

Anàlisi de Fourier

J. Fàbrega

Departament de Matemàtica Aplicada i Telemàtica

Índex

1	Espais de Hilbert	2
1.1	Espais de funcions amb producte escalar	2
1.2	Espais de Hilbert	5
1.2.1	Convergència de successions	5
1.2.2	Successions de Cauchy	6
1.2.3	Completesa	7
1.2.4	Famílies de funcions ortonormals	7
1.2.5	Mètode d'ortonormalització de Gram-Schmidt	9
1.3	Sèries de Fourier	9
1.3.1	Desigualtat de Bessel	12
1.4	Aproximacions mitjançant combinacions lineals	13
2	Sèries de Fourier trigonomètriques	17
2.1	Convergència puntual de les sèries de Fourier	17
2.2	Convergència uniforme de la sèrie de Fourier	21
2.3	El fenomen de Gibbs	24
2.4	Derivació de les sèries de Fourier	26
2.5	Integració de les sèries de Fourier	27
2.6	Ordre de magnitud dels coeficients de Fourier	28
3	Transformació de Fourier	31
3.1	De la sèrie a la transformada de Fourier	31
3.2	Transformació de Fourier en $L(-\infty, \infty)$	32
3.2.1	Propietats	34
3.2.2	Convolució	36
3.3	Transformació de Fourier en $L^2(-\infty, \infty)$	37
3.4	Fòrmula de Parseval	39
3.5	Transformades de Fourier de funcions generalitzades	40
3.5.1	Funció delta de Dirac	40
3.5.2	Funció esgraó unitari	40
3.5.3	Funció tren d'impulsos	42
3.6	De la transformada a la sèrie de Fourier	43
3.7	Dues aplicacions de la transformació de Fourier	44
3.7.1	Anàlisi de Fourier i sistemes lineals	44
3.7.2	La solució de d'Alambert de l'equació d'ona	45
4	Sèries i transformades discretes de Fourier	47
4.1	Sèries discretes de Fourier	47
4.2	Transformada de Fourier per a temps discret	50
4.3	Transformada discreta de Fourier	52
4.3.1	Propietats de la transformada discreta de Fourier	53
A	Apèndix	56
A.1	Derivades laterals	56
A.2	Funcions contínues a trossos	57

L'any 1807 Fourier va afirmar que una funció “arbitraria” es pot expressar com a combinació de funcions trigonomètriques sinus i cosinus. Naixia així una de les branques de les matemàtiques, l'*Anàlisi de Fourier*, que ha esdevingut més activa i important tant per les seves repercussions teòriques en altres branques de la pròpia matemàtica com per l'enorme importància de les seves aplicacions.

Aquestes combinacions de funcions sinus i cosinus, anomenades *sèries de Fourier*, s'han convertit en un instrument indispensable en el tractament matemàtic dels fenòmens periòdics —vibracions, moviments ondulatoris, senyals elèctrics— estudiats a la física i a l'enginyeria. Concretament, a l'enginyeria de telecomunicació, les sèries i transformades de Fourier són part essencial del nucli matemàtic de la teoria del processament del senyal. Aquestes tècniques espectrals permeten estudiar els senyals i sistemes en el domini freqüencial, la qual cosa facilita sovint la seva anàlisi i disseny.

1 Espais de Hilbert

El marc matemàtic adequat a l'estudi de les sèries i transformades de Fourier el constitueixen els anomenats espais de Hilbert. Per tal d'introduir-los, recordem en primer lloc la teoria bàsica dels espais vectorials amb producte escalar.

1.1 Espais de funcions amb producte escalar

Donat un espai vectorial \mathbb{X} sobre el cos \mathbb{C} dels nombres complexos, un *producte escalar* definit en \mathbb{X} és una aplicació

$$(\cdot, \cdot) : \mathbb{X} \times \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{C}$$

que verifica les propietats següents:

1. $(x, y) = \overline{(y, x)}$
2. $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$
3. $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$
4. $(x, x) \geq 0$ i $(x, x) = 0 \Rightarrow x = 0$

on $x, y, z \in \mathbb{X}$ i $\lambda \in \mathbb{C}$.

De les propietats anteriors es dedueix fàcilment:

5. $(x, \lambda y) = \overline{\lambda}(x, y)$, $x, y \in \mathbb{X}$, $\lambda \in \mathbb{C}$
6. $(x, y + z) = (x, y) + (x, z)$, $x, y, z \in \mathbb{X}$.

Nota: Si l'espai vectorial \mathbb{X} és sobre el cos \mathbb{R} dels nombres reals, podem definir un producte escalar com una aplicació $(\cdot, \cdot) : \mathbb{X} \times \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$, satisfent les Propietats 2, 3 i 4 anteriors (ara $\lambda \in \mathbb{R}$), i escrivint la Propietat 1 com:

1. $(x, y) = (y, x)$

El fet de considerar el cas complex no afageix al tractament cap complicació addicional i la generalitat que es guanya és util en moltes aplicacions. Així ho fem doncs en aquest capítol.

Exemple 1.1: A $\mathbb{C}^n = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n); x_i \in \mathbb{C}\}$, espai vectorial sobre \mathbb{C} , es pot introduir un producte escalar definit:

$$(x, y) = \sum_{k=0}^n x_k \overline{y_k}.$$

Nota: D'acord amb el comentari anterior, aquest exemple constitueix la generalització al cas complex del producte escalar en \mathbb{R}^n , espai vectorial sobre \mathbb{R} , definit per:

$$(x, y) = \sum_{k=0}^n x_k y_k.$$

□

Els espais vectorials amb producte escalar que ens interessarà considerar seran sovint espais de funcions (de dimensió infinita).

Exemple 1.2: A l'espai vectorial $C[a, b]$ de les funcions complexes de variable real t , $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, contínues, amb la suma i producte per un escalar definits per les expressions

$$(x + y)(t) = x(t) + y(t), \quad (\lambda x)(t) = \lambda x(t),$$

es pot definir un producte escalar mitjançant l'expressió

$$(x, y) = \int_a^b x(t) \overline{y(t)} dt;$$

on

$$\int_a^b x(t) dt = \int_a^b x_r(t) dx + j \int_a^b x_i(t) dx$$

si $x_r(t)$ i $x_i(t)$ constitueixen, respectivament, les parts real i imaginària de la funció $x(t)$. (Noteu que $x_r(t)$ i $x_i(t)$ són funcions reals.) □

Exemple 1.3: L'espai vectorial $L^2(a, b)$ de les funcions $x : (a, b) \rightarrow \mathbb{C}$ tals que $|x|^2$ és integrable (*funcions de quadrat integrable*), és a dir tals que

$$\int_a^b |x(t)|^2 dt < \infty,$$

amb les operacions i el producte escalar definits com a l'exemple anterior:

$$(x, y) = \int_a^b x(t) \overline{y(t)} dt.$$

En aquest exemple s'han de tenir en compte les consideracions següents. Ja que

$$(x, x) = 0 \Leftrightarrow \int_a^b |x(t)|^2 dt = 0,$$

per tal que la Propietat 4 de la definició de producte escalar es compleixi hem de considerar nulla qualsevol funció de l'espai $L^2(a, b)$ que sigui diferent de 0 en un conjunt de punts de l'interval (a, b) que tingui longitud (mesura) 0. De forma més general, donades les funcions x i y , si el conjunt de punts

$$\{t \in (a, b) : x(t) \neq y(t)\}$$

té longitud (mesura) 0, direm que les funcions x i y són equivalents, i les identifiquem com un mateix vector de $L^2(a, b)$. A més a més, cal considerar el procés d'integració de Lebesgue en lloc del de Riemann.

A la teoria del processament del senyal, si $x(t)$ representa un senyal del temps definit a l'interval (a, b) , la seva *energia* correspon a la integral

$$E = \int_a^b |x(t)|^2 dt.$$

Així, $L^2(a, b)$ correspon a l'espai dels senyals que tenen energia finita. \square

En un espai vectorial amb producte escalar la *norma* $\|x\|$ del vector x es defineix per

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)} \quad (1)$$

i la *distància* entre els vectors x i y per

$$d(x, y) = \|x - y\|. \quad (2)$$

Es compleix el resultat següent, anomenat *desigualtat de Cauchy-Schwarz*:

Teorema 1.1 *En un espai vectorial \mathbb{X} amb producte escalar,*

$$|(x, y)| \leq \|x\| \|y\|,$$

per a tot $x, y \in \mathbb{X}$.

Una conseqüència d'aquest teorema és la *desigualtat triangular*: per a tot $x, y \in \mathbb{X}$ es compleix

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

En efecte,

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= (x + y, x + y) = (x, x) + (x, y) + (y, x) + (y, y) \\ &= \|x\|^2 + (x, y) + \overline{(x, y)} + \|y\|^2 = \|x\|^2 + 2\Re(x, y) + \|y\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 + 2|(x, y)| + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\| \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2. \end{aligned}$$

Exemple 1.4: Als espais $C[a, b]$ i $L^2(a, b)$, la norma i distància venen donades per les expressions

$$\|x\| = \sqrt{\int_a^b |x(t)|^2 dt},$$

$$d(x, y) = \sqrt{\int_a^b |x(t) - y(t)|^2 dt};$$

i la desigualtat de Cauchy-Schwarz es tradueix de la manera següent:

$$\left| \int_a^b x(t) \overline{y(t)} dt \right| \leq \sqrt{\int_a^b |x(t)|^2 dt} \sqrt{\int_a^b |y(t)|^2 dt}$$

□

1.2 Espais de Hilbert

En un espai vectorial \mathbb{X} amb producte escalar, amb la norma i distància definides mitjançant les equacions (1) i (2), tenen sentit els conceptes propis de topologia en \mathbb{R}^n . Així, podem parlar de boles, punts interiors, punts d'acumulació, conjunts oberts, conjunts tancats, etc. De manera especial ens interessa traslladar a \mathbb{X} el concepte de successió convergent.

1.2.1 Convergència de successions

Sigui $\{x_n\}$ una successió de vectors de \mathbb{X} . Direm que x_n convergeix cap a x (on $x \in \mathbb{X}$), i escriurem

$$x_n \rightarrow x,$$

quan

$$d(x_n, x) = \|x_n - x\| \rightarrow 0.$$

Això vol dir que donat $\epsilon > 0$ existeix un enter N tal que $n \geq N$ implica $\|x_n - x\| < \epsilon$.

Anàlogament, una sèrie $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ (on cada $x_k \in \mathbb{X}$) té suma s si la successió de sumes parcials $s_n = \sum_{k=1}^n x_k$ convergeix cap al vector $s \in \mathbb{X}$. Escriurem en aquest cas

$$s = \sum_{k=1}^{\infty} x_k.$$

Quan considerem un espai de funcions amb el producte escalar definit anteriorment, la convergència s'anomena *convergència en mitjana quadràtica*. Notem que, en aquest cas, $x_n \rightarrow x$ significa

$$\int_a^b |x_n(t) - x(t)|^2 dt \rightarrow 0.$$

La convergència en mitjana quadràtica no implica la convergència puntual de la successió de funcions $x_n(t)$ cap a la funció $x(t)$.

Exemple 1.5: Consideris a l'espai $C[0, 1]$ la successió $\{x_n\}$ on

$$x_n(t) = (1 - t)^n, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Aquesta successió convergeix en mitjana quadràtica cap al vector 0 de l'espai (és a dir, cap a la funció $x(t) = 0$ per a tot $t \in [0, 1]$). En efecte,

$$\int_0^1 (x_n(t) - x(t))^2 dt = \int_0^1 (1 - t)^{2n} dt = \frac{1}{2n + 1} \rightarrow 0.$$

En canvi, pel que fa a la convergència puntual, notem que $x_n(0) = 1$ per a tot n , i per tant, la successió de nombres reals $\{x_n(0)\}$ té límit 1. \square

1.2.2 Successions de Cauchy

Una successió $\{x_n\}$ en un espai amb producte escalar es diu que és una *successió de Cauchy* si

$$\|x_n - x_m\| \rightarrow 0 \quad \text{quan } n, m \rightarrow \infty.$$

Es a dir, donat $\epsilon > 0$ existeix N tal que si $n, m \geq N$, llavors $\|x_n - x_m\| < \epsilon$.

Tota successió convergent és una successió de Cauchy. En efecte, si $x_n \rightarrow x$, es té

$$\|x_n - x_m\| = \|(x_n - x) + (x - x_m)\| \leq \|x_n - x\| + \|x_m - x\|$$

que convergeix a 0 quan $n, m \rightarrow \infty$. En canvi, la proposició recíproca no sempre es compleix.

