Geometría euclídea en el espacio.

Ángulos y distancias

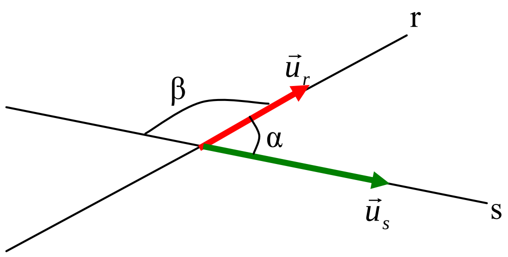
1. Distancia entre dos puntos

Sean $A(x_0,y_0,z_0)$ y $B(x_1,y_1,z_1)$, la distancia entre ambos es igual al módulo del vector

$\overrightarrow{AB}(x_1-x_0, y_1-y_0, z_1-z_0)$ es decir $d(A,B)=\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2+(z_1-z_0)^2}$

2. Ángulo formado por dos rectas.

El ángulo formado por las rectas r y s se define como el menor de los ángulos formados por sus vectores directores.



$$\alpha=\left(\widehat{r,s}\right)=menor\left(\widehat{\vec{u}_r,\vec{u}_s}\right)$$

Sabemos que cosα=$\dfrac{\vec{u}_r\cdot\vec{u}_s}{|\vec{u}_r|\cdot|\vec{u}_s|}$ como α y β son complementarios cosβ=-cosα, si tomamos el valor absoluto nos aseguraremos obtener el menor de los ángulos así: cosα=$\left|\dfrac{\vec{u}_r\cdot\vec{u}_s}{|\vec{u}_r|\cdot|\vec{u}_s|}\right|$ i.e.

$$\boxed{\cos\alpha=\frac{|\vec{u}_r\cdot\vec{u}_s|}{|\vec{u}_r|\cdot|\vec{u}_s|}}.$$

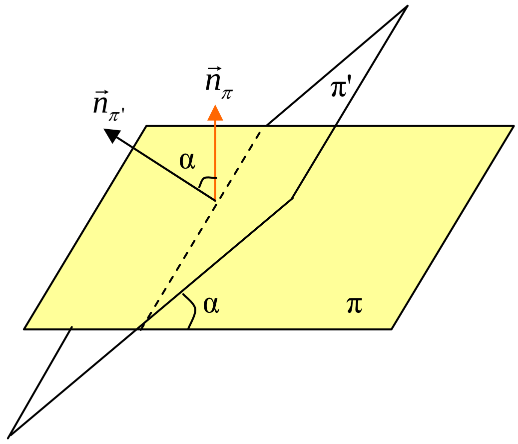
Ejemplo: Calcular el ángulo que forman las rectas $r\equiv\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+3}{-1}=\dfrac{z}{2}$ $\quad y \quad s\equiv\dfrac{x}{3}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z-1}{2}$

Sol: $\cos\alpha=\dfrac{|(1,-1,2)\cdot(3,-1,2)|}{\sqrt{6}\sqrt{14}}=\dfrac{8}{\sqrt{84}}=\dfrac{4}{\sqrt{21}}\Rightarrow\alpha=\arccos\dfrac{4}{\sqrt{21}}=29^{\circ}\ 12'\ 21{,}36''$

Nota: Si las dos rectas se cruzan, el ángulo queda determinado como el formado por dos rectas secantes paralelas a las dadas.

3. Ángulo formado por dos planos.

Dados los planos $\pi \equiv Ax+By+Cz+D=0$ y $\pi' \equiv A'x+B'y+C'z+D'=0$ el ángulo, α, formado por ellos es el mismo que el formado por sus vectores característicos $\alpha = \angle(\pi,\pi') = \angle(\vec{n}_\pi, \vec{n}_{\pi'})$ así



$$\boxed{\cos\alpha = \cos(\pi,\pi') = \cos(\vec{n}_\pi, \vec{n}_{\pi'}) = \frac{|\vec{n}_\pi \cdot \vec{n}_{\pi'}|}{|\vec{n}_\pi| \cdot |\vec{n}_{\pi'}|}}$$

Ejemplo 1: Dados los planos $\pi \equiv 3x+2y+z-10=0$ y $\pi' \equiv 2x-y+az-5=0$ determinar el valor de "a" para que sean perpendiculares. Para ese valor de "a", determinar el vector director de la recta $r = \pi \cap \pi'$

