niveles de exigencia de cada una de las tareas, con objeto de compararlo con las cualidades del candidato. Esta necesidad de gradación en las exigencias de cada tarea hace pensar en la posibilidad de incorporar a este problema la teoría de los subconjuntos borrosos.

Esquemas básicos para la selección óptima

Por su propia naturaleza, los esquemas utilizados para la selección de personal se hallan sujetos a ciertas dosis de subjetividad y se presentan como una sucesión de etapas en las que se van eliminando sucesivamente los candidatos que se consideran menos adecuados, al mismo tiempo que se intentan captar las cualidades que poseen para la realización de las tareas que definen el puesto de trabajo.

A título indicativo, estas etapas se pueden resumir de la siguiente manera:

1.º) Establecimiento del perfil del puesto de trabajo, a través del análisis de las tareas encomendadas con posibilidades objetivas para su realización. Su elaboración resulta importante por cuanto determina no solamente las técnicas que deben ser utilizadas para la selección, sino que de él depende que la persona seleccionada sea, en la realidad diaria, la que mejor se identifique con las tareas encomendadas. El perfil comprende, también, la enumeración de las cualidades que el candidato debe poseer para la correcta realización de las actividades que el puesto de trabajo comporta así como el nivel al que debe realizarse cada una de ellas.

Desde el punto de vista práctico, se establece normalmente una relación de la *totalidad* de las cualidades necesarias para analizar, de manera exhaustiva, aquellas que se consideran más importantes. Para ello se estudian las operaciones que comporta el puesto de trabajo correspondiente, así como las condiciones en las cuales deben ser realizadas las tareas. Es frecuente que sean los propios trabajadores de la empresa quienes proporcionen una orientación sobre el perfil de un puesto de trabajo, a través de la realización de las actividades correspondientes y tabulando los resultados obtenidos con un personal cuyas características son conocidas. Una vez establecido el perfil y dados unos criterios de selección será necesario determinar aquellas pruebas a las que deberán ser sometidos los candidatos.

2.º) Elaboración del formulario de ingreso. Se trata de un impreso que debe cumplimentar el candidato, en el que quedan reflejados sus datos personales, la actividad profesional desarrollada, así como su historial académico, adaptados a las necesidades de la empresa. Su objetivo consiste en conseguir una información general de cada uno de los candidatos y realizar una primera criba separando aquellos que de manera muy evidente no reunen las condiciones mínimas exigidas.

3.º) Realización de la entrevista. El objetivo de la entrevista consiste en la comprobación de los datos suministrados a través del formulario y los obtenidos a partir de otras fuentes, y conseguir ampliar la información que la empresa posee de cada uno de los candidatos. Asimismo, la entrevista permite facilitar al candidato los datos que desea conocer sobre la empresa y sobre las tareas que eventualmente debería realizar en la misma, para que pueda formarse una imagen lo más realista posible del entorno en el que va a desenvolverse si resulta aceptado. Se trata del primer contacto personal que el candidato tiene con los representantes de la empresa.

El problema más importante de esta etapa viene determinado por la subjetividad que toda entrevista comporta. Para evitarlo se han tipificado las entrevistas según la manera de ser realizadas y su contenido. Así, se habla de entrevistas dirigidas cuando el entrevistador es quien conduce de manera permanente la conversación, frente a las entrevistas no dirigidas en las que el candidato tiene una amplia libertad de acción; de entrevistas de presión o de consejo; de entrevistas individuales o colectivas, etc...

La entrevista constituye así una etapa hacia la determinación del candidato más idóneo para un puesto de trabajo que posibilita la eliminación del personal por la comprobación o el conocimiento de nuevos datos hasta entonces desconocidos.

4.º) El eje sobre el que gira la decisión de incorporar nuevo personal en una empresa viene dado por las pruebas por las que pasan los candidatos para determinar sus cualidades en relación con el puesto de trabajo a cubrir.

Para conseguirlo se dispone de un abanico de posibilidades de elegir entre una variedad de pruebas que, de alguna manera, intentan determinar cuantitativamente los niveles de cualificación de una persona en relación a ciertas cualidades que se estiman precisas para desarrollar correctamente las tareas de un puesto de trabajo. Una vez conocidos estos niveles se procede a la comparación con el perfil teórico establecido.

Con objeto de intentar una medición de las aptitudes de los candidatos, se han elaborado diversos tipos de pruebas. Sólo a título indicativo, se puede señalar la existencia de pruebas de tipo general las cuales son completadas por otras tendentes a la estimación de aptitudes específicas. Entre ellas cabe citar los test de inteligencia, entre los que destacan la escala de Binet Simon, la escala de Alexander, el test de Otis, etc... Son conocidos también los test que van dirigidos a medir factores de tipo intelectivo (comprensión verbal, aptitud numérica, razonamiento abstracto, etc...) como el test de rotación de figuras, el de desarrollo de superficies, el test de matrices progresivas de Raven, el test de los cubos de Kohs, etc. Otros test van dirigidos a «medir» la memoria, como la escala de Weschler, la escala de Wells, etc... sin olvidar los test para la comprensión mecánica, para la atención, para la percepción, y un largo etcétera.

En síntesis se puede afirmar que, en último término, el objetivo fundamental de estas pruebas consiste en el intento de plasmar de manera numérica las cualidades que posee un candidato para la realización de determinadas tareas concretas. Pero el problema aparece en el *cómo* medir los resultados obtenidos a través de estas pruebas.

Para ello se han propuesto a lo largo del tiempo transcurrido desde que se iniciaron de manera sistemática estos tipos de estudio una gran cantidad de métodos, cada uno de los cuales pretende conseguir una mayor objetividad en la determinación de estos datos. Resultaría difícil escoger el más adecuado de estos esquemas, sin embargo, y con la única finalidad de incorporar en este campo la teoría de los subconjuntos borrosos, se puede considerar un método muy extendido que por sus características permite de manera sencilla sentar unas bases para la introducción de conceptos borrosos.

Como en la mayoría de los esquemas, se parte del establecimiento de las características del puesto de trabajo, se analizan las cualidades del candidato y se procede a la comparación entre unas y las otras.

El primero de estos aspectos se resuelve enumerando las actividades que se deben realizar para determinar la importancia relativa de cada una de ellas.

Una vez realizada esta especificación básica, se establece un coeficiente de ponderación según la importancia de cada actividad, para obtener el peso que representa en el puesto de trabajo concreto. Para cada una de ellas se valoran las cualidades del candidato, a través de una *estimación* que se gradúa desde 0 hasta 1, a medida que aumenta la aptitud del candidato.

Esto permite establecer una puntuación, ponderando los valores obtenidos para cada una de las actividades por los pesos que previamente se han determinado, lo que permitirá una comparación entre todos los candidatos. Dado que el perfil ideal corresponde a la unidad, la elección recaerá en el que obtenga la cifra que más se le acerque.

Se ha descrito este procedimiento, seleccionado entre otros muchos, por cuanto en él aparecen elementos que permiten acercarse a los dispositivos propios de la teoría de los subconjuntos borrosos, que la hacen muy idónea para solucionar el problema de selección de personal de manera mucho más acorde con la realidad. En efecto, si se tiene en cuenta que para cada una de las actividades del puesto de trabajo se le adscriben unos valores comprendidos entre 0 y 1, y habida cuenta que esta asignación se realiza en base a determinaciones subjetivas, cabe sistematizar este esquema y otros parecidos para que sean capaces de ser tratados por un cuerpo coherente y con posibilidades de desarrollo numérico.

Es evidente que, a lo largo de la evolución de las técnicas de selección de personal, se han elaborado otros esquemas, como el análisis multivariante, lo que ha permitido una ampliación del campo de estudio de la selección de personal. Sin embargo basta para nuestro objetivo limitarnos a una exposición somera de un esquema tan sencillo como el anteriormente descrito.

La cualificación del personal a través de los subconjuntos borrosos

La cualificación del personal para ciertas tareas y su orientación hacia otras distintas es un problema importante para las empresas. Como se trata de un problema multicriterio, con datos ciertos o inciertos, es susceptible de ser tratado a través de la teoría de los subconjuntos borrosos.

Supongamos la existencia de 7 actividades tales como:

(7.1) $$\xi = \{A, B, C, D, E, F, G\}$$

y que se pregunta a un experto en selección sobre la cualificación de una persona para cada una de las 7 actividades, expresadas en décimas desde 0 a 1. Hay que señalar que ciertas cualificaciones vendrán dadas por estimaciones subjetivas mientras que otras pueden ser medibles. A pesar de ello deberán ser colocadas en la misma escala.

De esta manera el valor que se de a la cualificación de una persona p, vendrá dada por un subconjunto borroso de E, por ejemplo:

(7.2) $\underset{\sim}{P}$ =

A	B	C	D	E	F	G
0.8	1	0	0.4	0.7	0.3	0.8

Imaginemos ahora que un lugar de trabajo t exige niveles de cualificación, para cada una de las actividades de ξ. Estos niveles de cualificación forman también un subconjunto borroso:

(7.3) $\underset{\sim}{T}$ =

A	B	C	D	E	F	G
0.5	1	0.8	1	1	0.4	0

Se va a construir un coeficiente de adecuación de p a t, de la siguiente manera:

(7.4) $$\text{si: } \mu_{\underset{\sim}{P}}(x) \geqslant \mu_{\underset{\sim}{T}}(x)$$

$$\text{se escribirá: } K_x\,(p \rightarrow t) = 1$$

(7.5) $$\text{si: } \mu_{\underset{\sim}{P}}(x) < \mu_{\underset{\sim}{T}}(x)$$

$$\text{se escribirá: } K_x\,(p \rightarrow t) = 1 - \mu_{\underset{\sim}{T}}(x) + \mu_{\underset{\sim}{P}}(x)$$

lo que permite también la siguiente notación globalizadora:

$$K_x\,(p \rightarrow t) = 1 \wedge (1 - \mu_{\underset{\sim}{T}}(x) + \mu_{\underset{\sim}{P}}(x))$$

Así, aplicando (7.4) y (7.5) a (7.2) y (7.3), se obtiene el coeficiente de adecuación K (p,t), resultado de sumar los K_x (p⟶t) y dividir el resultado por el cardinal de ξ, con objeto de obtener un número en [0,1]:

(7.6) $$K\,(p,\,t) = \frac{1 + 1 + 0.2 + 0.4 + 0.7 + 0.9 + 1}{7} = 0.742$$

Este sistema de valoración no tiene en cuenta las posibilidades extraordinarias de un candidato y es posible que un lugar de trabajo no exija calificación alguna para una actividad ($\mu_{\underset{\sim}{T}}(G) = 0$, por ejemplo).

Se puede suponer ahora que se precisa seleccionar n candidatos $p_1, p_2, \ldots, p_n$ para un puesto de trabajo t. Se obtendrá para cada candidato K (p_i, t) y se eligirá aquel que tenga el coeficiente de adecuación más elevado. Tomemos un ejemplo para 6 candidatos y el puesto de trabajo t dado por (7.3).

(7.7)

	A	B	C	D	E	F	G
$\underset{\sim}{P}_1$ =	0	0.8	1	1	0.4	0	0.3
$\underset{\sim}{P}_2$ =	0.2	0.9	0.6	0.4	1	1	0.5
$\underset{\sim}{P}_3$ =	0.3	0.9	0.7	1	1	0.2	0
$\underset{\sim}{P}_4$ =	0.5	1	1	0.4	0.8	0.6	1
$\underset{\sim}{P}_5$ =	0.3	0.2	1	1	0	0.4	0
$\underset{\sim}{P}_6$ =	0.7	0.8	1	1	0.9	0	0.8

Con ello se obtiene:

$$K\ (p_1,\ t) = \frac{0.5 + 0.8 + 1 + 1 + 0.4 + 0.6 + 1}{7} = 0{,}75$$

$$K\ (p_2,\ t) = \frac{0.7 + 0.9 + 0.8 + 0.4 + 1 + 1 + 1}{7} = 0.82$$

(7.8)

$$K\ (p_3,\ t) = \frac{0.8 + 0.9 + 0.9 + 1 + 1 + 0.8 + 1}{7} = 0.91$$

$$K\ (p_4,\ t) = \frac{1 + 1 + 1 + 0.4 + 0.8 + 1 + 1}{7} = 0.88$$

$$K\ (p_5,\ t) = \frac{0.8 + 0.2 + 1 + 1 + 0 + 1 + 1}{7} = 0.71$$

$$K\ (p_6,\ t) = \frac{1 + 0.8 + 1 + 1 + 0.9 + 0.6 + 1}{7} = 0.90$$

De donde se deduce que el candidato p_3 es el que mejor se adapta al puesto de trabajo, según los criterios señalados en (7.4) y (7.5).

Se puede observar que el candidato que satisface (7.4) para todas las actividades conseguirá una K = 1, mientras que aquel que tenga un subconjunto vacío (un 0 para todas las actividades) obtendrá la mínima nota posible:

$$(7.9) \qquad \frac{0.5 + 0 + 0.2 + 0 + 0 + 0.6 + 1}{7} = 0.32$$

Este tratamiento permite realizar determinadas observaciones:

1°) Un puesto de trabajo que no exija ninguna cualificación ($\mu = 0$ para todas las actividades) y un candidato que no posea tampoco ninguna cualificación ($\mu = 0$) obtendrá una K = 1, mientras que un candidato que tuviera las $\mu > 0$ en diversas actividades no conseguiría una K más pequeña para este trabajo sin ninguna cualificación. No puede extrañar este resultado dado que para un trabajo sin cualificación quien mejor puede hacerlo no es una persona sin cualificación.

2°)El criterio (7.4), (7.5) proporciona K = 1 a toda persona que iguala o sobrepasa, para las μ de las actividades consideradas, las μ de los puestos de trabajo. Un puesto de trabajo que exige una total perfección en las competencias del candidato, tendría $\mu = 1$ en todas las actividades y entonces el criterio (7.4), (7.5) indica que basta con tomar las μ del candidato, obtener su suma y luego dividirla por 7 (o por el cardinal de ξ en un supuesto general). El criterio elegido admite: el que es capaz de mucho, también lo es de poco.

3°)Por otra parte, un subconjunto borroso como el (7.3) indica el nivel de especialización que se exige para cada actividad. Se podrá afirmar, entonces, que un puesto de trabajo t tiene mayores exigencias de cualificación que otro t', si: $\underset{\sim}{\mathbf{T}} \supset \underset{\sim}{\mathbf{T}}'$.

Se puede considerar también otro criterio que utiliza los subconjuntos borrosos, que consiste en acercarse lo máximo posible a un determinado perfil, a través de niveles. Para ello supondremos conocido un perfil de competencias $\underset{\sim}{C}$ cuyo referencial es ρ.

$$(7.10) \qquad \rho = \{a, b, c, d, e, f\}$$

(7.11) $\underset{\sim}{C}$ =

a	b	c	d	e	f
0.7	1	0.4	0.9	1	0.5

Supongamos que se presentan 5 candidatos y que, a través de medidas o valuaciones se hayan obtenido, para cada uno de ellos, los siguientes subconjuntos borrosos:

(7.12)

	a	b	c	d	e	f
$\underset{\sim}{A}_1$ =	0.8	1	0.3	0	0.7	1
$\underset{\sim}{A}_2$ =	0.2	0.8	1	0.7	0.6	0.3
$\underset{\sim}{A}_3$ =	0.5	0.5	0.9	0.3	1	1
$\underset{\sim}{A}_4$ =	1	0.9	0.5	0.6	0.8	0.4
$\underset{\sim}{A}_5$ =	0.4	0.5	0.3	1	0.3	0.2

Se puede proceder ahora a determinar las «diferencias» existentes entre las cualidades de cada uno de los candidatos y las necesarias para el puesto de trabajo cuyos niveles se hallan especificados en el perfil de competencias. Esto exigirá comparar dos subconjuntos de un mismo referencial, para lo cual se dispone del concepto matemático de distancia.

Se pueden utilizar muchos esquemas para determinar la distancia, por lo que para un mismo problema se obtendrían resultados no idénticos. Uno de ellos es la llamada distancia de HAMMING la cual suministra una indicación sobre aquello que diferencia a dos subconjuntos (normales o borrosos).

Si se toma la «distancia relativa de Hamming», es decir, la distancia total dividida por 6 (cardinal de $\underset{\sim}{Q}$) entre cada $\underset{\sim}{A}_i$, i = 1, 2, 3, 4, 5 y $\underset{\sim}{C}$, que será:

(7.13) $$\delta(\underset{\sim}{A}_i, \underset{\sim}{C}) = \frac{1}{6} \Sigma \mid \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) - \mu_{\underset{\sim}{C}}(x) \mid, \qquad x \in \underset{\sim}{Q}$$

proporcionará para cada candidato:

$$\delta(\underset{\sim}{A}_1, \underset{\sim}{C}) = \frac{1}{6} (\mid 0.8-0.7 \mid + \mid 1-1 \mid + \mid 0.3-0.4 \mid + \\ + \mid 0-0.9 \mid + \mid 0.7-1 \mid + \mid 1-0.5 \mid) = 0.31$$

$$\delta(\underset{\sim}{A}_2, \underset{\sim}{C}) = \frac{1}{6} (\mid 0.2-0.7 \mid + \mid 0.8-1 \mid + \mid 1-0.4 \mid + \\ + \mid 0.7-0.9 \mid + \mid 0.6-1 \mid + \mid 0.3-0.5 \mid) = 0.35$$

$$\delta(\underset{\sim}{A}_3, \underset{\sim}{C}) = \frac{1}{6} (\mid 0.5-0.7 \mid + \mid 0.5-1 \mid + \mid 0.9-0.4 \mid + \\ + \mid 0.3-0.9 \mid + \mid 1-1 \mid + \mid 1-0.5 \mid) = 0.38$$

$$\delta(\underset{\sim}{A}_4, \underset{\sim}{C}) = \frac{1}{6} (| 1-0.7 | + | 0.9-1 | + | 0.5-0.4 | + $$

$$+ | 0.6-0.9 | + | 0.8-1 | + | 0.4-0.5 |) = 0.18$$

(7.14)

$$\delta(\underset{\sim}{A}_5, \underset{\sim}{C}) = \frac{1}{6} (| 0.4-0.7 | + | 0.5-1 | + | 0.3-0.4 | + $$

$$+ | 1-0.9 | + | 0.3-1 | + | 0.2-0.5 |) = 0.33$$

Se obtiene así, el siguiente orden:

(7.15) $$\underset{\sim}{A}_4 \succ \underset{\sim}{A}_1 \succ \underset{\sim}{A}_5 \succ \underset{\sim}{A}_2 \succ \underset{\sim}{A}_3$$

Es necesario señalar que, en el supuesto de utilizar otra noción de distancia, sería posible que el resultado diera un orden distinto del obtenido.

Otra cuestión interesante se plantea cuando se pretende conocer cómo se reagrupan los 5 candidatos entre sí. Para ello se puede buscar en primer lugar la distancia de Hamming entre $\underset{\sim}{A}_i$ y $\underset{\sim}{A}_j$, i,j = 1, 2, 3, 4, 5.

$$\delta(\underset{\sim}{A}_1, \underset{\sim}{A}_2) = \frac{1}{6} (| 0.8-0.2 | + | 1-0.8 | + | 0.3-1 | + $$

$$+ | 0-0.7 | + | 0.7-0.6 | + | 1-0.3 |) = 0.50$$

$$\delta(\underset{\sim}{A}_1, \underset{\sim}{A}_3) = \frac{1}{6} (| 0.8-0.5 | + | 1-0.5 | + | 0.3-0.9 | + $$

(7.16)

$$+ | 0-0.3 | + | 0.7-1 | + | 1-1 |) = 0.33$$

$$\delta(\underset{\sim}{A}_1, \underset{\sim}{A}_4) = 0.30; \quad \delta(\underset{\sim}{A}_1, \underset{\sim}{A}_5) = 0.51; \quad \delta(\underset{\sim}{A}_2, \underset{\sim}{A}_3) = 0.36;$$

$$\delta(\underset{\sim}{A}_2, \underset{\sim}{A}_4) = 0.30; \quad \delta(\underset{\sim}{A}_2, \underset{\sim}{A}_5) = 0.31; \quad \delta(\underset{\sim}{A}_3, \underset{\sim}{A}_4) = 0.40;$$

$$\delta(\underset{\sim}{A}_3, \underset{\sim}{A}_5) = 0.48; \quad \delta(\underset{\sim}{A}_4, \underset{\sim}{A}_5) = 0.38$$

es evidente que $\delta(\underset{\sim}{A}_i, \underset{\sim}{A}_j) = 0$, cuando i=j.

Se obtiene entonces la relación borrosa siguiente:

(7.17)

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_1	0	0.50	0.33	0.30	0.51
A_2	0.50	0	0.36	0.30	0.31
A_3	0.33	0.36	0	0.40	0.48
A_4	0.30	0.30	0.40	0	0.38
A_5	0.51	0.31	0.48	0.38	0

Esta matriz de distancias es una matriz de «desemejanza». Su complemento a 1 proporciona la matriz de «semejanza».

(7.18)

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_1	1	0.50	0.67	0.70	0.49
A_2	0.50	1	0.64	0.70	0.69
A_3	0.67	0.64	1	0.60	0.52
A_4	0.70	0.70	0.60	1	0.62
A_5	0.49	0.69	0.52	0.62	1

Busquemos ahora, nivel por nivel, para los valores de α hallados en (7.18), las subrelaciones máximas de similitud. Para ello utilizaremos el algoritmo de Pichat.

Al nivel $\alpha = 1$, se tendrá:

	1	2	3	4	5
1	1				
2		1			
3			1		
4				1	
5					1

$\alpha=1$

	1
1	1

	2
2	1

	3
3	1

	4
4	1

	5
5	1

Al nivel $\alpha=0.70$:

	1	2	3	4	5
1	1			1	
2		1		1	
3			1		
4	1	1		1	
5					1

$\alpha=0.70$

	1	4
1	1	1
4	1	1

	2	4
2	1	1
4	1	1

	3
3	1

	5
5	1

$$
\begin{aligned}
S &= (a \dot{+} ce)\,(b \dot{+} ce)\,(c \dot{+} de)\,(d \dot{+} e)\\
&= (ab \dot{+} ace \dot{+} bce)\,(c \dot{+} de)\,(d \dot{+} e)\\
&= (abc \dot{+} abde \dot{+} ace \dot{+} bce \dot{+} bcde)\,(d \dot{+} e)\\
&= abcd \dot{+} abce \dot{+} abde \dot{+} acde \dot{+} ace \dot{+} bcde \dot{+} bce
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
S' &= e \dot{+} \cancel{d} \dot{+} c \dot{+} \cancel{b} \dot{+} bd \dot{+} \cancel{a} \dot{+}\\
&\dot{+}\, ad = ad \dot{+} bd \dot{+} e \dot{+} c
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{c|cc|}
 & a & d \\ \hline
a & 1 & 1 \\
d & 1 & 1 \\ \hline
\end{array}
\quad
\begin{array}{c|cc|}
 & b & d \\ \hline
b & 1 & 1 \\
d & 1 & 1 \\ \hline
\end{array}
\quad
\begin{array}{c|c|}
 & e \\ \hline
e & 1 \\ \hline
\end{array}
\quad
\begin{array}{c|c|}
 & c \\ \hline
c & 1 \\ \hline
\end{array}
$$

Al nivel $\alpha = 0.69$

	a	b	c	d	e
a	1			1	
b		1		1	1
c			1		
d				1	
e					1

$$
\begin{aligned}
S &= (a \dot{+} bce)\,(b \dot{+} c)\,(c \dot{+} de)\,(d \dot{+} e)\\
&= (ab \dot{+} ac \dot{+} bce)\,(c \dot{+} de)\,(d \dot{+} e)\\
&= (abc \dot{+} abde \dot{+} ac \dot{+} acde \dot{+} bce \dot{+} bcde)\,(d \dot{+} e)\\
&= abcd \dot{+} abce \dot{+} abde \dot{+} acd \dot{+} ace \dot{+} acde \dot{+} bcde \dot{+} bce
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
S' &= e \dot{+} d + c \dot{+} be \dot{+} bd \dot{+} b \dot{+}\\
&\dot{+}\, a \dot{+} ad = be \dot{+} bd \dot{+} ad \dot{+} c
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{c|cc|}
 & a & d \\ \hline
a & 1 & 1 \\
d & 1 & 1 \\ \hline
\end{array}
\quad
\begin{array}{c|cc|}
 & b & d \\ \hline
b & 1 & 1 \\
d & 1 & 1 \\ \hline
\end{array}
\quad
\begin{array}{c|cc|}
 & b & e \\ \hline
b & 1 & 1 \\
e & 1 & 1 \\ \hline
\end{array}
\quad
\begin{array}{c|c|}
 & c \\ \hline
c & 1 \\ \hline
\end{array}
$$

Al nivel $\alpha = 0.67$

	a	b	c	d	e
a	1		1	1	
b		1		1	1
c			1		
d				1	
e					1

$$
\begin{aligned}
S &= (a \dot{+} be)\,(b \dot{+} c)\,(c \dot{+} de)\,(d \dot{+} e)\\
&= (ab \dot{+} ac \dot{+} be \dot{+} bce)\,(c \dot{+} de)\,(d \dot{+} e)\\
&= (abc \dot{+} abde \dot{+} ac \dot{+} acde \dot{+} bce \dot{+} bde)\,(d \dot{+} e)\\
&= abcd \dot{+} abce \dot{+} abde \dot{+} acd \dot{+} ace \dot{+} acde \dot{+} bcde \dot{+} bce \dot{+}\\
&\dot{+}\, bde
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
S' &= e \dot{+} d \dot{+} c \dot{+} be \dot{+} bd \dot{+}\\
&b \dot{+} a \dot{+} ad \dot{+} ac =\\
&be \dot{+} bd \dot{+} ad \dot{+} ac
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{c|cc|}
 & a & c \\ \hline
a & 1 & 1 \\
c & 1 & 1 \\ \hline
\end{array}
\quad
\begin{array}{c|cc|}
 & a & d \\ \hline
a & 1 & 1 \\
d & 1 & 1 \\ \hline
\end{array}
\quad
\begin{array}{c|cc|}
 & b & d \\ \hline
b & 1 & 1 \\
d & 1 & 1 \\ \hline
\end{array}
\quad
\begin{array}{c|cc|}
 & b & e \\ \hline
b & 1 & 1 \\
e & 1 & 1 \\ \hline
\end{array}
$$

Al nivel $\alpha = 0.64$

	a	b	c	d	e
a	1		1	1	
b		1	1	1	1
c			1		
d				1	
e					1

$$\begin{aligned} S &= (a \dotplus be)(c \dotplus de)(d \dotplus e) \\ &= (ac \dotplus ade \dotplus bce \dotplus bde)(d \dotplus e) \\ &= acd \dotplus ace \dotplus ade \dotplus bcde \dotplus bce \dotplus bde \end{aligned}$$

$$S' = be \dotplus bd \dotplus bc \dotplus \cancel{a} \dotplus ad \dotplus ac$$

	a	c
a	1	1
c	1	1

	a	d
a	1	1
d	1	1

	b	c
b	1	1
c	1	1

	b	d
b	1	1
d	1	1

	b	e
b	1	1
e	1	1

Al nivel $\alpha = 0.62$:

	a	b	c	d	e
a	1		1	1	
b		1	1	1	1
c			1		
d				1	1
e					1

$$\begin{aligned} S &= (a \dotplus be)(c \dotplus de) \\ &= ac \dotplus ade \dotplus bce \dotplus bde \end{aligned}$$

$$S' = bde \dotplus bc \dotplus ad \dotplus ac$$

	b	d	e
b	1	1	1
d	1	1	1
e	1	1	1

	a	c
a	1	1
c	1	1

	a	d
a	1	1
d	1	1

	b	c
b	1	1
c	1	1

Al nivel $\alpha = 0.60$:

	a	b	c	d	e
a	1		1	1	
b		1	1	1	1
c			1	1	
d				1	1
e					1

$$\begin{aligned} S &= (a \dotplus be)(c \dotplus e) \\ &= ac \dotplus ae \dotplus bce \dotplus be \end{aligned}$$

$$S' = bde \dotplus bcd \dotplus acd$$

	a	c	d
a	1	1	1
c	1	1	1
d	1	1	1

	b	c	d
b	1	1	1
c	1	1	1
d	1	1	1

	b	d	e
b	1	1	1
d	1	1	1
e	1	1	1

Al nivel $\alpha = 0.52$:

	a	b	c	d	e
a	1		1	1	
b		1	1	1	1
c			1	1	1
d				1	1
e					1

$$S = a \dot{+} be$$
$$S' = bcde \dot{+} acd$$

	b	c	d	e
b	1	1	1	1
c	1	1	1	1
d	1	1	1	1
e	1	1	1	1

	a	c	d
a	1	1	1
c	1	1	1
d	1	1	1

Al nivel $\alpha = 0.50$:

	a	b	c	d	e
a	1	1	1	1	
b		1	1	1	1
c			1	1	1
d				1	1
e					1

$$S = a \dot{+} e$$
$$S' = bcde \dot{+} abcd$$

	b	c	d	e
b	1	1	1	1
c	1	1	1	1
d	1	1	1	1
e	1	1	1	1

	a	b	c	d
a	1	1	1	1
b	1	1	1	1
c	1	1	1	1
d	1	1	1	1

Y, para $\alpha = 0.49$, ya solo queda una subrelación máxima de similitud.