Exemple 1.6: Consideris a $C[0, 2]$ la successió següent:

$$x_n(t) = \begin{cases} t^n, & 0 \leq t \leq 1 \\ 1, & 1 \leq t \leq 2. \end{cases}$$

La successió $\{x_n\}$ és de Cauchy ja que tenim

$$\begin{aligned} \|x_n - x_m\|^2 &= \int_0^2 (x_n(t) - x_m(t))^2 dt = \int_0^1 (t^n - t^m)^2 dt \\ &= \frac{1}{2n + 1} - \frac{2}{n + m + 1} + \frac{1}{2m + 1} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

No obstant això, la successió no convergeix en mitjana quadràtica cap a cap funció de l'espai $C[0, 2]$ (és a dir, cap a cap funció continua a l'interval $[0, 2]$). En efecte, sigui $x \in C[0, 2]$ l'hipotètic límit de la successió $\{x_n\}$ i, d'altra banda, sigui $y(t)$ la funció

$$y(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq 1 \\ 1, & 1 < t \leq 2. \end{cases}$$

Notem que $y \in L^2(0, 2)$ i, d'altra banda, tenim també que $x_n, x \in L^2(0, 2)$. La desigualtat triangular en $L^2(0, 2)$ implica

$$\|x - y\| = \|(x - x_n) + (x_n - y)\| \leq \|x_n - x\| + \|x_n - y\|.$$

És a dir,

$$\begin{aligned} \left(\int_0^2 (x(t) - y(t))^2 dt \right)^{1/2} &\leq \|x_n - x\| + \left(\int_0^2 (x_n(t) - y(t))^2 dt \right)^{1/2} \\ &= \|x_n - x\| + \left(\int_0^1 t^{2n} dt \right)^{1/2} = \|x_n - x\| + \left(\frac{1}{2n+1} \right)^{1/2} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Així,

$$\int_0^2 (x(t) - y(t))^2 dt = \int_0^1 (x(t) - y(t))^2 dt + \int_1^2 (x(t) - y(t))^2 dt = 0,$$

la qual cosa implica $x(t) = y(t)$ si $t \in (0, 1)$ i $x(t) = y(t)$ si $t \in (1, 2)$, arribant a la contradicció $x \notin C[0, 2]$. \square

1.2.3 Completesa

Un espai vectorial amb producte escalar s'anomena *complet* quan tota successió de Cauchy de vectors de l'espai és convergent. Un *espai de Hilbert* és un espai vectorial amb producte escalar i complet. Per exemple, \mathbb{R}^n i \mathbb{C}^n són espais de Hilbert.

Exemple 1.7: Sigui $\mathbb{X} = \mathbb{Q}$ amb $(x, y) = xy$ i $\|x - y\| = |x - y|$. La successió $x_1 = 3$, $x_2 = 3.1$, $x_3 = 3.14$, $x_4 = 3.141$, ... (aproximacions per defecte del nombre real π) és de Cauchy però no convergeix en \mathbb{X} .

Quan afegim a \mathbb{Q} els "límits" de les successions de nombres racionals que són successions de Cauchy obtenim \mathbb{R} i es diu, en aquest sentit, que \mathbb{R} és la completació de \mathbb{Q} . \square

També $L^2(a, b)$ és espai de Hilbert (és la completació de $C[a, b]$). Per establir la completesa de $L^2(a, b)$ s'ha de considerar la integral de Lebesgue en lloc de la integral de Riemann i, tal com s'ha dit abans, identificar les funcions que difereixen en un conjunt de punts de longitud 0.

1.2.4 Famílies de funcions ortonormals

Un vector ϕ d'un espai vectorial \mathbb{X} amb producte escalar es diu *normalitzat* si $\|\phi\| = 1$. Notem que donat $x \in \mathbb{X}$, $x \neq 0$, el vector $x/\|x\|$ és un vector normalitzat. Direm també que els vectors $x, y \in \mathbb{X}$ són *ortogonals* quan $(x, y) = 0$.

Una successió $\{\phi_n\}$ és una *successió ortonormal* si cada vector ϕ_i està normalitzat i ϕ_i, ϕ_j són ortogonals quan $i \neq j$.

Exemple 1.8: A l'espai $L^2(-\pi, \pi)$ la successió

$$\phi_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{jnt}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

és ortonormal. En efecte, si $n \neq m$:

$$\begin{aligned} (\phi_n, \phi_m) &= \int_{-\pi}^{\pi} \phi_n(t) \overline{\phi_m(t)} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j(n-m)t} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n-m)t dt + j \int_{-\pi}^{\pi} \sin(n-m)t dt \right) = 0. \end{aligned}$$

D'altra banda,

$$\|\phi_n\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |\phi_n(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dt = 1.$$

□

Exemple 1.9: Prenent les parts real i imaginària de e^{jnt} es dedueix, a partir de l'exemple anterior, que la successió

$$\phi_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \phi_{2n-1}(t) = \frac{\sin nt}{\sqrt{\pi}}, \quad \phi_{2m}(t) = \frac{\cos mt}{\sqrt{\pi}}, \quad n, m = 1, 2, 3, \dots$$

és també ortonormal en $L^2(-\pi, \pi)$. Això també es pot demostrar directament:

$$\|\phi_0(t)\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \phi_0^2(t) dt = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} dt = 1;$$

$$\|\phi_{2n-1}(t)\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \phi_{2n-1}^2(t) dt = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2 nt}{\pi} dt = 1;$$

$$\|\phi_{2m}(t)\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \phi_{2m}^2(t) dt = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2 mt}{\pi} dt = 1.$$

D'altra banda:

$$(\phi_0, \phi_{2n-1}) = \int_{-\pi}^{\pi} \phi_0(t) \phi_{2n-1}(t) dt = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\sin nt}{\sqrt{\pi}} dt = 0;$$

$$(\phi_0, \phi_{2m}) = \int_{-\pi}^{\pi} \phi_0(t) \phi_{2m}(t) dt = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\cos mt}{\sqrt{\pi}} dt = 0;$$

$$(\phi_{2n-1}, \phi_{2n'-1}) = \int_{-\pi}^{\pi} \phi_{2n-1}(t) \phi_{2n'-1}(t) dt = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin nt}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sin n't}{\sqrt{\pi}} dt = 0;$$

$$(\phi_{2m}, \phi_{2m'}) = \int_{-\pi}^{\pi} \phi_{2m}(t) \phi_{2m'}(t) dt = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos mt}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\cos m't}{\sqrt{\pi}} dt = 0;$$

$$(\phi_{2n-1}, \phi_{2m}) = \int_{-\pi}^{\pi} \phi_{2n-1}(t) \phi_{2m}(t) dt = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin nt}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\cos mt}{\sqrt{\pi}} dt = 0.$$

□

1.2.5 Mètode d'ortonormalització de Gram-Schmidt

Sigui \mathbb{X} un espai vectorial amb producte escalar i sigui $L(x_1, x_2, \dots, x_n)$ el sub-espai vectorial de les combinacions lineals dels vectors $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{X}$.

Teorema 1.2 *Si $\{x_k\}$ és una successió finita o infinita de vectors linealment independents, llavors existeix una successió ortonormal $\{\phi_k\}$ tal que*

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n) = L(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n)$$

per a cada $n = 1, 2, \dots$

Els vectors ϕ_n s'obtenen de la forma següent:

$$y_1 = x_1, \quad \phi_1 = \frac{y_1}{\|y_1\|}$$
$$y_n = x_n - \sum_{k=1}^{n-1} (x_n, \phi_k) \phi_k, \quad \phi_n = \frac{y_n}{\|y_n\|}, \quad n = 2, 3, \dots$$

Exemple 1.10: A l'espai $L^2(-1, 1)$, la successió

$$x_n(t) = t^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

dóna lloc a la successió ortogonal

$$y_0(t) = 1,$$
$$y_1(t) = t,$$
$$y_2(t) = t^2 - \frac{1}{3},$$
$$y_3(t) = t^3 - \frac{3}{5}t,$$
$$y_4(t) = t^4 - \frac{6}{7}t^2 + \frac{3}{35},$$

.....

La successió de *polinomis de Legendre*, $P_n(t)$, s'obté de l'anterior fent $P_n(t) = \lambda_n y_n(t)$ i calculant $\lambda_n \in \mathbb{R}$ per la condició $P_n(1) = 1$. \square

1.3 Sèries de Fourier

L'objectiu de l'anàlisi de Fourier és escriure cada $x \in \mathbb{X}$, essent \mathbb{X} un espai vectorial amb producte escalar, en la forma

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \phi_k,$$

on $c_k \in \mathbb{C}$ i $\phi_0, \phi_1, \phi_2, \dots$ és una successió ortonormal donada. Quan això és possible la successió ortonormal s'anomena *completa*.

Teorema 1.3 Sigui \mathbb{X} un espai vectorial amb producte escalar i $\phi_0, \phi_1, \phi_2, \dots$ una successió ortonormal. Si per a un cert $x \in \mathbb{X}$ es té $x = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \phi_k$, aleshores

$$c_k = (x, \phi_k).$$

Demostració: Fixat k , sigui $s_n = \sum_{i=0}^n c_i \phi_i$, $n \geq k$, i considerem

$$(x - s_n, \phi_k) = (x, \phi_k) - (s_n, \phi_k) = (x, \phi_k) - \sum_{i=0}^n (c_i \phi_i, \phi_k) = (x, \phi_k) - c_k.$$

Atès que $|(x - s_n, \phi_k)| \leq \|x - s_n\|$, l'expressió anterior tendeix a 0 quan $n \rightarrow \infty$. Per tant, $(x, \phi_k) - c_k \rightarrow 0$ quan $n \rightarrow \infty$, i com que $(x, \phi_k) - c_k$ no depen de n , s'ha de complir $(x, \phi_k) = c_k$ ■

Donats $x \in \mathbb{X}$ i la successió ortonormal $\phi_0, \phi_1, \phi_2, \dots$, la sèrie

$$\sum_{k=0}^{\infty} (x, \phi_k) \phi_k$$

s'anomena *sèrie de Fourier* de x respecte de $\{\phi_k\}$ i els coeficients

$$c_k = (x, \phi_k)$$

s'anomenen *coeficients de Fourier*. Dir que la successió $\phi_0, \phi_1, \phi_2, \dots$ és completa equival doncs a dir que tot $x \in \mathbb{X}$ és igual a la seva sèrie de Fourier, és a dir,

$$\left\| x - \sum_{k=0}^n (x, \phi_k) \phi_k \right\| \rightarrow 0$$

quan $n \rightarrow \infty$.

Sigui $\phi_0, \phi_1, \phi_2, \dots$ una successió ortonormal i completa. Si x és ortogonal a cada ϕ_i , llavors tenim $x = 0$. El recíproc d'aquest resultat ens el dona el teorema següent:

Teorema 1.4 Si \mathbb{X} és espai de Hilbert i $x = 0$ és l'únic vector ortogonal a cada terme d'una successió ortonormal $\phi_0, \phi_1, \phi_2, \dots$, llavors la successió és completa.

Una successió ortonormal i completa en un espai de Hilbert s'anomena una *base ortonormal*. El coeficient de Fourier $c_k = (x, \phi_k)$ del vector $x = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \phi_k$ respecte d'una base ortonormal $\phi_0, \phi_1, \phi_2, \dots$ correspon a la *projecció* de x sobre ϕ_k . Aquestes idees generalitzen als espais de Hilbert la descomposició d'un vector $x \in \mathbb{R}^n$ respecte de la base ortonormal $e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, \dots , $e_n = (0, 0, \dots, 0, 1)$.