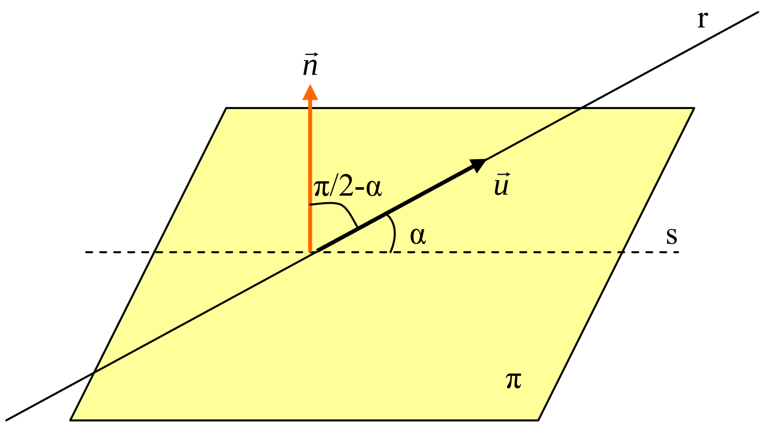
Sol:; a=-4, $\vec{u}(1,-2,1)$

Ejemplo 2: Dados los planos $\pi \equiv mx+y+z-15=0$ y $\pi' \equiv -2x+y-2z=0$, determinar el valor "m" sabiendo que $tg\alpha = \sqrt{2}$, siendo $\alpha = (\pi,\pi')$.

Sol.: m=-5 y m=1

4. Ángulo de recta y plano.

El ángulo formado por una recta y un plano, es el ángulo formado por las rectas r y s, siendo s la proyección de r sobre π. Así, el ángulo formado por la recta r y el plano π será el complementario del ángulo que forman el vector director de r y el vector característico del plano, es decir: $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) =$ $\boxed{sen\alpha = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|}}$



Ejemplo 3: Calcular el ángulo formado por la recta $r \equiv x-2 = \frac{y+3}{2} = 1-z$ con el plano $\pi \equiv 2x-3y+z+2=0$.

Sol.: $sen\alpha = \frac{|(1,2,-1)\cdot(2,-3,1)|}{\sqrt{6}\sqrt{14}} = \frac{5}{\sqrt{84}} \Rightarrow \alpha = arcsen\frac{5}{\sqrt{84}} = 33^{o}\ 3'\ 42{,}83''$

Ejemplo 4: Dados la recta $r \equiv \frac{x}{2} = -y = z$ y el plano $\pi \equiv x+y+mz-15=0$, determinar el valor "m" para que:

a) r y π formen un ángulo de 30º (m=2)

b) r y π sean paralelos (m=-1)

5. Distancia de un punto a un plano.

Sea un punto $P(x_0, y_0, z_0)$ y un plano $\pi \equiv Ax+By+Cz+D=0$ se trata de calcular $d(P,\pi)$

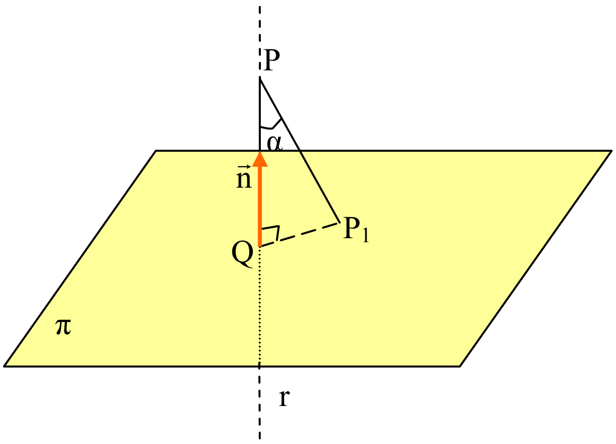
Se define $d(P,\pi)=\min\{d(P,P_1)$ t.q. $P_1 \in \pi\}=d(P,Q)$

● Geométricamente

i. Calcular una recta r perpendicular a π y pase por P i.e. determinada por $\vec{n}(A,B,C)$ y que pase por P.

ii. Hallar $r \cap \pi = Q$

iii. $d(P,\pi)=d(P,Q)$



● Fórmula.