Esta descomposición progresiva adquiere un especial interés cuando se desea poner de manifiesto las afinidades que existen entre los candidatos, en el supuesto de que se pretendieran realizar unos cursos de formación en grupo. Así, se puede observar que a un nivel elevado, por ejemplo 0.7, el 1 y el 4, por una parte, y el 2 y el 4, por otra son muy similares, mientras que el 1 y el 2 no lo son. Es necesario reducir el nivel a 0.5 para reunir conjuntamente el 1, el 2 y el 4. Realizar una descomposición en subrelaciones máximas adquiere un especial interés en el ámbito de las ciencias humanas.

Veamos ahora, a través de un ejemplo, como se puede plantear la polivalencia del personal, para la realización de determinadas actividades.

Se puede partir de la existencia de 4 tareas específicas, y que, para cada una de ellas, se ha establecido un perfil profesional cuyo referencial es:

(7.20) $$\xi_1 = \{A,B,C,D,E,F,G,H\}$$

así como:

(7.21)

	A	B	C	D	E	F	G	H
$\underset{\sim}{T}_1 =$	0.8	0.3	0.1	1	0.4	0.6	1	1
$\underset{\sim}{T}_2 =$	0.2	0.3	0.5	0.6	1	1	1	0.4
$\underset{\sim}{T}_3 =$	0.9	0.8	0.1	0.4	0.5	0.8	0.2	0.3
$\underset{\sim}{T}_4 =$	1	1	0.4	1	0.2	0	0.3	1

Consideremos ahora 5 candidatos para los que se ha medido o valuado su aptitud para cada una de las cualidades A, B, C, ...

(7.22)

	A	B	C	D	E	F	G	H
$\underset{\sim}{P}_1 =$	1	0.3	0.8	0	0.4	0.6	0.5	0.7
$\underset{\sim}{P}_2 =$	0.6	1	0.4	0.5	1	0	0.5	0.6
$\underset{\sim}{P}_3 =$	0.8	0	0.4	0.5	0.3	0.7	1	1
$\underset{\sim}{P}_4 =$	0.6	0.3	1	1	0	0.7	0.9	0.8
$\underset{\sim}{P}_5 =$	0.9	0.3	0.3	0.6	0.8	1	0.9	0.4

Si se obtiene la distancia de Hamming de cada persona en relación con las tareas, resulta la siguiente matriz:

(7.23)

	$\underset{\sim}{T}_1$	$\underset{\sim}{T}_2$	$\underset{\sim}{T}_3$	$\underset{\sim}{T}_4$
$\underset{\sim}{P}_1$	0.33	0.43	0.33	0.42
$\underset{\sim}{P}_2$	0.47	0.37	0.35	0.28
$\underset{\sim}{P}_3$	0.16	0.33	0.38	0.40
$\underset{\sim}{P}_4$	0.23	0.38	0.51	0.42
$\underset{\sim}{P}_5$	0.27	0.15	0.27	0.51

Para destinar los candidatos a las tareas para las que se hallan más capacitados, se sigue el camino siguiente: Al ser $\delta\,(\underset{\sim}{P}_5 \rightarrow \underset{\sim}{T}_2) = 0.15$, se elige P_5 para T_2 y se elimina la columna $\underset{\sim}{T}_2$ y la fila $\underset{\sim}{P}_5$.

Al ser $\delta\,(\underset{\sim}{P}_3 \rightarrow \underset{\sim}{T}_1) = 0.16$, se elige P_3 para T_1 y se elimina la columna $\underset{\sim}{T}_1$ y la fila $\underset{\sim}{P}_3$.

Al ser $\delta\,(\underset{\sim}{P}_2 \rightarrow \underset{\sim}{T}_4) = 0.28$, se elige P_2 para T_4 y se elimina la columna $\underset{\sim}{T}_4$ y la fila $\underset{\sim}{P}_2$.

Al ser, finalmente, $\delta\ (\underset{\sim}{P}_1 \rightarrow \underset{\sim}{T}_3) = 0.33$, se elige P_1 para T_3. No será empleado P_4.

La matriz de afectación correspondiente, será:

(7.24)

	$\underset{\sim}{T}_1$	$\underset{\sim}{T}_2$	$\underset{\sim}{T}_3$	$\underset{\sim}{T}_4$
$\underset{\sim}{P}_1$			1	
$\underset{\sim}{P}_2$				1
$\underset{\sim}{P}_3$	1			
$\underset{\sim}{P}_4$				
$\underset{\sim}{P}_5$		1		

Existen otros procedimientos de afectación, incluso muy rigurosos, como el llamado «método húngaro» que es muy conocido y utilizado en investigación operativa. Lo que se pretende es buscar las afectaciones de tal manera que permitan obtener la distancia total mínima.

La solución dada por la afectación (7.24) da un total de $0.15 + 0.16 + 0.28 + 0.33 = 0.92$, que en este caso, y sólo de manera fortuita, coincidiría con el mínimo que se obtendría siguiendo el método húngaro.

Otro problema importante es el de la «no especialización». Es decir, cuál es el candidato más apto para la totalidad de las actividades (7.21). Para ello se elegirá la unión de todas las $\underset{\sim}{T}_i$, es decir:

$$(7.25) \qquad \underset{\sim}{T} = \underset{\sim}{T}_1 \cup \underset{\sim}{T}_2 \cup \underset{\sim}{T}_3 \cup \underset{\sim}{T}_4 = \begin{array}{cccccccc} A & B & C & D & E & F & G & H \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{1} & \multicolumn{1}{c|}{1} & \multicolumn{1}{c|}{0.5} & \multicolumn{1}{c|}{1} & \multicolumn{1}{c|}{1} & \multicolumn{1}{c|}{1} & \multicolumn{1}{c|}{1} & \multicolumn{1}{c|}{1} \\ \hline \end{array}$$

Se calcula:

$\delta\ (\underset{\sim}{P}_1 \rightarrow \underset{\sim}{T}) = 0.47$, $\qquad \delta\ (\underset{\sim}{P}_2 \rightarrow \underset{\sim}{T}) = 0.36$, $\qquad \delta\ (\underset{\sim}{P}_3 \rightarrow \underset{\sim}{T}) = 0.35$

$\delta\ (\underset{\sim}{P}_4 \rightarrow \underset{\sim}{T}) = 0.40$, $\qquad \delta\ (\underset{\sim}{P}_5 \rightarrow \underset{\sim}{T}) = 0.28$

De donde se deduce que el candidato más apto para una actividad polivalente es P_5.

Existen otros muchos problemas de este campo que permiten ser tratados a través de estos esquemas, ya que se pueden utilizar todos los operadores borrosos, sean algebraicos o semánticos, dadas sus amplias posibilidades en un contexto en el que interviene el factor humano.

LA SITUACION DE LA EMPRESA A TRAVES DE LOS DATOS CONTABLES

CAPITULO VIII

LA SITUACION DE LA EMPRESA A TRAVES DE LOS DATOS CONTABLES

El balance como síntesis económico-financiera de la empresa

La importancia que adquieren los procesos de cuantificación de los fenómenos económicos para la gestión de las empresas resalta el interés de los datos que la contabilidad proporciona para el control y medida del acontecer económico empresarial. Pero su utilidad no queda limitada al análisis de los hechos ya acaecidos, sino que su conocimiento permite tomar decisiones con respecto al futuro.

El tratamiento de los problemas que la realidad de las empresas plantea no puede realizarse con independencia de los datos que deben servir como base de los cálculos. Es por ello que los conceptos contables y sus técnicas son una ayuda eficaz para llegar a obtener una visión de los acontecimientos que se desarrollan en las empresas.

Entre los instrumentos propios de la contabilidad cuya utilización resulta más fructífera en la gestión de las empresas, figura en lugar preponderante el Balance. Diversas han sido las teorías que han pretendido dar una explicación completa de los objetivos que se persiguen con la obtención del Balance.

Como sucede con otros instrumentos utilizados en la gestión de empresas, el concepto de equilibrio se halla presente a lo largo del desarrollo de las doctrinas que sobre él se han formulado.

Esta situación de equilibrio surge ya inicialmente al establecer la igualdad cuantitativa entre la estructura financiera y la estructura económica, como expresión de las fuentes de financiación y de la materialización de las mismas.

Con objeto de poder realizar comparaciones que establezcan en su caso equilibrios o desequilibrios parciales, las cuentas se ordenan según un determinado criterio: para la estructura financiera por su exigibilidad creciente, de tal modo que en primer lugar se encuentran las fuentes de financiación propias y luego las ajenas. De manera paralela se ordenan las de la estructura económica por orden de liquidabilidad creciente, figurando por tanto en primer lugar el inmovilizado, el realizable a largo plazo... y finalmente el disponible inmediato.

La cuenta, pieza básica del análisis económico financiero de la empresa, constituye la representación de un elemento, conjunto de elementos o masas patrimoniales, mediante la cual quedan reflejados todos aquellos movimientos que afectan a un determinado concepto previamente especificado, susceptibles de ser controlados posteriormente.

La gestión financiera de una empresa se analiza tradicionalmente siguiendo dos caminos: a través de la evolución de los balances y cuenta de resultados; y mediante el establecimiento y estimación futura de los «ratios». Ambos caminos no son, en todo caso, excluyentes.

El objetivo de este análisis no siempre se limita a determinar la situación actual, sino que se pretende a través de los datos conocidos, establecer aquellas acciones encaminadas a conseguir una cierta situación futura estimada en términos de certeza, probabilidad o incertidumbre.

Para ello, se estudian, en primer lugar, los *balances* disponibles hasta un determinado momento para luego comparar los *resultados* obtenidos en los mismos períodos y los elementos que los componen, y finalmente establecer el *estado de origen* y *aplicación de fondos*.

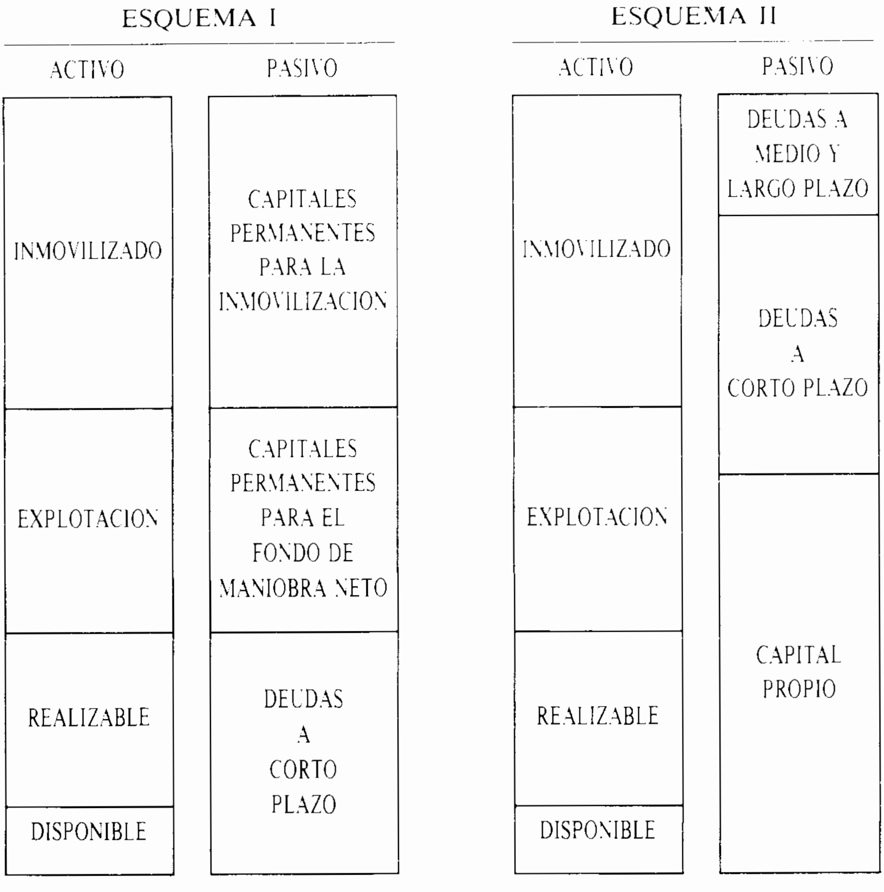
Desde un punto de vista metodológico el análisis de un balance constituye un caso genuino de estudio estático, destinado a plasmar lo más fielmente posible la situación de la empresa en un momento determinado. La comparación de balances relativos a momentos de tiempo distintos constituye un estudio de estática comparativa, en el que se intenta establecer cómo se ha pasado de una fecha a otra.

De este análisis se obtienen conclusiones relativas a las actuaciones que han tenido lugar en los períodos considerados y que han comportado consecuencias económicas: porqué se ha recurrido a un crédito, porqué han aumentado los stocks, porqué se han reducido las disponibilidades, cuál ha sido la política de amortizaciones, etc... De esta información se puede llegar a establecer una política para el futuro que determine los objetivos a conseguir y anticipar el deseable balance para ejercicios económicos venideros.

En otro orden de ideas también se pueden obtener conclusiones diferenciadas sobre distintas empresas, cuyos balances en un mismo momento pueden resultar parecidos, pero que su evolución hasta la actualidad puede señalar si se trata de empresas con tendencia a la expansión o a la regresión.

No hay que olvidar que el análisis de las situaciones pasadas tiene como fin fundamental intentar estimar de la mejor manera posible los datos futuros. Ahora bien, en un contexto económico marcado por la carencia de información con respecto al futuro, hace pensar que estas previsiones no puedan ser estimadas ni en términos de certeza ni, en muchos casos, en términos de probabilidad. De ahí el interés de recurrir a la adopción de aquellas técnicas que resultan válidas en el ámbito de la incertidumbre.

Existen distintos criterios para agrupar los elementos patrimoniales que, evidentemente, darán lugar a una distinta composición del Activo y del Pasivo. A efectos pura y simplemente indicativos, presentamos unas muestras de estas posibilidades, representadas a través de superficies cuya dimensión determina la importancia relativa de los grupos en que ha sido dividido el balance.



Ahora bien, el análisis del balance en sí mismo no proporciona información alguna sobre la formación de los resultados de cada ejercicio, ya que éstos sólo aparecen reflejados en la única cuenta de pérdidas y ganancias.

Para conseguir este objetivo se establece la comparación, a lo largo del tiempo, de los elementos que forman el resultado de cada ejercicio, complementando así el estudio realizado a través de las masas patrimoniales del balance.

Por otra parte, la evolución que se constata en cada una de las masas patrimoniales produce unas variaciones relativas en la totalidad de las mismas con referencia a la suma total de la estructura económica y financiera. Sin embargo, el simple estudio de estas variaciones con independencia de las que se producen en las restantes resulta insuficiente para determinar la calidad de la gestión de la empresa, por lo que conviene analizarlas estableciendo entre ellas una interrelación. Se producen así modificaciones en el origen de los fondos, es decir, en el Pasivo y por otra parte en la utilización de estos fondos, es decir, en el Activo. Evidentemente ambas variaciones deben equilibrarse.

Si se supone que el Activo se halla formado por 4 masas patrimoniales A_1, A_2, A_3, A_4 y el Pasivo por P_1, P_2, P_3, P_4, la suma de las variaciones del Activo deberán ser iguales a la suma de las del Pasivo:

$$\Delta A_1 + \Delta A_2 + \Delta A_3 + \Delta A_4 = \Delta P_1 + \Delta P_2 + \Delta P_3 + \Delta P_4$$

Dado que:

$$\Delta A_1 = (\Delta P_1 + \Delta P_2 + \Delta P_3 + \Delta P_4) - (\Delta A_2 + \Delta A_3 + \Delta A_4)$$

y

$$\Delta P_1 = (\Delta A_1 + \Delta A_2 + \Delta A_3 + \Delta A_4) - (\Delta P_2 + \Delta P_3 + \Delta P_4)$$

se deduce que, para obtener la variación de una masa patrimonial es necesario determinar las modificaciones habidas en las restantes, con objeto de establecer los movimientos que han incidido en la masa que se analiza.

Dado que el Pasivo del balance constituye el origen de los medios financieros y el Activo la aplicación de los mismos, se afirma que todo aumento de una masa de Pasivo o disminución de una del Activo representa una fuente de financiación, mientras que una disminución de una masa del Pasivo o un aumento en una del Activo implicará una colocación de estos medios financieros.

Pero estos esquemas sólo tienen una validez relativa cuando van dirigidos a la estimación de situaciones futuras, como consecuencia de la constante evolución que sufre la vida empresarial. Los datos acumulados en un determinado momento, no son suficientes para obtener la necesaria información que permita una correcta previsión con respecto al acontecer futuro.

La realidad económica de la empresa actual plantea una gama de problemas que los métodos utilizados normalmente por la contabilidad no pueden solucionar, por la carencia de un instrumental adecuado para tratarlos, a pesar de que la incorporación en los últimos tiempos de nuevas técnicas ha permitido ampliar los límites a los cuales quedaba sumido.

Los elementos clásicos utilizados que alcanzaron su mayor exponente en la aplicación del cálculo diferencial, recogido en el ámbito microeconómico por el análisis marginal, tienen cada vez menos importancia por la evolución reciente del planteamiento económico-contable de los procesos empresariales.

La aparición de los principios de la estadística moderna en el ámbito del estudio de la contabilidad abrieron perspectivas nuevas a viejos problemas aportando soluciones extraordinariamente útiles. Esta ha sido la causa de la traslación desde los estudios deterministas a los probabilistas, los cuales describen la evolución de un «sistema» a lo largo del tiempo en términos de probabilidad. Dentro del ámbito probabilístico son quizás los procesos discontinuos, por su adaptación al acontecer real, aquellos que más han acaparado la atención de los estudiosos de la microeconomía.

Pero es en el ámbito de la incertidumbre donde se ha producido la mayor aportación matemática de los últimos años susceptible de ser incorporada al tratamiento de los problemas de gestión de las empresas en general y de las previsiones contables en particular: la teoría de los subconjuntos borrosos.

El estudio de la gestión de las empresas a través de los ratios

Como se ha señalado la presentación sintética de un balance, a través de sus masas patrimoniales, permite relacionar las fuentes de financiación con la utilización que de las mismas se realiza. Pero el papel de estas relaciones no acaba ni con el análisis de los hechos acontecidos, ni con el estudio de la situación actual, sino que su objetivo es tan amplio que abarca la previsión de las situaciones futuras a través de la estimación de estas masas patrimoniales para períodos sucesivos. El establecimiento de unos ratios relativos a momentos pasados debe permitir la determinación de ratios relativos al futuro para decidir cuáles son los objetivos alcanzables y, por lo tanto, el camino a seguir para llegar hasta ellos.

Situados en el ámbito económico-financiero de la empresa, se pueden plantear diversas preguntas en torno a la relación existente entre masas de activo y de pasivo. Entre ellas y sólo a título indicativo se puede señalar la que existe entre el inmovilizado y las fuentes de donde ha surgido su financiación. Existen determinadas normas, aceptadas con un cierto carácter de generalidad, que relacionan las fuentes de financiación con sus aplicaciones. Así, se dice que no resulta adecuado financiar un inmovilizado a través de unos préstamos a corto plazo, sino que las inmovilizaciones deben ser financiadas a través de capitales permanentes, con toda la relatividad que pueda asignarse a la palabra permanencia. Y ello es así como consecuencia de la escasa capacidad que tienen las inmovilizaciones de ser transformadas en medios monetarios, es decir, por su escaso grado de liquidabilidad.

El llamado método de los ratios permite seguir la evolución económico-financiera de la empresa a través del establecimiento regular y periódico de relaciones entre distintas masas patrimoniales o entre los elementos que forman la cuenta de resultados. Sin embargo su utilidad no se ciñe al análisis del balance y cuenta de resultados, sino que ha sido empleado también para medir la eficacia de sectores de la empresa tales como la producción, las ventas, el personal, etc.

Su uso como instrumento de medida no ha quedado limitado, única y exclusivamente, a la mejora de la gestión de las empresas, sino que con él se han perseguido otros objetivos tales como la inspección fiscal de las empresas, para cuyo cometido los ratios se han convertido en un elemento determinante de la razonabilidad o adecuación de las anotaciones contables.

La utilización correcta de estas técnicas exige tomar en consideración ciertas normas destinadas a conseguir comparaciones homogéneas. Entre ellas figuran que los criterios de valoración sean establecidos de manera permanente para los ratios de una misma empresa aún en épocas diferentes, que las actividades que ha realizado la empresa en los distintos momentos sean comparables, que los datos que componen los ratios se refieran al mismo momento cada uno de los años, etc...

Un ratio considerado aisladamente de los demás presenta una utilidad muy relativa. El interés surge cuando se realiza un estudio comparativo y es posible establecer una estimación para el futuro. Es por ello que se suelen relacionar varios ratios de una misma empresa relativos a un momento de tiempo, comparando luego los resultados a lo largo de varios períodos para conocer su evolución. También se comparan los ratios de una empresa con los de otras empresas del mismo sector, así como con los standars considerados correctos, para determinar así la posición relativa frente a otras empresas y frente a los objetivos que se pretenden alcanzar.

Si se toma como base el balance y la cuenta de resultados, se puede elaborar un elevado número de ratios que constituyen una medida de la gestión realizada y un instrumento para una mejor gestión en el futuro.

Dado el objetivo de este trabajo, únicamente vamos a señalar la existencia de los ratios más utilizados en la realidad, en el bien entendido de que son sólo una muestra de otros muchos.

Los ratios que estudian la actividad económica-financiera de la empresa se distribuyen en varios grupos. En una primera aproximación, se puede decir que existen ratios de estructura y ratios de gestión, a la vez que los primeros analizan la estructura financiera y la estructura económica, mientras que los segundos estudian la gestión financiera y gestión económica. Esta clasificación es generalmente aceptada, pero no es única. Así los ratios son a veces separados en ratios de estructura, que relacionan las masas del balance entre sí, ratios de rotación, que relacionan diversas masas del balance con las ventas y ratios de resultados económico-financieros.

Entre los ratios de estructura que más se utilizan, cabe citar a aquellos que relacionan las fuentes de financiación con la materialización de las mismas. Así, se puede señalar que los créditos a corto plazo, por ejemplo, resultan adecuados para financiar los factores de la producción cuya permanencia en la empresa tiene lugar durante un período relativamente corto. Surge así una norma generalmente aceptada que dice que los medios utilizados para financiar las masas patrimoniales del activo deben permanecer en la empresa un tiempo superior al grado de disponibilidad de las mismas.

Por ello el capital circulante debe ser superior a las deudas a corto plazo, es decir que el ratio $\frac{\text{capital circulante}}{\text{deudas a corto plazo}}$ será en ese caso mayor que la unidad. La evolución de este ratio permite determinar no sólo la capacidad financiera de la empresa, sino su propia estabilidad en un futuro inmediato.

Cuando este cociente es superior a la unidad, se produce un margen de seguridad que se acostumbra a denominar «fondo de maniobra neto» y que viene determinado por la parte del capital circulante que ha sido financiado por capitales permanentes. En este caso, la financiación de la inmovilización neta no ha precisado de la totalidad de los capitales permanentes.

El «fondo de maniobra neto» se halla formado por el fondo de maniobra propio, más el fondo de maniobra exterior (financiado por capitales externos a la empresa), y su cálculo se puede realizar por diferencia entre los capitales circulantes y todas las deudas de la empresa. Una empresa poseerá un fondo de maniobra propio si sus capitales propios son superiores a la inmovilización neta, o dicho en otras palabras, si el capital circulante es superior al conjunto de todas sus deudas a corto, medio y largo plazo.

Con objeto de estudiar la *evolución* del «fondo de maniobra neto» de la empresa se le relaciona con el capital circulante y con las deudas a corto plazo. Para ello se han establecido los ratios siguientes:

$$\text{Financiación estable del capital circulante} = \frac{\text{fondo de maniobra neto}}{\text{capital circulante}}$$

$$\text{Evolución del fondo de maniobra neto y de las deudas a corto plazo} = \frac{\text{fondo de maniobra neto}}{\text{deudas a corto plazo}}$$

El análisis de estas relaciones a lo largo del tiempo proporciona las bases necesarias para establecer determinadas previsiones para el futuro, teniendo en cuenta que el fondo de maniobra puede sufrir alteraciones que lo reduzcan como consecuencia de pérdidas de la empresa, devolución de préstamos a largo y medio plazo, distribución de reservas con disminución del neto patrimonial, etc., así como por el aumento de nuevas inversiones no financiadas por nuevos capitales, por ejemplo.

El valor del fondo de maniobra neto, en sí mismo, no precisa la situación de la empresa, ya que aunque se mantenga constante puede pasar de adecuado a insuficiente como consecuencia de modificaciones en la actividad de la misma, tales como: un incremento en los stocks, un aumento permanente de la exigibilidad de las deudas a corto plazo, la ampliación de la clientela, etc. De ahí la importancia de unos esquemas que permitan estimar, para el futuro, los valores que deben alcanzar los ratios, como consecuencia de variables que pueden influir tanto en el numerador como en el denominador de la fracción.

El análisis del fondo de maniobra neto conduce casi siempre al estudio de la liquidez, concepto que engloba la totalidad del capital circulante, sea cual fuere su grado de liquidabilidad.

$$\text{El ratio de liquidez viene determinado por: } \frac{\text{capital circulante}}{\text{deudas a corto plazo}}$$

Su objetivo consiste en reflejar una situación financiera en un momento determinado y puede mostrar variaciones significativas a lo largo del tiempo, aunque manteniéndose a plazo medio dentro de unos límites precisos.