Nota: Si $\psi_0, \psi_1, \psi_2, \dots$ és una *successió ortogonal* (i.e. ψ_i ortogonal a ψ_j quan $i \neq j$, però els vectors ψ_k no tenen necessàriament norma 1) la sèrie de Fourier de x respecte de $\{\psi_k\}$ és

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(x, \frac{\psi_k}{\|\psi_k\|} \right) \frac{\psi_k}{\|\psi_k\|} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x, \psi_k)}{\|\psi_k\|^2} \psi_k.$$

Els coeficients

$$c_k = \frac{(x, \psi_k)}{\|\psi_k\|^2}$$

també s'anomenen coeficients de Fourier (respecte de $\psi_0, \psi_1, \psi_2, \dots$)

Exemple 1.11: A l'espai de Hilbert $L^2(-\pi, \pi)$ la successió trigonomètrica $\psi_0(t) = 1, \psi_{2k}(t) = \cos kt, \psi_{2k-1}(t) = \sin kt, k = 1, 2, \dots$ és una base ortogonal i dóna lloc a l'anomenada *sèrie de Fourier trigonomètrica*:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt), \quad (3)$$

on

$$\begin{aligned} \frac{a_0}{2} &= \frac{(x, \psi_0)}{\|\psi_0\|^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(t) dt; \\ a_k &= \frac{(x, \psi_{2k})}{\|\psi_{2k}\|^2} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(t) \cos kt dt; \\ b_k &= \frac{(x, \psi_{2k-1})}{\|\psi_{2k-1}\|^2} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(t) \sin kt dt. \end{aligned} \quad (4)$$

La convergència de la sèrie (3) és en mitjana quadràtica, és a dir, si

$$s_n(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kt + b_k \sin kt),$$

aleshores

$$\|x - s_n\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} |x(t) - s_n(t)|^2 dt} \rightarrow 0 \quad \text{quan } n \rightarrow \infty.$$

□

Exemple 1.12: En $L^2(-\pi, \pi)$, la successió ortonormal

$$\left\{ \phi_k(t) = \frac{e^{jkt}}{\sqrt{2\pi}}; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

dóna lloc a la *sèrie de Fourier complexa*:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \phi_k(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k e^{jkt},$$

on $c_k = (x, \phi_k)$ o bé

$$\alpha_k = \frac{c_k}{\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(t) e^{-jkt} dt.$$

□

1.3.1 Desigualtat de Bessel

Sigui $\phi_0, \phi_1, \phi_2, \dots$ una successió ortonormal en un espai vectorial \mathbb{X} amb producte escalar i sigui $x \in \mathbb{X}$. Si $s_n = \sum_{k=0}^n (x, \phi_k) \phi_k$, llavors el vector $x - s_n$ és ortogonal a cada ϕ_k , $0 \leq k \leq n$. En efecte,

$$\begin{aligned}(x - s_n, \phi_k) &= (x, \phi_k) - (s_n, \phi_k) = (x, \phi_k) - \sum_{i=0}^n (x, \phi_i) (\phi_i, \phi_k) \\ &= (x, \phi_k) - (x, \phi_k) = 0.\end{aligned}$$

Com que el vector $x - s_n$ és ortogonal a cada ϕ_k , també és ortogonal a s_n . Aquest fet ens permet demostrar el resultat que segueix:

Teorema 1.5 *Sigui $\phi_0, \phi_1, \phi_2, \dots$ una successió ortonormal en un espai vectorial \mathbb{X} amb producte escalar. Per a cada $x \in \mathbb{X}$, la sèrie real $\sum_{k=0}^{\infty} |(x, \phi_k)|^2$ convergeix i es compleix la desigualtat*

$$\sum_{k=0}^{\infty} |(x, \phi_k)|^2 \leq \|x\|^2. \quad (5)$$

Demostració: Sigui $s_n = \sum_{k=0}^n (x, \phi_k) \phi_k$. Tenint en compte la ortogonalitat entre s_n i $x - s_n$ tenim:

$$\|x\|^2 = \|s_n + (x - s_n)\|^2 = \|s_n\|^2 + \|x - s_n\|^2;$$

i, per tant, $\|s_n\|^2 \leq \|x\|^2$. Però

$$\|s_n\|^2 = \left\| \sum_{k=0}^n (x, \phi_k) \phi_k \right\|^2 = \sum_{k=0}^n |(x, \phi_k)|^2 \|\phi_k\|^2 = \sum_{k=0}^n |(x, \phi_k)|^2.$$

Així, la sèrie $\sum_{k=0}^{\infty} |(x, \phi_k)|^2$ té sumes parcials $\|s_n\|^2$ que formen una successió creixent i acotada per $\|x\|^2$. Fent $n \rightarrow \infty$ obtenim el teorema ■

La desigualtat (5) s'anomena *desigualtat de Bessel*. Una conseqüència important de la mateixa és que els coeficients de Fourier $c_k = (x, \phi_k)$ convergeixen a 0 quan $k \rightarrow \infty$.

El teorema següent relaciona la completesa de la successió ortonormal $\phi_0, \phi_1, \phi_2, \dots$ amb la desigualtat de Bessel.

Teorema 1.6 (de Parseval) *Sigui \mathbb{X} un espai amb producte escalar i $\phi_0, \phi_1, \phi_2, \dots$ una successió ortonormal. Llavors $\phi_0, \phi_1, \phi_2, \dots$ és completa si i només si per a cada $x \in \mathbb{X}$ es compleix*

$$\|x\|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} |(x, \phi_k)|^2.$$

Demostració: Si $\phi_0, \phi_1, \phi_2, \dots$ és una successió completa, llavors $s_n = \sum_{k=0}^n (x, \phi_k) \phi_k$ convergeix cap a x i, per tant, fent $n \rightarrow \infty$ a la igualtat $\|x\|^2 = \|s_n\|^2 + \|x - s_n\|^2$ obtenim $\|x\|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} |(x, \phi_k)|^2$. D'altra banda, si aquesta relació es verifica, llavors $\|x\|^2 - \|s_n\|^2 \rightarrow 0$ quan $n \rightarrow \infty$, i, per tant, $\|x - s_n\|^2 \rightarrow 0$, això és, $s_n \rightarrow x$ ■

Nota: Quan $x(t)$ representa un senyal d'energia finita ($x \in L^2(a, b)$), el teorema de Parseval relaciona l'energia $\|x\|^2 = \int_a^b |x(t)|^2 dt$ associada a $x = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \phi_k$ amb la suma de les energies $\|c_k \phi_k\|^2 = |c_k|^2$ associades a les components de x . És a dir:

$$\|x\|^2 = \int_a^b |x(t)|^2 dt = \sum_{k=0}^{\infty} |c_k|^2.$$

1.4 Aproximacions mitjançant combinacions lineals

Una altra forma d'introduir els coeficients de Fourier $c_k = (x, \phi_k)$ d'un vector x respecte d'una successió ortonormal consisteix en estudiar la "millor aproximació" de x mitjançant una combinació lineal dels vectors $\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_n$. És a dir, es tracta de trobar el vector $s_n = \sum_{k=0}^n d_k \phi_k$ del subspai M generat per $\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_n$ tal que $d(x, s_n) = \|x - s_n\|$ sigui mínima.

La solució a aquest problema s'obté prenent $d_k = c_k = (x, \phi_k)$. Geomètricament, s_n és la *projecció* del vector x sobre el subspai M de tal manera que $x - s_n$ és ortogonal a cada ϕ_k i, per tant, $x - s_n$ és ortogonal a cada vector del subspai M .

Teorema 1.7 *Sigui \mathbb{X} un espai vectorial amb producte escalar i sigui $\{\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_n\}$ un conjunt de vectors ortonormals. Per a cada conjunt de nombres $d_0, d_1, \dots, d_n \in \mathbb{C}$, es té*

$$\left\| x - \sum_{k=0}^n d_k \phi_k \right\| \geq \left\| x - \sum_{k=0}^n (x, \phi_k) \phi_k \right\|.$$

La igualtat es compleix si i només si $d_k = (x, \phi_k)$.

Demostració: Siguin s_n i h_n els vectors $\sum_{k=0}^n c_k \phi_k$ i $\sum_{k=0}^n d_k \phi_k$ respectivament, on $c_k = (x, \phi_k)$. Com que $x - s_n$ és ortogonal a cada ϕ_k , $0 \leq k \leq n$, el vector $x - s_n$ és també ortogonal a $s_n - h_n$. Així,

$$\begin{aligned} \|x - h_n\|^2 &= \|x - s_n\|^2 + \|s_n - h_n\|^2 \\ &= \|x - s_n\|^2 + \sum_{k=0}^n |c_k - d_k|^2. \end{aligned}$$

Atès que $\|x - h_n\| \geq \|x - s_n\|$ i $\|x - h_n\| = \|x - s_n\|$ si i només si $d_k = c_k$ per a $0 \leq k \leq n$, l'expressió anterior demostra el teorema ■

El teorema anterior ens diu que si $\phi_0, \phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n, \dots$ és una base ortogonal d'un espai de Hilbert \mathbb{X} , la millor aproximació d'un vector x de l'espai mitjançant una combinació lineal dels $n + 1$ primers termes de la successió $\{\phi_k\}$ s'obté truncant la sèrie de Fourier $\sum_{k=0}^{\infty} (x, \phi_k) \phi_k$ de x als seus $n + 1$ primers termes.

Exemple 1.13: A l'espai $L^2(-1, 1)$ volem aproximar la funció $x(t)$ definida per

$$x(t) = \begin{cases} 0, & -1 < t < 0 \\ 1, & 0 \leq t < 1. \end{cases}$$

mitjançant un polinomi de grau menor o igual a tres. Així, hem de considerar

$$p = c_0 y_0 + c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3$$

on $y_0(t) = 1$, $y_1(t) = t$, $y_2(t) = t^2 - \frac{1}{3}$, $y_3(t) = t^3 - \frac{3}{5}t$ (vegeu l'Exemple 1.10). Tenim:

$$c_0 = \frac{\int_0^1 dt}{\int_{-1}^1 dt} = \frac{1}{2};$$

$$c_1 = \frac{\int_0^1 t dt}{\int_{-1}^1 t^2 dx} = \frac{3}{4};$$

$$c_2 = \frac{\int_0^1 (t^2 - \frac{1}{3}) dt}{\int_{-1}^1 (t^2 - \frac{1}{3})^2 dt} = 0;$$

$$c_3 = \frac{\int_0^1 (t^3 - \frac{3}{5}t) dx}{\int_{-1}^1 (t^3 - \frac{3}{5}t)^2 dx} = -\frac{35}{32}.$$

Per tant, el vector $p \in L^2(-1, 1)$ correspon al polinomi

$$p(t) = -\frac{35}{32}(t^3 - \frac{3}{5}t) + \frac{3}{4}t + \frac{1}{2} = \frac{1}{32}(-35t^3 + 45t + 16).$$

Així, $p(t)$ és el polinomi de grau menor o igual a tres que fa mínim el valor de

$$\|x - p\| = \sqrt{\int_{-1}^1 (x(t) - p(t))^2 dt},$$

és a dir, $p(t)$ és el polinomi de grau menor o igual a tres que ens dona la *millor aproximació en mitjana quadràtica* de la funció $x(t)$. \square

Exemple 1.14: Considerem l'espai de Hilbert $L^2(-\pi, \pi)$. D'entre els polinomis trigonomètrics de la forma

$$p(t) = c_0 + \sum_{k=1}^n (c_k \cos kt + d_k \sin kt),$$

el que millor aproxima en mitjana quadràtica la funció $x(t)$ és

$$s_n(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kt + b_k \sin kt),$$

on els coeficients a_k i b_k venen donats per les fòrmules (4). La funció $s_n(t)$ resulta de truncar la sèrie de Fourier trigonomètrica de $x(t)$.

Així, $s_n(t)$ és la funció combinació lineal de $1, \sin t, \cos t, \sin 2t, \cos 2t, \dots, \sin nt, \cos nt$ que fa mínima l'expressió

$$\|x - p\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \left| x(t) - \left(d_0 + \sum_{k=1}^n (c_k \cos kt + d_k \sin kt) \right) \right|^2 dt}.$$

□

Exemple 1.15: (Regressió lineal)

Donat un conjunt de parelles de dades (nombres reals)

$$(x_1, f_1), (x_2, f_2), \dots, (x_n, f_n),$$

volem “ajustar-les” mitjançant una equació lineal (*recta de regressió* o *recta d'ajust per mínims quadrats*)

$$y(x) = ax + b$$

de tal forma que l'*error quadràtic*

$$\epsilon \equiv \sum_{k=0}^n (f_k - ax_k - b)^2$$

sigui mínim.

Per tal de buscar els valors de a i b que ens donen la solució del problema d'optimització plantejat, situem-lo en el context estudiat. A tal fi, considerem l'espai de Hilbert \mathbb{R}^n i siguin $f, x, u \in \mathbb{R}^n$ els vectors:

$$f = (f_1, f_2, \dots, f_n),$$

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n),$$

$$u = (1, 1, \dots, 1).$$

Així, l'error quadràtic s'escriu

$$\epsilon = \sum_{k=0}^n (f_k - ax_k - b)^2 = \|f - (ax + bu)\|^2.$$

Es tracta doncs de trobar el vector y del subspai $M = L(u, x)$ que minimitzi la distància $\|f - y\|$ de y a f .