Sea $P_1(x_1, y_1, z_1) \in \pi$ genérico $d(P,\pi)=d(P,Q)=|\overrightarrow{PQ}|$ fijándonos el gráfico $|\overrightarrow{PQ}| = |\overrightarrow{PP_1}|\cos\alpha$ $\overrightarrow{PP_1}$

Haciendo el producto escalar $\vec{n}\cdot\overrightarrow{PP_1} = |\vec{n}|\cdot|\overrightarrow{PP_1}|\cdot\cos\alpha = |\vec{n}|\cdot|\overrightarrow{PQ}| = |\vec{n}|\cdot d(P,\pi)$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow d(P,\pi) = \frac{|\vec{n}\cdot\overrightarrow{PP_1}|}{|\vec{n}|} =$$

$$= \frac{|A(x_1-x_0)+B(y_1-y_0)+C(z_1-z_0)|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \frac{|Ax_1+By_1+Cz_1-Ax_0-By_0-Cz_0|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \underset{P_1\in\pi \Leftrightarrow Ax_1+By_1+Cz_1+D=0}{=}$$

$$\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$ por tanto $$\boxed{d(P,\pi) = \frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}}$$

Ejemplo 5: Hallar la distancia del punto P(1,-2,0) y el plano $\pi \equiv 2x-3y+z-1=0$

Sol.:

●Geométricamente: $r \equiv \begin{cases} r \perp \pi \\ r \text{ pasando por } P \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{-3} = z$ y $Q = r \cap \pi = \left(0, -\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$

luego $d(P,\pi) = d(P,Q) = \dfrac{\sqrt{14}}{2}$

●Fórmula: $d(P,\pi) = \dfrac{|2.1 - 3.(-2) + 1.0 - 1|}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 1}} = \dfrac{7}{\sqrt{14}} = \dfrac{\sqrt{14}}{2}$

6. Distancia entre dos planos

Sean $\pi \equiv Ax+By+Cz+D=0$ y $\pi' \equiv A'x+B'y+C'z+D'=0$, en general $d(\pi,\pi')=\min\{d(P,\pi')$ t.q. $P\in\pi$

- Si no son paralelos $d(\pi,\pi')=0$
- Si son paralelos

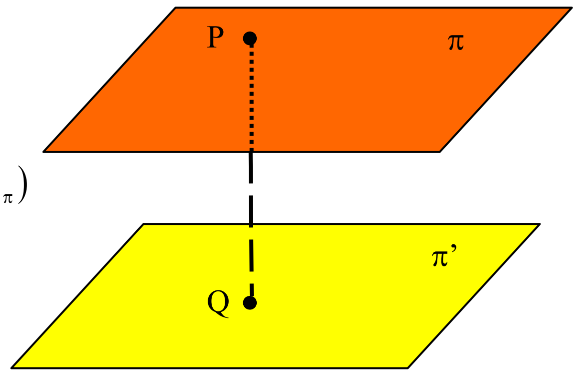
- Forma geométrica

$d(\pi,\pi')=d(P,\pi')$ t.q. $P\in\pi$ para calcularla:

i. Hallar la recta r tal que $r\perp\pi$ y pasa por P i.e. $r = (P, \vec{n}_\pi)$

ii. Hallar $r\cap\pi'=Q$

iii. $d(\pi,\pi')=d(P,\pi')=d(P,Q)$



- Fórmula

Al ser paralelos sus ecuaciones solo difieren en los términos independientes es decir:

$\pi\equiv Ax+By+Cz+D=0$ y $\pi'\equiv Ax+By+Cz+D'=0$

$d(\pi,\pi')=d(P,\pi')$ t.q. $P(x_0,y_0,z_0)\in\pi$ ya sabemos que

$$d(P,\pi')=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D'|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \underbrace{=}_{P\in\pi\Leftrightarrow Ax_0+By_0+Cz_0+D=0\Leftrightarrow Ax_0+By_0+Cz_0=-D} \frac{|D'-D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

Nota: Para aplicar la fórmula las ecuaciones de los planos tienen que tener los mismos coeficientes de las variables.

