

MODULACION DIGITAL BINARIA

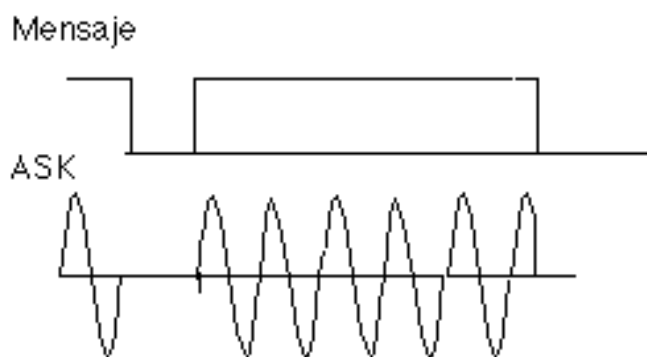
Hasta ahora hemos estudiado la transmisión de señales digitales en banda base. En la práctica, bien sea por compartir el canal (por ejemplo el aire) o por poder usar antenas de dimensiones razonables, es necesario modular. Al modular se modifica la amplitud, la frecuencia o la fase de una portadora que puede ser una senoide, en función del mensaje. En el caso de que el mensaje sea una señal binaria esto se denomina modulación por cambio de amplitudes (ASK=Amplitude Shift Keying), modulación por cambio de frecuencias (FSK= Frequency Shift Keying) o modulación por cambio de fase (PSK= Phase Shift Keying).

A continuación analizaremos las características más resaltantes de estos tipos de modulación como son: La potencia, el espectro, el ancho de banda, moduladores y demoduladores y la probabilidad de error.

ASK: Modulación digital de amplitud.

Consiste en cambiar la amplitud de la senoide entre dos valores posibles; si uno de los valores es cero se le llama OOK (On-Off keying). La aplicación más popular de ASK son las transmisiones con fibra óptica ya que es muy fácil "prender" y "apagar" el haz de luz; además la fibra soporta las desventajas de los métodos de modulación de amplitud ya que posee poca atenuación. Otra aplicación es el cable transoceánico.

El modulador es un simple multiplicador de los datos binarios por la portadora. A continuación se ilustra un ejemplo de un mensaje en banda base y el resultado de modular en ASK(OOK).



ASK puede ser definido como un sistema banda base con una señal para el "1" igual a $s_1(t)$ y una señal para el cero igual a $s_0(t) = 0$.

$$s_1(t) = \sqrt{2P_s} \text{Sen } \omega_c t = A \text{Sen } \omega_c t$$

$$P_s = \frac{A^2}{2}$$



Definamos una señal $b(t)$ que toma el valor de 1 cuando el bit enviado es un UNO y -1 cuando el bit enviado es un CERO.

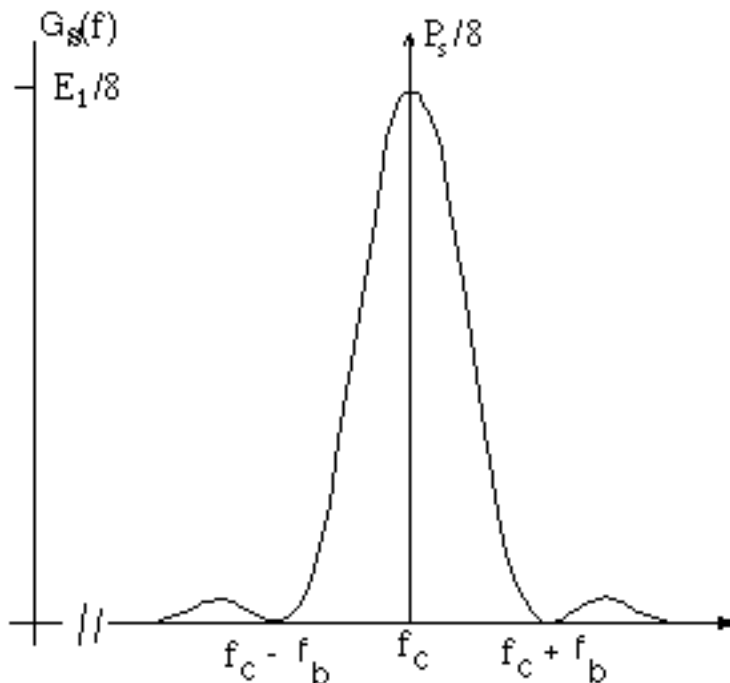
La señal ASK puede expresarse como:

$$s_{\text{ASK}}(t) = \sqrt{2P_s} \left(\frac{b(t) + 1}{2} \right) \text{Sen } \omega_c t = \sqrt{\frac{P_s}{2}} (b(t) + 1) \text{Sen } \omega_c t$$