Ortogonalizem la base de M :

$$\begin{aligned}\psi_1 &= u = (1, 1, \dots, 1), \\ \psi_2 &= x - \frac{(x, \psi_1)}{\|\psi_1\|^2} \psi_1 = x - \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \psi_1 = x - \bar{x} \psi_1 \\ &= (x_1 - \bar{x}, x_2 - \bar{x}, \dots, x_n - \bar{x}),\end{aligned}$$

on $\bar{x} \equiv (\sum_{i=1}^n x_i)/n$.

L'expressió de y respecte de la base ortogonal $\{\psi_1, \psi_2\}$ de M és

$$y = \alpha_1 \psi_1 + \alpha_2 \psi_2,$$

on

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \frac{(f, \psi_1)}{\|\psi_1\|^2} = \frac{\sum_{i=1}^n f_i}{n} \equiv \bar{f}; \\ \alpha_2 &= \frac{(f, \psi_2)}{\|\psi_2\|^2} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i f_i - n \bar{x} \bar{f}}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}.\end{aligned}$$

Per tant,

$$y = \alpha_1 \psi_1 + \alpha_2 \psi_2 = \alpha_2 x + (\alpha_1 - \alpha_2 \bar{x}) u.$$

Així, els coeficients a i b buscats són

$$a = \alpha_2, \quad b = \alpha_1 - \alpha_2 \bar{x} = \bar{f} - a \bar{x}.$$

Per exemple, donades les dades ($n = 4$):

$$(1, 1.1), (2, 3.9), (3, 8.5), (4, 15.0)$$

tenim

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{1 + 2 + 3 + 4}{4} = 2.5 \\ \bar{f} &= \frac{1.1 + 3.9 + 8.5 + 15.0}{4} = 7.125\end{aligned}$$

Així

$$a = \frac{(1 \cdot 1.1 + 2 \cdot 3.9 + 3 \cdot 8.5 + 4 \cdot 15.0) - 4 \cdot 2.5 \cdot 7.125}{(1 - 2.5)^2 + (2 - 2.5)^2 + (3 - 2.5)^2 + (4 - 2.5)^2} = 4.63$$

$$b = \bar{f} - a \bar{x} = 7.125 - 4.63 \cdot 2.5 = -4.45$$

Per tant, l'equació de la recta d'ajust per mínims quadrats és

$$y(x) = 4.63x - 4.45$$

□

2 Sèries de Fourier trigonomètriques

Tal com s'ha vist al capítol anterior, donada una funció $x \in L^2(-\pi, \pi)$, la seva sèrie de Fourier

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt), \quad (6)$$

respecte de la base ortogonal $\{1; \cos kt, \sin kt; k \in \mathbb{N}\}$ convergeix a x en $L^2(-\pi, \pi)$. De manera més explícita, si

$$s_n(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kt + b_k \sin kt),$$

tenim que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x - s_n\|^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} (x(t) - s_n(t))^2 dt = 0.$$

Ens plantegem ara sota quines condicions la sèrie (6) convergeix de forma puntual o uniforme a $x(t)$. Estudiarem també la derivabilitat i la integrabilitat d'aquesta sèrie. Per obtenir aquestes condicions només considerarem funcions contínues a trossos (vegeu l'apèndix). Aquesta classe de funcions conté la majoria de les que són d'interès en les aplicacions.

Si es consideren definides en tot \mathbb{R} , les funcions $1, \cos kt, \sin kt$ amb $k \in \mathbb{N}$ són periòdiques. És per això que alguns dels resultats que es presentaran s'enuncien per a funcions periòdiques.

Donada $\tilde{x} : (-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$, diem que $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ és l'extensió periòdica de \tilde{x} si x coincideix amb \tilde{x} a l'interval $(-\pi, \pi]$ i $x(t + 2\pi) = x(t)$ per a tot $t \in \mathbb{R}$. Si la sèrie (6) és la sèrie de Fourier de \tilde{x} direm també que és la sèrie de Fourier de la seva extensió periòdica x .

Recordem finalment que els coeficients a_k i b_k vénen donats per les integrals:

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(t) \cos kt dt, & k = 0, 1, 2, \dots \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(t) \sin kt dt, & k = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (7)$$

2.1 Convergència puntual de les sèries de Fourier

Els coeficients de la sèrie de Fourier d'una funció x depenen dels valors que pren aquesta funció a tot l'interval $[-\pi, \pi]$. Per això, és força sorprenent que la convergència de la sèrie en un punt particular depengui exclusivament del comportament de x en un entorn arbitràriament petit del punt. En efecte, tal com s'expressa en el teorema següent, l'existència de les derivades laterals de la funció (vegeu l'apèndix) en el punt considerat garanteix la convergència de la sèrie de Fourier.

Teorema 2.1 *Segui x l'extensió periòdica de la funció $\tilde{x} : (-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua a trossos. La sèrie de Fourier associada a x ,*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt), \quad -\infty < t < \infty, \quad (8)$$

convergeix a

$$\frac{x(t^+) + x(t^-)}{2}$$

a cada punt t en el qual $x'_D(t)$ i $x'_I(t)$ existeixen.

En particular si $x(t^+) = x(t^-) = x(t)$, la sèrie de Fourier convergeix a $x(t)$ si en el punt t existeixen $x'_D(t)$ i $x'_I(t)$.

Nota: Pel teorema A.1 enunciat a l'apèndix, si x i x' són contínues a trossos en $[-\pi, \pi]$ les derivades laterals de x existeixen en tot punt i, per tant, la sèrie de Fourier de x convergeix a $(x(t^+) + x(t^-))/2$ per a cada $t \in \mathbb{R}$. A més a més, si en el punt t existeix $x'(t)$ aleshores la sèrie convergeix a $x(t)$.

En primer lloc, establim el lema següent:

Lema 2.1 *Si*

$$s_n(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$$

és l' n -èsima suma parcial de la sèrie (8), aleshores

$$s_n(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(\tau) D_n(\tau - t) d\tau, \quad (9)$$

on

$$D_n(t) = \begin{cases} \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t}{2 \sin \frac{t}{2}}, & t \neq 2m\pi, \quad m \in \mathbb{Z}; \\ n + \frac{1}{2}, & t = 2m\pi, \quad m \in \mathbb{Z}. \end{cases} \quad (10)$$

Demostració: Aplicant les expressions (7) dels coeficients a_k i b_k tenim

$$\begin{aligned} s_n(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kt + b_k \sin kt) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(\tau) d\tau + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \left(\int_{-\pi}^{\pi} x(\tau) (\cos k\tau \cos kt + \sin k\tau \sin kt) d\tau \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(\tau) \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos k(\tau - t) \right) d\tau = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(\tau) D_n(\tau - t) d\tau, \end{aligned}$$

on la funció

$$D_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos kt \quad (11)$$

és coneix amb el nom de *nucli de Dirichlet*. Considerant la suma $S = \sum_{k=1}^n e^{jkt}$ i tenint en compte que $D_n(t) = \frac{1}{2} + \Re(S)$, obtenim l'expressió (10) per a $D_n(t)$. En efecte, si $t \neq 2m\pi$:

$$S = \sum_{k=1}^n e^{jkt} = \frac{e^{j(n+1)t} - e^{jt}}{e^{jt} - 1} = \frac{e^{j(n+\frac{1}{2})t} - e^{j\frac{t}{2}}}{e^{j\frac{t}{2}} - e^{-j\frac{t}{2}}} = \frac{e^{j(n+\frac{1}{2})t} - e^{j\frac{t}{2}}}{2j \sin \frac{t}{2}}.$$

Així,

$$D_n(t) = \frac{1}{2} + \Re(S) = \frac{1}{2} + \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t - \sin \frac{t}{2}}{2 \sin \frac{t}{2}} = \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t}{2 \sin \frac{t}{2}}$$

■

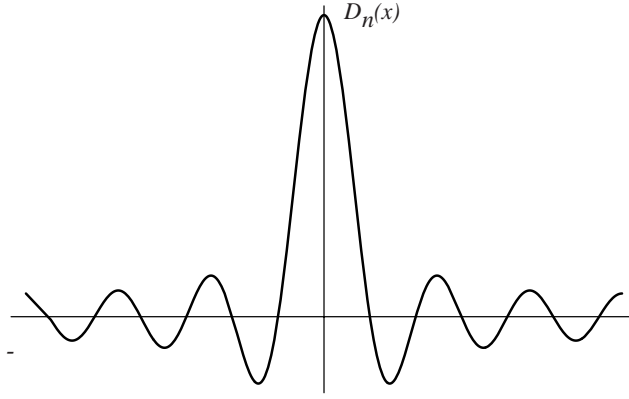


Figura 1: Nucli de Dirichlet

Abans de demostrar formalment el teorema 2.1, considerem la integral (9). La suma parcial s_n és la convolució de x i D_n . El nucli de Dirichlet D_n satisfà, vegeu (11),

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) dt = 1.$$

A més a més, de (10) es desprèn que, quan n augmenta, l'àrea tendeix a concentrar-se al voltant de $t = 0$. De fet, quan n creix, $\frac{1}{\pi} D_n$ s'aproxima a la funció generalitzada δ de Dirac. Per aquest motiu, D_n s'anomena una *identitat aproximada* (vegeu la figura 1). Quan $n \rightarrow \infty$, el nucli $\frac{1}{\pi} D_n$ “selecciona” a la integral (9) el valor $x(t)$ a cada punt de continuïtat de x . En canvi, com veurem tot seguit, si la funció x té en el punt t una discontinuïtat de salt, aleshores $\frac{1}{\pi} D_n$ “selecciona” el valor mitjà dels corresponents límits laterals. Això justifica el resultat enunciat en el teorema.

Establím a continuació uns altres dos lemes:

Lema 2.2 *Segui x l'extensió periòdica de la funció $\tilde{x} : (-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$, contínua a trossos. Si en el punt t existeixen $x'_D(t)$ i $x'_I(t)$, aleshores les funcions*

$$g(\tau) = \frac{x(t + \tau) - x(t^+)}{2 \sin \frac{\tau}{2}} \quad i \quad h(\tau) = \frac{x(t^-) - x(t - \tau)}{2 \sin \frac{\tau}{2}}$$

són contínues a trossos a $(0, \pi)$.

Demostració: Atès que x és contínua a trossos a qualsevol interval $I \subset \mathbb{R}$, només cal provar que $g(0^+)$ i $h(0^-)$ existeixen. Però,

$$\begin{aligned} g(0^+) &= \lim_{\tau \downarrow 0} g(\tau) = \lim_{\tau \downarrow 0} \frac{x(t + \tau) - x(t^+)}{2 \sin \frac{\tau}{2}} \\ &= \lim_{\tau \downarrow 0} \frac{x(t + \tau) - x(t^+)}{\tau} \frac{\frac{\tau}{2}}{\sin \frac{\tau}{2}} = x'_D(t). \end{aligned}$$

Es comprova de manera anàloga que $h(0^+) = x'_I(t)$. ■

Lema 2.3 *Siguin $g(\tau)$ i $h(\tau)$ les funcions introduïdes en el lema 2.2. Aleshores,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\pi g(\tau) \sin(n + \frac{1}{2})\tau \, d\tau = 0; \quad (12)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\pi h(\tau) \sin(n + \frac{1}{2})\tau \, d\tau = 0. \quad (13)$$

Demostració: Si desenvolupem $\sin(n + \frac{1}{2})\tau$, obtenim

$$g(\tau) \sin(n + \frac{1}{2})\tau = g(\tau) \cos \frac{\tau}{2} \sin n\tau + g(\tau) \sin \frac{\tau}{2} \cos n\tau,$$

on $s(\tau) = g(\tau) \cos \frac{\tau}{2}$ i $r(\tau) = g(\tau) \sin \frac{\tau}{2}$ són funcions contínues a trossos a $(0, \pi)$ (i, per tant, de $L^2(0, \pi)$). En conseqüència, els coeficients de Fourier c_n i d_n de les funcions s i r , respecte de les bases ortogonals de $L^2(0, \pi)$ $\{\sin n\tau\}$ i $\{1; \cos n\tau\}$, respectivament, tendeixen a 0 quan $n \rightarrow \infty$. D'on es compleix (12).

La demostració de (13) és anàloga. ■

Vegem a continuació la demostració del teorema 2.1.