En líneas generales se afirma que cuando este ratio es inferior a la unidad, el fondo de maniobra neto resulta negativo, por cuanto la empresa ha inmovilizado medios monetarios que provienen de créditos a corto plazo o ha sufrido pérdidas.

Esta breve descripción del contenido y objetivos de los ratios de estructura tomados como ejemplo, tiene como meta poner de manifiesto la utilidad de esta técnica contable para representar la situación por la que atraviesa la empresa, así como sus posibilidades para estimar la evolución que puede seguir en el futuro.

Es precisamente en esta dirección que aparece el interés de utilizar la teoría de los subconjuntos borrosos.

La toma de decisiones con la utilización de ratios borrosos

Cada vez resulta más frecuente la necesidad de tomar decisiones en base a ratios que sólo se pueden estimar de manera incierta. Evidentemente se plantean bajo forma de relaciones o cocientes en los cuales el numerador y el denominador se mueven en función de una misma variable elegida convenientemente. Resulta interesante disponer para este tipo de relaciones y, en situaciones de incertidumbre, de un instrumento adecuado como el que se puede conseguir utilizando los números borrosos. Para ello, se puede partir del concepto de intervalos de confianza.

Se supone que para el tratamiento de este problema se consideran siempre datos positivos, es decir, que pertenecen al conjunto R_0^+.

Llamaremos N al numerador y D al denominador. Un intervalo de confianza numerador será designado por $[N_1, N_2]$ y un intervalo de confianza denominador por $[D_1, D_2]$, cumpliéndose siempre que $N_1, N_2, D_1, D_2 > 0$.

La conocida aritmética de los intervalos de confianza permite escribir, dado:

$$N = [N_1, N_2], \qquad D = [D_1, D_2]$$

que:

$$Q = N\,(:)\,D = [N_1, N_2]\,(:)\,[D_1, D_2] = \left[\frac{N_1}{D_2}, \frac{N_2}{D_1}\right] \tag{8.1}$$

Y si se hace:

$$Q = [Q_1, Q_2]$$

será:

$$[Q_1, Q_2] = \left[\frac{N_1}{D_2}, \frac{N_2}{D_1}\right]$$

Recordemos, ahora, cómo comparar dos intervalos de confianza. Si se consideran:

$$A = [a_1, a_2] \quad \text{y} \quad B = [b_1, b_2]$$

dos intervalos de confianza de R_0^+. Se define su límite superior por:

(8.2)
$$A \text{ (V) } B = [a_1, a_2] \text{ (V) } [b_1, b_2] = \\ = [a_1 \vee b_1, a_2 \vee b_2]$$

y su límite inferior por:

(8.3)
$$A \text{ (}\wedge\text{) } B = [a_1, a_2] \text{ (}\wedge\text{) } [b_1, b_2] = \\ = [a_1 \wedge b_1, a_2 \wedge b_2]$$

Para ordenar A y B se pueden utilizar (8.2) o bien (8.3), tomando las distancias de Hamming hacia la izquierda o hacia la derecha.

(8.4) $$d\ (A, A \text{ (V) } B) = |a_1—a_1 \vee b_1| + |a_2—a_2 \vee b_2|$$

(8.5) $$d\ (B, A \text{ (V) } B) = |b_1—a_1 \vee b_1| + |b_2—a_2 \vee b_2|$$

Se puede admitir que, si:

(8.6) $$d\ (A, A \text{ (V) } B) < d\ (B, A \text{ (V) } B)$$

entonces A será preferible a B. Si resulta = en lugar de < se considerará que existe indiferencia.

Se puede tener en cuenta también el criterio de la distancia en relación al límite inferior.

(8.7) $$d\ (A, A \text{ (}\wedge\text{) } B) = |a_1—a_1 \wedge b_1| + |a_2—a_2 \wedge b_2|$$

(8.8) $$d\ (B, A \text{ (}\wedge\text{) } B) = |b_1—a_1 \wedge b_1| + |b_2—a_2 \wedge b_2|$$

Se puede aceptar que, cuando:

(8.9) $$d\ (A, A \text{ (}\wedge\text{) } B) < d\ (B, A \text{ (}\wedge\text{) } B)$$

entonces A será preferible a B.

Las expresiones (8.4), (8.5) y (8.6) corresponderán a la obtención de un máximo y (8.7), (8.8) y (8.9) a la obtención de un mínimo.

Las fórmulas obtenidas anteriormente para los intervalos de confianza son susceptibles de generalización para n intervalos.

$$(8.10) \qquad \left(\bigvee_{i=1}^{n}\right) A_i = \left[\bigvee_{i=1}^{n} a_{1i}, \bigvee_{i=1}^{n} a_{2i}\right]$$

$$(8.11) \qquad \left(\bigwedge_{i=1}^{n}\right) A_i = \left[\bigwedge_{i=1}^{n} a_{1i}, \bigwedge_{i=1}^{n} a_{2i}\right]$$

$$(8.12) \qquad d\left(A_i, \left(\bigvee_{i=1}^{n}\right) A_i\right) = \left|a_{1i} - \bigvee_{i=1}^{n} a_{1i}\right| + \left|a_{2i} - \bigvee_{i=1}^{n} a_{2i}\right|$$

$$(8.13) \qquad d\left(A_i, \left(\bigwedge_{i=1}^{n}\right) A_i\right) = \left|a_{1i} - \bigwedge_{i=1}^{n} a_{1i}\right| + \left|a_{2i} - \bigwedge_{i=1}^{n} a_{2i}\right|$$

Por ser d una distancia (un escalar), introduce por (8.12) o bien por (8.13) un orden total, generalmente no estricto, entre las A_i. Este orden total, sea uno u otro según el caso permite la elección por dominio. De hecho, dos A_i, al poder hallarse a la misma distancia de un límite superior o inferior según el caso, pueden descomponerse en clases de equivalencia formando un orden total estricto.

Las fórmulas (8.2) a (8.13) se aplican, evidentemente, al supuesto de intervalos de confianza como los anotados en (8.1) o a través de una nomenclatura indicial levemente distinta:

$$Q^{(1)} \, (\vee) \, Q^{(2)} = \left[\frac{N_1^{(1)}}{D_2^{(1)}}, \frac{N_2^{(1)}}{D_1^{(1)}}\right] (\vee) \left[\frac{N_1^{(2)}}{D_2^{(2)}}, \frac{N_2^{(2)}}{D_1^{(2)}}\right]$$

$$= \left[\frac{N_1^{(1)}}{D_2^{(1)}} \vee \frac{N_1^{(2)}}{D_2^{(2)}}, \frac{N_2^{(1)}}{D_1^{(1)}} \vee \frac{N_2^{(2)}}{D_1^{(2)}}\right]$$

$$Q^{(1)} \, (\wedge) \, Q^{(2)} = \left[\frac{N_1^{(1)}}{D_2^{(1)}}, \frac{N_2^{(1)}}{D_1^{(1)}}\right] (\wedge) \left[\frac{N_1^{(2)}}{D_2^{(2)}}, \frac{N_2^{(2)}}{D_1^{(2)}}\right]$$

$$= \left[\frac{N_1^{(1)}}{D_2^{(1)}} \wedge \frac{N_1^{(2)}}{D_2^{(2)}}, \frac{N_2^{(1)}}{D_1^{(1)}} \wedge \frac{N_2^{(2)}}{D_1^{(2)}}\right]$$

Y se pasará a n con (8.10) y (8.11) y de ahí a un orden total por las distancias (8.12) o bien (8.13).

Veamos un ejemplo:

$$N^{(1)} = [5,\ 11], \qquad D^{(1)} = [13,\ 17]$$

$$Q^{(1)} = \left[\frac{5}{17},\ \frac{11}{13}\right] = [0.294,\ 0.846]$$

$$N^{(2)} = [4,\ 8], \qquad D^{(2)} = [9,\ 23]$$

$$Q^{(2)} = \left[\frac{4}{23},\ \frac{8}{9}\right] = [0.173,\ 0.888]$$

$$N^{(3)} = [3,\ 13], \qquad D^{(3)} = [5,\ 11]$$

$$Q^{(3)} = \left[\frac{3}{11},\ \frac{13}{5}\right] = [0.272,\ 2.600]$$

Busquemos el límite superior:

(8.14) $$Q^{(1)}\ (V)\ Q^{(2)}\ (V)\ Q^{(3)} =$$

$$= [0.294,\ 0.846]\ (V)\ [0.173,\ 0.888]\ (V)\ [0.272,\ 2.600]$$

$$= [0.294,\ 2.600]$$

Y, ahora, las distancias:

$$d\ (Q^{(1)},\ Q^{(1)}\ (V)\ Q^{(2)}\ (V)\ Q^{(3)}) =$$

$$= |0.294 - 0.294| + |0.846 - 2.600|$$

$$= 0 + 1.754 = 1.754$$

$$d\ (Q^{(2)},\ Q^{(1)}\ (V)\ Q^{(2)}\ (V)\ Q^{(3)}) =$$

$$= |0.173 - 0.294| + |0.888 - 2.600| =$$

$$= 0.121 + 1.712 = 1.833$$

$$d\ (Q^{(3)},\ Q^{(1)}\ (V)\ Q^{(2)}\ (V)\ Q^{(3)}) =$$

$$= |0.272 - 0.294| + |2.600 - 2.600| =$$

$$= 0.022 + 0 = 0.022$$

De esta manera el orden total es:

$$Q^{(3)} \succ Q^{(1)} \succ Q^{(2)}$$

por lo que será elegido $Q^{(3)}$ por hallarse más cercano del intervalo de confianza (8.14) que es el límite superior.

Se operaría de la misma manera para el límite inferior, utilizando esta vez (8.11) y (8.13).

Las fórmulas obtenidas para los intervalos de confianza se generalizan para el supuesto de números borrosos incorporando el nivel de presunción α, de la siguiente manera:

$\forall\ N_1(\alpha), N_2(\alpha), D_1(\alpha), D_2(\alpha) \in R_0^+$
$\forall\ \alpha \in [0, 1]$

se escribirá:

$$N(\alpha) = [N_1(\alpha), N_2(\alpha)]$$
$$D(\alpha) = [D_1(\alpha), D_2(\alpha)]$$
$$Q(\alpha) = [Q_1(\alpha), Q_2(\alpha)]$$
$$= \left[\frac{N_1(\alpha)}{D_2(\alpha)}, \frac{N_2(\alpha)}{D_1(\alpha)}\right]$$

(8.15) $$A^*(\alpha) = \left(\bigvee_{i=1}^{n}\right) A_i(\alpha) = \left[\bigvee_{i=1}^{n} a_{1i}(\alpha), \bigvee_{i=1}^{n} a_{2i}(\alpha)\right]$$
$$= [a_1^*(\alpha), a_2^*(\alpha)]$$

(8.16) $$A_*(\alpha) = \left(\bigwedge_{i=1}^{n}\right) A_i(\alpha) = \left[\bigwedge_{i=1}^{n} a_{1i}(\alpha), \bigwedge_{i=1}^{n} a_{2i}(\alpha)\right]$$
$$= [a_{*1}(\alpha), a_{*2}(\alpha)]$$

(8.17) $$d(A_i(\alpha), A^*(\alpha)) = \int_{\alpha=0}^{1} |a_{1i}(\alpha) - a_1^*(\alpha)|\, d\alpha + \int_{\alpha=0}^{1} |a_{2i}(\alpha) - a_2^*(\alpha)|\, d\alpha$$
$i = 1, 2, \ldots, n$

$$(8.18) \qquad d(A_i(\alpha), A_*(\alpha)) = \int_{\alpha=0}^{1} |a_{1i}(\alpha) - a_{*1}(\alpha)|\, d\alpha$$

$$+ \int_{\alpha=0}^{1} |a_{2i}(\alpha) - a_{*2}(\alpha)|\, d\alpha$$

$$i = 1, 2, ..., n$$

Cada una de las expresiones (8.17) y (8.18) proporcionan un orden total para lass A_i. Se deben aplicar, pues, las fórmulas (8.15) y (8.18) a todas las Q_i tales que:

$$Q_i(\alpha) = \left[\frac{N_{1i}(\alpha)}{D_{2i}(\alpha)}, \frac{N_{2i}(\alpha)}{D_{1i}(\alpha)} \right]$$

Veamos un ejemplo en el que las $N(\alpha)$ y $D(\alpha)$ vienen dadas por los niveles α discretos: $\alpha = 0, 0.1, 0.2, ..., 0.9, 1$.

Consideremos los tres cocientes $\underset{\sim}{Q}_1$, $\underset{\sim}{Q}_2$ y $\underset{\sim}{Q}_3$

$$\underset{\sim}{Q}_1 = \underset{\sim}{N}_1 (:) \underset{\sim}{D}_1, \underset{\sim}{Q}_2 = \underset{\sim}{N}_2(:)\underset{\sim}{D}_2, \underset{\sim}{Q}_3 = \underset{\sim}{N}_3(:)\underset{\sim}{D}_3$$

dados por los cuadros siguientes, para hallar el cociente Q* más cercano al límite superior:

$$\underset{\sim}{Q}_1 \text{ (v) } \underset{\sim}{Q}_2 \text{ (v) } \underset{\sim}{Q}_3$$

α	$N_1(\alpha)$	$D_1(\alpha)$	$Q_1(\alpha) = N_1(\alpha)(:)D_1(\alpha)$
0	[7 , 11]	[4 , 13]	[0.538 , 2.750]
0.1	[7 , 11]	[4 , 12]	[0.583 , 2.750]
0.2	[7 , 10]	[4 , 12]	[0.583 , 2.500]
0.3	[7 , 10]	[5 , 12]	[0.583 , 2.000]
0.4	[8 , 10]	[5 , 11]	[0.727 , 2.000]
0.5	[8 , 10]	[5 , 11]	[0.727 , 2.000]
0.6	[8 , 10]	[5 , 10]	[0.800 , 2.000]
0.7	[9 , 10]	[6 , 10]	[0.900 , 1.666]
0.8	[9 , 10]	[8 , 9]	[1.000 , 1.250]
0.9	9	[8 , 9]	[1.000 , 1.125]
1	9	8	1.125

α	$N_2(\alpha)$	$D_2(\alpha)$	$Q_2(\alpha) = N_2(\alpha)(:)D_2(\alpha)$
0	[9 , 18]	[4 , 13]	[0.692 , 4.500]
0.1	[9 , 17]	[4 , 13]	[0.692 , 4.250]
0.2	[9 , 17]	[4 , 12]	[0.750 , 4.250]
0.3	[10 , 16]	[5 , 11]	[0.909 , 3.200]
0.4	[10 , 15]	[5 , 11]	[0.909 , 3.000]
0.5	[10 , 15]	[6 , 10]	[1.000 , 2.500]
0.6	[10 , 14]	[6 , 10]	[1.000 , 2.333]
0.7	[10 , 13]	[6 , 10]	[1.000 , 2.166]
0.8	[11 , 13]	[7 , 9]	[1.222 , 1.857]
0.9	[11 , 12]	[8 , 9]	[1.222 , 1.500]
1	12	8	1.500

α	$N_3(\alpha)$	$D_3(\alpha)$	$Q_3(\alpha) = N_3(\alpha)(:)D_3(\alpha)$
0	[1 , 20]	[3 , 8]	[0.125 , 6.666]
0.1	[2 , 19]	[3 , 8]	[0.250 , 6.333]
0.2	[3 , 17]	[4 , 8]	[0.375 , 4.250]
0.3	[4 , 15]	[4 , 8]	[0.500 , 3.750]
0.4	[6 , 13]	[4 , 8]	[0.750 , 3.250]
0.5	[7 , 12]	[5 , 7]	[1.000 , 2.400]
0.6	[8 , 12]	[5 , 7]	[1.142 , 2.400]
0.7	[8 , 12]	[5 , 7]	[1.142 , 2.400]
0.8	[10 , 12]	[6 , 7]	[1.428 , 2.000]
0.9	11	[6 , 7]	[1.571 , 1.833]
1	11	7	1.571

α	$\bigvee_{i=1}^{3} Q_i(\alpha)$
0	[0.692 , 6.666]
0.1	[0.692 , 6.333]
0.2	[0.750 , 4.250]
0.3	[0.909 , 3.750]
0.4	[0.909 , 3.250]
0.5	[1.000 , 2.500]
0.6	[1.142 , 2.400]
0.7	[1.142 , 2.400]
0.8	[1.428 , 2.000]
0.9	[1.571 , 1.833]
1	1.571

α	$d(Q_1(\alpha) \quad , \quad \bigvee Q_i(\alpha))$	
0	$\lvert 0.538 - 0.692\rvert + \lvert 2.750 - 6.666\rvert = 0.154 + 3.916$	4.070
0.1	$\lvert 0.583 - 0.692\rvert + \lvert 2.750 - 6.333\rvert = 0.109 + 3.583$	3.692
0.2	$\lvert 0.583 - 0.750\rvert + \lvert 2.500 - 4.250\rvert = 0.167 + 1.750$	1.917
0.3	$\lvert 0.583 - 0.909\rvert + \lvert 2.000 - 3.750\rvert = 0.326 + 1.750$	2.076
0.4	$\lvert 0.727 - 0.909\rvert + \lvert 2.000 - 3.250\rvert = 0.182 + 1.250$	1.432
0.5	$\lvert 0.727 - 1.000\rvert + \lvert 2.000 - 2.500\rvert = 0.273 + 0.500$	0.773
0.6	$\lvert 0.800 - 1.142\rvert + \lvert 2.000 - 2.400\rvert = 0.342 + 0.400$	0.742
0.7	$\lvert 0.900 - 1.142\rvert + \lvert 1.666 - 2.400\rvert = 0.242 + 0.734$	0.976
0.8	$\lvert 1.000 - 1.428\rvert + \lvert 1.250 - 2.000\rvert = 0.428 + 0.750$	1.178
0.9	$\lvert 1.000 - 1.571\rvert + \lvert 1.125 - 1.833\rvert = 0.571 + 0.708$	1.279
1	$\lvert 1.125 - 1.571\rvert + \lvert 1.125 - 1.571\rvert = 0.446 + 0.446$	0.892
	TOTAL	19.027

α	$d(Q_2(\alpha) \quad , \quad \vee Q_i(\alpha))$	
0	$\lvert 0.692 - 0.692\rvert + \lvert 4.500 - 6.666\rvert = 0 + 2.166$	2.166
0.1	$\lvert 0.692 - 0.692\rvert + \lvert 4.250 - 6.333\rvert = 0 + 2.083$	2.083
0.2	$\lvert 0.750 - 0.750\rvert + \lvert 4.250 - 4.250\rvert = 0 + 0$	0.000
0.3	$\lvert 0.909 - 0.909\rvert + \lvert 3.200 - 3.750\rvert = 0 + 0.550$	0.550
0.4	$\lvert 0.909 - 0.909\rvert + \lvert 3.000 - 3.250\rvert = 0 + 0.250$	0.250
0.5	$\lvert 1.000 - 1.000\rvert + \lvert 2.500 - 2.500\rvert = 0 + 0$	0.000
0.6	$\lvert 1.000 - 1.142\rvert + \lvert 2.333 - 2.400\rvert = 0.142 + 0.067$	0.209
0.7	$\lvert 1.000 - 1.142\rvert + \lvert 2.166 - 2.400\rvert = 0.142 + 0.234$	0.376
0.8	$\lvert 1.222 - 1.428\rvert + \lvert 1.857 - 2.000\rvert = 0.206 + 0.143$	0.349
0.9	$\lvert 1.222 - 1.571\rvert + \lvert 1.500 - 1.833\rvert = 0.349 + 0.333$	0.682
1	$\lvert 1.500 - 1.571\rvert + \lvert 1.500 - 1.571\rvert = 0.071 + 0.071$	0.142
	TOTAL	6.807

α	$d(Q_3(\alpha) \quad , \quad \vee Q_i(\alpha))$	
0	$\lvert 0.125 - 0.692\rvert + \lvert 6.666 - 6.666\rvert = 0.567 + 0$	0.567
0.1	$\lvert 0.250 - 0.692\rvert + \lvert 6.333 - 6.333\rvert = 0.442 + 0$	0.442
0.2	$\lvert 0.375 - 0.750\rvert + \lvert 4.250 - 4.250\rvert = 0.375 + 0$	0.375
0.3	$\lvert 0.500 - 0.909\rvert + \lvert 3.750 - 3.750\rvert = 0.409 + 0$	0.409
0.4	$\lvert 0.750 - 0.909\rvert + \lvert 3.250 - 3.250\rvert = 0.159 + 0$	0.159
0.5	$\lvert 1.000 - 1.000\rvert + \lvert 2.400 - 2.500\rvert = 0 + 0.100$	0.100
0.6	$\lvert 1.142 - 1.142\rvert + \lvert 2.400 - 2.400\rvert = 0 + 0$	0.000
0.7	$\lvert 1.142 - 1.142\rvert + \lvert 2.400 - 2.400\rvert = 0 + 0$	0.000
0.8	$\lvert 1.428 - 1.428\rvert + \lvert 2.000 - 2.000\rvert = 0 + 0$	0.000
0.9	$\lvert 1.571 - 1.571\rvert + \lvert 1.833 - 1.833\rvert = 0 + 0$	0.000
1	$\lvert 1.571 - 1.571\rvert + \lvert 1.571 - 1.571\rvert = 0 + 0$	0.000
	TOTAL	2.052

El orden total de las distancias proporciona:

$$2.052 \succ 6.807 \succ 19.027$$

Se tendrá, pues, como orden total de preferencia:

$$\underset{\sim}{Q}_3 > \underset{\sim}{Q}_2 > \underset{\sim}{Q}_1$$

Cuanto se acaba de exponer, a través de un ejemplo sencillo para ser calculado manualmente, se puede realizar a través de cocientes borrosos en número sensiblemente mayor con la misma metodología, con la única variante de utilizar un microordenador. Se puede también considerar el supuesto en que los números borrosos $\underset{\sim}{N}$ y $\underset{\sim}{D}$ son funciones continuas de una misma variable x: entonces se tomarán las funciones N (x) y D (x) con un paso de cálculo suficiente para poner de manifiesto la sensibilidad del modelo.

LA DISTRIBUCION DE PRODUCTOS

CAPITULO IX

LA DISTRIBUCION DE PRODUCTOS

La distribución de productos y el problema del transporte

Los estudios decisionales de la empresa parten, generalmente, de un cierto conocimiento de la estructura del mercado en el cual interviene. Es más, desde un punto de vista lógico, los procesos de inversión, producción, etc., se hallan vinculados con las posibilidades de venta de los productos. Esta constituye una de las razones del desarrollo que ha podido observarse en las técnicas utilizadas para el tratamiento de los problemas comerciales. El Marketing concebido unas veces como un órgano de la empresa inserto en su estructura global, y como una función ligada al campo de la gestión en otras, ha jugado un importante papel en este sentido.

Por otra parte, una buena actuación dentro de la actividad económica de la empresa precisa del conocimiento de la estrecha relación que existe entre las diversas funciones que tienen lugar en su seno. Así se explica que los procesos de comercialización adquieran una importancia especial dado que permiten materializar los programas relativos a todos los ámbitos de la empresa, a través de un elemento fundamental cual es la estimación de las ventas.

Desde este punto de vista, constituyen un dato básico las informaciones relativas a la evolución de las necesidades del mercado, relacionadas con elementos tales como los gustos de los consumidores, la situación por la que atraviesan las empresas de la concurrencia, etc., con objeto de definir los objetivos que se pretenden obtener, así como la política a seguir, tanto en el campo de la distribución y ventas como en el publicitario. Para el tratamiento de estos problemas, los estudios económicos relativos a la gestión comercial de la empresa han dirigido su mirada, frecuentemente, a los logros obtenidos dentro del campo de la investigación operativa, por las posibilidades que ofrece para el tratamiento de aspectos tan variados y, hasta cierto punto, dispares, como son: estudios de motivación, análisis estructural de los consumidores, estudio de la estructura y evolución de la demanda y estudio de los procesos de distribución, entre otros.

En este contexto las obras clásicas relativas a la materia destacan la importancia del análisis de la conducta del consumidor. Desde un punto de vista teórico, los estudiosos de la economía han investigado tanto las necesidades de los consumidores como el proceso que éste sigue para conseguir satisfacerlas.

En el libro III de los Principios de MARSHALL, su Teoría Pura de la Demanda del Consumidor, ya aparece una formulación, cuyo esquema general de partida es el siguiente: un consumidor que posee una determinada renta va al mercado de bienes de consumo. La cuestión que se plantea es, dados unos precios, cómo distribuirá su renta entre las distintas compras para que su satisfacción alcance un máximo. Desde esta perspectiva se puede observar que el análisis económico prescinde de los motivos que impulsan al consumidor y supone que éste se mueve para obtener su mayor bienestar a través de la satisfacción de sus necesidades, entendidas como la sensación de una carencia unida al deseo de hacerla desaparecer.

Sin embargo, la realidad ha demostrado que los mecanismos clásicos han resultado insuficientes para la gestión de la empresa si ésta pretende descubrir la actuación del consumidor. Ha sido necesario llegar a una mejor conexión entre los procesos formales y la actuación real.

En la actualidad las empresas que concurren en el mercado intentan modificar la imagen que se tiene del producto con objeto de cambiar la actitud de los consumidores en vistas a una concreta acción: la compra de los productos propios.

Quizá este esquema pueda aparecer como excesivamente simple, entre otras causas por cuanto se refiere a las relaciones entre un consumidor individualizado y un producto concreto. Sin embargo, la generalización, en la parte que corresponde al producto, es inmediata y el aspecto de la consideración del grupo de consumidores afecta de manera más precisa a los estudios psico-sociologicos, en cuanto el hombre actúa inmerso en un grupo social.

Entre las diversas posibilidades que la empresa tiene para «actuar» sobre el consumidor han sido consideradas, tradicionalmente, como más importantes las siguientes:

a) Aquellas que implican un aumento de los gastos. Pueden destacarse la publicidad, la ampliación de la red de distribución y la promoción en los puntos de venta.
b) Las que comportan una reducción de los ingresos. Se suelen citar la reducción del precio de venta al público, la creación de «rappels» y el aumento del descuento a los intermediarios.

El hecho de que la cantidad demandada, la vendida por parte de la empresa, pueda resultar influenciada por diversos elementos hace que, incluso como esquema, la función de demanda de la teoría marginalista aparezca como totalmente insuficiente. Se supone que existen unos elementos de tipo macro y otros de tipo microeconómico cuya variación motiva también una modificación en las cantidades demandadas. Se pueden citar: la población capaz de convertirse en consumidores, el índice del coste de la vida, la renta nacional, la publicidad del propio producto, la calidad de la publicidad, la red de distribución y puntos de venta, el precio del producto, etc.

Es evidente que esta actuación de la empresa para modificar su situación dentro del mercado implica, en cada caso concreto, la utilización de resortes distintos. Se actúa algunas veces sobre los precios, otras sobre la publicidad, sobre el producto, *sobre la red de distribución*, los puntos de ventas, concurrencia, representantes, etc.

Si una empresa realiza su actividad productiva en vistas a vender sus productos en las mejores condiciones posibles, una de sus posibles acciones consistirá en estructurar una red de distribución, con objeto de trasladar los productos desde los centros productivos hasta los clientes repartidos por todo el territorio que cubre su actividad comercial.