Como se observa $b(t)$ es una onda NRZ polar, por lo tanto su espectro, que es infinito, quedará trasladado a f_c . Como el espectro de $b(t)$ es un Sinc^2 con cortes

cada $f_b=1/t_b$, y como siempre se elige f_c mucho mayor que f_b , entonces el espectro de la señal ASK quedará:

$$G_{S_{ASK}}(f) = \frac{P_s}{8} \left[\delta(f - f_c) + \delta(f + f_c) + t_b \text{Sinc}^2(f + f_c)t_b + t_b \text{Sinc}^2(f - f_c)t_b \right]$$



Se observa que el ancho de banda práctico es $2f_b$ el cual es el doble del requerido en transmisión banda base. Otro parámetro que será muy útil sobre todo en modulación multinivel es la constelación que a continuación definiremos:

La constelación consiste en representar la señal modulada en función de una o varias funciones ortonormales (ortogonales de energía unitaria).

$$u_1(t) = \sqrt{\frac{2}{t_b}} \text{Sen } \omega_c t$$

$$E = \int_0^{t_b} (u_1(t))^2 dt = \int_0^{t_b} \left(\sqrt{\frac{2}{t_b}} \text{Sen } \omega_c t \right)^2 dt$$

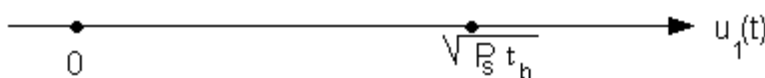
$$\text{Si } f_c = n f_b$$

$$E = 1$$

Por ejemplo si $f_c = n f_b$ la función $u_1(t)$ definida como sigue, tiene energía unitaria en un intervalo de tiempo igual a t_b .

La gráfica de $s_{ASK}(t)$ en función de $u_1(t)$ recibe el nombre de constelación. En este caso luciría como:

$$s_{ASK}(t) = \sqrt{\frac{P_s}{2}} (b(t) + 1) \text{Sen } \omega_c t = \sqrt{\frac{P_s t_b}{4}} (b(t) + 1) u_1(t)$$

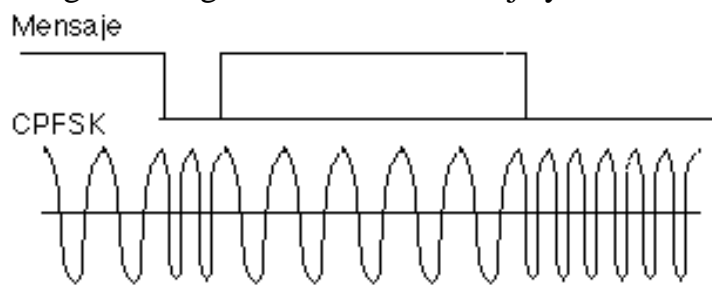


La distancia entre los posibles valores de la señal es muy importante, ya que representará la fortaleza que tiene la modulación frente al ruido. Observe que si los símbolos están más distanciados, será más difícil que uno se convierta en otro por efectos del ruido añadido en el sistema.

FSK: Modulación digital de frecuencia.

Consiste en variar la frecuencia de la portadora de acuerdo a los datos. Si la fase de la señal FSK es continua, es decir entre un bit y el siguiente la fase de la senoide no presenta discontinuidades, a la modulación se le da el nombre de CPFSK (Continuous Phase FSK) y será la que analizaremos a continuación.

La siguiente figura ilustra un mensaje y la señal CPFSK resultante



Veamos CPFSK binario

$$s_{\text{FSK}}(t) = \sqrt{2P_s} \cos(\omega_c t + b(t)\Omega)t = \sqrt{2P_s} \cos\Omega t \cos\omega_c t - \sqrt{2P_s} b(t) \text{Sen}\Omega t \text{Sen}\omega_c t$$

La señal será una senoide de frecuencia $f_A = (\omega_c + \Omega)/2\pi$ si se transmite un UNO y una senoide de frecuencia $f_B = (\omega_c - \Omega)/2\pi$ cuando se transmita un CERO. La frecuencia de portadora sin modular es $(f_A + f_B)/2 = f_c$.