Demostració: El nucli de Dirichlet, D_n , satisfà

$$\begin{aligned} D_n(-t) &= D_n(t), \\ D_n(t + 2\pi) &= D_n(t). \end{aligned}$$

Així, a partir de (9) :

$$\begin{aligned} s_n(t) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi x(\tau) D_n(\tau - t) \, d\tau = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi-t}^{\pi-t} x(t + \tau) D_n(\tau) \, d\tau \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi x(t + \tau) D_n(\tau) \, d\tau \end{aligned} \quad (14)$$

i, fent en aquesta darrera integral el canvi $\tau = -u$, obtenim

$$s_n(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi x(t - u) D_n(u) \, du. \quad (15)$$

Sumem (14) i (15) i, si tenim en compte que l'integrand que resulta és parell,

$$\begin{aligned} s_n(t) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x(t+\tau) + x(t-\tau)}{2} D_n(\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (x(t+\tau) + x(t-\tau)) D_n(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (16)$$

D'altra banda, com que

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} D_n(\tau) d\tau = \frac{1}{2},$$

tenim

$$\frac{x(t^+)}{2} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x(t^+) D_n(\tau) d\tau, \quad (17)$$

$$\frac{x(t^-)}{2} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x(t^-) D_n(\tau) d\tau, \quad (18)$$

Combinem (16), (17) i (18) :

$$\begin{aligned} & s_n(t) - \frac{x(t^+) + x(t^-)}{2} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (x(t+\tau) - x(t^+)) D_n(\tau) d\tau - \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (x(t^-) - x(t-\tau)) D_n(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Finalment, aplicant els lemes 2.2 i 2.3:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(t) - \frac{x(t^+) + x(t^-)}{2} = 0$$

■

Exemple 2.1: El desenvolupament en sèrie de Fourier de la funció $x(t)$, extensió periòdica de $\tilde{x}(t) = t$, $t \in (-\pi, \pi]$, convergeix a $x(t)$ per a tot $t \neq (2n+1)\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, i convergeix a 0 per a $t = (2n+1)\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. (Vegeu la figura 2). □

2.2 Convergència uniforme de la sèrie de Fourier

Recordem que una successió $\{s_n(t)\}$ de funcions reals definides en un cert interval I convergeix *uniformement* a la funció $s(t)$ en aquest interval si per a tot $\epsilon > 0$ existeix un enter N tal que si $n > N$, llavors

$$|s_n(t) - s(t)| < \epsilon \quad \text{per a tot } t \in I.$$

Així, la gràfica de $s_n(t)$, per a n suficientment gran, aproxima “uniformement” en tot l'interval la gràfica de $s(t)$. El resultat següent dóna una condició suficient per garantir la convergència uniforme de la sèrie de Fourier (i.e., la convergència uniforme de la successió de sumes parcials de la sèrie).

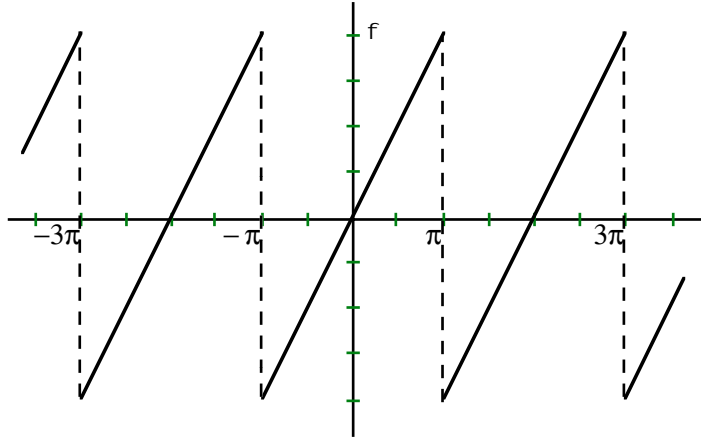


Figura 2: Convergència puntual

Teorema 2.2 *Sigui $x : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua, $x(-\pi) = x(\pi)$, i tal que la seva derivada x' és contínua a trossos a $(-\pi, \pi)$. Aleshores la sèrie de Fourier de x*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt) \quad (19)$$

convergeix uniformement a x a l'interval $[-\pi, \pi]$.

Demostració: Comprovem en primer lloc que, amb les hipòtesis del teorema, la sèrie (19) convergeix uniformement.

Sigui

$$\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k \cos kt + \beta_k \sin kt)$$

la sèrie de Fourier de la funció x' (notem que $x' \in L^2(-\pi, \pi)$ per ser contínua a trossos). Així, per la condició $x(-\pi) = x(\pi)$:

$$\alpha_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x'(t) dt = \frac{x(\pi) - x(-\pi)}{\pi} = 0 \quad (20)$$

i, integrant per parts en les integrals que defineixen α_k i β_k , tenim:

$$\begin{aligned} \alpha_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x'(t) \cos kt dt \\ &= \frac{1}{\pi} [x(t) \cos kt]_{t=-\pi}^{t=\pi} + \frac{k}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(t) \sin kt dt \\ &= kb_k, \quad k = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (21)$$

i

$$\begin{aligned} \beta_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x'(t) \sin kt dt \\ &= \frac{1}{\pi} [x(t) \sin kt]_{t=-\pi}^{t=\pi} - \frac{k}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(t) \cos kt dt \\ &= -ka_k, \quad k = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (22)$$

Els càlculs anteriors són vàlids per ser la funció x' contínua a trossos.

Per tant,

$$\sqrt{a_k^2 + b_k^2} = \frac{1}{k} \sqrt{\alpha_k^2 + \beta_k^2}, \quad k = 1, 2, 3 \dots$$

i, com que $a^2 + b^2 \geq 2ab$ per a a i b qualssevol, es compleix

$$\sqrt{a_k^2 + b_k^2} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k^2} + (\alpha_k^2 + \beta_k^2) \right), \quad k = 1, 2, 3 \dots$$

És per això que la sèrie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$$

convergeix, perquè

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \quad \text{i} \quad \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k^2 + \beta_k^2),$$

són convergents. Sabem que l'última d'aquestes sèries és convergent gràcies a la desigualtat de Bessel.

D'altra banda, no és difícil comprovar que

$$|a_k \cos kt + b_k \sin kt| \leq \sqrt{a_k^2 + b_k^2}, \quad k = 1, 2, 3 \dots \quad (23)$$

Així, el criteri de Weierstrass per a la convergència uniforme garanteix que la sèrie (19) convergeix uniformement a $[-\pi, \pi]$. Noteu també que la desigualtat (23) implica, a més a més, la convergència absoluta de la sèrie.

Mancaria, finalment, comprovar que la sèrie convergeix a x (i no cap a una altra funció contínua y diferent de x). Sigui y la funció cap a la qual s_n tendeix uniformement a $[-\pi, \pi]$. Per la desigualtat triangular (emprant la norma de $L^2(-\pi, \pi)$):

$$\|y - x\| = \|(y - s_n) + (s_n - x)\| \leq \|s_n - y\| + \|s_n - x\|.$$

Però $\|s_n - x\| \rightarrow 0$ (convergència en $L^2(-\pi, \pi)$) i $\|s_n - y\| \rightarrow 0$, atès que la convergència uniforme implica la convergència en la norma de $L^2(-\pi, \pi)$ (feu-ho com a exercici). Així, $\|y - x\| = 0$, és a dir, $y(t) = x(t)$ per a quasi tot $t \in [-\pi, \pi]$; i, com que x i y són funcions contínues, $y(t) = x(t)$ per a tot $t \in [-\pi, \pi]$. ■

Nota: la condició $x(-\pi) = x(\pi)$ garanteix la continuïtat de l'extensió periòdica de x .

Exemple 2.2: La funció

$$x : [-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto |t|$$

compleix les condicions del teorema 2.2. Per tant, la seva sèrie de Fourier,

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cos(2k+1)t,$$

convergeix uniformement. Es a dir, donat $\epsilon > 0$, existeix un N tal que si $n > N$

$$\left| x(t) - \left(\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^n \frac{1}{(2k+1)^2} \cos(2k+1)t \right) \right| < \epsilon \text{ per a tot } t \in [-\pi, \pi].$$

□

2.3 El fenomen de Gibbs

La sèrie de Fourier d'una funció x contínua a trossos no pot convergir uniformement a x en un interval en el qual x tingui una discontinuïtat de salt, atès que la suma d'una sèrie uniformement convergent de funcions contínues és una funció contínua. Però, a més a més, la desviació de l' n -èsima suma parcial $s_n(t)$ respecte de $x(t)$ té un aspecte poc usual conegut com a *fenomen de Gibbs*.

Per tal de precisar una mica més les idees anteriors, considereu una funció $x : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ que presenti en un punt, diguem $t = 0$, una discontinuïtat de salt. Supposeu que el valor $x(0^+) - x(0^-)$ és 1. La funció x és la suma d'una funció contínua a $[-\pi, \pi]$ i de la funció $g : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$

$$g(t) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq t < 0; \\ 1, & 0 < t \leq \pi; \end{cases}$$

la gràfica de la qual es mostra a la figura 3.

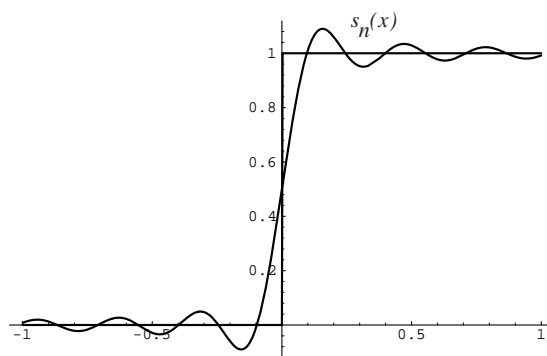


Figura 3: Fenòmen de Gibbs

La sèrie de Fourier de g ,

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)t}{2k+1},$$

convergeix, segons el teorema 2.1, a $g(t)$ excepte a $t = -\pi$, $t = 0$ i $t = \pi$, punts en els quals convergeix a $\frac{1}{2}$. En particular, per a $t \in (0, \pi)$ la sèrie convergeix al valor 1.

Analitzem el valor de

$$s_n(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^n \frac{\sin(2k+1)t}{2k+1}$$

per a valors de $t > 0$ propers a $t = 0$, punt en el qual es presenta la discontinuïtat de g .

Atès que

$$\frac{\sin(2k+1)t}{2k+1} = \int_0^t \cos(2k+1)\tau \, d\tau,$$

es té

$$s_n(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \int_0^t \sum_{k=0}^n \cos(2k+1)\tau \, d\tau$$

i, com que

$$\sum_{k=0}^n \cos(2k+1)\tau = \Re \left(\sum_{k=0}^n e^{j(2k+1)\tau} \right) = \frac{\sin 2(n+1)\tau}{2 \sin \tau},$$

obtenim

$$s_n(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \int_0^t \frac{\sin 2(n+1)\tau}{2 \sin \tau} \, d\tau.$$

Els punts en els quals $s_n(t)$ és màxim es troben resolent l'equació

$$s'_n(t) = \frac{2}{\pi} \frac{\sin 2(n+1)t}{2 \sin t} = 0.$$

El primer màxim ($t > 0$) es presenta en el punt

$$t = \frac{\pi}{2(n+1)}.$$

En aquest punt el valor de $s_n(t)$ és

$$s_n \left(\frac{\pi}{2(n+1)} \right) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2(n+1)}} \frac{\sin 2(n+1)\tau}{2 \sin \tau} \, d\tau.$$

Si en aquesta darrera integral fem el canvi $2(n+1)\tau = s$ obtenim

$$s_n \left(\frac{\pi}{2(n+1)} \right) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin s}{2 \sin \frac{s}{2(n+1)}} \frac{ds}{2(n+1)}$$

Per tant, per a n gran

$$\begin{aligned} s_n \left(\frac{\pi}{2(n+1)} \right) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin s}{s} \left(\frac{\frac{s}{2(n+1)}}{\sin \frac{s}{2(n+1)}} \right) ds \approx \\ &\approx \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin s}{s} ds, \end{aligned} \quad (24)$$

atès que el terme entre parèntesis de l'integrand tendeix a 1 quan n tendeix a infinit.

El valor de

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin s}{s} ds$$

es pot trobar per integració numèrica i és 0.5894. Així, el valor màxim de $s_n(x)$ tendeix a 1.0894. Això vol dir, ponderant aquest valor màxim respecte al valor límit 1, que hi ha una arrissada del 9%. Aquesta arrissada es presenta cada cop més a prop de la discontinuïtat conforme n creix, però la seva amplitud *no disminueix* (vegeu la figura 3).

2.4 Derivació de les sèries de Fourier

Les condicions enunciades en el teorema 2.2, suficients perquè la sèrie de Fourier d'una funció x convergeixi uniformement garanteixen, a més a més, que la sèrie de Fourier de la derivada de x s'obté derivant terme a terme la sèrie de x . Naturalment, la sèrie de Fourier de x' convergeix en mitjana quadràtica cap a x' (és a dir, a $L^2(-\pi, \pi)$).