Normalmente, entre estos dos puntos extremos existen unos almacenes, cuya finalidad consiste en realizar los suministros que las fábricas no pueden asegurar en las debidas condiciones. Estos almacenes pueden alcanzar un cierto grado de rentabilidad cuando su nivel de actividad es suficiente para cubrir sus gastos de estructura. Y ello es así, por cuanto el traslado de los productos desde las fábricas a los almacenes se realiza normalmente por mediación de transportes masivos, mientras que los movimientos de materiales hasta los puntos de venta al detalle sólo puede hacerse, normalmente, a través de pequeños lotes. De ahí surge la necesidad de determinar la red de almacenes más idónea desde el punto de vista económico. Pero la implantación y mantenimiento de un almacen que sirva de depósito para mercancías comporta unas necesidades financieras elevadas para su construcción (inmovilización) y para su funcionamiento. Sólo el volumen de ventas previsto para el futuro permitirá tomar la decisión de su construcción o mantenimiento.

Normalmente estos almacenes constituyen una reagrupación de los puntos de venta de una zona geográfica, localizados de tal manera que permitan un cierto equilibrio entre los costes de transporte desde los centros productivos a los almacenes y de éstos a los distintos puntos de venta.

Cuando se intenta cuantificar el problema de la distribución de productos desde los centros productivos hasta los almacenes o en su caso hasta los puntos de venta se plantean dificultades, tanto desde el punto de vista teórico como técnico, debido al elevado número de variables que deben ser consideradas.

En la práctica, las soluciones adoptadas se reducen a decisiones guiadas por el sentido común o bien tratando el problema matemáticamente por partes. En este orden de ideas aparece, en primer lugar, la necesidad de resolver cual debe ser la estructura de la red de distribución, que tiene como elementos determinantes: el número, la capacidad y la localización de los depósitos intermedios entre los centros de fabricación y los puntos de venta.

Desde un punto de vista formal, y dado que la mayor parte de estos problemas deben expresarse en números enteros, los valores de algunas de las variables que intervienen deberán ser enteras, lo que elimina generalmente la posibilidad de plantear esquemas con base en la continuidad de las magnitudes. De ahí la utilización, cada vez más amplia, de las técnicas de programación lineal, para las que además de la posibilidad de soluciones teóricas adecuadas se puede conseguir su aplicación a la realidad, gracias al avance que han representado los microordenadores. Sin embargo, la diversidad de los problemas que se plantean en el campo de la distribución ha hecho difícil encontrar un modelo lo suficientemente general que abarcara el deseado grado de amplitud. La separación de los planteamientos se ha convertido en un hábito del tratamiento de estos problemas.

El esquema se plantea así, a grandes rasgos, en la elección del número, la localización y la capacidad de los almacenes que se tienen que implantar así como la cantidad de producto o productos que es necesario trasladar desde cada fábrica a cada almacen y de cada almacen a cada punto de venta.

La solución óptima vendrá dada por aquellas cantidades asignadas a cada variable que permitan obtener un mínimo en los costes totales, cuyos componentes tienen una significación muy diversa. En efecto, se puede señalar la existencia de costes derivados de la expedición de los productos en la fábrica, costes de transporte desde los centros productivos a los almacenes, y de éstos a los puntos de venta, costes de recepción, de almacenamiento y de reexpedición en los almacenes, etc.; cada uno de los cuales tiene una evolución diferenciada y sigue unas leyes distintas.

Cuando en una empresa, con uno o varios centros productivos y uno o varios puntos de venta se establece o reestructura un sistema de distribución de productos, la tarea no termina con la determinación de los puntos en que deben ser localizados los depósitos de mercancías sino que se impone la necesidad de estimar el flujo previsto entre las fábricas y almacenes calculados en unidades homogéneas así como su repartición en número de expediciones. Los datos básicos se conocen anualmente con la elaboración de los presupuestos generales de la empresa, en los que figuran las cifras de facturación, las de producción, etc., así como los gastos derivados de estas actividades. Este problema puede abordarse desde perspectivas distintas, una de ellas, utilizada muy comúnmente, tiene su base en la programación lineal y se conoce por el nombre de método stepping-stone.

La traslación de productos por el método stepping-stone

Vamos a examinar el método de stepping-stone a través de un ejemplo en el que los costes se suponen conocidos con certeza. Se podrá observar que la generalización para el supuesto de costes unitarios borrosos no plantea problemas demasiado difíciles.

Se supone la existencia de tres fábricas A, B, C, y se dispone de ciertas cantidades de un producto. Estas cantidades son respectivamente, 100, 120 y 120, que deben ser enviadas a 5 almacenes 1, 2, 3, 4 y 5 los cuales precisan recibir, respectivamente, 40, 50,70, 90 y 90. La figura 9.1 pone de manifiesto el esquema del transporte a realizar.

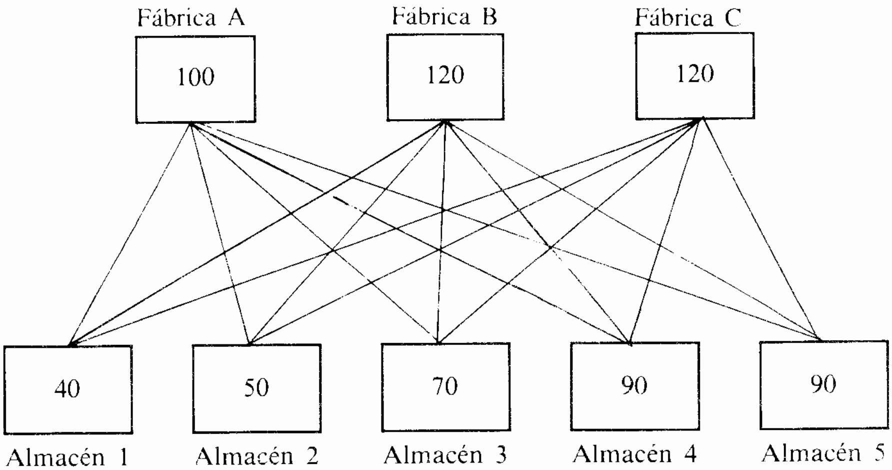


Figura 9.1

El coste de transporte de una unidad de producto viene dado por el cuadro (9.1). Por ejemplo, el coste de transporte de la fábrica B al almacén 4 es 5 unidades monetarias. Se trata de establecer un plan de transporte para el que el coste total sea mínimo.

(9.1)

	1	2	3	4	5	
A	4	1	2	6	9	100
B	6	4	3	5	7	120
C	5	2	6	4	8	120
	40	50	70	90	90	

Este problema se plantea como un programa lineal que contiene 15 variables y 7 ecuaciones independientes. Las variables se numerarán de tal manera que correspondan a las filas y columnas de (9.1).

La función económica es:

$$\text{Min } Z = 4x_{11} + x_{12} + 2x_{13} + 6x_{14} + 9x_{15} + 6x_{21} + 4x_{22} + \\ + 3x_{23} + 5x_{24} + 7x_{25} + 5x_{31} + 2x_{32} + \\ + 6x_{33} + 4x_{34} + 8x_{35}. \tag{9.2}$$

Las limitaciones son:

$$
\begin{aligned}
&x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = 100\\
&x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} = 120\\
&x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} = 120\\
(9.3)\qquad &x_{11} + x_{21} + x_{31} = 40\\
&x_{12} + x_{22} + x_{32} = 50\\
&x_{13} + x_{23} + x_{33} = 70\\
&x_{14} + x_{24} + x_{34} = 90\\
&x_{15} + x_{25} + x_{35} = 90\\
&x_{ij} \geq 0,\ j = 1, 2, 3, 4, 5;\ i = 1, 2, 3
\end{aligned}
$$

Pero las 8 condiciones no son independientes, ya que:

(9.4) $$100 + 120 + 120 = 40 + 50 + 70 + 90 + 90 = 340$$

Existen pues 7 condiciones independientes en lugar de 8, por lo que una solución básica contendrá 15 - 7 = 8 variables nulas.

Este problema se puede calcular a través de los métodos clásicos de la programación lineal, por ejemplo con el método del simplex de DANTZIG y todas sus variantes, pero dada la estructura de este tipo de problema, preferimos utilizar un método específico, muy simple en su principio y aplicación, ideado también por DANTZIG, conocido por el nombre de «stepping-stone method» que le dió su autor americano.

Construyamos una solución básica utilizando una regla simple llamada «regla de la esquina noroeste». Se partirá de la casilla noroeste (parte superior izquierda) del cuadro de afectaciones (9.5) construido de la siguiente manera: en la intersección de la primera fila y primera columna se colocará el más pequeño de los números que representan la disponibilidad 100 y la demanda 40. Se retiene, pues, 40. Se completará la primera fila (la primera columna en otro ejemplo) hasta la saturación de la disponibilidad (o de la demanda en otro ejemplo).

(9.5)

	1	2	3	4	5	
A	40	50	10			100
B			60	60		120
C				30	90	120
	40	50	70	90	90	

Esto nos conduce a tomar:

(9.6) $$x_{11} = 40,\ x_{12} = 50,\ x_{13} = 10,\ x_{14} = x_{15} = 0$$

Procedemos de inmediato a completar la demanda en la 3[era] columna y luego la disponibilidad en la 2[a] fila; así:

(9.7) $$x_{21} = x_{22} = 0,\ x_{23} = 60,\ x_{24} = 60,\ x_{25} = 0$$

Completemos, ahora, la demanda en la 4[a] columna, y luego la disponibilidad en la 3[a] fila; así:

(9.8) $$x_{31} = x_{32} = x_{33} = 0,\ x_{34} = 30,\ x_{35} = 90$$

Estos resultados, presentados en (9.5) dan lugar a un coste total:

(9.9) $$\begin{aligned} Z = {} & (40).(4) + (50).(1) + (10).(2) + (60).(3) + \\ & + (60).(5) + (30).(4) + (90).(8) = 1550 \end{aligned}$$

A partir de esta solución vamos a buscar otra nueva que implique un coste global menos elevado pero que todavía contenga por lo menos 8 variables nulas. Para conseguir una mejor solución, supongamos que se afecta una unidad en la casilla 1, 4, es decir, la primera fila y cuarta columna del cuadro (9.10); para ello es necesario retirar una de la casilla 1, 3 y añadir una en la casilla 2, 3 y finalmente retirar una de la casilla 2, 4. Este cambio circular de una unidad hace variar el coste total en una cuantía δ_{ij} (1) (casilla 1,4) que puede ser obtenida fácilmente consultando el cuadro de costes unitarios (9.1).

(9.10)

40	50	10 / -1	+1	
		60 / +1	60 / -1	
			30	90

(9.11)

40	50	10 / -1		+1
		60 / +1	60 / -1	
			30 / +1	90 / -1

(1) Las cantidades δ_{ij} representan las desviaciones unitarias cuando en el simplex se pasa de una base a otra, y constituyen los costes marginales unitarios.

(9.12)

40 −1	50	10 +1		
+1		60 −1	60	
			30	90

(9.13)

40	50 −1	10 +1		
	+1	60 −1	60	
			30	90

(9.14)

40	50	10		
		60	60 −1	+1
			30 +1	90 −1

(9.15)

40 −1	50	10 +1		
		60 −1	60 +1	
+1			30 −1	90

(9.16)

40	50 −1	10 +1		
		60 −1	60 +1	
	+1		30 −1	90

(9.17)

40	50	10		
		60 −1	60 +1	
		+1	30 −1	90

(9.18) $$\delta_{14} = 6 - 2 + 3 - 5 = 2$$

De la misma manera se obtienen los cambios reflejados en los cuadros:

(9.19) Cuadro (9.11): $\delta_{15} = 9—2 + 3—5 + 4—8 = 1$

(9.20) Cuadro (9.12): $\delta_{21} = 6—3 + 2—4 = 1$

(9.21) Cuadro (9.13): $\delta_{22} = 4—3 + 2—1 = 2$

(9.22) Cuadro (9.14): $\delta_{25} = 7—5 + 4—8 = —2$

(9.23) Cuadro (9.15): $\delta_{31} = 5—4 + 5—3 + 2—4 = 1$

(9.24) Cuadro (9.16): $\delta_{32} = 2—4 + 5—3 + 2—1 = 1$

(9.25) Cuadro (9.17): $\delta_{33} = 6—4 + 5—3 = 4$

El nombre de stepping-stone proviene de la disposición del camino que se sigue para efectuar los cálculos siguiendo las casillas de los cuadros.

Veamos ahora qué cambio produce una disminución del coste. Para ello es necesario que δ sea negativo, lo que suceda para $\delta_{25} = -2$. Si existieran varios, se elegiría el (o los) más negativos.

Pero en lugar de desplazar una sola unidad, desplacemos el mayor número posible de unidades. Para ello consideremos en la escalera la cantidad más pequeña que corresponda a una casilla en que se encuentra una cantidad -1. El cuadro (9.14) pone de manifiesto que se trata de la casilla 2,4 y para restablecer las disponibilidades de las demandas que se han impuesto, se inscribirá 90 en lugar de 30 en la casilla 3,4 y 30 en lugar de 90 en la casilla 3,5, lo que permite establecer el cuadro (9.26).

(9.26)

	1	2	3	4	5	
A	40	50	10			100
B			60		60	120
C				90	30	120
	40	50	70	90	90	

El correspondiente coste total es:

(9.27)
$$Z = (40) \,.\, (4) + (50) \,.\, (1) + (10) \,.\, (2) + (60) \,.\, (3) + (60) \,.\, (7) + \\ + (90) \,.\, (4) + (30) \,.\, (8) = 1430$$

Resultado previsible ya que si el cambio de una unidad reduce el coste total en 2, la variación de 60 unidades debe disminuirlo en 120.

Vamos a repetir en la nueva solución (9.26) los anteriores cálculos. Examinando el cuadro (9.26) se obtiene:

(9.28)

40	50	10 —1	+1	
		60 +1		60 —1
			90 —1	30 +1

(9.29)

40	50	10 —1		+1
		60 +1		60 —1
			90	30

(9.30)

40 —1	50	10 +1		
+1		60 —1		60
			90	30

(9.31)

40	50 —1	10 +1		
	+1	60 —1		60
			90	30

(9.32)

40	50	10		
		60	+1	60 —1
			90 —1	30 +1

(9.33)

40 —1	50	10 +1		
		60 —1		60 +1
+1			90	30 —1

(9.34)

40	50 —1	10 +1		
		60 —1		60 +1
	+1		90	30 —1

(9.35)

40	50	10		
		60 -1		60 $+1$
		$+1$	90	30 -1

(9.36) Cuadro (9.28): $\delta_{14} = 6—2 + 3—7 + 8—4 = 4$

(9.37) Cuadro (9.29): $\delta_{15} = 9—2 + 3—7 = 3$

(9.38) Cuadro (9.30): $\delta_{21} = 6—3 + 2—4 = 1$

(9.39) Cuadro (9.31): $\delta_{22} = 4—3 + 2—1 = 2$

(9.40) Cuadro (9.32): $\delta_{24} = 5—7 + 8—4 = 2$

(9.41) Cuadro (9.33): $\delta_{31} = 5—8 + 7—3 + 2—4 = —1^*$

(9.42) Cuadro (9.34): $\delta_{32} = 2—8 + 7—3 + 2—1 = —1^*$

(9.43) Cuadro (9.35): $\delta_{33} = 6—8 + 7—3 = 2$

La elección puede recaer en δ_{31} y en δ_{32} cuyo total ha sido -1. Elijamos, por ejemplo, δ_{31}. Tomemos un número de unidades igual al número más pequeño que figura en la casillas donde hay la cantidad -1 (sin ninguna relación con los resultados (9.41) y (9.42)). Se cambiarán 30 unidades a partir de la casilla 3,1, lo que proporciona la siguiente solución:

(9.44)

	1	2	3	4	5	
A	10	50	40			100
B			30		90	120
C	30			90		120
	40	50	70	90	90	

para la cual se tiene:

(9.45) $Z = (10) \cdot (4) + (50) \cdot (1) + (40) \cdot (2) + (30) \cdot (3) + (90) \cdot (7) + (30) \cdot (5) +$
$+ (90) \cdot (4) = 1400$

resultado previsible habida cuenta que el intercambio hace que disminuya $30 \times 1 = 30$.

Repitamos de nuevo la operación stepping-stone. Se obtiene:

(9.46) $$\delta_{14} = 6-4+5-4 = 3$$

(9.47) $$\delta_{15} = 9-2+3-7 = 3$$

(9.48) $$\delta_{21} = 6-3+2-4 = 1$$

(9.49) $$\delta_{22} = 4-3+2-1 = 2$$

(9.50) $$\delta_{24} = 5-3+2-4+5-4 = 1$$

(9.51) $$\delta_{32} = 2-5+4-1 = 0$$

(9.52) $$\delta_{33} = 6-5+4-2 = 3$$

(9.53) $$\delta_{35} = 8-5+4-2+3-7 = 1$$

No existe intercambio alguno que permita reducir el coste, dado que todas las δ son positivas o nula, lo que lleva a la conclusión de que es imposible conseguir una mejor solución. En contrapartida existe una solución equivalente ya que una de las δ es nula. Un intercambio con δ_{32} (véase (9.42)) proporciona el cuadro siguiente:

(9.54)

	1	2	3	4	5	
A	40	20	40			100
B			30		90	120
C		30		90		120
	40	50	70	90	90	

Esta solución proporciona el mismo valor de Z:

$$Z = (40)\cdot(4) + (20)\cdot(1) + (40)\cdot(2) + (30)\cdot(3) + (90)\cdot(7) + (30)\cdot(2) + (90)\cdot(4) = 1400$$

En realidad, en este caso existen una infinidad de soluciones que corresponden al óptimo 1400, afectando la casilla 3,2 de cantidades inferiores a 30. Sin embargo, estas soluciones no son soluciones básicas en el sentido que se da a este término en el método del simplex.

El método stepping-stone en el supuesto de costes borrosos

La anterior descripción del método stepping-stone permite pasar al supuesto en que los costes son borrosos. Dado que resulta más cómodo para la realización de los correspondientes cálculos y como consecuencia de que son los datos imprecisos más fáciles de obtener, vamos a utilizar los números borrosos triangulares (N. B. T.). La figura 9.2 representa un N.B.T. a través de tres números característicos:

(9.56) $$\underset{\sim}{A} = (a_1\ ,\ a_2\ ,\ a_3)$$

en donde:

a_1 es el valor más pequeño
a_3 es el valor más grande
a_2 es el valor de máxima presunción

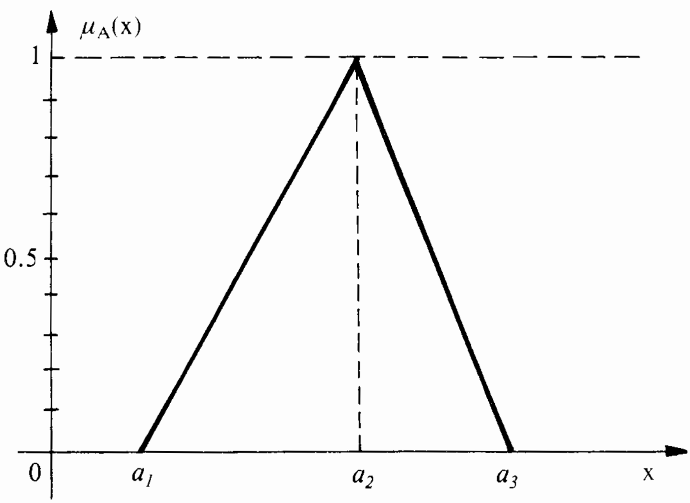


Figura 9. 2

Para aplicar el método stepping-stone al supuesto en que los costes son N.B.T., será necesario conocer tres operaciones: suma, diferencia y comparación. Vamos a recordarlas:

(9.57) $$\underset{\sim}{A}(+)\underset{\sim}{B} = (a_1,\ a_2,\ a_3)\ (+)\ (b_1,\ b_2,\ b_3) = (a_1+b_1,\ a_2+b_2,\ a_3+b_3)$$

(9.58) $$\underset{\sim}{A}(-)\underset{\sim}{B} = (a_1,\ a_2,\ a_3)\ (-)\ (b_1,\ b_2,\ b_3) = (a_1-b_3,\ a_2-b_2,\ a_3-b_1)$$

Conviene también recordar que es indiferente el orden en que se suman o restan.

(9.59) $$((a_1, a_2, a_3)\ (+)\ (b_1, b_2, b_3))\ (—)\ (c_1, c_2, c_3) =$$
$$= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)\ (—)\ (c_1, c_2, c_3) =$$
$$= (a_1 + b_1 — c_3, a_2 + b_2 — c_2, a_3 + b_3 — c_1)$$

(9.60) $$(a_1, a_2, a_3)\ (+)\ ((b_1, b_2, b_3)\ (—)\ (c_1, c_2, c_3)) =$$
$$= (a_1 , a_2, a_3)\ (+)\ (b_1 — c_3, b_2 — c_2, b_3 — c_1) =$$
$$= (a_1 + b_1 — c_3, a_2 + b_2 — c_2, a_3 + b_3 — c_1)$$

Pasamos a la comparación de dos B.N.T., la cual puede realizarse de diversas maneras. La más corriente y la que admite una mejor justificación es la que proviene del cálculo de la suma de distancias a la izquierda y a la derecha (distancia de Hamming o cualquier otra) en relación a un eje arbitrario vertical (por ejemplo el de abscisa 0 (1), en este caso todo se halla en relación con el número cero no borroso).

Con los N.B.T. la desviación total calculada viene dada por la fórmula simple:

(9.61) $$\xi\,(\underset{\sim}{A}, 0) = \frac{a_1 + 2\,a_2 + a_3}{2}\,; \qquad a_1, a_2, a_3 \in R^+$$

fórmula muy sencilla que permite clasificar dos números borrosos, adaptable a R con las correspondientes modificaciones:

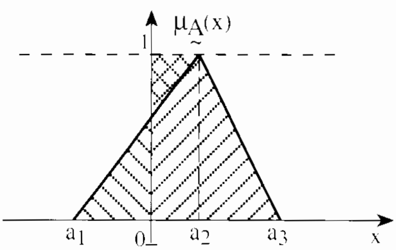


Figura 9.3

(1) Teniendo en cuenta la posición (negativa o positiva) de los valores (a_1, a_2, a_3).

Hay que recordar que dos números borrosos $\underset{\sim}{A}$ y $\underset{\sim}{B}$ pueden tener la misma desviación sin por ello ser iguales. Así (2, 3, 7) y (1, 2, 10) tienen la misma desviación por lo que hay que emplear un segundo criterio, por ejemplo el del valor correspondiente al máximo de presunción. Y si tiene el mismo valor en el máximo de presunción hay que buscar un tercer criterio (el valor alto o el valor bajo, según la naturaleza del problema y la concepción de la incertidumbre). Esto constituye la esencia misma del tratamiento de la incertidumbre. Hay que tener en cuenta, pues, estos criterios para cualquier comparación que resulte necesaria en el caso de falta de dominio.

Con estos antecedentes podemos abordar la utilización del método stepping-stone en el supuesto de costes borrosos que adquieren la forma de N.B.T. Vamos a seguir con el mismo problema planteado en (9.1) pero con costes en N.B.T. Vamos a elegirlos de tal manera que los valores del máximo de presunción sean los dados en (9.1).

(9.62)

	1	2	3	4	5	
A	(3,4,6)	(1,1,3)	(1,2,4)	(3,6,6)	(8,9,12)	100
B	(5,6,7)	(2,4,7)	(2,3,4)	(2,5,6)	(6,7,7)	120
C	(2,5,6)	(2,2,4)	(6,6,6)	(3,4,8)	(5,8,9)	120
	40	50	70	90	90	

Se parte con la solución de la casilla noroeste (9.5):

(9.63)

	1	2	3	4	5	
A	40	50	10			100
B			60	60		120
C				30	90	120
	40	50	70	90	90	

Esta solución proporciona:

$$
\begin{aligned}
(9.64) \quad \underset{\sim}{Z} &= (40)\ (3,4,6)\ (+)\ (50)\ (1,1,3)\ (+)\ (10)\ (1,2,4) \\
&\quad (+)\ (60)\ (2,3,4)\ (+)\ (60)\ (2,5,6)\ (+)\ (30)\ (3,4,8) \\
&\quad (+)\ (90)\ (5,8,9) \\
&= (120,\ 160,\ 240)\ (+)\ (50,\ 50,\ 150)\ (+)\ (10,\ 20,\ 40) \\
&\quad (+)\ (120,\ 180,\ 240)\ (+)\ (120,\ 300,\ 360)\ (+)\ (90,\ 120,\ 240) \\
&\quad (+)\ (450,\ 720,\ 810) \\
&= (960,\ 1550,\ 2080), \qquad \xi_Z = 3.070
\end{aligned}
$$

Vamos a utilizar ahora una variante del método stepping-stone para optimizar ξ_Z. En lugar de calcular la (o las) más pequeñas δ_{ij} negativa, lo que puede constituir un criterio de selección que presenta dispersiones en relación a los extremos de los N.B.T. calculados (véase (9.58)) se va a calcular su stepping-stone para cada δ_{ij} que no sea básico y el $\underset{\sim}{Z}$ correspondiente, lo que no será mucho más largo que el cálculo de los 7 stepping-stone y los 7 δ_{ij} no básicos. Para clasificar los $\underset{\sim}{Z}$ obtenidos, se utilizará el criterio ξ. Veamos cómo se realiza este proceso:

(9.65)

	1	2	3	4	5	
A	40	50	10 —	+		100
B			60 +	60 —		120
C				30	90	120
	40	50	70	90	90	

(9.66)

	1	2	3	4	5	
A	40	50		10		100
B			70	50		120
C				30	90	120
	40	50	70	90	90	

Se calcula la $\underset{\sim}{Z}$ obtenida y la ξ.