La continuidad de la fase se logra cuando

$$\begin{aligned} (\omega_c + \Omega)t_b &= n\pi & n & \text{par} \\ (\omega_c - \Omega)t_b &= m\pi & m & \text{par} \end{aligned}$$

La Densidad espectral de potencia de la señal FSK puede obtenerse conociendo que:

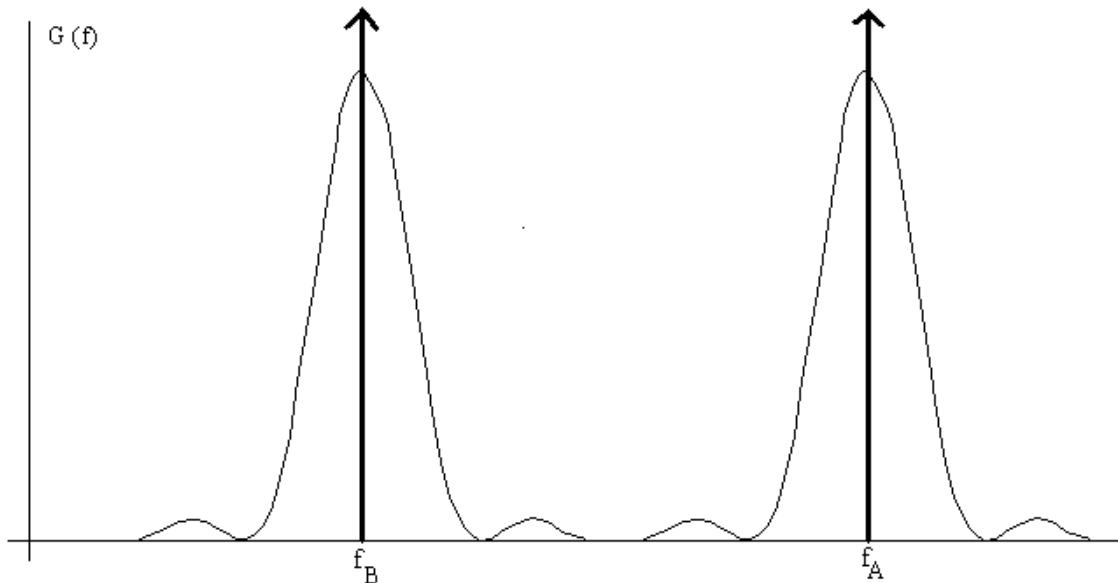
$$\text{DEP de } \cos\Omega t = \frac{1}{4} \left[\delta\left(f - \frac{\Omega}{2\pi}\right) + \delta\left(f + \frac{\Omega}{2\pi}\right) \right]$$

$$\text{DEP de } b(t)\text{Sen}\Omega t = \left[t_b \text{Sinc}^2\left(f - \frac{\Omega}{2\pi}\right)t_b + t_b \text{Sinc}^2\left(f + \frac{\Omega}{2\pi}\right)t_b \right]$$

Por lo tanto la DEP de la señal CPFSK presentada será:

$$G_{\text{FSK}} = \frac{P_s}{8} \left[\delta(f - f_A) + \delta(f + f_A) + \delta(f - f_B) + \delta(f + f_B) \right] +$$

$$\frac{P_s}{8} \left[t_b \text{Sinc}^2(f - f_A)t_b + t_b \text{Sinc}^2(f + f_A)t_b + t_b \text{Sinc}^2(f - f_B)t_b + t_b \text{Sinc}^2(f + f_B)t_b \right]$$



Observe que esto puede verse como dos ondas ASK

Otra condición que generalmente se aplica es que las dos frecuencias sean ortogonales en un intervalo t_b . Es decir:

$$\int_0^{t_b} s_1(t)s_0(t)dt = 0 = \int_0^{t_b} \text{Cos}(2\pi f_A t)\text{Cos}(2\pi f_B t)dt =$$

$$\int_0^{t_b} [0.5\text{Cos}(2\pi(f_A + f_B)t) + 0.5\text{Cos}(2\pi(f_A - f_B)t)]dt =$$

$$\int_0^{t_b} 0.5\text{Cos}(4\pi f_c t) + \int_0^{t_b} 0.5\text{Cos}(2\Omega t)dt$$

Si se elige la frecuencia de portadora de manera que en un intervalo de tiempo igual a t_b quepa un número entero de períodos (es decir $nt_c=t_b=(n/f_c=t_b)$ entonces $4\pi f_c t_b=4\pi n$; esto implica anular la primera de las dos integrales. Para anular la otra se debe cumplir que

$$2\Omega t_b = 2k\pi$$

$$\frac{\Omega}{2\pi} = \frac{k}{2t_b}$$

Si se cumple esta condición entonces las dos señales son ortogonales en el intervalo t_b .