Teorema 2.3 *Si $x : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ és contínua, $x(-\pi) = x(\pi)$, la seva derivada x' és contínua a trossos a $(-\pi, \pi)$, i*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$$

és la seva sèrie de Fourier, aleshores la sèrie de Fourier de x' és

$$\sum_{k=1}^{\infty} k(b_k \cos kt - a_k \sin kt). \quad (25)$$

Demostració: Sigui $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k \cos kt + \beta_k \sin kt)$ la sèrie de Fourier associada a x' . Per les fórmules (20), (21) i (22) tenim $\alpha_0 = 0$, $\alpha_k = kb_k$ i $\beta_k = -ka_k$, $k = 1, 2, 3 \dots$ ■

El teorema següent enuncia condicions suficients per a la convergència puntual de la sèrie (25) de x' .

Teorema 2.4 *Sigui $x : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua, $x(-\pi) = x(\pi)$, i x' contínua a trossos a $(-\pi, \pi)$. Aleshores,*

$$x'(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k(b_k \cos kt - a_k \sin kt)$$

a cada punt $t \in (-\pi, \pi)$ en què existeixi $x''(t)$.

Demostració: En existir $x''(t)$, la derivada x' satisfà en el punt t les condicions enunciades en el teorema 2.1 per a la convergència puntual de la seva sèrie de Fourier. ■

Exemple 2.3: Derivant terme a terme la sèrie de Fourier de $x : t \mapsto |t|$, $t \in [-\pi, \pi]$, donada a l'exemple 2.2, s'obté la sèrie de Fourier de x'

$$x'(t) = \begin{cases} -1 & , -\pi < t < 0; \\ 1 & , 0 < t < \pi. \end{cases}$$

Així,

$$x'(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)t}{2k+1}, \quad t \in (-\pi, \pi), t \neq 0.$$

Noteu que a $t = 0$ la funció x' no està definida. □

2.5 Integració de les sèries de Fourier

Una sèrie de Fourier d'una funció contínua a trossos x sempre es pot integrar terme a terme i la sèrie obtinguda convergeix uniformement a la integral de x .

Teorema 2.5 *Sigui $x : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua a trossos. Aleshores, convergeixi o no puntualment la sèrie de Fourier de x*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt). \quad (26)$$

es compleix que

$$\int_{-\pi}^t x(\tau) d\tau = \frac{a_0}{2}(t + \pi) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} (a_k \sin kt - b_k(\cos kt - \cos k\pi)), \quad (27)$$

essent la convergència uniforme a $[-\pi, \pi]$;

Demostració: Noteu que (27) s'obté integrant terme a terme la sèrie (26) i que (27) *no és*, en general, una sèrie de Fourier a causa de la presència del terme $\frac{a_0}{2}t$.

Definim

$$g(t) = \int_{-\pi}^t x(\tau) d\tau - \frac{a_0}{2}(t + \pi), \quad t \in [-\pi, \pi];$$

la funció g és contínua a $[-\pi, \pi]$ i satisfà

$$\begin{aligned} g(-\pi) &= 0, \\ g(\pi) &= \int_{-\pi}^{\pi} x(\tau) d\tau - a_0\pi = 0. \end{aligned}$$

A més a més, $g'(t) = x(t) - \frac{a_0}{2}$ és contínua a trossos a $[-\pi, \pi]$. Així, la sèrie de Fourier de g

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos kt + B_k \sin kt).$$

convergeix uniformement a g a $[-\pi, \pi]$.

Però, per a $k = 1, 2, 3 \dots$

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \cos kt \, dt \\ &= \frac{1}{\pi} \left[g(t) \frac{\sin kt}{k} \right]_{t=-\pi}^{t=\pi} - \frac{1}{k\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g'(t) \sin kt \, dt \\ &= -\frac{1}{k\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (x(t) - \frac{a_0}{2}) \sin kt \, dt = -\frac{b_k}{k} \end{aligned}$$

i, anàlogament

$$\begin{aligned} B_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \sin kt \, dt \\ &= \frac{1}{\pi} \left[-g(t) \frac{\cos kt}{k} \right]_{t=-\pi}^{t=\pi} + \frac{1}{k\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g'(t) \cos kt \, dt \\ &= \frac{1}{k\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (x(t) - \frac{a_0}{2}) \cos kt \, dt = \frac{a_k}{k}, \end{aligned}$$

d'on

$$g(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} (-b_k \cos kt + a_k \sin kt)$$

i, com que $g(-\pi) = 0$, es té

$$\frac{A_0}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{k} \cos k\pi,$$

amb la qual cosa

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^t x(\tau) \, d\tau &= g(t) + \frac{a_0}{2}(t + \pi) \\ &= \frac{a_0}{2}(t + \pi) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} (a_k \sin kt - b_k(\cos kt - \cos k\pi)), \end{aligned}$$

uniformement a $[-\pi, \pi]$. ■

2.6 Ordre de magnitud dels coeficients de Fourier

Si la sèrie de Fourier d'una funció x convergeix en el punt t "ràpidament" cap a $x(t)$ n'hi haurà prou amb pocs termes per aproximar $x(t)$ mitjançant $s_n(t)$. En canvi, una convergència "lenta" implicarà la necessitat de sumar molts termes per aproximar el valor de x .

Per tal de quantificar aquesta velocitat de convergència estudiarem, en primer lloc, l'ordre de magnitud dels coeficients de Fourier a_k i b_k . Aquests coeficients tendeixen a 0 quan $k \rightarrow \infty$. Però tenim, a més a més, que conforme $k \rightarrow \infty$, a_k i b_k convergeixen més ràpidament a 0 com més "llisa" sigui x , és a dir, com més gran sigui el nombre de derivades de x contínues. Enunciat de manera més precisa:

Teorema 2.6 Sigui $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ periòdica de període 2π , contínua, amb derivades $x', x'', \dots, x^{(p-1)}$, $p \geq 1$, contínues i tal que $x^{(p)}$ és contínua a trossos a $(-\pi, \pi)$. Sigui

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$$

la sèrie de Fourier de x . Aleshores

$$|a_k|, |b_k| \leq \frac{\epsilon_k}{k^p}, \quad k = 1, 2, 3 \dots$$

on $\epsilon_k \rightarrow 0$ quan $k \rightarrow \infty$.

Demostració: Si apliquem successivament el teorema 2.3, obtindrem

$$x^{(p)}(t) \sim \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k \cos kt + \beta_k \sin kt),$$

on, o bé

$$\alpha_k = \pm k^p a_k, \quad \beta_k = \pm k^p b_k, \quad (28)$$

o bé

$$\alpha_k = \pm k^p b_k, \quad \beta_k = \pm k^p a_k. \quad (29)$$

A més a més, la sèrie $\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k^2 + \beta_k^2)$ convergeix. Així, si $\sqrt{(\alpha_k^2 + \beta_k^2)} = \epsilon_k$ i es compleix (28):

$$\begin{aligned} |a_k| &= \frac{|\alpha_k|}{k^p} \leq \frac{\epsilon_k}{k^p} \\ |b_k| &= \frac{|\beta_k|}{k^p} \leq \frac{\epsilon_k}{k^p} \end{aligned} \quad k = 1, 2, 3 \dots$$

La fitació també és vàlida en el cas (29). ■

El resultat anterior permet ara fer una estimació de la velocitat de convergència de la sèrie.

Teorema 2.7 En les condicions del teorema anterior,

$$|x(t) - s_n(t)| \leq \frac{\eta_n}{n^{p-\frac{1}{2}}} \text{ uniformement a } [-\pi, \pi],$$

on $s_n(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$ i $\eta_n \rightarrow 0$ quan $n \rightarrow \infty$.

Demostració: Sigui $m > n$,

$$|s_m(t) - s_n(t)| = \left| \sum_{k=n+1}^m (a_k \cos kt + b_k \sin kt) \right|$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{k=n+1}^m \sqrt{a_k^2 + b_k^2} = \sum_{k=n+1}^m \frac{1}{k^p} \sqrt{\alpha_k^2 + \beta_k^2} \\
&\leq \left(\sum_{k=n+1}^m \frac{1}{k^{2p}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=n+1}^m (\alpha_k^2 + \beta_k^2) \right)^{\frac{1}{2}},
\end{aligned}$$

on a l'última fitació s'ha aplicat la desigualtat de Cauchy-Schwarz.

Ara bé,

$$\sum_{k=n+1}^m \frac{1}{k^{2p}} \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^{2p}} \leq \int_n^{\infty} \frac{du}{u^{2p}} = \frac{1}{(2p-1)n^{2p-1}}$$

i

$$\sum_{k=n+1}^m (\alpha_k^2 + \beta_k^2) \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} (\alpha_k^2 + \beta_k^2).$$

Per tant,

$$|s_m(t) - s_n(t)| \leq \frac{\eta_n}{n^{p-\frac{1}{2}}},$$

on

$$\eta_n = \left(\frac{\sum_{k=n+1}^{\infty} (\alpha_k^2 + \beta_k^2)}{2p-1} \right)^{\frac{1}{2}},$$

tendeix a 0 quan n tendeix a infinit. A més a més, η_n no depèn de t . Passant al límit, quan $m \rightarrow \infty$, el teorema queda demostrat ■

3 Transformació de Fourier

3.1 De la sèrie a la transformada de Fourier

Sigui $x(t)$ una funció de l'espai $L^2\left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right)$ i considerem el seu desenvolupament en sèrie de Fourier complexa:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j2\pi \frac{n}{T} t}, \quad (30)$$

on

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) e^{-j2\pi \frac{n}{T} t} dt. \quad (31)$$

Com s'ha vist en els capítols anteriors, la convergència de la sèrie (30) és en mitjana quadràtica i, puntualment, la sèrie representa l'extensió periòdica, amb període T , de la funció $x(t)$.

Considerem ara una funció $x \in L^2(-\infty, \infty)$, és a dir, tal que la integral $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$ tingui un valor finit. Volem trobar una representació de $x(t)$ anàloga a la donada per a la sèrie (30). Ja que $x \in L^2\left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right)$ per a cada $T > 0$, apliquem les equacions (30) i (31) i fem $T \rightarrow \infty$. És a dir, interpretem la funció no periòdica $x(t)$ com una funció periòdica amb període "infinit". Si definim

$$X_T(f) \equiv \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) e^{-j2\pi f t} dt \quad (32)$$

i

$$f_n \equiv \frac{n}{T}, \quad \Delta f \equiv f_{n+1} - f_n = \frac{1}{T},$$

el coeficient c_n donat per la integral (31) és

$$c_n = X_T(f_n) \Delta f,$$

i la sèrie (30) es pot escriure de la forma següent:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j2\pi \frac{n}{T} t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_T(f_n) e^{j2\pi f_n t} \Delta f. \quad (33)$$

Quan $T \rightarrow \infty$, el terme $\Delta f = \frac{1}{T}$ tendeix a 0 i, formalment, les expressions (32) i (33) esdevenen, respectivament:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt \quad (34)$$

i

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi f t} df. \quad (35)$$

Així com la sèrie de Fourier (30) ens expressa l'extensió periòdica (amb període T) de la funció $x(t)$ com una superposició d'exponencials complexes de la forma $e^{j2\pi f_n t}$ (amb $f_n = \frac{n}{T}$), la fórmula (35) ens permet representar la funció

no periòdica $x(t)$ com una “superposició continua” d'exponencials complexes $e^{j2\pi ft}$, essent els “coeficients” de la superposició de la forma $X(f)df$, on la funció $X(f)$ ve donada per l'expressió (34).

Notem que les fòrmules (34) i (35) tenen la mateixa estructura, però amb un canvi de signe a l'exponencial complexa que apareix a la integral. L'obtenció d'aquestes fòrmules ha estat formal; es poden, però, justificar en un marc adequat que veurem a continuació.

3.2 Transformació de Fourier en $L(-\infty, \infty)$

Quan $x(t)$ pertany a l'espai $L(-\infty, \infty)$ de les funcions $x(t)$ que són absolutament integrables, és a dir, tals que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty,$$

la funció $X(f)$ donada per la integral (34)

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt \quad (36)$$

està ben definida i s'anomena *transformada de Fourier* de $x(t)$. També farem servir la notació \mathcal{F} per representar l'aplicació que associa a cada funció $x \in L(-\infty, \infty)$ la seva transformada de Fourier, és a dir

$$X = \mathcal{F}(x).$$

La transformada de Fourier $X(f)$ és una funció complexa de variable real f acotada. En efecte, per a tot $f \in \mathbb{R}$,

$$|X(f)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty.$$

A més a més, es pot demostrar que $X(f)$ és una funció continua.