(9.67) $\underset{\sim}{Z}_{14} = (40)\,(3,4,6)\,(+)\,(50)\,(1,1,3)\,(+)\,(10)\,(3,6,6)\,(+)\,(70)\,(2,3,4)$
$(+)\,(50)\,(2,5,6)\,(+)\,(30)\,(3,4,8)\,(+)\,(90)\,(5,8,9)$
$= (120,160,240)\,(+)\,(50,50,150)\,(+)\,(30,60,60)\,(+)$
$(140,210,280)\,(+)\,(100,250,300)\,(+)\,(90,120,240)\,(+)$
$(450,720,810) = (980,1570,2080).\ \xi_{14} = 3100$

(9.68)

	1	2	3	4	5	
A	40	50	10 —		+	100
B			60 +	60 —		120
C				30 +	90 —	120
	40	50	70	90	90	

(9.69)

	1	2	3	4	5	
A	40	50			10	100
B			70	50		120
C				40	80	120
	40	50	70	90	90	

(9.70) $$\begin{aligned}\underset{\sim}{Z}_{15} &= (40)\ (3,4,6)\ (+)\ (50)\ (1,1,3)\ (+)\ (10)\ (8,9,12)\ (+)\ (70)\ (2,3,4)\\ &\quad (+)\ (50)\ (2,5,6)\ (+)\ (40)\ (3,4,8)\ (+)\ (80)\ (5,8,9)\\ &= (120,160,240)\ (+)\ (50,50,150)\ (+)\ (80,90,120)\\ &\quad (+)\ (140,210,280)\ (+)\ (100,250,300)\ (+)\ (120,160,320)\\ &\quad (+)\ (400,640,720)\ =\ (1010,1560,2130). \qquad \xi_{15} = 3130\end{aligned}$$

(9.71)

	1	2	3	4	5	
A	40 −	50	10 +			100
B	+		60 −	60		120
C				30	90	120
	40	50	70	90	90	

(9.72)

	1	2	3	4	5	
A		50	50			100
B	40		20	60		120
C				30	90	120
	40	50	70	90	90	

(9.73) $$\begin{aligned}\underset{\sim}{Z}_{21} &= (50)\ (1,1,3)\ (+)\ (50)\ (1,2,4)\ (+)\ (40)\ (5,6,7)\ (+)\ (20)\ (2,3,4)\\ &\quad (+)\ (60)\ (2,5,6)\ (+)\ (30)\ (3,4,8)\ (+)\ (90)\ (5,8,9)\\ &= (50,50,150)\ (+)\ (50,100,200)\ (+)\ (200,240,280)\ (+)\\ &\quad (40,60,80)\\ &\quad (+)\ (120,300,360)\ (+)\ (90,120,240)\ (+)\ (450,720,810)\\ &= (1000,1590,2120), \qquad \xi_{21} = 3150\end{aligned}$$

(9.74)

	1	2	3	4	5	
A	40	50 −	10 +			100
B		+	60 −	60		120
C				30	90	120
	40	50	70	90	90	

(9.75)

	1	2	3	4	5	
A	40		60			100
B		50	10	60		120
C				30	90	120
	40	50	70	90	90	

(9.76)
$$\begin{aligned} \underset{\sim}{Z}_{22} &= (40)\ (3,4,6)\ (+)\ (60)\ (1,2,4)\ (+)\ (50)\ (2,4,7)\ (+)\ (10)\ (2,3,4) \\ &\quad (+)\ (60)\ (2,5,6)\ (+)\ (30)\ (3,4,8)\ (+)\ (90)\ (5,8,9) \\ &= (120,160,240)\ (+)\ (60,120,240)\ (+)\ (100,200,350)\ (+) \\ &\quad (20,30,40)\ (+)\ (120,300,360)\ (+)\ (90,120,240)\ (+) \\ &\quad (450,720,810) = (960,1650,2280). \qquad \xi_{22} = 3270 \end{aligned}$$

(9.77)

	1	2	3	4	5	
A	40	50	10			100
B			60	60 −	+	120
C				30 +	90 −	120
	40	50	70	90	90	

(9.78)

	1	2	3	4	5	
A	40	50	10			100
B			60		60	120
C				90	30	120
	40	50	70	90	90	

(9.79)
$$\begin{aligned} \underset{\sim}{Z}_{25} &= (40)\ (3,4,6)\ (+)\ (50)\ (1,1,3)\ (+)\ (10)\ (1,2,4)\ (+)\ (60)\ (2,3,4) \\ &\quad (+)\ (60)\ (6,7,7)\ (+)\ (90)\ (3,4,8)\ (+)\ (30)\ (5,8,9) \\ &= (120,160,240)\ (+)\ (50,50,150)\ (+)\ (10,20,40)\ (+) \\ &\quad (120,180,240) \\ &\quad (+)\ (360,420,420)\ (+)\ (270,360,720)\ (+)\ (150,240,270) \\ &= (1080,1430,2080), \ \xi_{25} = 3010 \end{aligned}$$

(9.80)

	1	2	3	4	5	
A	40 −	50	10 +			100
B			60 −	60 +		120
C	+			30 −	90	120
	40	50	70	90	90	

(9.81)

	1	2	3	4	5	
A	10	50	40			100
B			30	90		120
C	30				90	120
	40	50	70	90	90	

(9.82) $\underset{\sim}{Z}_{31} = (10)\ (3,4,6)\ (+)\ (50)\ (1,1,3)\ (+)\ (40)\ (1,2,4)\ (+)\ (30)\ (2,3,4)$
$(+)\ (90)\ (2,5,6)\ (+)\ (30)\ (2,5,6)\ (+)\ (90)\ (5,8,9)$
$= (30,40,60)\ (+)\ (50,50,150)\ (+)\ (40,80,160)\ (+)\ (60,90,120)$
$(+)\ (180,450,540)\ (+)\ (60,150,180)\ (+)\ (450,720,810)$
$= (870,1580,2020).\qquad \xi_{31} = 3025$

(9.83)

	1	2	3	4	5	
A	40	50 —	10 +			100
B			60 —	60 +		120
C		+		30 —	90	120
	40	50	70	90	90	

(9.84)

	1	2	3	4	5	
A	40	20	40			100
B			30	90		120
C		30			90	120
	40	50	70	90	90	

(9.85) $\underset{\sim}{Z}_{32} = (40)\ (3,4,6)\ (+)\ (20)\ (1,1,3)\ (+)\ (40)\ (1,2,4)\ (+)\ (30)\ (2,3,4)$
$(+)\ (90)\ (2,5,6)\ (+)\ (30)\ (2,2,4)\ (+)\ (90)\ (5,8,9)$
$= (120,160,240)\ (+)\ (20,20,60)\ (+)\ (40,80,160)\ (+)\ (60,90,120)$
$(+)\ (180,450,540)\ (+)\ (60,60,120)\ (+)\ (450,720,810)$
$= (930,1580,2050),\qquad \xi_{32} = 3070$

(9.86)

	1	2	3	4	5	
A	40	50	10			100
B			60 —	60 +		120
C			+	30 —	90	120
	40	50	70	90	90	

(9.87)

	1	2	3	4	5	
A	40	50	10			100
B			30	90		120
C			30		90	120
	40	50	70	90	90	

(9.88) $$\begin{aligned}\underset{\sim}{Z}_{33} &= (40)\ (3,4,6)\ (+)\ (50)\ (1,1,3)\ (+)\ (10)\ (1,2,4)\ (+)\ (30)\ (2,3,4)\\ &\quad (+)\ (90)\ (2,5,6)\ (+)\ (30)\ (6,6,6)\ (+)\ (90)\ (5,8,9)\\ &= (120,160,240)\ (+)\ (50,50,150)\ (+)\ (10,20,40)\ (+)\ (60,90,120)\\ &\quad (+)\ (180,450,540)\ (+)\ (180,180,180)\ (+)\ (450,720,810)\\ &= (1050,1670,2080),\quad \xi_{33} = 3235\end{aligned}$$

De esta manera es posible mejorar la solución (9.63) al pasar a la solución (9.78) para la cual se pasa de $\xi_{\underset{\sim}{Z}} = 3070$ a $\xi_{\underset{\sim}{Z}} = 3010$, es decir desde:

(9.89) $$\underset{\sim}{Z} = (960,1550,2080)$$

hasta:

(9.90) $$\underset{\sim}{Z} = (1080,1430,2080)$$

Vamos, pues, a tomar la solución (9.78) que da lugar a (9.90) para intentar mejorar la posición en relación con el criterio ξ, prosiguiendo el proceso a partir de (9.78).

(9.91)

	1	2	3	4	5	
A	40	50	10 —	+		100
B			60 +		60 —	120
C				90 —	30 +	120
	40	50	70	90	90	

(9.92)

	1	2	3	4	5	
A	40	50		10		100
B			70		50	120
C				80	40	120
	40	50	70	90	90	

(9.93) $\underset{\sim}{Z}_{14} = (40)\ (3,4,6)\ (+)\ (50)\ (1,1,3)\ (+)\ (10)\ (3,6,6)\ (+)\ (70)\ (2,3,4)$
$(+)\ (50)\ (6,7,7)\ (+)\ (80)\ (3,4,8)\ (+)\ (40)\ (5,8,9)$
$= (120,160,240)\ (+)\ (50,50,150)\ (+)\ (30,60,60)\ (+)\ (140,210,280)$
$(+)\ (300,350,350)\ (+)\ (240,320,640)\ (+)\ (200,320,360)$
$= (1080,1470,2080), \qquad \xi_{14} = 3050$

(9.94)

	1	2	3	4	5	
A	40	50	10 —		+	100
B			60 +		60 —	120
C				90	30	120
	40	50	70	90	90	

(9.95)

	1	2	3	4	5	
A	40	50			10	100
B			70		50	120
C				90	30	120
	40	50	70	90	90	

(9.96) $\underset{\sim}{Z}_{15} = (40)\ (3,4,6)\ (+)\ (50)\ (1,1,3)\ (+)\ (10)\ (8,9,12)\ (+)\ (70)\ (2,3,4)$
$(+)\ (50)\ (6,7,7)\ (+)\ (90)\ (3,4,8)\ (+)\ (30)\ (5,8,9)$
$= (120,160,240)\ (+)\ (50,50,150)\ (+)\ (80,90,120)\ (+)$
$(140,210,280)\ (+)\ (300,350,350)\ (+)\ (270,360,720)\ (+)$
$(150,240,270)$
$= (1110,1460,2130), \qquad \xi_{15} = 3080$

(9.97)

	1	2	3	4	5	
A	40 —	50	10 +			100
B	+		60 —		60	120
C				90	30	120
	40	50	70	90	90	

(9.98)

	1	2	3	4	5	
A		50	50			100
B	40		20		60	120
C				90	30	120
	40	50	70	90	90	

$$
\begin{aligned}
(9.99)\quad \underset{\sim}{Z}_{21} &= (50)\ (1,1,3)\ (+)\ (50)\ (1,2,4)\ (+)\ (40)\ (5,6,7)\ (+)\ (20)\ (2,3,4) \\
&\quad (+)\ (60)\ (6,7,7)\ (+)\ (90)\ (3,4,8)\ (+)\ (30)\ (5,8,9) \\
&= (50,50,150)\ (+)\ (50,100,200)\ (+)\ (200,240,280)\ (+) \\
&\quad (40,60,80)\ (+)\ (360,420,420)\ (+)\ (270,360,720)\ (+) \\
&\quad (150,240,270) \\
&= (1120,1470,2120), \qquad \xi = 3090
\end{aligned}
$$

(9.100)

	1	2	3	4	5	
A	40	50 —	10 +			100
B		+	60 —		60	120
C				90	30	120
	40	50	70	90	90	

(9.101)

	1	2	3	4	5	
A	40		60			100
B		50	10		60	120
C				90	30	120
	40	50	70	90	90	

$$
\begin{aligned}
(9.102)\quad \underset{\sim}{Z}_{22} &= (40)\ (3,4,6)\ (+)\ (60)\ (1,2,4)\ (+)\ (50)\ (2,4,7)\ (+)\ (10)\ (2,3,4) \\
&\quad (+)\ (60)\ (6,7,7)\ (+)\ (90)\ (3,4,8)\ (+)\ (30)\ (5,8,9) \\
&= (120,160,240)\ (+)\ (60,120,240)\ (+)\ (100,200,350)\ (+) \\
&\quad (20,30,40)\ (+)\ (360,420,420)\ (+)\ (270,360,720)\ (+) \\
&\quad (150,240,270) = (1080,1530,2280), \quad \xi_{22} = 3210
\end{aligned}
$$

(9.103)

	1	2	3	4	5	
A	40	50	10			100
B			60	+	60 —	120
C				90 —	30 +	120
	40	50	70	90	90	

(9.104)

	1	2	3	4	5	
A	40	50	10			100
B			60	60		120
C				30	90	120
	40	50	70	90	90	

(9.105) $\underset{\sim}{Z}_{24} = (960,1550,2080), \qquad \xi_{24} = 3070$
ya calculado en (9.64)

(9.106)

	1	2	3	4	5	
A	40 —	50	10 +			100
B			60 —		60 +	120
C	+			90	30 —	120
	40	50	70	90	90	

(9.107)

	1	2	3	4	5	
A	10	50	40			100
B			30		90	120
C	30			90		120
	40	50	70	90	90	

(9.108)
$$\begin{aligned}
\underset{\sim}{Z}_{31} &= (10)\,(3,4,6)\,(+)\,(50)\,(1,1,3)\,(+)\,(40)\,(1,2,4)\,(+)\,(30)\,(2,3,4) \\
&\quad (+)\,(90)\,(6,7,7)\,(+)\,(30)\,(2,5,6)\,(+)\,(90)\,(3,4,8) \\
&= (30,40,60)\,(+)\,(50,50,150)\,(+)\,(40,80,160)\,(+) \\
&\quad (60,90,120) \\
&\quad (+)\,(540,630,630)\,(+)\,(60,150,180)\,(+)\,(270,360,720) \\
&= (1050,1400,2020), \qquad \xi_{31} = 2935
\end{aligned}$$

(9.109)

	1	2	3	4	5	
A	40	50 —	10 +			100
B			60 —		60 +	120
C		+		90	30 —	120
	40	50	70	90	90	

(9.110)

	1	2	3	4	5	
A	40	20	40			100
B			30		90	120
C		30		90		120
	40	50	70	90	90	

$$(9.111)\quad \underset{\sim}{Z}_{32} = (40)\,(3,4,6)\,(+)\,(20)\,(1,1,3)\,(+)\,(40)\,(1,2,4)\,(+)\,(30)\,(2,3,4)\,(+)\,(90)\,(6,7,7)\,(+)\,(30)\,(2,2,4)\,(+)\,(90)\,(3,4,8)$$
$$= (120,160,240)\,(+)\,(20,20,60)\,(+)\,(40,80,160)\,(+)\,(60,90,120)\,(+)\,(540,630,630)\,(+)\,(60,60,120)\,(+)\,(270,360,720) = (1110,1400,2050), \qquad \xi_{32} = 2980$$

(9.112)

	1	2	3	4	5	
A	40	50	10			100
B			60 −		60 +	120
C			+	90	30 −	120
	40	50	70	90	90	

(9.113)

	1	2	3	4	5	
A	40	50	10			100
B			30		90	120
C			30	90		120
	40	50	70	90	90	

$$(9.114)\quad \underset{\sim}{Z}_{33} = (40)\,(3,4,6)\,(+)\,(50)\,(1,1,3)\,(+)\,(10)\,(1,2,4)\,(+)\,(30)\,(2,3,4)\,(+)\,(90)\,(6,7,7)\,(+)\,(30)\,(6,6,6)\,(+)\,(90)\,(3,4,8)$$
$$= (120,160,240)\,(+)\,(50,50,150)\,(+)\,(10,20,40)\,(+)\,(60,90,120)\,(+)\,(540,630,630)\,(+)\,(180,180,180)\,(+)\,(270,360,720) = (1230,1490,2080), \qquad \xi_{33} = 3145$$

De lo que resulta que se obtiene con (9.107) una mejor solución.

$$(9.115)\quad \underset{\sim}{Z} = (1050,1400,2020) \text{ con } \xi = 2935$$

Se va a continuar el proceso a partir de (9.107).

(9.116)

	1	2	3	4	5	
A	10 −	50	40	+		100
B			30		90	120
C	30 +			90 −		120
	40	50	70	90	90	

(9.117)

	1	2	3	4	5	
A		50	40	10		100
B			30		90	120
C	40			80		120
	40	50	70	90	90	

$$
\begin{aligned}
(9.118)\quad \underset{\sim}{Z}_{14} &= (50)\ (1,1,3)\ (+)\ (40)\ (1,2,4)\ (+)\ (10)\ (3,6,6)\ (+)\ (30)\ (2,3,4)\\
&\quad (+)\ (90)\ (6,7,7)\ (+)\ (40)\ (2,5,6)\ (+)\ (80)\ (3,4,8)\\
&= (50,50,150)\ (+)\ (40,80,160)\ (+)\ (30,60,60)\ (+)\\
&\quad (60,90,120)\ (+)\ (540,630,630)\ (+)\ (80,\ 200,\ 240)\ (+)\\
&\quad (240,320,640)\ =\ (1040,1430,2000), \qquad \xi_{14} = 2950
\end{aligned}
$$

(9.119)

	1	2	3	4	5	
A	10	50	40 —		+	100
B			30 +		90 —	120
C	30			90		120
	40	50	70	90	90	

(9.120)

	1	2	3	4	5	
A	10	50			40	100
B			70		50	120
C	30			90		120
	40	50	70	90	90	

$$
\begin{aligned}
(9.121)\quad \underset{\sim}{Z}_{15} &= (10)\ (3,4,6)\ (+)\ (50)\ (1,1,3)\ (+)\ (40)\ (8,9,12)\ (+)\ (70)\ (2,3,4)\\
&\quad (+)\ (50)\ (6,7,7)\ (+)\ (30)\ (2,5,6)\ (+)\ (90)\ (3,4,8)\\
&= (30,40,60)\ (+)\ (50,50,150)\ (+)\ (320,360,480)\ (+)\\
&\quad (140,210,280)\ (+)\ (300,350,350)\ (+)\ (60,150,180)\ (+)\\
&\quad (270,360,720)\ =\ (1170,1520,2220), \qquad \xi_{15} = 3215
\end{aligned}
$$

(9.122)

	1	2	3	4	5	
A	10 —	50	40 +			100
B	+		30 —		90	120
C	30			90		120
	40	50	70	90	90	

(9.123)

	1	2	3	4	5	
A		50	50			100
B	10		20		90	120
C	30			90		120
	40	50	70	90	90	

(9.124) $\underset{\sim}{Z}_{21}$ = (50) (1,1,3) (+) (50) (1,2,4) (+) (10) (5,6,7) (+) (20) (2,3,4) (+) (90) (6,7,7) (+) (30) (2,5,6) (+) (90) (3,4,8)
= (50,50,150) (+) (50,100,200) (+) (50,60,70) (+) (40,60,80) (+) (540,630,630) (+) (60,150,180) (+) (270,360,720)
= (1060,1410,2030), $\underset{\sim}{\xi}_{21}$ = 2955

(9.125)

	1	2	3	4	5	
A	10	50 —	40 +			100
B		+	30 —		90	120
C	30			90		120
	40	50	70	90	90	

(9.126)

	1	2	3	4	5	
A	10	20	70			100
B		30			90	120
C	30			90		120
	40	50	70	90	90	

(9.127) $\underset{\sim}{Z}_{22}$ = (10) (3,4,6) (+) (20) (1,1,3) (+) (70) (1,2,4) (+) (30) (2,4,7) (+) (90) (6,7,7) (+) (30) (2,5,6) (+) (90) (3,4,8)
= (30,40,60) (+) (20,20,60) (+) (70,140,280) (+) (60,120,210) (+) (540,630,630) (+) (60,150,180) (+) (270,360,720) = (1050,1460,2140), $\underset{\sim}{\xi}_{22}$ = 3055

(9.128)

	1	2	3	4	5	
A	10 —	50	40 +			100
B			30 —	+	90	120
C	30 +			90 —		120
	40	50	70	90	90	

(9.129)

	1	2	3	4	5	
A		50	50			100
B			20	10	90	120
C	40			80		120
	40	50	70	90	90	

(9.130)
$$\begin{aligned}\underset{\sim}{Z}_{24} &= (50)\,(1,1,3)\ (+)\ (50)\,(1,2,4)\ (+)\ (20)\,(2,3,4)\ (+)\ (10)\,(2,5,6)\\ &\quad (+)\ (90)\,(6,7,7)\ (+)\ (40)\,(2,5,6)\ (+)\ (80)\,(3,4,8)\\ &= (50,50,150)\ (+)\ (50,100,200)\ (+)\ (40,60,80)\ (+)\ (20,50,60)\\ &\quad (+)\ (540,630,630)\ (+)\ (80,200,240)\ (+)\ (240,320,640)\\ &= (1020,1410,2000), \qquad \underset{\sim}{\xi}_{24} = 2920\end{aligned}$$

(9.131)

	1	2	3	4	5	
A	10 +	50 —	40			100
B			30		90	120
C	—	+		90		120
	40	50	70	90	90	

(9.132)

	1	2	3	4	5	
A	40	20	40			100
B			30		90	120
C		30		90		120
	40	50	70	90	90	

(9.133) $\underset{\sim}{Z}_{32} = (1100,1400,2050), \qquad \underset{\sim}{\xi}_{32} = 2980$

ya calculado en (9.110)

(9.134)

	1	2	3	4	5	
A	10 +	50	40 —			100
B			30		90	120
C	[illegible] —		—	90		120
	40	50	70	90	90	

(9.135)

	1	2	3	4	5	
A	40	50	10			100
B			30		90	120
C			30	90		120
	40	50	70	90	90	

(9.136) $\underset{\sim}{Z}_{33} = (1230, 1490, 2080), \qquad \underset{\sim}{\xi}_{33} = 3145$

ya calculado en (9.113)

(9.137)

	1	2	3	4	5	
A	10 +	50	40 −			100
B			30 +		90 −	120
C	30 −			90	+	120
	40	50	70	90	90	

(9.138)

	1	2	3	4	5	
A	40	50	10			100
B			60		60	120
C				90	30	120
	40	50	70	90	90	

(9.139) $\underset{\sim}{Z}_{35} = (1080, 1430, 2080), \qquad \underset{\sim}{\xi}_{35} = 3010$

ya calculado en (9.78)

Se ha obtenido una mejor solución en (9.129), en donde:

(9.140) $\underset{\sim}{Z} \ = (1020, 1410, 2000), \qquad \underset{\sim}{\xi} = 2920$

Se continua a partir de la solución (9.129)

(9.141)

	1	2	3	4	5	
A	+	50	50 −			100
B			20 +	10 −	90	120
C	40 −			80 +		120
	40	50	70	90	90	

(9.142)

	1	2	3	4	5	
A	10	50	40			100
B			30		90	120
C	30			90		120
	40	50	70	90	90	

(1.143) $\underset{\sim}{Z}_{11} = (1050,1400,2020), \qquad \underset{\sim}{\xi}_{11} = 2935$

ya calculado en (9.107)

(9.144)

	1	2	3	4	5	
A		50	50 —	+		100
B			20 +	10 —	90	120
C	40			80		120
	40	50	70	90	90	

(9.145)

	1	2	3	4	5	
A		50	40	10		100
B			30		90	120
C	40			80		120
	40	50	70	90	90	

(9.164) $\underset{\sim}{Z}_{14} = (1040,1430,2000), \qquad \underset{\sim}{\xi}_{14} = 2950$

ya calculado en (9.117)

(9.147)

	1	2	3	4	5	
A		50	50 —		+	100
B			20 +	10	90 —	120
C	40			80		120
	40	50	70	90	90	

(9.148)

	1	2	3	4	5	
A		50			50	100
B			70	10	40	120
C	40			80		120
	40	50	70	90	90	

$$
\begin{aligned}
(9.149)\quad \underset{\sim}{Z}_{15} &= (50)\,(1,1,3)\,(+)\,(50)\,(8,9,12)\,(+)\,(70)\,(2,3,4)\,(+)\,(10)\\
&\quad (2,5,6)\,(+)\,(40)\,(6,7,7)\,(+)\,(40)\,(2,5,6)\,(+)\,(80)\,(3,4,8)\\
&= (50,50,150)\,(+)\,(400,450,600)\,(+)\,(140,210,280)\,(+)\\
&\quad (20,50,60)\,(+)\,(240,280,280)\,(+)\,(80,200,240)\,(+)\\
&\quad (240,320,640) = (1170,1560,2250), \qquad \underset{\sim}{\xi}_{15} = 3270
\end{aligned}
$$

(9.150)

	1	2	3	4	5	
A		50	50			100
B	+		20	10 —	90	120
C	40 —			80 +		120
	40	50	70	90	90	

(9.151)

	1	2	3	4	5	
A		50	50			100
B	10		20		90	120
C	30			90		120
	40	50	70	90	90	

$$(9.152)\quad \underset{\sim}{Z}_{21} = (1060,1410,2030), \qquad \underset{\sim}{\xi}_{21} = 2955$$

ya calculado en (9.123)

(9.153)

	1	2	3	4	5	
A		50 —	50 +			100
B		+	20 —	10	90	120
C	40			80		120
	40	50	70	90	90	

(9.154)

	1	2	3	4	5	
A		30	70			100
B		20		10	90	120
C	40			80		120
	40	50	70	90	90	

(9.155) $\underset{\sim}{Z}_{22}$ = (30) (1,1,3) (+) (70) (1,2,4) (+) (20) (2,4,7) (+) (10) (2,5,6) (+) (90) (6,7,7) (+) (40) (2,5,6) (+) (80) (3,4,8)
= (30,30,90) (+) (70,140,280) (+) (40,80,140) (+) (20,50,60) (+) (540,630,630) (+) (80,200,240) (+) (240,320,640) = (1020,1450,2080), $\underset{\sim}{\xi}_{22}$ = 3000

(9.156)

	1	2	3	4	5	
A		50 −	50 +			100
B			20 −	10 +	90	120
C	40	+		80 −		120
	40	50	70	90	90	

(9.157)

	1	2	3	4	5	
A		30	70			100
B				30	90	120
C	40	20		60		120
	40	50	70	90	90	

(9.158) $\underset{\sim}{Z}_{32}$ = (30) (1,1,3) (+) (70) (1,2,4) (+) (30) (2,5,6) (+) (90) (6,7,7) (+) (40) (2,5,6) (+) (20) (2,2,4) (+) (60) (3,4,8)
= (30,30,90) (+) (70,140,280) (+) (60,150,180) (+) (540,630,630) (+) (80,200,240) (+) (40,40,80) (+) (180,240,480) = (1000,1430,1980), $\underset{\sim}{\xi}_{32}$ = 2920

(9.159)

	1	2	3	4	5	
A		50	50			100
B			20 −	10 +	90	120
C	40		+	80 −		120
	40	50	70	90	90	

		1	2	3	4	5	
	A		50	50			100
(9.160)	B				30	90	120
	C	40		20	60		120
		40	50	70	90	90	

(9.161) $$\begin{aligned} \underset{\sim}{Z}_{33} &= (50)\ (1,1,3)\ (+)\ (50)\ (1,2,4)\ (+)\ (30)\ (2,5,6)\ (+)\ (90)\ (6,7,7) \\ &\quad (+)\ (40)\ (2,5,6)\ (+)\ (20)\ (6,6,6)\ (+)\ (60)\ (3,4,8) \\ &= (50,50,150)\ (+)\ (50,100,200)\ (+)\ (60,150,180)\ (+) \\ &\quad (540,630,630)\ (+)\ (80,200,240)\ (+)\ (120,120,120)\ (+) \\ &\quad (180,240,480) = (1080,1490,2000), \qquad \xi_{33} = 3030 \end{aligned}$$

		1	2	3	4	5	
	A		50	50			100
(9.162)	B			20	10 +	90 —	120
	C	40			80 —	+	120
		40	50	70	90	90	

		1	2	3	4	5	
	A		50	50			100
(9.163)	B			20	90	10	120
	C	40				80	120
		40	50	70	90	90	

(9.164) $$\begin{aligned} \underset{\sim}{Z}_{35} &= (50)\ (1,1,3)\ (+)\ (50)\ (1,2,4)\ (+)\ (20)\ (2,3,4)\ (+)\ (90)\ (2,5,6) \\ &\quad (+)\ (10)\ (6,7,7)\ (+)\ (40)\ (2,5,6)\ (+)\ (80)\ (5,8,9) \\ &= (50,50,150)\ (+)\ (50,100,200)\ (+)\ (40,60,80)\ (+) \\ &\quad (180,450,540)\ (+)\ (60,70,70)\ (+)\ (80,200,240)\ (+) \\ &\quad (400,640,720) = (860,1570,2000), \qquad \xi_{35} = 3000 \end{aligned}$$

Se ha encontrado otra buena solución (9.157) igual a la (9.129) que proporciona $\xi = 2920$, para la que se tiene:

$$\underset{\sim}{Z} = (1000,1430,1980)$$

En relación con el segundo criterio (valor del máximo de presunción) $1410 < < 1430$, se preferirá (9.129), a (9.157). Nos podríamos detener aquí. Pero a partir de (9.157), vamos a continuar con el stepping-stone para asegurarnos de que no podemos encontrar una nueva solución equivalente en relación a ξ.