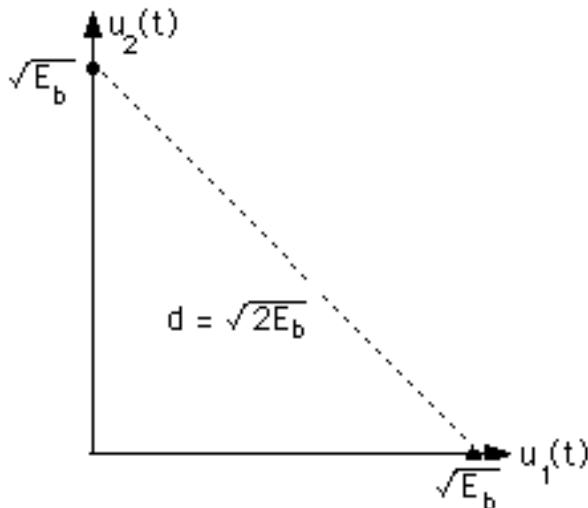
La constelación de la señal CPFSK se construye luego de definir las siguientes funciones ortonormales

$$u_1(t) = \sqrt{\frac{2}{t_b}} \cos 2\pi m f_b t = \sqrt{\frac{2}{t_b}} \cos 2\pi f_A t$$

$$u_2(t) = \sqrt{\frac{2}{t_b}} \cos 2\pi n f_b t = \sqrt{\frac{2}{t_b}} \cos 2\pi f_B t$$

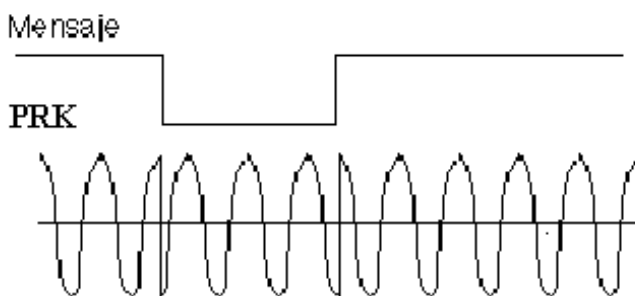
$$s_1(t) = \sqrt{E_b} u_1(t)$$

$$s_0(t) = \sqrt{E_b} u_2(t)$$



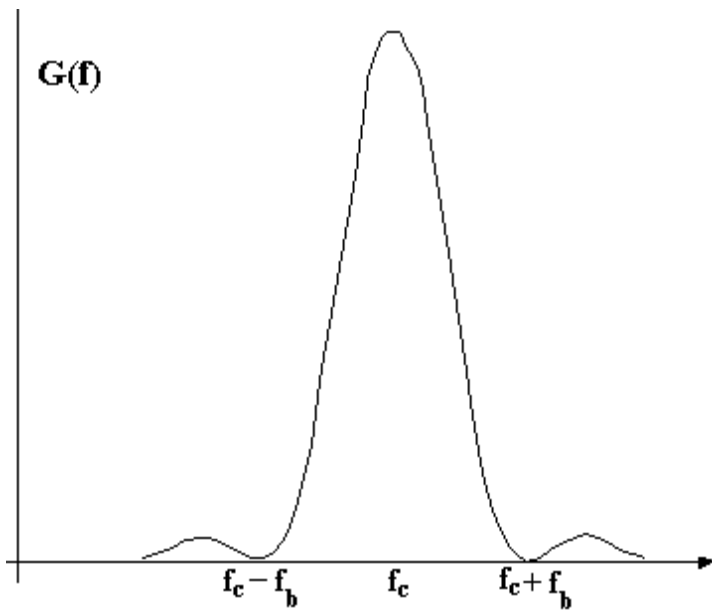
PSK: Modulación digital de fase.

Aunque PSK no es usado directamente, es la base para entender otros sistemas de modulación de fase multinivel. Consiste en variar la fase de la sinusoide de acuerdo a los datos. Para el caso binario, las fases que se seleccionan son 0 y π . En este caso la modulación de fase recibe el nombre de PRK (Phase Reversal Keying). Observe, en la siguiente figura, una señal PRK:



La densidad espectral de potencia DEP de la señal PRK viene dada por:

$$G_{s_{prk}}(f) = \frac{P_s t_b}{2} [\text{sinc}^2(f + f_c)t_b + \text{sinc}^2(f - f_c)t_b]$$



El espectro es parecido al de ASK solo que no incluye las deltas de Dirac. Esto implica un ahorro de potencia. El ancho de banda resulta igual al de ASK o sea $2f_b$

La constelación de la señal PRK se obtiene definiendo la señal

$$u_1(t) = \sqrt{\frac{2}{t_b}} \cos \omega_c t$$

La constelación muestra que esta es la modulación que presenta la mayor distancia entre los puntos de la misma; esto la convierte en la de mayor fortaleza frente al ruido.