D'altra banda, la fòrmula (35)

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{j2\pi ft} df, \quad (37)$$

s'anomena *fòrmula d'inversió* i es diu que $x(t)$ és la *transformada inversa de Fourier* de $X(f)$. També escriurem

$$x = \mathcal{F}^{-1}(X).$$

Es compleix el resultat següent, conegut com a Teorema d'Inversió, que ens permet recuperar la funció $x(t)$ si coneixem la seva transformada de Fourier.

Teorema 3.1 *Si $x(t)$ i la seva transformada $X(f)$ són funcions de $L(-\infty, \infty)$, llavors*

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{j2\pi ft} df$$

per a quasi tot $t \in \mathbb{R}$.

La fórmula anterior es compleix doncs per a tot $t \in \mathbb{R}$ excepte, possiblement, en un conjunt de punts de mesura (logitud) 0. En particular, si la funció $x(t)$ és contínua, la igualtat anterior es verifica en tot punt ja que $\mathcal{F}^{-1}(X)$ és sempre una funció contínua.

Exemple 3.1: Sigui $x(t) = e^{-|t|}$. Ja que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt = 2 \int_0^{\infty} e^{-t} dt = 2,$$

tenim que $x \in L(-\infty, \infty)$. La seva transformada de Fourier $X(f)$ és

$$\begin{aligned} X(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^0 e^{t-j2\pi ft} dt + \int_0^{\infty} e^{-t-j2\pi ft} dt \\ &= \frac{1}{1-j2\pi f} + \frac{1}{1+j2\pi f} = \frac{2}{1+(2\pi f)^2}. \end{aligned}$$

En aquest exemple $X \in L(-\infty, \infty)$ i la funció x és contínua. Per tant, la fórmula d'inversió es compleix per a tot $t \in \mathbb{R}$. Es a dir,

$$e^{-|t|} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{1+(2\pi f)^2} e^{j2\pi ft} df, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Notem també que $X(0) = 2$ dona el valor de la integral $\int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt$. \square

Si en qualsevol interval finit la funció $x \in L(-\infty, \infty)$ és contínua a trossos i té derivada també contínua a trossos, llavors es verifica un resultat semblant al que es té en referència a la convergència puntual de les sèries de Fourier trigonomètriques. En efecte, definint la integral de la fórmula (37) mitjançant el límit

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-a}^a X(f)e^{j2\pi ft} df \quad (38)$$

(valor principal de Cauchy de la integral impròpia), tenim:

$$\int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{j2\pi ft} df = \frac{x(t^-) + x(t^+)}{2}.$$

En particular, la fórmula d'inversió dona el valor $x(t)$ en els punts t de continuïtat de la funció x .

Exemple 3.2: Si

$$x(t) = \begin{cases} 1, & -\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ 0, & \text{altrament} \end{cases}$$

tenim

$$\begin{aligned} X(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt \\ &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{-j2\pi ft} dt = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \cos(2\pi ft) dt = \frac{\sin(\pi f)}{\pi f}. \end{aligned}$$

La fórmula d'inversió ens dóna:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{j2\pi ft} df &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\pi f)}{\pi f} e^{j2\pi ft} df \\ &= 2 \int_0^{\infty} \frac{\sin(\pi f)}{\pi f} \cos(2\pi ft) df = \begin{cases} 1, & |t| \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}, & |t| = \frac{1}{2} \\ 0, & |t| > \frac{1}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Per exemple, prenent $t = 0$ obtenim

$$1 = 2 \int_0^{\infty} \frac{\sin(\pi f)}{\pi f} df$$

d'on, amb un canvi de variable, s'obté el resultat

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin u}{u} du = \frac{\pi}{2}.$$

□

3.2.1 Propietats

1. *Simetria*: La transformada de Fourier $X(f)$ d'una funció real $x(t)$ compleix la següent propietat de simetria:

$$\begin{aligned} X(-f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi(-f)t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{j2\pi ft} dt = \overline{\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt} = \overline{X(f)}. \end{aligned} \quad (39)$$

A més, si $x(t)$ és una funció parella,

$$\begin{aligned} X(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(-t)e^{j2\pi ft} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{j2\pi ft} dt = \overline{\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt} = \overline{X(f)}; \end{aligned}$$

és a dir, la transformada de Fourier $X(f)$ és real i, per (39), és una funció parella (vegeu l'exemple 3.1).

2. *Linealitat*: L'aplicació \mathcal{F} és lineal. És a dir, donades $x, y \in L(-\infty, \infty)$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ es compleix

$$\mathcal{F}(\alpha x + \beta y) = \alpha \mathcal{F}(x) + \beta \mathcal{F}(y).$$

En efecte,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} (\alpha x(t) + \beta y(t))e^{-j2\pi ft} dt \\ = \alpha \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt + \beta \int_{-\infty}^{\infty} y(t)e^{-j2\pi ft} dt. \end{aligned}$$

3. *Dualitat*: Si $x, X \in L(-\infty, \infty)$, llavors

$$\mathcal{F}(X(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} X(t)e^{-j2\pi ft} dt = x(-f).$$

4. *Canvi d'escala*: Sigui $a > 0$. Llavors,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(x(at)) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(at)e^{-j2\pi ft} dt \\ &= \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} x(u)e^{-j2\pi f \frac{u}{a}} du = \frac{1}{a} X\left(\frac{f}{a}\right). \end{aligned}$$

En general, si $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$,

$$\mathcal{F}(x(at)) = \frac{1}{|a|} X\left(\frac{f}{a}\right).$$

5. *Desplaçament en t*:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(x(t - t_0)) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t - t_0)e^{-j2\pi ft} dt \\ &= e^{-j2\pi ft_0} \int_{-\infty}^{\infty} x(u)e^{-j2\pi fu} du = e^{-j2\pi ft_0} X(f). \end{aligned}$$

6. *Desplaçament en f*:

$$\mathcal{F}(e^{j2\pi f_0 t} x(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{j2\pi f_0 t} e^{-j2\pi ft} dt = X(f - f_0)$$

7. *Modulació*:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(x(t) \cos(2\pi f_0 t)) &= \mathcal{F}\left(x(t) \frac{e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2} (X(f - f_0) + X(f + f_0)). \end{aligned}$$

8. *Derivació*: Si $x, x' \in L(-\infty, \infty)$ i són contínues, llavors:

$$\mathcal{F}(x'(t)) = j2\pi f X(f).$$

En efecte,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x'(t)| dt < \infty \quad \text{i} \quad \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty$$

implica la convergència de les integrals

$$\int_{-\infty}^{\infty} x'(t) dt \quad \text{i} \quad \int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt.$$

Així, existeix el límit

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \int_0^t x'(u) du,$$

la qual cosa implica l'existència de $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} x(t)$, ja que

$$x(t) = x(0) + \int_0^t x'(u) du.$$

Però

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} x(t) = 0,$$

altrament $\int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt$ no seria convergent.

Per tant,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(x'(t)) &= \int_{-\infty}^{\infty} x'(t)e^{-j2\pi ft} dt = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-a}^a x'(t)e^{-j2\pi ft} dt \\ &= \lim_{a \rightarrow \infty} \left[x(t)e^{-j2\pi ft} \right]_{-a}^a + j2\pi f \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-a}^a x(t)e^{-j2\pi ft} dt \\ &= j2\pi f \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt = j2\pi f X(f). \end{aligned}$$

9. *Derivació en f*: Si $x(t)$ i $tx(t)$ són funcions de $L(-\infty, \infty)$, llavors

$$X'(f) = \mathcal{F}(-j2\pi t x(t)).$$

En efecte, permutant les operacions de derivació i integració,

$$\begin{aligned} X'(f) &= \frac{d}{df} \left(\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt \right) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \frac{d}{df} \left(e^{-j2\pi ft} \right) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)(-j2\pi t)e^{-j2\pi ft} dt. \end{aligned}$$

3.2.2 Convolució

Siguin x i y funcions de $L(-\infty, \infty)$. La funció $x * y$ definida mitjançant la integral

$$(x * y)(t) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} x(u) y(t - u) du$$

és de $L(-\infty, \infty)$ i s'anomena *convolució* de x i y . En efecte,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |(x * y)(t)| dt &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\left| \int_{-\infty}^{\infty} x(u) y(t - u) du \right| \right) dt \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |x(u)||y(t - u)| du \right) dt = \int_{-\infty}^{\infty} |x(u)| \left(\int_{-\infty}^{\infty} |y(t - u)| dt \right) du \\ &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} |y(t)| dt \right) < \infty. \end{aligned}$$

Es pot demostrar que la convolució té la propietat conmutativa, és associativa i és distributiva respecte de la suma de funcions. La importància d'aquesta operació en relació a la transformació de Fourier la dóna el següent resultat:

Teorema 3.2 Si $x, y \in L(-\infty, \infty)$, llavors

$$\mathcal{F}(x * y) = \mathcal{F}(x)\mathcal{F}(y).$$

Demostració:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}((x * y)(t)) &= \int_{-\infty}^{\infty} (x * y)(t) e^{-j2\pi ft} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} x(u) y(t-u) du \right) e^{-j2\pi ft} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(u) y(t-u) e^{-j2\pi ft} dt du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(u) \left(\int_{-\infty}^{\infty} y(t-u) e^{-j2\pi ft} dt \right) du \\ &= Y(f) \int_{-\infty}^{\infty} x(u) e^{-j2\pi fu} du = X(f)Y(f) \end{aligned}$$

■

Exemple 3.3: Considerem altre vegada la funció

$$x(t) = \begin{cases} 1, & -\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ 0, & \text{altrament.} \end{cases}$$

Si $h(t) = (x * x)(t)$ tenim:

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(u)x(t-u) du = \begin{cases} 0, & t < -1 \\ t+1, & -1 < t < 0 \\ -t+1, & 0 < t < 1 \\ 0, & t > 1. \end{cases}$$

Per tant,

$$H(f) = (X(f))^2 = \left(\frac{\sin(\pi f)}{\pi f} \right)^2.$$

□

3.3 Transformació de Fourier en $L^2(-\infty, \infty)$

Considerem ara funcions de quadrat integrable $x \in L^2(-\infty, \infty)$. És a dir, funcions $x(t)$ tals que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt < \infty.$$

Pot ser que x no pertanyi a $L(-\infty, \infty)$ i, per tant, la seva transformada de Fourier pot no estar definida. Per exemple, si prenem

$$x(t) = \frac{1}{1+|t|}$$

tenim

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = 2 \int_0^{\infty} \frac{1}{(1+t)^2} dt = 2,$$

però, en canvi, $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt$ divergeix.

Vegem a continuació com es pot estendre la definició de la transformació de Fourier per tal que tota funció de quadrat integrable tingui transformada. L'espai $L^2(-\infty, \infty)$ és espai de Hilbert amb producte escalar

$$(x, y) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \overline{y(t)} dt$$

i norma

$$\|x\| = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt}.$$

Donada $x \in L^2(-\infty, \infty)$, definim la funció $x_a(t)$, $a > 0$, de tal forma que

$$x_a(t) = \begin{cases} x(t), & t \in [-a, a] \\ 0, & \text{altrament.} \end{cases}$$

Naturalment, $x_a \in L^2(-\infty, \infty)$ i també es compleix $x_a \in L(-\infty, \infty)$. En efecte, per a tot $z \in \mathbb{C}$ es verifica $|z| \leq 1 + |z|^2$, i, per tant,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x_a(t)| dt = \int_{-a}^a |x_a(t)| dt \leq \int_{-a}^a (1 + |x_a(t)|^2) dt < \infty.$$

A més, en $L^2(-\infty, \infty)$:

$$\begin{aligned} \|x_a - x\|^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} |x_a(t) - x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{-a} |x(t)|^2 dt + \int_a^{\infty} |x(t)|^2 dt \\ &= \|x\|^2 - \int_{-a}^a |x(t)|^2 dt \rightarrow 0 \text{ quan } a \rightarrow \infty; \end{aligned}$$

és a dir, x_a convergeix en mitjana quadràtica cap a x quan $a \rightarrow \infty$.