(9.166)

	1	2	3	4	5	
A	+	30 −	70			100
B				30	90	120
C	40 −	20 +		60		120
	40	50	70	90	90	

(9.167)

	1	2	3	4	5	
A	30		70			100
B				30	90	120
C	10	50		60		120
	40	50	70	90	90	

(9.168)
$$\begin{aligned}\underset{\sim}{Z}_{11} &= (30)\,(3,4,6)\,(+)\,(70)\,(1,2,4)\,(+)\,(30)\,(2,5,6)\,(+)\,(90)\,(6,7,7)\\ &\quad (+)\,(10)\,(2,5,6)\,(+)\,(50)\,(2,2,4)\,(+)\,(60)\,(3,4,8)\\ &= (90,120,180)\,(+)\,(70,140,280)\,(+)\,(60,150,180)\,(+)\\ &\quad (540,630,630)\,(+)\,(20,50,60)\,(+)\,(100,100,200)\,(+)\\ &\quad (180,240,480) = (1060,1430,2010), \qquad \xi_{11} = 2965\end{aligned}$$

(9.169)

	1	2	3	4	5	
A		30 −	70	+		100
B				30	90	120
C	40	20 +		60 −		120
	40	50	70	90	90	

(9.170)

	1	2	3	4	5	
A			70	30		100
B				30	90	120
C	40	50		30		120
	40	50	70	90	90	

(9.171)
$$\begin{aligned}\underset{\sim}{Z}_{14} &= (70)\,(1,2,4)\,(+)\,(30)\,(3,6,6)\,(+)\,(30)\,(2,5,6)\,(+)\,(90)\,(6,7,7)\\ &\quad (+)\,(40)\,(2,5,6)\,(+)\,(50)\,(2,2,4)\,(+)\,(30)\,(3,4,8)\\ &= (70,140,280)\,(+)\,(90,180,180)\,(+)\,(60,150,180)\,(+)\\ &\quad (540,630,630)\,(+)\,(80,200,240) + (100,100,200)\,(+)\\ &\quad (90,120,240) = (1030,1520,1950), \qquad \xi_{14} = 3010\end{aligned}$$

		1	2	3	4	5	
	A		30 —	70		+	100
(9.172)	B				30 +	90 —	120
	C	40	20 +		60 —		120
		40	50	70	90	90	

		1	2	3	4	5	
	A			70		30	100
(9.173)	B				60	60	120
	C	40	50		30		120
		40	50	70	90	90	

(9.174) $$\begin{aligned} Z_{15} &= (70)\,(1,2,4)\,(+)\,(30)\,(8,9,12)\,(+)\,(60)\,(2,5,6)\,(+)\,(60)\,(6,7,7) \\ &\quad (+)\,(40)\,(2,5,6)\,(+)\,(50)\,(2,2,4)\,(+)\,(30)\,(3,4,8) \\ &= (70,140,280)\,(+)\,(240,270,360)\,(+)\,(120,300,360)\,(+) \\ &\quad (360,420,420)\,(+)\,(80,200,240)\,(+)\,(100,100,200)\,(+) \\ &\quad (90,120,240) = (1060,1550,2100), \qquad \xi_{15} = 3130 \end{aligned}$$

		1	2	3	4	5	
	A		30	70			100
(9.175)	B	+			30 —	90	120
	C	40 —	20		60 +		120
		40	50	70	90	90	

		1	2	3	4	5	
	A		30	70			100
(9.176)	B	30				90	120
	C	10	20		90		120
		40	50	70	90	90	

(9.177) $$\begin{aligned} Z_{21} &= (30)\,(1,1,3)\,(+)\,(70)\,(1,2,4)\,(+)\,(30)\,(5,6,7)\,(+)\,(90)\,(6,7,7) \\ &\quad (+)\,(10)\,(2,5,6)\,(+)\,(20)\,(2,2,4)\,(+)\,(90)\,(3,4,8) \\ &= (30,30,90)\,(+)\,(70,140,280)\,(+)\,(150,180,210)\,(+) \\ &\quad (540,630,630)\,(+)\,(20,50,60)\,(+)\,(40,40,80)\,(+) \\ &\quad (270,360,720) = (1120,1430,2070), \qquad \xi_{21} = 3025 \end{aligned}$$

(9.178)	1	2	3	4	5	
A		30	70			100
B		+		30 —	90	120
C	40	20 —		60 +		120
	40	50	70	90	90	

(9.179)	1	2	3	4	5	
A		30	70			100
B		20		10	90	120
C	40			80		120
	40	50	70	90	90	

(9.180) $\underset{\sim}{Z}_{22} = (1020,1450,2080), \qquad \xi_{22} = 3000$

ya calculado en (9.154)

(9.181)	1	2	3	4	5	
A		30 +	70 —			100
B			+	30 —	90	120
C	40	20 —		60 +		120
	40	50	70	90	90	

(9.182)	1	2	3	4	5	
A		50	50			100
B			20	10	90	120
C	40			80		120
	40	50	70	90	90	

(9.183) $\underset{\sim}{Z}_{23} = (1020,1410,2000), \qquad \xi_{23} = 2920$

Ya calculado en (9.129)

(9.184)

	1	2	3	4	5	
A		30 +	70 —			100
B				30	90	120
C	40	20 —	+	60		120
	40	50	70	90	90	

(9.185)

	1	2	3	4	5	
A		50	50			100
B				30	90	120
C	40		20	60		120
	40	50	70	90	90	

(9.186) $\underset{\sim}{Z}_{33} = (1080,1490,2000), \qquad \xi_{33} = 3030$

ya calculado en (9.160)

(9.187)

	1	2	3	4	5	
A		30	70			100
B				30 +	90 —	120
C	40	20		60 —	+	120
	40	50	70	90	90	

(9.188)

	1	2	3	4	5	
A		30	70			100
B				90	30	120
C	40	20			60	120
	40	50	70	90	90	

(9.189)
$$\begin{aligned}\underset{\sim}{Z}_{35} &= (30)\,(1,1,3)\,(+)\,(70)\,(1,2,4)\,(+)\,(90)\,(2,5,6)\,(+)\,(30)\,(6,7,7)\\ &\quad (+)\,(40)\,(2,5,6)\,(+)\,(20)\,(2,2,4)\,(+)\,(60)\,(5,8,9)\\ &= (30,30,90)\,(+)\,(70,140,280)\,(+)\,(180,450,540)\,(+)\\ &\quad (180,210,210)\,(+)\,(80,200,240)\,(+)\,(40,40,80)\,(+)\\ &\quad (300,480,540) = (880,1550,1980), \qquad \xi_{35} = 2980\end{aligned}$$

Finalmente, en los vértices del simplex definido por (9.157) se encuentra como solución a elegir (9.182), es decir, (9.129). Detenemos el proceso y se selecciona (9.129) como mejor solución:

	1	2	3	4	5	
A		50	50			100
B			20	10	90	120
C	40			80		120
	40	50	70	90	90	

para la cual se tiene:

(9.191) $\underset{\sim}{Z} = (1020, 1410, 2000)$ $\qquad \xi = 2.920$

Se impone realizar diversas observaciones en relación al proceso utilizado.

1.º) ¿Por qué no se ha empleado en el supuesto de datos borrosos el proceso que utiliza las δ_{ij} (desviaciones unitarias) a lo largo de un stepping-stone? Vamos a explicar la causa con ayuda de un ejemplo.
Volvamos a tomar (9.14) pero con los datos borrosos (9.62).
Se obtiene:

(9.192)

	1	2	3	4	5	
A	40	50	10			100
B			60	60 —1	+1	120
C				30 +1	90 —1	120
	40	50	70	90	90	

(9.193)

	1	2	3	4	5	
A	40	50	10			100
B			60		60	120
C				90	30	120
	40	50	70	90	90	

Utilizando las δ_{ij}, se halla:

(9.194) $\underset{\sim}{\delta}_{25} = (6,7,7)\ (—)\ (5,8,9)\ (+)\ (3,4,8)\ (—)\ (2,5,6)$

(9.195) $= (—6,\ —2,\ 8)$ y también, $\xi_{\delta_{25}} = -1$

Por otra parte, con ayuda de (9.193) y (9.62) se calcula el N.B.T. que constituye el valor borroso de la nueva solución obtenida.

Resulta:

(9.196) $\underset{\sim}{Z}_{25} = (1080,1430,2080)$ y también $\xi_{\underset{\sim}{Z}_{25}} = 3010$

(9.197)

Pasemos a (9.80)

(9.198)

	1	2	3	4	5	
A	40 —1	50	10 +1			100
B			60 —1	60 +1		120
C	+1			30 —1	90	120
	40	50	70	90	90	

(9.199)

	1	2	3	4	5	
A	10	50	40			100
B			30	90		120
C	30				90	120
	40	50	70	90	90	

Utilizando las δ_{ij}, se obtiene:

(9.200) $\underset{\sim}{\delta}_{31} = (2,5,6)\ (-)\ (3,4,8)\ (+)\ (2,5,6)\ (-)\ (2,3,4)$
$(+)\ (1,2,4)\ (-)\ (3,4,6)$
$= (5,12,16)\ (-)\ (8,11,18)$

(9.201) $= (-13,1,8)$ y también $\xi_{\underset{\sim}{\delta}_{31}} = -1.5$

Por otra parte, con ayuda de (9.199) y (9.62), calculemos $\underset{\sim}{Z}_{31}$:

(9.202) $\underset{\sim}{\delta}_{31} = (870,1580,2020)$ y también $\xi_{\underset{\sim}{Z}_{31}} = 3025$

(9.203)

Así, en el ámbito borroso, las δ_{ij} no constituyen un buen criterio de selección para cambiar de solución en los vértices del simplex. En virtud de (9.201) en donde $\xi_{\underset{\sim}{\delta}_{31}} = -1.5$, que es más pequeño de (9.195), en que $\xi_{\delta_{25}} = -1$, se debería elegir la solución (9.199) en lugar de (9.193). Ahora bien, comparando $\underset{\sim}{Z}_{25}$ (9.196) y $\underset{\sim}{Z}_{31}$ (9.202) a través de $\xi_{Z_{25}}$ (9.197) y $\xi_{Z_{31}}$ (9.203) se observa que la elección debe recaer en (9.193), en lugar de la solución (9.199). Esto resulta totalmente comprensible si se tiene en cuenta la definición de la diferencia entre N.B.T. (1). Los N.B.T. no se restan término a término sino extremo a extremo: $a_1 - b_3$ y $a_3 - b_1$. Hay que calcular las ξ_Z en lugar de las ξ_{δ}.

2.º) Como es conocido en los números borrosos (N.B.T. o cualesquiera otros) el concepto de mínimo (y también de máximo) sólo tiene sentido cuando los números borrosos están totalmente ordenados, lo que no sucede con demasiada frecuencia en problemas como el expuesto anteriormente.
Resultará necesario, por ejemplo, pasar por una transformación tal como la (9.61) que restituye un orden total. Tal como hemos señalado anteriormente, el orden total no es generalmente estricto, por lo que resulta necesario adoptar un segundo criterio para separar dos ξ equivalentes (tomar, por ejemplo, la segunda elección, partiendo del valor correspondiente al máximo de presunción). Y todavía no es suficiente, se puede elegir el número borroso con menor desviación.

3.º) Se pueden convertir de manera automática los datos borrosos como los de (9.62) en datos no borrosos a partir de las ξ. Con ello se puede realizar la optimización, pero desaparecerán desde el inicio las propiedades que es interesante mantener hasta el final. Es la propia filosofía de la incertidumbre.

Existe un gran número de variantes del método stepping-stone (2) en las que poder inspirarse para su transformación en datos borrosos.

Se puede plantear otra pregunta ¿Cómo operar con cualesquiera números? En este caso resulta aconsejable pasar por los α-cortes, por ejemplo, 11 cortes $\alpha = 0$, 0.1, 0 2, ... 0.8, 0.9, 1, y realizar el encaje de los resultados, lo que no resulta fácil.

Existe una gran variedad de problemas de transporte formales y/o borrosos. Por ejemplo: las disponibilidades y/o las demandas pueden ser borrosas; pueden existir varios criterios a la vez: el coste, la duración, la seguridad, etc. En los casos complicados se abandona el stepping-stone para pasar a la programación lineal (o no) borrosa como la introducida desde una perspectiva general por ZIMMERMANN.

Finalmente hay que añadir que en este método se ha aceptado «a priori» que el óptimo se encuentra en uno de los vértices del simplex. Si se tiene en cuenta (9.2) y se sustituyen los números correspondientes por N.B.T., se puede considerar el objetivo de optimizar en relación a tres criterios (función económica) ponderando por 1, 2, 1 (como en 9.61), 1 para los valores menores, 2 para los valores del máximo de presunción, 1 para los valores mayores. Se puede utilizar

---

(1) Véase para ello (9.58).

(2) KAUFMANN, A.: Métodos y Modelos de la investigación de operaciones. C.E.C.S.A. Tomo I. Sección 17.

entonces el método de ZIMMERMANN y el mínimo del coste total del problema del transporte no se encontrará generalmente sobre uno (o varios) de los vértices del simplex.

Entonces resulta conveniente introducir funciones de pertenencia arbitrarias (justificadas a veces por la propia naturaleza del problema). Como se ha señalado anteriormente, la utilización de las técnicas borrosas no lleva necesariamente a una verdadera optimización: es un hecho que corresponde a la esencia misma de los trabajos de investigación.

LAS PREVISIONES A LARGO PLAZO

CAPITULO X

LAS PREVISIONES A LARGO PLAZO

El estudio de las previsiones en la empresa

Saturno dio a Jano la facultad de conocer el pasado y el futuro. De ahí que haya sido representado con una doble cara: la una mirando al pasado y la otra al futuro. Este doble rostro podría representar simbólicamente la actividad de quienes tienen como misión la previsión del futuro.

En la actualidad la previsión tiene lugar a través de modelos en los que se incorporan hipótesis, justificadas a través de razonamientos y/o datos sobre el fenómeno estudiado, que se sitúan en un pasado más o menos alejado. Es evidente que la variedad de modelos susceptibles de ser utilizados puede variar extraordinariamente según el campo a que se refiere y los objetivos que se buscan.

Con la teoría de las probabilidades, los métodos estadísticos, los procedimientos de análisis de series temporales, los modelos estocásticos de evolución, etc..., la ciencia moderna es capaz de aportar adecuados instrumentos de análisis y de previsión.

Sin embargo estos instrumentos se hallan limitados en sus posibilidades de utilización en la realidad, ya que sólo pueden emplearse cuando existen informaciones suficientemente estructuradas para poder integrarse en los modelos. El problema surge cuando sólo se dispone de informaciones que no están, o no están aún, estructuradas suficientemente para permitir la utilización de modelos de previsión. Hay que tener en cuenta que, dado el contexto económico en el que se encuentran las empresas, son precisamente estas informaciones insuficientemente estructuradas las que más abundan en la realidad.

El hombre de finales del Siglo XX vive en un sistema en el que circulan innumerables informaciones y aun considerando el progreso de los métodos de previsión, la proporción de lo que queda por preveer a partir de la intuición aumenta constantemente, a pesar de los medios de que se dispone, entre los que destacan los ordenadores.

A este respecto cuanto más recurrimos al cálculo, a la programación, para el tratamiento de las informaciones estructuradas, tanto más nuestra imaginación va a pedirnos nuevas estimaciones. En el par información-expresión, que forma parte de la misma naturaleza del hombre, pueden convivir sin peligro desequilibrios entre los elementos que lo forman. Cuanta más información se posee, más necesidad hay de expresión. Un desequilibrio nos conduciría al hombre robot, como consecuencia del exceso de información y falta de expresión o, por el contrario al hombre de la selva, por falta de información y exceso de expresión. Es por ello que en el mundo moderno la intuición adquiere cada vez una importancia más vital.

Esta intuición, que no es fruto de razonamientos secuenciales programables a través de una máquina, es imprecisa, borrosa, evolutiva y sin embargo constituye la superioridad del hombre sobre los medios de tratamiento de la información.

El establecimiento de una política económica en una empresa tiene como uno de sus sustentos básicos la realización de unas estimaciones de los datos fundamentales a largo plazo. Estos puntos de referencia permiten elaborar unas líneas de acción dirigidas a conseguir unos objetivos, los cuales acostumbran a ser expresados numéricamente. Dado que estos objetivos se hallan localizados en el futuro, la «previsión» se presenta como un elemento primordial en la gestión de empresas.

Introducirse en el ámbito del tratamiento técnico del futuro de las empresas plantea singulares dificultades que se originan ya desde el momento en que se pretenden definir los conceptos fundamentales sobre los que deben asentarse los posteriores desarrollos. Un ejemplo representativo lo constituye el intento de aislar la noción de previsión de otros conceptos tales como predicción, prospección etc... Desde un punto de vista técnico la predicción comporta la posibilidad de conocer determinados aspectos del futuro de una manera determinista, a través de unas leyes conocidas y unos concatenamientos lógicos. La previsión, por el contrario, se halla ligada a los procesos de estimación cuyas bases sin embargo se hallan, principalmente, en un pasado que no tiene una traslación mecánica en el futuro. Es por ello que sus esquemas más válidos pertenecen al ámbito aleatorio o al campo de la incertidumbre.

Los métodos clásicos de previsión, que en un sistema económico estacionario tienen su razón de ser, basados en un determinismo mecanicista han tenido que dejar paso a otros que fueran capaces de representar mejor una realidad con cambios rápidos y con múltiples aceleraciones de unos sistemas económicos caracterizados por su continua evolución. Pero incluso en estos nuevos métodos el pasado juega un cierto papel, quizás más discreto pero a veces no menos importante, ya que cualquier proceso de estructuración subjetiva o de valuación no queda totalmente desligada de la «experiencia» del experto que la realiza.

El riesgo que se corre viene dado por la posibilidad de que, de manera consciente o inconsciente, se de un peso excesivo a la incidencia de los factores que han actuado en el pasado en relación a su intervención en el futuro, cuando éste habrá sufrido modificaciones sustanciales tanto por la acción de elementos externos como por la intervención de la voluntad humana.

Esta situación cambiante y las dificultades que existen en hacer una traslación del pasado hacia el futuro han dado lugar a que un cierto número de empresas haya incorporado, en sus estructuras orgánicas, unos grupos de expertos cuyo objetivo consiste en determinar, a través de estudios técnicos, como será la empresa dentro de unos años, es decir, en un futuro «a largo plazo», estableciendo su situación comercial, financiera, organizativa de personal, tecnológica, etc..., con independencia de los procesos de transición desde la situación actual a la futura.

En este mismo esquema se determinan aquellos elementos externos a la empresa que se espera constituirán el entorno en el cual va a desarrollar su actividad. Son precisamente estos factores los que van a condicionar su propia supervivencia, ya que una empresa no puede ser considerada fuera del ambiente en el que actúa. Entre estos elementos caben citar los condicionantes legales, la estructura social, la pirámide de población, el desarrollo tecnológico, etc...

Se trataría así de la realización de un estudio de prospectiva en el sentido de estimación del futuro a partir de unos principios que pueden ser aceptados con carácter de generalidad, sin considerar el pasado. Desde este punto de vista los estudios prospectivos permiten un horizonte más amplio dada su desvinculación con los fenómenos actuales, dando paso a la elaboración de unos esquemas que partiendo del futuro vienen hacia hoy. De ahí el importante cambio metodológico que se ha operado con el desarrollo de los métodos prospectivos y sus posibilidades en la gestión de las empresas.

En este camino se puede admitir que la calidad de previsión de un grupo es superior a la que una persona aislada, a condición de que este grupo trabaje convenientemente para que sea válido el principio de que «valen más dos cabezas que una».

Cuando son varias las personas que emiten su opinión sobre un problema concreto, el parámetro más significativo vendrá determinado por los conocimientos específicos de cada persona sobre el tema concreto. Este es quizas el elemento subjetivizante que difícilmente se puede apartar de los esquemas.

El método que vamos a desarrollar tiene por objeto la elaboración de procedimientos en los cuales el *grupo* aparece como figura central capaz de afinar las previsiones para que sean más válidas estadísticamente. El método DELPHI responde a tres imperativos básicos en el sistema de encuestas que utiliza: el anonimato, la retroacción controlada y la respuesta estadística de grupo. Dada la diferenciación existente en los hábitos mentales en cada país e incluso en cada empresa, es conveniente filtrar adecuadamente el esquema DELPHI con objeto de adaptarlo a las necesidades de cada lugar y cada momento. Una de las características de los trabajos de investigación es que unos hallazgos engendran el estudio de otros problemas, lo que da lugar al continuo avance de la ciencia.

El método DELPHI

El método DELPHI (1) es un método de previsión científica y tecnológica que nació gracias a los trabajos de un grupo de investigadores americanos de la RAND CORPORATION en Santa Mónica (Cal.). Entre los miembros más activos de este grupo destacan los nombres de O. HELMER, E.S. QUADE y N. DALKEY. El esquema básico salió a la luz alrededor de 1964.

Para ilustrar este método, vamos a presentar un ejemplo didáctico. En 1966 se había planteado a cuarenta expertos la siguiente cuestión: a partir de qué año futuro estima que se dará en 1 de cada 2 (probabilidad 0.5) el hecho de que la energía suministrada a casi todos los automóviles no provenga ya del petróleo sino de otras fuentes de energía. Esta pregunta fue efectivamente planteada en la realidad, pero de diferente manera: en este ejemplo hemos querido simplificarla. Hay que señalar que la probabilidad introducida aquí, 0.5, es arbitraria. Supongamos que a los cuarenta expertos consultados individualmente, sin ningún contacto entre si, se les ha asignado un número para no ser designados de manera nominativa y que hubieran respondido de la siguiente manera:

(1) 1981 , (2) 2000 , (3) 1983 , (4) 1994
(5) 1978 , (6) 1980 , (7) 1980 , (8) 1982
(9) 1979 , (10) 1982 , (11) 2005 , (12) 1973
(13) 1975 , (14) 1981 , (15) 1988
(16) 1995 , (17) 1989 , (18) 1972 , (19) 1982 , (20) 1989
(21) 1988 , (22) 1980 , (23) 1982 , (24) 1983 , (25) 1985
(26) 1992 , (27) 1982 , (28) 1973 , (29) 2010 , (30) 1980
(31) 1982 , (32) 1973 , (33) 1981 , (34) 1984 , (35) 1986
(36) 1991 , (37) 2000 , (38) 1979 , (39) 1987 , (40) 1974

El histograma correspondiente a estos datos ha sido representado en la figura 10.1.

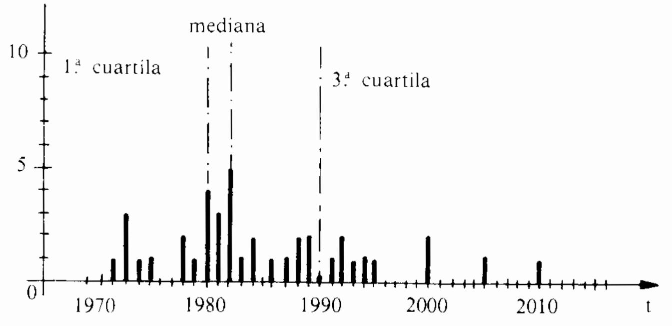


Figura 10.1

---

(1) En relación con el método Delphi se puede consultar:
DALKEY, N., BROWN, B. y COCHRAN, S. Prólogo de A. KAUFMANN: La prévision à long terme par la méthode DELPHI. Ed. Dunod, Paris 1972.
KAUFMANN, A., FUSTIER, M. y DREVET, A.: L'inventique. Ed. E.M.E. París 1970.

La primera cuartila queda localizada alrededor de 1980, la mediana se halla aproximadamente en 1982 y la tercera cuartila muy cerca de 1990, lo que proporciona (1980, 1982, 1990). Es evidente que, en los momentos actuales, estas estimaciones nos parecerán extraodinariamente optimistas.

En el método DELPHI se ha hecho intervenir, en la opinión de los expertos, una reacción del conocimiento estadístico de la opinión del grupo de expertos (continuando siempre sin contacto entre sí). De esta manera, en nuestro ejemplo, una vez conocidos los valores de las tres cuartilas (1980, 1982, 1990) los 40 expertos suministraron nuevos datos:

(1) 1985 ,	(2) 1995 ,	(3) 1990 ,	(4) 1983 ,	(5) 1982
(6) 1980 ,	(7) 1980 ,	(8) 1982 ,	(9) 1978 ,	(10) 1984
(11) 1990 ,	(12) 1981 ,	(13) 1985 ,	(14) 1982 ,	(15) 1981
(16) 1995 ,	(17) 1989 ,	(18) 1974 ,	(19) 1982 ,	(20) 1988
(21) 1984 ,	(22) 1981 ,	(23) 1982 ,	(24) 1984 ,	(25) 1984
(26) 1983 ,	(27) 1982 ,	(28) 1974 ,	(29) 2000 ,	(30) 1980
(31) 1982 ,	(32) 1982 ,	(33) 1981 ,	(34) 1982 ,	(35) 1985
(36) 1987 ,	(37) 1995 ,	(38) 1980 ,	(39) 1988 ,	(40) 1980

Se obtiene el histograma presentado en la figura 10.2 con una primera cuartila alrededor de 1980, una mediana cerca de 1982 y una tercera cuartila aproximadamente en 1985, es decir, (1980, 1982, 1985).

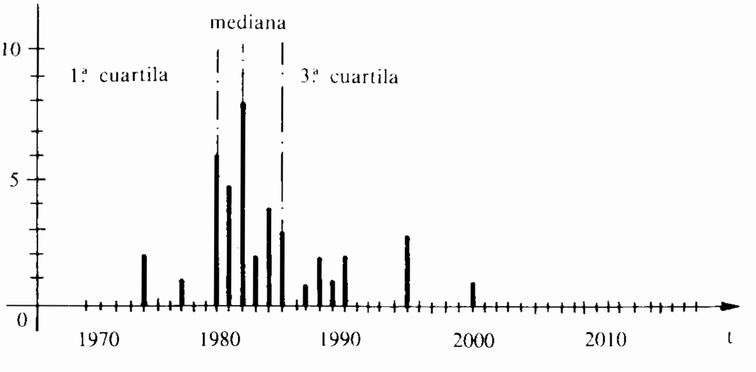


Figura 10.2

Como era previsible, el conocimiento de la opinión de los demás ha reducido estadísticamente la amplitud y arrastra a un mayor optimismo, que la realidad actual ha desechado. En otros casos, por el contrario, se hubiera podido producir un pesimismo más acentuado. De hecho se constata casi siempre un estrechamiento del campo en el que confluyen los datos.

El ejemplo, presentado como una introducción didáctica, no forma parte de la colección de experiencias y previsiones realizadas por la RAND. Veamos, ahora, como la RAND realiza sus experiencias en varias etapas.

1.º) Se pide que las personas interrogadas designen «por correspondencia» las invenciones, descubrimientos y hallazgos científicos que sean susceptibles de realización y/o deseables en los próximos cincuenta años.

2.º) Siempre por correspondencia, se pide a los participantes en qué segmento de tiempo $[T_0, T]$, en donde T_0 es el momento actual y T la fecha más lejana, existirá una probabilidad p ($p \geqslant 0.5$) de que se realice cada una de las invenciones o de indicar si se producirá más allá de los 50 años o incluso nunca. Los resultados son clasificados para formar una estadística. En ella se determinan tres valores: la primera cuartila, la mediana (segunda cuartila) y la tercera cuartila, es decir, (A,B,C,). Se recogen solamente aquellos resultados para los cuales ha podido establecerse un acuerdo razonable.