<u>Ejemplo 6</u>: Hallar la distancia entre los planos $\pi\equiv 4x-2y+2z+4=0$ y $\pi'\equiv 2x-y+z-3=0$

- Geométricamente:

i. $r \perp \pi$ y pasa por $P(0,2,0) \in \pi \iff r(P(0,2,0), \vec{n}_\pi(2,-1,1)) \Rightarrow r \equiv \frac{x}{2} = \frac{y-2}{-1} = z \iff \begin{cases} x - 2z = 0 \\ y + z - 2 = 0 \end{cases}$

ii. Calcular Q como $r \cap \pi'$ i.e. resolver el sistema $\begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ x \quad - 2z = 0 \\ y + z = 2 \end{cases} \Rightarrow Q\left(\frac{5}{3}, \frac{7}{6}, \frac{5}{6}\right)$

iii. $d(\pi,\pi')=d(P,Q)=\sqrt{\left(\frac{5}{3}\right)^2 + \left(\frac{7}{6}-2\right)^2 + \left(\frac{5}{6}\right)^2} = \frac{1}{6}\sqrt{150} = \frac{5\sqrt{6}}{6}$

- Fórmula

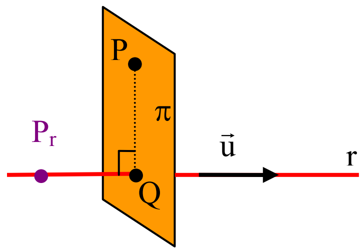
$$d(\pi,\pi')=\frac{|-3-2|}{\sqrt{4+1+1}} = \frac{5}{\sqrt{6}} = \frac{5\sqrt{6}}{6}$$

7. Distancia de un punto a una recta

Sea un punto $P(x_0,y_0,z_0)$ y una recta $r \equiv \begin{cases} P_r(x_1, y_1, z_1) \\ \vec{u}(a,b,c) \end{cases}$ definimos la $d(P,r)=\min\{d(P,P_r)$ con $P_r \in r$

- Forma geométrica:

i. Crear un plano $\pi \perp r$ que pasa por P i.e. el vector normal del plano será el vector director de la recta $\pi(P, \vec{u})$

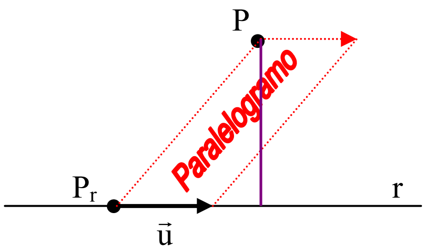


ii. Hallar $Q=\pi \cap r$

iii. $d(P,r)=d(P,Q)$

- Fórmula

Según observamos en el gráfico adjunto, $d(P,r)$=altura del paralelogramo determinado por el vector director de r y por el vector P_rP.



Sabemos que el área de un paralelogramo determinado por los vectores $\vec{u}$ y $\overrightarrow{P_rP}$ es:

Área del paralelogramo $\left|\overrightarrow{P_rP} \wedge \vec{u}\right| = |\vec{u}| \cdot h = |\vec{u}| \cdot d(P,r) \Rightarrow$

$$\boxed{d(P,r) = \frac{\left|\overrightarrow{P_rP} \wedge \vec{u}\right|}{|\vec{u}|}}$$

Ejemplo 7: Dado el punto P(1,-1,1) y la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{-1} = z+5$ calcular la d(P,r)

- Geométricamente:

i. $\pi \perp r$ que pasa por P. $\vec{u}(2,-1,1) \Rightarrow 2x - y + z + D = 0$ imponiéndole que pase por el punto P $\Rightarrow$

$2+1+1+D=0 \Rightarrow D=-4 \Rightarrow \pi \equiv 2x-y+z-4=0$

ii. hallamos $Q=\pi \cap r$ (lo más fácil en paramétricas) $\Rightarrow$ Q(7/3,-11/3,-13/3)

iii. d(P,Q)=d(P,r)=$\frac{\sqrt{336}}{3}$

- Fórmula:

$$d(P,r) = \frac{\left|\overrightarrow{P_rP} \wedge \vec{u}\right|}{|\vec{u}|}$$ con P(1,-1,1), P_r(1,-3,-5), $\vec{u}(2,-1,1) \Rightarrow$

$$d(P,r) = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} -2 & -6 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 0 & -6 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{4+1+1}} = \frac{\sqrt{224}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{336}}{3}$$

8. Distancia entre dos rectas

Sean dos rectas cuyas determinaciones lineales son:

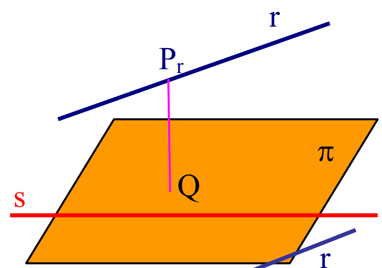
$$r \equiv \begin{cases} P_r(x_0, y_0, z_0) \\ \vec{u}_r \end{cases} \quad y \quad s \equiv \begin{cases} P_s(x_1, y_1, z_1) \\ \vec{u}_s \end{cases}$$ definimos la $d(r,s) = \text{mín}\{d(P_r, s) \ \text{tq} \ P_r \in r\}$

- Si r y s se cortan o coinciden entonces d(r,s)=0
- Si son paralelas d(r,s)=d(P_r,s)
- Si se cruzan entonces

- Geométricamente:

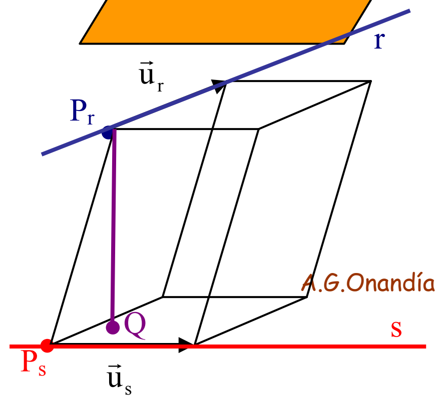
i. Construir un plano π que contenga a s y sea paralelo a r

ii. d(r,s)=d(r,π)=d(P_r,π)



- Fórmula

d(r,s)=altura del paralelepípedo determinado por $\vec{u}_r$, $\vec{u}_s$, $\overrightarrow{P_rP_s}$



Sabemos que:

volumen del paralelepípedo = $\left|\overrightarrow{P_rP_s}\cdot(\vec{u}_r\wedge\vec{u}_s)\right|$

volumen del paralelepípedo = área de la base por la altura= $|\vec{u}_r\wedge\vec{u}_s|\cdot h$

Luego: $\left|\overrightarrow{P_rP_s}\cdot(\vec{u}_r\wedge\vec{u}_s)\right| = |\vec{u}_r\wedge\vec{u}_s|\cdot h \Rightarrow h=\dfrac{\left|\overrightarrow{P_rP_s}\cdot(\vec{u}_r\wedge\vec{u}_s)\right|}{|\vec{u}_r\wedge\vec{u}_s|} \Leftrightarrow$

$$\boxed{d(r,s)=\frac{\left|\overrightarrow{P_rP_s}\cdot(\vec{u}_r\wedge\vec{u}_s)\right|}{|\vec{u}_r\wedge\vec{u}_s|}}$$

<u>Ejemplo 8</u>: Calcular la distancia de r a s siendo: $r\equiv\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{z}{-1}$ y $s\equiv -x=y-3=\dfrac{z-2}{-1}$.

• Geométricamente:

i. Plano que contiene a r y es paralelo a s $\pi\equiv\begin{vmatrix} x-1 & y & z\\ 2 & 0 & -1\\ -1 & 1 & -1\end{vmatrix}=x+3y+2z-1=0$

ii. $d(P_s,\pi)=\dfrac{|9+4-1|}{\sqrt{1+9+4}}=\dfrac{12}{\sqrt{14}}=\dfrac{6}{7}\sqrt{14}$

• Fórmula

$P_r(1,0,0)$ $\quad P_s(0,3,2)$ $\quad \overrightarrow{P_rP_s}(-1,3,2)$

$\vec{u}_r(2,0,-1)$ $\quad \vec{u}_s(-1,1,-1)$ $\quad \vec{u}_r\wedge\vec{u}_s=\begin{vmatrix} i & j & k\\ 2 & 0 & -1\\ -1 & 1 & -1\end{vmatrix}=(1,3,2) \Rightarrow d(r,s)=\dfrac{\left\|\begin{matrix} -1 & 3 & 2\\ 2 & 0 & -1\\ -1 & 1 & -1\end{matrix}\right\|}{\sqrt{1+9+4}}=\dfrac{12}{\sqrt{14}}=\dfrac{6\sqrt{14}}{7}$