3.º) Se informa a los participantes, también por correspondencia, de los resultados estadísticos de la segunda etapa y, eventualmente, los encuestadores establecen un diálogo con los expertos que no han querido pronunciarse en la fase 2.ª y también con aquellos que se han alejado sensiblemente de las opiniones de la mayor parte de sus colegas. Se realizan nuevas estimaciones y algunos disidentes aceptan un acercamiento al punto de vista de los más numerosos. Al final de esta etapa se obtienen tres números (A', B', C') tales que $C' - A' < C - A$, aunque esto no es siempre posible.

4.º) Esta fase consiste en repetir, siempre que sea necesario, la 3.ª etapa. Se continúa repitiendo este proceso hasta que los efectos de aceptación sean muy pequeños.

Veamos un caso real tratado por la RAND en 1964-1965. En una primera fase se cursó una invitación a 80 expertos para que participaran en los trabajos. La mitad pertenecía a la RAND. Se formaron 6 grupos con estos 80 expertos con objeto de utilizar sus conocimientos de la mejor manera posible. Algunos expertos pertenecían, a la vez, a varios grupos. Los grupos seleccionaron una lista de 49 temas. En la segunda fase se fijó a los expertos: $p = 0.5$ y $0 \leqslant T \leqslant 50$. Se pudo llegar a un acuerdo sobre 10 temas entre los 49. A lo largo de la tercera y cuarta fase, el número de temas sobre los que se pudo establecer un acuerdo adecuado se elevó finalmente a 30. El resultado final, del que sólo damos un pequeño resumen, fue el siguiente:

— Explotación minera del fondo de los océanos (1980, 1989, 2000).
— Posibilidad de producción económica de proteinas sintéticas (1985, 1990, 2004).
— Sustitución de órganos del cuerpo humano por trasplante o síntesis (1967, 1972, 1982).
— Posibilidad de utilizar medicinas para aumentar el coeficiente de inteligencia (1984, 2012, 2030).
— Traducción automática directa de idiomas (1970, 1975, 1978).
— Control de deficiencias hereditarias (1990, 2000, 2010).
— Utilización de la telepatía como medio de telecomunicación (2025, nunca, nunca).
etc.

Se han empleado una gran cantidad de variantes de este método. Por nuestra parte vamos a proponer un esquema diferente basado en los números borrosos triangulares.

El método FUZZY-DELPHI

En este método los procesos de comunicación con los expertos son los mismos que los del DEPHI, pero los procesos de estimación son sensiblemente diferentes. En la actualidad se pueden realizar ciertas consideraciones que no hubieran sido posibles en 1965:

a) Una previsión a largo plazo no puede situarse en el campo de lo aleatorio sino en el de la incertidumbre. La utilización de probabilidades no parece adecuado en este caso. La teoría de los subconjuntos borrosos se adapta mejor cuando se trata de estimaciones para un tiempo lejano.

b) Los expertos utilizan sus conocimientos personales y subjetivos. Este tipo de conocimiento deber ser tenido en cuenta y utilizar lo borroso en lugar de lo aleatorio para el tratamiento de esta subjetividad. Sin embargo, para pasar a estimaciones más objetivas resulta conveniente el empleo de métodos estadísticos de agregación, por ejemplo la utilización de la media y desviaciones apropiadas.

c) Si se plantea a un experto una pregunta en la forma siguiente: Establecida la posibilidad de conseguir un hecho técnico ¿Puede estimar su fecha más próxima de realización (no antes), su fecha de realización más lejana (no después), la fecha que corresponda al nivel de presunción 1? Le resultará más cómodo la contestación que si se le hace la pregunta de tal manera que intervenga una probabilidad de realización de 0.5 y un análisis de cuartilas.

d) Con la utilización de los números borrosos triangulares (y si es necesario los números borrosos L.R. de DUBOIS y PRADE que los generalizan) el experto puede establecer las correspondientes operaciones en lo incierto, en el supuesto de realizaciones que deben encadenarse en el tiempo (especialmente convoluciones maxmin para la suma de números borrosos). Se recomienda la utilización de números borrosos triangulares por su simplicidad y buena percepción por parte de los que no son matemáticos. Hay que subrayar que los números borrosos triangulares permiten elaborar programas de informática muy sencillos y resultan adecuados para estimar conversaciones sin intercomunicación entre los expertos. Este instrumento es simple y se adapta bien a los modernos medios de tratamiento de la información.

e) Con la utilización del concepto «haz de números borrosos» que vamos a definir seguidamente así como los teoremas I y II, se pueden agregar fácilmente las estimaciones y obtener nuevos ajustes por parte de los expertos.

Existen otras justificaciones que permiten pensar que el método FUZZY-DELPHI resulta muy adecuado para el tratamiento de estos problemas. Para abordarlo con mayor comodidad analicemos previamente algunos aspectos del tratamiento borroso.

Se consideran n observadores (n finito) sobre un mismo objeto, cada uno de los cuales proporciona frente al único objeto considerado un número borroso $\underset{\sim}{A}_i$, i = 1,2, ..., n sin consultar a ningún otro observador. El conjunto de las $\underset{\sim}{A}_i$ forman un «haz de números borrosos» para el objeto considerado. Teniendo en cuenta que $\underset{\sim}{A}_i$ es una estimación subjetiva del observador i, es interesante determinar, a partir del haz, el número borroso que mejor puede representar las n estimaciones y constituir así una información más objetiva.

Cuando se tiene en cuenta la intersección $\bigcap_i \underset{\sim}{A}_i$, se puede observar que puede ser vacía o incluso que su máximo se aparte demasiado de 1 para que sea aceptado. Dado que se pretende pasar de una concepción subjetiva a otras más objetiva se aceptará como número borroso ligado al haz, el «número borroso medio» que definiremos más adelante.

Vamos a enunciar ahora el siguiente *teorema I.*

Sea un haz de n números borrosos $\underset{\sim}{A}^{(i)} \subset R$, $i = 1,2, \ldots, n$ en donde se designa por:

$$A_{\alpha}^{(i)} = [a_1^{(i)} \ , \ a_2^{(i)}]$$

el α-corte de $\underset{\sim}{A}^{(i)}$. Si se tiene que:

$$\overset{m}{a}_1 (\alpha) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_1^{(i)} (\alpha) \quad , \quad \overset{m}{a}_2 (\alpha) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_2^{(i)} (\alpha)$$

y si:

$$\overset{m}{A}_{\alpha} = [\overset{m}{a}_1 (\alpha) \ , \ \overset{m}{a}_2 (\alpha)]$$

define el α-corte de un subconjunto borroso $\overset{m}{\underset{\sim}{A}}$, entonces $\overset{m}{\underset{\sim}{A}}$ es un número borroso.

Para demostrarlo bastará probar que el $\overset{m}{\underset{\sim}{A}}$ obtenido es convexo y normal.

Demostraremos primero la convexidad.

Se puede escribir para cada $\underset{\sim}{A}^{(i)}$:

$$(\alpha' > \alpha) \Rightarrow ([a_1^{(i)} (\alpha'), a_2^{(i)} (\alpha')] \subset [a_1^{(i)} (\alpha), a_2^{(i)} (\alpha)])$$

$$i = 1,2,\ldots,n$$

es decir:

$$a_1^{(i)} (\alpha') \geqslant a_1^{(i)} (\alpha) \ , \ a_2^{(i)} (\alpha') \leqslant a_2^{(i)} (\alpha)$$

$$i = 1,2,\ldots n.$$

Habida cuenta de que los segmentos que constituyen los α-cortes se suman por convolución maxmin, se puede escribir:

$$\sum_{i=1}^{n} a_1^{(i)} (\alpha') \geqslant \sum_{i=1}^{n} a_1^{(i)} (\alpha)$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_2^{(i)} (\alpha') \leqslant \sum_{i=1}^{n} a_2^{(i)} (\alpha)$$

si se dividen ahora por n todos los miembros se tiene:

$$\overset{m}{a}_1(\alpha') \geq \overset{m}{a}_1(\alpha)\,,\ \overset{m}{a}_2(\alpha') \leq \overset{m}{a}_2(\alpha)$$

lo que demuestra que $\overset{m}{\underset{\sim}{A}}$ es convexo.

En lo que se refiere a la normalidad, se tiene:

$$A^{(i)}_{\alpha=1} = [a_1^{(i)}\ (\alpha=1),\ a_2^{(i)}\ (\alpha=1)] \neq \emptyset$$

$$i = 1, 2, ...n.$$

de donde:

$$\left[\sum_{i=1}^{n} a_1^{(i)}\ (\alpha=1),\ \sum_{i=1}^{n} a_2^{(i)}\ (\alpha=1)\right] \neq \emptyset$$

y, de esta manera:

$$\overset{m}{A}_\alpha = [\overset{m}{a}_1\ (\alpha=1)\ ,\ \overset{m}{a}_2\ (\alpha=1)] \neq \emptyset$$

Al ser, pues, $\overset{m}{\underset{\sim}{A}}$ convexo y normal, es un número borroso.

Veamos el ejemplo I. Supongamos un haz formado por los tres números borrosos triangulares de la figura 10.3:

$$\underset{\sim}{A}^{(1)} = (4, 9, 10)\ ,\ \underset{\sim}{A}^{(2)} = (5, 8, 13)\ ,\ \underset{\sim}{A}^{(3)} = (6, 11, 14)$$

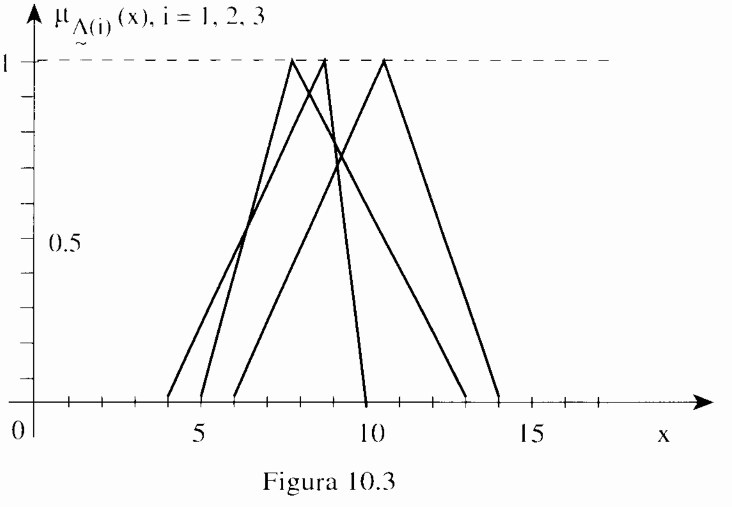


Figura 10.3

$$\forall x \in R: \ \mu_{\underset{\sim}{A}(1)}(x) = 0 \, , \ x \leq 4$$

$$= \frac{x-4}{5} \, , \ 4 \leq x \leq 9$$

$$= 10-x \, , \ 9 \leq x \leq 10$$

$$= 0, \ 10 \leq x$$

$$\forall x \in R: \ \mu_{\underset{\sim}{A}(2)}(x) = 0 \, , \ x \leq 5$$

$$= \frac{x-5}{3} \, , \ 5 \leq x \leq 8$$

$$= \frac{-x+13}{5} \, , \ 8 \leq x \leq 13$$

$$= 0, \ 13 \leq x$$

$$\forall x \in R: \ \mu_{\underset{\sim}{A}(3)}(x) = 0 \, , \ x \leq 6$$

$$= \frac{x-6}{5} \, , \ 6 \leq x \leq 11$$

$$= \frac{-x+14}{3} \, , \ 11 \leq x \leq 14$$

$$= 0, \ 14 \leq x$$

En donde los α-cortes se expresan de la siguiente manera:

$\alpha \in [0, 1]$:

$$A_{\alpha}^{(1)} = [4 + 5\alpha, \ 10-\alpha]$$

$$A_{\alpha}^{(2)} = [5 + 3\alpha, \ 13-5\alpha]$$

$$A_{\alpha}^{(3)} = [6 + 5\alpha, \ 14-3\alpha]$$

Calculemos ahora $\overset{m}{A}_\alpha$

$$\overset{m}{A}_\alpha = \frac{1}{3}\,([4+5\alpha,\ 10-\alpha]\ (+)\ [5+3\alpha,\ 13-5\alpha]\ (+)\ [6+5\alpha,\ 14-3\alpha])$$

$$= \frac{1}{3}\,[15+13\alpha,\ 37-9\alpha]$$

$$= \left[5+\frac{13}{3}\alpha,\ \frac{37}{3} - 3\alpha\right]$$

De donde se obtiene:

$$\mu_{\overset{m}{\underset{\sim}{A}}}(x) = 0 \ , \ x \leq 5$$

$$= \frac{x-5}{13/3} \ , \ 5 \leq x \leq 9\ 1/3$$

$$= \frac{37-3x}{9} \ , \ 9\ 1/3 \leq x \leq 12\ 1/3$$

$$= 0 \ , \ 12\ 1/3 \leq x$$

Con la siguiente representación gráfica:

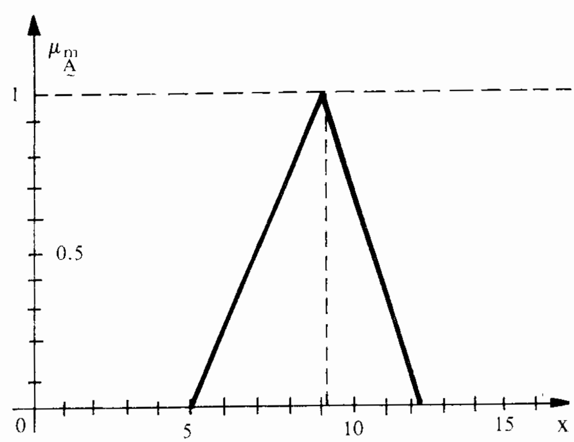


Figura 10.4

Se pueden también utilizar las notaciones específicas de los números borrosos triangulares:

$$\underset{\sim}{A}^{(1)} = (4, 9, 10)$$
$$\underset{\sim}{A}^{(2)} = (5, 8, 13)$$
$$\underset{\sim}{A}^{(3)} = (6, 11, 14)$$
$$\overset{m}{\underset{\sim}{A}} = \frac{1}{3}\ (4+5+6,\ 9+8+11,\ 10+13+14)$$
$$= (5,\ 91/3,\ 12\ 1/3)$$

En el supuesto que el haz se halle compuesto por números borrosos definidos en N o Z, resulta evidente que el número borroso medio puede quedar situado en R. Entonces resulta conveniente definir los números borrosos del haz por funciones de pertencia en forma de escalera, lo que resulta siempre posible.

Realizemos ahora la *suma por convolución maxmin* de dos haces de números borrosos. Supongamos que el primero se halla formado por los números borrosos $\underset{\sim}{A}^{(i)}$, i = 1, 2, ..., n y el segundo por los números borrosos $\underset{\sim}{B}^{(i)}$, i = 1, 2, ..., n. Se puede enunciar el teorema II siguiente:

Si un mismo observador i considera dos objetos y adscribe a cada uno un número borroso tal que como $\underset{\sim}{A}^{(i)}$ y $\underset{\sim}{B}^{(i)}$, si la convolución maxmin de estos dos números adquiere un sentido para los objetos considerados, entonces para n observadores y estos dos objetos, se podrá escribir:

$$\overset{m}{\underset{\sim}{A}}\,(+)\,\overset{m}{\underset{\sim}{B}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (\underset{\sim}{A}^{(i)}\,(+)\,\underset{\sim}{B}^{(i)})$$

En efecto:

$$\overset{m}{A}_{\alpha} = \left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_1^{(i)}(\alpha),\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_2^{(i)}(\alpha)\right]$$

$$\overset{m}{B}_{\alpha} = \left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} b_1^{(i)}(\alpha),\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} b_2^{(i)}(\alpha)\right]$$

$$\overset{m}{A}_\alpha \,(+)\, \overset{m}{B}_\alpha = \left[\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_1^{(i)}(\alpha) + \sum_{i=1}^{n} b_1^{(i)}(\alpha)\right), \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_2^{(i)}(\alpha) + \sum_{i=1}^{n} b_2^{(i)}(\alpha)\right)\right]$$

$$= \left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(a_1^{(i)}(\alpha)+b_1^{(i)}(\alpha)), \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(a_2^{(i)}(\alpha)+b_2^{(i)}(\alpha))\right]$$

$$= \frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n}(a_1^{(i)}(\alpha)+b_1^{(i)}(\alpha)), \sum_{i=1}^{n}(a_2^{(i)}(\alpha)+b_2^{(i)}(\alpha))\right]$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(A_\alpha^{(i)} \,(+)\, B_\alpha^{(i)}), \qquad \alpha \in [0, 1]$$

Y, por la propiedad de los α-cortes, se pasa a:

$$\overset{m}{\underset{\sim}{A}} \,(+)\, \overset{m}{\underset{\sim}{B}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\underset{\sim}{A}^{(i)} \,(+)\, \underset{\sim}{B}^{(i)})$$

Esto resulta válido, evidentemente, cuando n es finito.

Veamos el siguiente ejemplo II:

Para simplificar y dado que resulta más sencillo tomemos de nuevo números borrosos triangulares.

$\underset{\sim}{A}^{(1)} = (4, 9, 10)$, $\underset{\sim}{A}^{(2)} = (5, 8, 13)$, $\underset{\sim}{A}^{(3)} = (6, 11, 14)$

$\underset{\sim}{B}^{(1)} = (3, 7, 9)$, $\underset{\sim}{B}^{(2)} = (3, 6, 10)$, $\underset{\sim}{B}^{(3)} = (8, 9, 10)$

$\overset{m}{\underset{\sim}{A}} = (5,\ 9\ 1/3,\ 12\ 1/3)$

$\overset{m}{\underset{\sim}{B}} = (4\ 2/3,\ 7\ 1/3,\ 9\ 2/3)$

$\overset{m}{\underset{\sim}{A}} \,(+)\, \overset{m}{\underset{\sim}{B}} = (9\ 2/3,\ 16\ 2/3,\ 22)$

$\underset{\sim}{A}^{(1)} \,(+)\, \underset{\sim}{B}^{(1)} = (7, 16, 19)$

$\underset{\sim}{A}^{(2)} \,(+)\, \underset{\sim}{B}^{(2)} = (8, 14, 23)$

$\underset{\sim}{A}^{(3)} \,(+)\, \underset{\sim}{B}^{(3)} = (14, 20, 24)$

$$\overbrace{\underset{\sim}{A} \, (+) \, \underset{\sim}{B}}^{m} = \frac{1}{3} \{(7,\ 16,\ 19)\ (+)\ (8,\ 14,\ 23)\ (+)\ (14,\ 20,\ 24)\}$$

$$= \frac{1}{3} (29,\ 50,\ 66)$$

$$= (9\ 2/3,\ 16\ 2/3,\ 22)$$

Este ejemplo, que resulta trivial, ha tenido por objeto ilustrar este teorema, muy elemental, pero que es conveniente enunciar.

Resulta muy frecuente que varios de los observadores den su valuación personal sobre un mismo objeto, sobre todo cuando se hace referencia a intervalos de confianza y, por extensión, a númerosos borrosos.

Estaremos, ahora, en disposición de desarrollar el método FUZZY-DELPHI.

1.º) Se pide a cada experto que proporcione el número borroso triangular que corresponda a la realización considerada. Se suministra, pues, la fecha más cercana, la fecha con presunción al nivel 1 y la fecha más alejada, es decir:

$$(A_1^{(i)},\ B_1^{(i)},\ C_1^{(i)})$$

en donde el índice superior es el número del experto y el índice inferior es el de la primera fase de estimación.

2.º) Se forma así el haz:

$$(A_1^{(i)},\ B_1^{(i)},\ C_1^{(i)}), \qquad i = 1,\ 2, \ldots n$$

en donde n es el número de expertos. Se calcula entonces el número borroso triangular medio:

$$(\overset{m}{A}_1,\ \overset{m}{B}_1,\ \overset{m}{C}_1)$$

y para cada experto i, las desviaciones:

$$\overset{m}{A}_1 - A_1^{(i)},\ \overset{m}{B}_1 - B_1^{(i)},\ \overset{m}{C}_1 - C_1^{(i)}$$

las cuales pueden ser positivas, negativas o nulas. Estos resultados son suministrados a cada experto únicamente en lo que le concierne personalmente.

3.º) Los expertos proporcionan nuevos números borrosos triangulares:

$$(A_2^{(i)},\ B_2^{(i)},\ C_2^{(i)})$$

y se vuelve a pasar al proceso 2, para esta nueva fase. Se inician de nuevo los ajustes tantas veces como sea necesario.

Si se trata de una relación secuencial, lo que es frecuente en las previsiones a largo plazo, se utilizará la convolución maxmin para la suma y eventualmente el máximo borroso, teniendo en cuenta que el máximo borroso de dos números borrosos triangulares no siempre es un número borroso triangular.

Veamos, ahora, a efectos didácticos, el ejemplo III.

Se considera una aplicación tecnológica, especificada muy concretamente, para la que se pide a 12 expertos (el número debería ser mayor para un caso real) la estimación subjetiva de su realización a través de números borrosos triangulares. El resultado de la primera etapa es el siguiente:

Experto	Fecha más próxima	Fecha presunción al nivel 1	Fecha más lejana
1	1985	1993	2010
2	1982	1984	1990
3	1990	1995	2000
4	1982	1983	1984
5	1990	1995	2005
6	1985	2000	2005
7	2000	2008	2010
8	1985	1997	2003
9	1985	1992	1997
10	1998	1999	2010
11	2000	2010	2010
12	1984	1990	1995

A partir de este haz, se obtiene el número borroso medio:

$$(\overset{m}{A}_1, \overset{m}{B}_1, \overset{m}{C}_1) = (1988.83,\ 1995{,}50,\ 2001.58)$$

$$\simeq (1988,\ 1995,\ 2001)$$

En la figura 10.5 se ha representado $(\overset{m}{A}_1, \overset{m}{B}_1, \overset{m}{C}_1)$ y $(A_1^{(1)}, B_1^{(1)}, C_1^{(1)})$

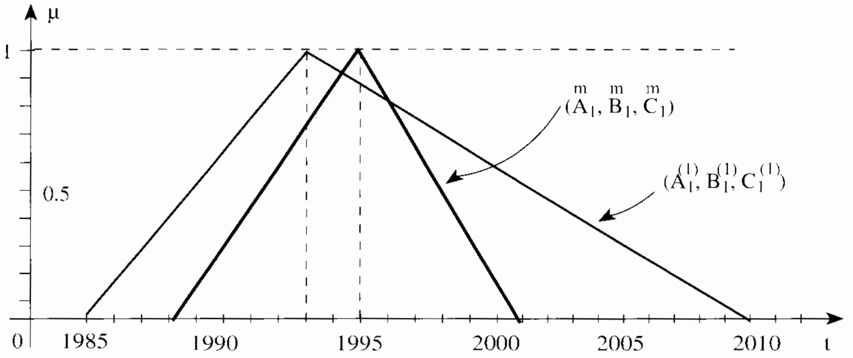


Figura 10.5

$$A - A = 1988 - 1985 = +3$$

$$B - B = 1995 - 1993 = +2$$

$$C - C = 2001 - 2010 = -9$$

Estas desviaciones deberán permitir al experto con índice 1, la reconsideración eventual de sus previsiones y proponer un nuevo número borroso triangular para la etapa siguiente. Esto es válido para los demás expertos con lo que se formará así un nuevo haz.

El proceso debe continuar de la misma manera hasta conseguir un humbral dado por un criterio de parada. Se pueden imaginar diversos criterios de parada. Es posible también limitar de antemano el número de etapas. Todo ello contando con la hipótesis de que las nuevas previsiones se acercan globalmente, ya que esta convergencia no es obligada. Resulta conveniente señalar que si se impone a los expertos que no se alejen del número borroso medio del haz precedente, se puede demostrar que el proceso no será divergente.

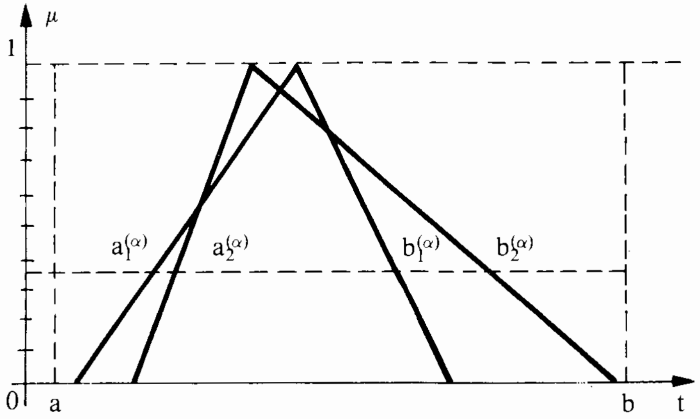
Resulta interesante examinar la desemejanza existente entre dos números borrosos triangulares. Para ello vamos a introducir un concepto particular de distancia. Recordemos antes que la distancia Hamming, como la distancia euclidea, o la distancia de Minkowski que las generaliza, no se adaptan demasiado a los números borrosos, ya que podrían ser nulas entre dos números no borrosos diferentes, si se toman las distancias relativas y no absolutas. Vamos a introducir otra noción de distancia más apropiada a los números borrosos. Consideremos primero el supuesto de los números borrosos triangulares que nos interesan aquí de manera especial.

Se considera el referencial $[a, b] \subset R$. En este referencial se definen los números borrosos triangulares incluidos en su totalidad, en el sentido de subconjuntos borrosos, en este referencial. Sean:

$$N_1\ (\alpha) = [a_1^{(\alpha)},\ b_1^{(\alpha)}]$$

$$N_2\ (\alpha) = [a_2^{(\alpha)},\ b_2^{(\alpha)}]$$

dos números borrosos triangulares definidos por sus α-cortes.



Se definirá, para estos dos números borrosos una «distancia lineal a l izquierda»:

$$\Delta_y\ (\underset{\sim}{N}_1,\ \underset{\sim}{N}_2) = \frac{1}{b—a} \int_0^1 |a_1\ (\alpha) — a_2\ (\alpha)|\ d\alpha$$

y una «distancia lineal a la derecha»:

$$\Delta_d\ (\underset{\sim}{N}_1,\ \underset{\sim}{N}_2) = \frac{1}{b—a} \int_0^1 |b_1\ (\alpha) — b_2\ (\alpha)|\ d\alpha$$

Y de aquí una «distancia lineal»:

$$\Delta\ (\underset{\sim}{N}_1,\ \underset{\sim}{N}_2) = \frac{1}{2}\ (\Delta_y\ (\underset{\sim}{N}_1,\ \underset{\sim}{N}_2) + \Delta_d\ (\underset{\sim}{N}_1,\ \underset{\sim}{N}_2))$$

Resulta necesaria la introducción del factor 1/2 para que $0 \leqslant \Delta \leqslant 1$ en todos los casos.

se puede verificar fácilmente que:

$$1)\ \Delta\ (\underset{\sim}{N}_1, \underset{\sim}{N}_2) \geq 0$$

$$2)\ \Delta\ (\underset{\sim}{N}_1, \underset{\sim}{N}_2) = \Delta\ (\underset{\sim}{N}_2, \underset{\sim}{N}_1)$$

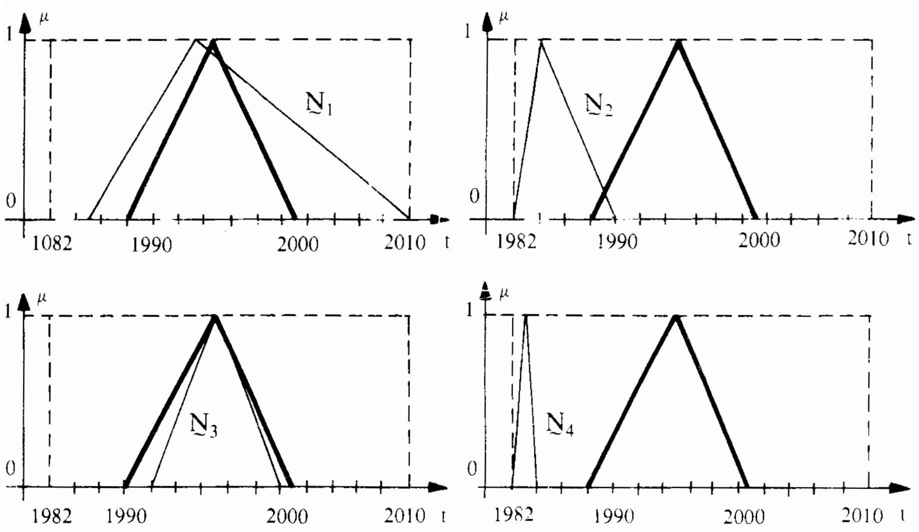
$$3)\ \Delta\ (\underset{\sim}{N}_1, \underset{\sim}{N}_3) \leq \Delta\ (\underset{\sim}{N}_1, \underset{\sim}{N}_2) + \Delta\ (\underset{\sim}{N}_2, \underset{\sim}{N}_3)$$

$$4)\ \Delta\ (\underset{\sim}{N}_1, \underset{\sim}{N}_1) = 0$$

por lo que se trata de una distancia como $\triangle_y$ y $\triangle_d$.

En lo que se refiere a la adaptación de los expertos, parece conveniente comunicarles $\triangle_y$ y $\triangle_d$, y también $\triangle$. Veamos el ejemplo IV sobre aplicación de distancias $\triangle_y$, $\triangle_d$ y $\triangle$, tomando los datos del ejemplo III.

Presentemos los 12 números borrosos triangulares $(A_1^{(i)}, B_1^{(i)}, C_1^{(i)})$ acompañados del número borroso triangular medio $(\overset{m}{A}, \overset{m}{B}, \overset{m}{C})$. El referencial elegido será de 28 años [1982, 2010]. Este referencial es arbitrario y para aquellos expertos que han decidido «nunca» tendrían que sustituir «nunca» por 2010. Si esto resultara demasiado duro siempre se podría aumentar el referencial hacia la derecha, lo que reduciría todas las $\triangle$ en la misma proporción. Seguidamente se podría hacer la normalización.



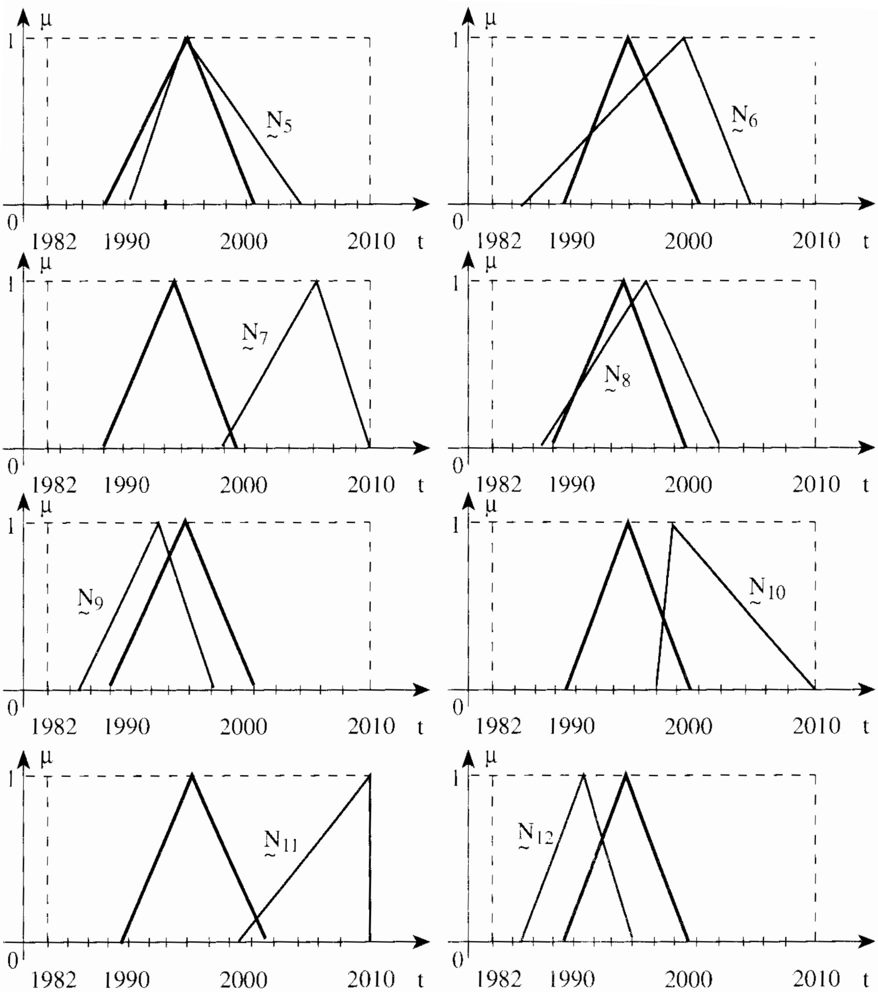


Figura 10.7

Vamos a calcular Δ_y Δ_d y Δ a partir de las propiedades geométricas de las formas triangulares.

Empecemos por $(\underset{\sim}{N}_1, \underset{\sim}{N})$.

Para Δ_y el cálculo se hace directamente

$$\Delta y = \frac{1}{28}\,\frac{(1988-1985)+(1995-1993)}{2} = \frac{1}{28}\cdot\frac{3+2}{2} = \frac{5}{56} = 0{,}089$$

Para $\triangle_d$ es necesario conocer primero el punto de intersección (α, t). Se tiene:

$$\frac{\alpha}{2010-2001} = \frac{1-\alpha}{1995-1993} \text{ es decir } \frac{\alpha}{9} = \frac{1-\alpha}{2} \text{ de donde } (\alpha) = \frac{9}{11}$$

de ahí que:

$$\Delta_d = \frac{1}{28}\left(\frac{(2010-2001)\cdot 9/11}{2} + \frac{(1995-1993)\cdot 2/11}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{28}\left(\frac{9\cdot 9/11}{2} + \frac{2\cdot 2/11}{2}\right) \frac{1}{28}\cdot\frac{85}{22} = 0.137$$

$$\Delta = \frac{1}{2}(0.089 + 0.137) = 0.113$$

Continuemos con $(\underset{\sim}{N}_2, \overset{m}{\underset{\sim}{N}})$

El cálculo es directo para Δ_y y Δ_d

$$\Delta_y = \frac{1}{28}\cdot\frac{(1988-1982)+(1995-1984)}{2} = \frac{1}{28}\cdot\frac{6+11}{2} = \frac{17}{56} = 0.303$$

$$\Delta_d = \frac{1}{28}\;\frac{(1995-1984)+(2001-1990)}{2} = \frac{1}{28}\cdot\frac{11+11}{2} = \frac{22}{56} = 0.392$$

$$\Delta = \frac{0.303 + 0.392}{2} = 0.347$$

Y así sucesivamente se obtiene el siguiente cuadro:

Número del experto	$\Delta_y\,(\underset{\sim}{N}_i, \overset{m}{\underset{\sim}{N}})$,	$\Delta_d\,(\underset{\sim}{N}_i, \overset{m}{\underset{\sim}{N}})$,	$\Delta\,(\underset{\sim}{N}_i, \overset{m}{\underset{\sim}{N}})$
1	0.089	0.137	0.113
2	0.303	0.392	0.347
3	0.035	0.017	0.026
4	0.321	0.517	0.419
5	0.035	0.071	0.053
6	0.075	0.160	0.117
7	0.446	0.392	0.419
8	0.046	0.071	0.058
9	0.107	0.125	0.116
10	0.250	0.232	0.241
11	0.482	0.482	0.455
12	0.160	0.196	0.178

Una vez que el experto i conoce $\overset{m}{\underset{\sim}{N}}$ y $\Delta_y\,(\underset{\sim}{N}_i, \overset{m}{\underset{\sim}{N}})$, $\Delta_d\,(\underset{\sim}{N}_i, \overset{m}{\underset{\sim}{N}})$, $\Delta\,(\underset{\sim}{N}_i, \overset{m}{\underset{\sim}{N}})$, puede modificar su previsión. Se puede volver a iniciar el proceso tantas veces como sea necesario.

Con los números Δ_y, Δ_d, Δ, por tratarse de distancias, es posible formar una relación de desemajanza (que generalmente no es una relación de disimilitud). Evidentemente, complementando en relación a 1 se obtiene una relación de semejanza (que generalmente no es una relación de similitud).

El cuadro siguiente proporciona las 66 distancias que existen entre las previsiones de los 12 expertos. Se trata de una relación de desemejanza por ser simétrica y de diagonal nula, lo que sucede siempre por tratarse de distancias.

$\Delta(\underset{\sim}{N}_i, \overset{m}{\underset{\sim}{N}}_j)$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	0	.36	.14	.43	.11	.11	.40	.08	.13	.22	.43	.19
2		0	.35	.07	.40	.44	.76	.37	.23	.58	.80	.16
3			0	.42	.04	.13	.41	.08	.12	.23	.44	.18
4				0	.47	.51	.83	.44	.30	.66	.87	.24
5					0	.08	.36	.05	.16	.18	.40	.23
6						0	.32	.07	.21	.14	.35	.27
7							0	.39	.53	.17	.03	.59
8								0	.14	.21	.42	.20
9									0	.35	.57	.06
10										0	.21	.41
11											0	.63
12												0

En relación con este método FUZZY-DELPHI, como también sucede en el DELPHI, adquieren un especial interés aquellos expertos que suministrarán previsiones muy diferentes, con objeto de pedirles de una manera indirecta una explicación. Este es el caso, por ejemplo, de los expertos 2 y 7, 2 y 11, 4 y 7, 4 y 11, 11 y 12. Pero se puede llegar más lejos con este análisis, descomponiendo la relación de semejanza en subrelaciones máximas de disimilitud con la utilización de cualquier método que permita poner de manifiesto las propiedades parciales de clasificación y/o de orden.

Si las previsiones a largo plazo por las que nos interesamos son de tal naturaleza que engloban hechos cuya relación tiene lugar de manera secuencial e incluso en paralelo, se utilizará la convolución maxmin para la suma. Como es sobradamente conocido, si dos números borrosos son triangulares su suma también lo es.

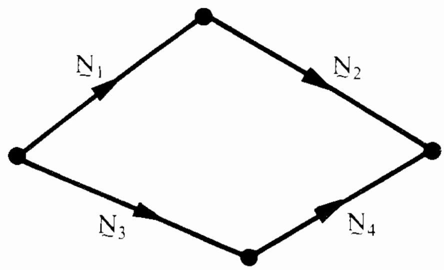


Figura 10.8

Si nos hallamos ante una disposición del tipo indicado en la figura 10.8, en donde $\underset{\sim}{N}_1$, $\underset{\sim}{N}_2$, $\underset{\sim}{N}_3$ y $\underset{\sim}{N}_4$ son hechos que se van a producir, descritos a través de estos números borrosos, si son triangulares, $\underset{\sim}{N}_1$ (+) $\underset{\sim}{N}_2$, $\underset{\sim}{N}_3$ (+) $\underset{\sim}{N}_4$ también lo son, pero en cambio:

$(\underset{\sim}{N}_1 \ (+) \ \underset{\sim}{N}_2) \vee (\underset{\sim}{N}_3 \ (+) \ \underset{\sim}{N}_4)$

no lo son necesariamente.

El método FUZZY-DELPHI que acabamos de describir pone de manifiesto, una vez más, el interés que adquiere, desde el punto de vista práctico, la utilización de la teoría de los subconjuntos borrosos.

CONSIDERACIONES FINALES

Los problemas que se plantean a las empresas, sumidas en los momentos actuales en un claro contexto de incertidumbre en cuanto a los acontecimientos que puedan producirse en el futuro, no tienen siempre una solución con la utilización de técnicas basadas en los tratamientos formales válidos en el ámbito de la certeza y en situaciones de riesgo.

La obra que hemos presentado tiene como objetivo cubrir esta parcela, hasta ahora marginada en los estudios de gestión, quizás por la falta de un cuerpo teórico con suficiente entidad y a la vez flexibilidad para introducirse en los problemas que preocupan al empresario y que cada vez son más importantes por la propia evolución de los sistemas económicos en que la actividad productiva se desenvuelve.

La teoría de los subconjuntos borrosos, cuyo desarrollo en los últimos años ha sido espectacular, tiene unas características que parecen adecuadas a estas necesidades. Faltaba dar un paso que significara la utilización de las posibilidades de esta teoría para el tratamiento del acontecer real de las empresas. Fueron apareciendo algunos trabajos aislados que daban solución teórica a planteamientos concretos, pero quedaba por hacer un trabajo que creímos importante y que consistía en cubrir una gama de problemas suficiente para formar un cuerpo con una estructura sólida.

Una vez en posesión de estos elementos era necesario plantearse la manera en que serían presentados para que tuvieran una receptividad en un amplio sector de lectores que cubriera desde los empresarios hasta los estudiosos de la gestión de empresas entre los que abundan aquellos que no poseen conocimientos profundos de matemáticas o los han olvidado. Se ha seguido un esquema sustentado en tres soportes básicos. En primer lugar la incorporación de un capítulo, el segundo, en el que se describen de manera sencilla los elementos más imprescindibles para comprender los instrumentos que se van a utilizar. En segundo lugar se ha completado cualquier explicación teórica con ejemplos numéricos, o cuando se ha considerado que con ello se facilitaba el camino se ha iniciado una explicación con un ejemplo. Finalmente se ha ido recordando a lo largo del texto las bases de aquellos desarrollos matemáticos que ha sido necesario introducir, con objeto de no dar por sabido más que los conocimientos elementales.

Los capítulos que componen este libro pueden ser estudiados con una cierta independencia de los que les anteceden, siempre que se haya realizado la lectura de los dos primeros que constituyen la parte introductoria. Sin embargo han sido ordenados siguiendo un hilo lógico, que sólo se ha roto cuando las dificultades de un tema aconsejaban posponerlo para dar paso a otros que facilitarían luego su comprensión. Así, dado que una empresa para iniciar su actividad precisa de una inmovilización, se ha empezado por tratar los problemas de la inversión y renovación de equipos. La producción ha quedado representada por dos de sus factores, los materiales (gestión de stocks) y la mano de obra (selección de personal), la comercialización a través de la distribución física de los productos y los problemas de dirección y administración por el análisis del balance, los presupuestos y la previsión a largo plazo.

Cada uno de estos aspectos de la actividad de la empresa ha sido tratado en el ámbito de la gestión por todos aquellos que han sentido una inquietud docente o investigadora, de tal manera que han conseguido el suficiente grado de aceptación para que se convirtieran en esquemas clásicos de estudio cuyo conocimiento se halla generalizado. Con objeto de introducir la teoría de los subconjuntos borrosos en estas facetas de la vida económica de la empresa, hemos recogido un esquema para cada problema que se ha considerado representativo y utilizado de manera habitual, para luego transformarlo en un modelo apto para su tratamiento en el supuesto de que las expectativas futuras sean inciertas. La transición desde los trabajos tradicionales a los que proponemos, se realiza así de manera gradual y sencilla.

Es por ello que en el desarrollo de estos temas no aparecen a pie de página más que unas pocas citas bibliográficas que hacen referencia a obras de autores que se han significado por su singularidad y que no pueden ser considerados como conocimientos generales. En la bibliografía general sólo se han incorporado los trabajos más recientes de subconjuntos borrosos que de alguna manera se hallan relacionados con la economía y gestión de las empresas.

El resultado han sido las páginas de este libro cuya finalidad ha sido la elaboración de un texto que permita el estudio de problemas de siempre, desde una nueva perspectiva que puede resultar muy adecuada por el entorno en que las empresas deberán moverse en un futuro inmediato. La conclusión de este trabajo es sólo una puerta entreabierta al inicio de otros que esperamos seguirán para el mejor conocimiento de esta importante realidad que es la empresa.

BIBLIOGRAFIA

Los trabajos que se incorporan como bibliografía a esta obra se refieren a aspectos de la teoría de subconjuntos borrosos susceptibles de aplicación a la economía y a la gestión de empresas. Hemos, así, renunciado a enumerar la gran cantidad de publicaciones, artículos, tesis, memorias, etc., que, en número superior a 6.000, han sido publicados sobre borrosidad desde la aparición del artículo de ZADEH: FUZZY SETS, para limitarnos a los estudios más recientes.

ASORIN F.: Quantity, quality and knowledge fuzzy representation. First IFSA Congr. Sesion 11-4. Palma de Mallorca. Julio 1985.

BARDOSSY A., BOGARDI I. & DUCKSTEIN L.: Fuzzy decision-making in natural ressource management. Proc. 9th IFAC World Congr. Budapest. Julio 1984.

BEL G., DUBOIS D., FARRENY H. & PRADE H.: Toward the rise of fuzzyrule based systems in the monitoring of manufacturing systems. 6th PROLAMAT Intern. Conf. Software for discrete manufacturing. pp. 109-120. Paris. Junio 1985.

BLISHUN A.F.: Fuzzy adaptive model of decision-making process. Fuzzy Sets & Syst. Vol. 18. N.º 3. pp. 273-282. Abril 1986.

CARLSSON C.: Fuzzy multiple criteria optimization. A critical appraisal. First IFSA Congr. Sesion 2-9. Palma de Mallorca. Julio 1985.

CHANAS S. & KULEJ M.: A fuzzy linear programming problem with equality constraints. Control & Cyber. Vol. 13.6 N.º 4. pp. 195-202. Poland. 1984.

CHANAS S.: Fuzzy network programming. First IFSA Congr. Sesion 8-4. Palma de Mallorca. Julio 1985.

CHOATE S.W. & KANDEL A.: On soft resources management. First IFSA Congr. Sesion 6.2. Palma de Mallorca. Julio 1985.

CHOLEWA W.: Aggregation of fuzzy opinions. An axiomatic approach. Fuzzy Sets & Syst. Vol. 17. N.º 3. pp. 249-258. Dic. 1985.

CZOGALA E.: On the choice of optimal alternatives for decision-making in probabilistic fuzzy environment. Revue Busefal. L.S.I. Université Paul Sabatier. Toulouse. pp. 102-109. Primavera 1986.

DELGADO J.P.: A determination of subjective price by fuzzy numbers. First IFSA Congr. Sesion 2-4. Palma de Mallorca. Julio 1985.

DENG Julong.: Grey state decision-making. Fuzzy Math. Vol. 5. N.° 2. pp. 43-50. Wuhan. Hubei. P.R. China. 1985.
DUBOIS D. & JAULENT M.C.: Some techniques for extracting fuzzy regions. First IFSA Congr. Sesion 5-4. Palma de Mallorca. Julio 1985.
DUBOIS D. & PRADE H.: Fuzzy sets and statistical data. European Jour. of O.R. Vol. 25. N.° 3. pp. 345-356. Junio 1986.
DUMITRU V. & LUBAN F.: On some optimization problems under uncertainty. Fuzzy Sets & Syst. Vol. 18. N.° 3. pp. 257-272. Abril 1986.
FENG D. & LIN M.: A fuzzy decision-making in seismo-sociology. First IFSA Congr. Sesion 4-4. Palma de Mallorca. Julio 1985.
FUSTIER B.: A theory of the fuzzy demand. First IFSA Congr. Sesion 2-4. Palma de Mallorca. Julio 1985.
GARLANDIER J.C.: Estimation of land price in a environment not clearly defined. First IFSA Congr. Sesion 2-4. Palma de Mallorca. Julio 1985.
GOODMAN I.R. & NGUYEN H.T.: Uncertainty models for knowledge-based systems. A unified approach to the measurement of uncertainty. 644 pages. Publ.: North Holland. 1985.
KACPRZYK J. & STRASZAK A.: Flexible regional development strategies. A fuzzy approach. First IFSA Congr. Sesion 3-4. Palma de Mallorca. Julio 1985.
KACPRZYK J.: Toward «human-consistant» multi-stage decision-making and control models using fuzzy sets and fuzzy logic. Fuzzy Sets & Syst. Vol. 18. N.° 3. pp. 299-314. Abril 1986.
KAUFMANN A. & GUPTA M.M.: Fuzzy arithmetic and applications. Volumen I (1985) y volumen II (1986). Publ. Van Nostrand-Rheinhold.
KAUFMANN A.: Les expertons, nouveau concept pour le traitement des données d'un groupe. Note de travail N.° 156. Corenc-Montfleury. Francia. Febrero 1986.
KAUFMANN A.: Gestion d'investissements avec la programmation dynamique et les nombres flous triangulaires. Note de travail N.° 149. Corenc-Montfleury. Francia. Marzo 1986.
KAUFMANN A.: On the relevance of fuzzy sets for operations research. European Jour. of O.R. Vol. 25. pp. 330-335. Junio 1986.
LEHTIMKY A.: A flexibility of manufacturing to consumer order: a multigoal problem. 3rd Internat. Working Seminar on Production Economics. Austria. Febr. 1984.
LEUNG Y.: Towards a flexible framework for regionalization. Environment & Planning. Vol. A. N.° 16. pp. 1613-1632. 1984.
LUHANDJULA M.K.: On possibilistic linear programming. Fuzzy Sets & Syst. Vol. 18. N.° 1. pp. 15-30. Enero 1986.
MARIN R. & OLLERO A.: Application of approximate reasoning to multicriteria optimal design of linear control systems. First IFSA Congr. Sesion 2-2. Palma de Mallorca. Julio 1985.
MATLOKA M.: On fuzzy model of economic dynamics. Proceed. Sympos. Polish on Interval and Fuzzy Math. Eds: Albrycht J. & Miniewski N. Publ. Univ. Techn. Poznan. pp. 131-141. 1985.
MATLOKA M.: On model economic dynamics in a fuzzy environment. Revue Busefal. L.S.I. Univ. Paul Sabatier. Toulouse. pp. 99-110. Verano 1985.
Mc CAIN R.: Fuzzy confidence interval in a theory of economic rationality. First IFSA Congr. Sesion 2-4. Palma de Mallorca. Julio 1985.
MOORE R.E.: Interval Analysis and its applications. First IFSA Congr. Sesions 1-1. Palma de Mallorca. Julio 1985.
MORA M & RIERA T.: Measurement in fuzzy environment. First IFSA Congr. Sesion 2-3. Palma de Mallorca. Julio 1985.

MOSCOV A. & STOEVA S.T.: Marketing strategy for innovation management using fuzzy transportation models. Proceed. Polish Sympos. on Interval an Fuzzy Math. Eds: Albrycht J. & Miniewski H. Publ. Univ. Techn. Poznan. pp. 165-174. 1985.

NAKAMURA K.: Towards fuzzy utility modelling of choice behaviour. First IFSA Congr. Sesion 9-1. Palma de Mallorca. Julio 1985.

OWSINSKI J., ZADROZNY S. & KACPRZYK J.: Fuzzy linear programming for regional agricultural policy analysis and design. First IFSA Congr. Sesion 3-4. Palma de Mallorca. Julio 1985.

PONSARD C.: Fuzzy sets in economics. Foundations of soft decision theory. In: Management Decision Support System. Eds: Kackprezyk J. & Yager R.R. pp. 25-35. Publ.: Verlag T.U.V. Rheinland Köln. 1985.

PONSARD C.: Fuzzy behaviour and general equilibrium in an economic space. First IFSA Congr. Sesion 1-5. Palma de Mallorca. Julio 1985.

RAMIK J. & RIMANEK J.: Inequality relation between fuzzy numbers and its use in fuzzy optimization. Fuzzy Sets & Syst. Vol. 16. N.° 2. pp. 123-138. Julio 1985.

ROUBENS M. & VINSKE P.: Preference modelling. Lecture Notes in Economics and Math. Syst. Publ.: Springer Verlag. 1985.

ROY B.: Methodologie multicritère d'aide à la décision. Ed. Economica. Paris. 423 pág. 1985.

SAKAWA H. & YANQ H.: Interactive fuzzy decision-making for multiple objective non-linear programming using reference membership intervals. First IFSA Congr. Sesion 1-2. Palma de Mallorca. Julio 1985.

SAKAWA M. & YANO H.: An interactive fuzzy decision-making method using constraint problems. IEEE Trans. on Syst., Man & Cyber. Vol. 16. pp. 179-182. 1986.

STOICA M. & CAMASONI I.: The partically compensatory aggregation of economic indicators. First I.F.S.A. Congr. Sesion 4-5. Palma de Mallorca. Julio 1985.

TERRANO T.: Some problems of fuzzy dynamic programming. First IFSA Congr. Sesion 1-1. Palma de Mallorca. Julio 1985.

TRILLAS E. & VALVERDE L.: On mode and applications in approximate reasoning. In: Approximate reasoning in Expert Systems. pp. 157-166. Eds: Bandler W. & others. Publ.: North Holland. 1985.

TURKSEN I.B.: Linguistic decision-making for the transportation of goods. First IFSA Congr. Sesion 6-2. Palma de Mallorca. Julio 1985.

TURKSEN I.B.: Fuzzy sets systems and its applications in production research. 8th Internat. Conf. on Production Research. Univ. of Stuttgart. W. Germany. Agosto 1985.

VERDEGAY J.L.: Application of fuzzy optimization in operational research. Control & Cyber. Vol. 13. N.° 4. pp. 229-240. Poland. 1984.

WANG Kangmao.: Fuzzy measure and fuzzy analysis of the intensity of dedication of a manager. Fuzzy Math. Vol. 5. N.° 1. Wuhan. Hubei. P.R. China. pp. 23-28. 1985.

WHALEN T.: Decision-making under uncertainty with various assumptions about available informations. IEEE Trans. on Syst., Man & Cyber. Vol. 14. pp. 888-900. 1984.

WHALEN T. & SCHOOTT B.: Goal-directed approximate reasoning on a fuzzy production system. In: Approximate reasoning in Expert Systems. pp. 505-518. Eds: Bandler W. & others. Publ. North Holland. 1985.

YAGER R.R.: Application of specificity measure in decisions. Journées Analyse de Problèmes Décision dans un Environmement imprecis et incertain. I.U.T. de Reims. Julio 1985.

YAGER R.R.: Forms of multicriteria decision functions and preference information type. In: Approximate Reasoning in Expert Systems. pp. 167-178. Eds.: Bandler W. & others. Publ. North Holland. 1985.

ZIMMERMANN H.J.: Fuzzy sets theory & its applications. Publ.: Kluwer Academic. Dordrecht. 1985.

ZIMMERMANN H.J.: Applications of fuzzy set theory to mathematical programming. Inform. Sc. Vol. 36. N.º 1 & 2. pp. 29-58. 1985.