D'altra banda, es pot demostrar que la funció $X_a = \mathcal{F}(x_a)$ també convergeix en $L^2(-\infty, \infty)$ cap a una funció X d'aquest espai (quan $a \rightarrow \infty$). Es diu que aquesta funció X és la transformada de Fourier $\mathcal{F}(x)$ de la funció $x \in L^2(-\infty, \infty)$. Per tant,

$$X(f) = \lim_{a \rightarrow \infty} X_a(f) = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-a}^a x(t) e^{-j2\pi ft} dt, \quad (40)$$

essent el límit en el sentit de la mitjana quadràtica, és a dir,

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \|X_a - X\|^2 = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} |X_a(f) - X(f)|^2 dt = 0.$$

Es té el resultat següent:

Teorema 3.3 *Si $x \in L^2(-\infty, \infty)$.*

- (a) *Si $x \in L(-\infty, \infty) \cap L^2(-\infty, \infty)$, llavors la transformada X obtinguda amb la fórmula (40) coincideix amb la calculada per (36).*

(b) L'aplicació $x \mapsto \mathcal{F}(x)$ és un isomorfisme de $L^2(-\infty, \infty)$.

(c) Es compleix la fórmula d'inversió:

$$x(t) = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-a}^a X(f) e^{j2\pi ft} df,$$

essent el límit en mitjana quadràtica.

3.4 Fòrmula de Parseval

La transformació de Fourier té la propietat de conservar el producte escalar de $L^2(-\infty, \infty)$.

Teorema 3.4 Si x, y són funcions de $L^2(-\infty, \infty)$, llavors

$$(x, y) = (X, Y),$$

és a dir:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \overline{y(t)} dt = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \overline{Y(f)} df. \quad (41)$$

Prenent $x = y$ obtenim

Teorema 3.5 (Parseval) Si $x \in L^2(-\infty, \infty)$, aleshores

$$\|x\|^2 = \|X\|^2,$$

és a dir:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df. \quad (42)$$

La fórmula (41) es pot justificar de la forma següent. Suposem que x i y són funcions de $L(-\infty, \infty) \cap L^2(-\infty, \infty)$ i sigui $z(t) = \overline{y(-t)}$. Llavors,

$$\begin{aligned} Z(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} z(t) e^{-j2\pi ft} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{y(-t)} e^{-j2\pi ft} dt = \overline{\int_{-\infty}^{\infty} y(-t) e^{j2\pi ft} dt} \\ &= \overline{\int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{-j2\pi ft} dt} = \overline{Y(f)}. \end{aligned}$$

Aplicant la fórmula d'inversió al producte $X(f) \overline{Y(f)}$ obtenim:

$$\int_{-\infty}^{\infty} X(f) \overline{Y(f)} e^{j2\pi ft} dt = (x * z)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(u) z(t-u) du. \quad (43)$$

Finalment, fent $t = 0$ obtenim la fórmula (41). Es pot demostrar que la funció $h(t) = (x * z)(t)$ de $L(-\infty, \infty)$ és contínua i té transformada $H(f)$ també de $L(-\infty, \infty)$. Així, la igualtat (43), donada per la fórmula d'inversió, es verifica per a tot $t \in \mathbb{R}$.

3.5 Transformades de Fourier de funcions generalitzades

Estudiarem en aquesta secció transformades de Fourier de funcions generalitzades, com ara la funció delta de Dirac o la funció esgraó unitari de Heaviside. Els resultats que es presenten es dedueixen aplicant formalment resultats i definicions donats anteriorment. La seva fonamentació rigorosa necessita de l'estudi de la teoria de distribucions.

3.5.1 Funció delta de Dirac

Sigui $\Pi(t)$ la funció introduïda a l'exemple 3.2, és a dir,

$$\Pi(t) = \begin{cases} 1, & -\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ 0, & \text{altrament.} \end{cases}$$

Si

$$x_a(t) = \frac{1}{a} \Pi\left(\frac{t}{a}\right),$$

llavors, aplicant les propietats de linealitat i de canvi d'escala, obtenim

$$X_a(f) = \frac{\sin(\pi a f)}{\pi a f}.$$

Notem que, formalment,

$$\lim_{a \rightarrow 0} x_a(t) = \delta(t),$$

de manera que, també formalment,

$$\mathcal{F}(\delta(t)) = \mathcal{F}\left(\lim_{a \rightarrow 0} x_a(t)\right) = \lim_{a \rightarrow 0} \mathcal{F}(x_a(t)) = \lim_{a \rightarrow 0} X_a(f) = 1,$$

ja que, per a cada $f \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi a f)}{\pi a f} = 1.$$

Aquest resultat també s'obté directament a partir del càlcul següent:

$$\mathcal{F}(\delta(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j2\pi f t} dt = e^{-j2\pi f t} \Big|_{t=0} = 1.$$

Aplicant la propietat de dualitat tenim

$$\mathcal{F}(1) = \delta(f). \tag{44}$$

3.5.2 Funció esgraó unitari

Per tal de trobar la transformada de Fourier de la funció esgraó unitari

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$$

trobem primer la transformada de

$$\text{sign}(t) = \begin{cases} -1, & t < 0 \\ 1, & t > 0. \end{cases}$$

D'altra banda, si

$$e(t) = \begin{cases} e^{-at}, & a > 0, t > 0 \\ 0, & \text{altrament,} \end{cases}$$

tenim

$$\text{sign}(t) = \lim_{a \rightarrow 0} (e(t) - e(-t)).$$

Però

$$\mathcal{F}(e(t)) = \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-j2\pi ft} dt = \frac{1}{a + j2\pi f}$$

i

$$\mathcal{F}(e(-t)) = \int_{-\infty}^0 e^{at} e^{-j2\pi ft} dt = \frac{1}{a - j2\pi f}.$$

Així,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\text{sign}(t)) &= \mathcal{F}\left(\lim_{a \rightarrow 0} (e(t) - e(-t))\right) \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} \left(\frac{1}{a + j2\pi f} - \frac{1}{a - j2\pi f} \right) = \frac{1}{j\pi f}. \end{aligned}$$

Atès que

$$u(t) = \frac{1}{2}(1 + \text{sgn}(t))$$

obtenim, finalment,

$$\mathcal{F}(u(t)) = \frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{j2\pi f}.$$

Com a conseqüència d'aquest resultat s'obté la següent propietat d'integració:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left(\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau\right) &= \mathcal{F}((x * u)(t)) \\ &= X(f) \left(\frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{j2\pi f} \right) = \frac{1}{2}X(0)\delta(f) + \frac{1}{j2\pi f}X(f). \end{aligned} \quad (45)$$

Notem que (45) està d'acord amb la propietat de derivació, ja que si $h(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$, llavors $x(t) = h'(t)$ i

$$j2\pi f H(f) = j2\pi f \left(\frac{1}{2}X(0)\delta(f) + \frac{1}{j2\pi f}X(f) \right) = X(f),$$

doncs $f\delta(f) = 0$.

3.5.3 Funció tren d'impulsos

Considerem ara la funció

$$p_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT),$$

que podem interpretar com la funció generalitzada *tren d'impulsos* obtinguda en considerar l'extensió periòdica amb període T de

$$s(t) = \begin{cases} \delta(t), & -\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2} \\ 0, & \text{altrament.} \end{cases}$$

La seva transformada de Fourier és:

$$P_T(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(\delta(t - nT)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi fnT}.$$

Calculem $P_T(f)$ de la forma següent:

$$P_T(f) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N e^{-j2\pi fnT}$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 + 2 \sum_{n=1}^N \cos(2\pi fnT) \right) = \lim_{N \rightarrow \infty} s_N(f),$$

on

$$s_N(f) = \begin{cases} \frac{\sin(2\pi fT(N + \frac{1}{2}))}{\sin(\pi fT)}, & f \neq k\frac{1}{T}, \quad k \in \mathbb{Z} \\ 2N + 1, & f = k\frac{1}{T}, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

La funció anterior és periòdica amb període $1/T$ i l'àrea en un període val:

$$\int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} s_N(f) df = \int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} \left(1 + 2 \sum_{n=1}^N \cos(2\pi fnT) \right) df = \frac{1}{T}.$$

Així, quan N tendeix a infinit, $s_N(f)$ “convergeix” cap a la funció

$$\frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - n\frac{1}{T}\right),$$

d'on

$$\mathcal{F}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)\right) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - n\frac{1}{T}\right), \quad (46)$$

és a dir, la transformada obtinguda és també un “tren d'impulsos” (en el domini freqüencial), però d'amplada $1/T$ i essent també $1/T$ la separació en freqüència entre dos impulsos consecutius.

3.6 De la transformada a la sèrie de Fourier

Sigui $x(t)$ una funció periòdica de període T . Si

$$x_T(t) = \begin{cases} x(t), & t \in (-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}] \\ 0, & \text{altrament,} \end{cases}$$

és la restricció de $x(t)$ a l'interval bàsic $(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$, llavors podem representar la funció periòdica $x(t)$ mitjançant una convolució amb la funció generalitzada $p_T(t)$ (“tren d'impulsos”) discutida a l'apartat anterior:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_T(t - nT) = x_T(t) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = x_T(t) * p_T(t).$$

Per tant, tenint en compte la fórmula (46),

$$\begin{aligned} X(f) &= X_T(f) P_T(f) \\ &= X_T(f) \left(\frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - n\frac{1}{T}\right) \right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \delta\left(f - n\frac{1}{T}\right), \end{aligned} \quad (47)$$

on

$$c_n = \frac{1}{T} X_T\left(\frac{n}{T}\right).$$

És a dir,

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) e^{-j2\pi \frac{n}{T} t} dt.$$

Si invertim (47), aplicant (44) i la propietat de desplaçament en f , obtenim:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j2\pi \frac{n}{T} t},$$

és a dir, retrobem l'expressió de la sèrie de Fourier complexa (30) de la funció periòdica $x(t)$.

La fórmula (47) ens indica que podem donar sentit (en el marc de les funcions generalitzades o distribucions) a la transformada de Fourier d'una funció periòdica de període T . Aquesta transformada torna a ser un “tren d'impulsos”, on les amplades dels impulsos venen donades pels coeficients de Fourier c_n de la funció respecte de la successió $\{e^{j2\pi \frac{n}{T} t}\}$, i la separació entre dos impulsos consecutius (és a dir, el període de la transformada en el domini freqüencial) val $1/T$.

3.7 Dues aplicacions de la transformació de Fourier

3.7.1 Anàlisi de Fourier i sistemes lineals

Un *sistema lineal i invariant en el temps* ve caracteritzat per una aplicació \mathcal{T} actuant sobre un cert espai S de funcions (que suposarem, en general, complexes de variable real) que compleix les dues propietats següents:

1. Linealitat.

$$\mathcal{T}(\alpha x(t) + \beta y(t)) = \alpha \mathcal{T}(x(t)) + \beta \mathcal{T}(y(t)), \quad x, y \in S, \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

2. Invariància de la resposta en el temps.

$$\text{Si } y(t) = \mathcal{T}(x(t)), \text{ llavors } \mathcal{T}(x(t - \tau)) = y(t - \tau).$$

Les funcions exponencials complexes són autofuncions de \mathcal{T} . En efecte, si

$$z(t) = \mathcal{T}(e^{j2\pi ft}),$$

llavors

$$z(t - \tau) = \mathcal{T}(e^{j2\pi f(t-\tau)}) = e^{-j2\pi f\tau} \mathcal{T}(e^{j2\pi ft}) = e^{-j2\pi f\tau} z(t),$$

d'on, prenent $t = \tau$

$$z(0) = e^{-j2\pi f\tau} z(\tau),$$

és a dir, (canviant τ per t)

$$z(t) = z(0) e^{j2\pi ft}.$$

Així, la sortida del sistema quan l'entrada és l'exponencial complexa $e^{j2\pi ft}$ resulta ser múltiple d'aquesta mateixa funció, on la constant multiplicativa $z(0)$ depen del sistema i de la freqüència f de l'entrada. Aquesta constant es representa per $H(f)$ i s'anomena *funció de transferència* del sistema. Tenim doncs:

$$\mathcal{T}(e^{j2\pi ft}) = H(f) e^{j2\pi ft}.$$

Si $x(t)$ és ara una funció periòdica de període T , tenim

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j2\pi n f_0 t},$$

amb $f_0 = 1/T$, i, per tant,

$$y(t) = \mathcal{T}(x(t)) = \mathcal{T}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j2\pi n f_0 t}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n H(n f_0) e^{j2\pi n f_0 t}.$$

En general, si $x(t)$ té transformada de Fourier $X(f)$,

$$y(t) = \mathcal{T}(x(t)) = \mathcal{T}\left(\int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df\right)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \mathcal{T} \left(e^{j2\pi ft} \right) df = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) H(f) e^{j2\pi ft} df.$$

En particular, si $h(t) = \mathcal{T}(\delta(t))$, tenim

$$h(t) = \mathcal{T}(\delta(t)) = \mathcal{T} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{j2\pi ft} df \right) = \int_{-\infty}^{\infty} H(f) e^{j2\pi ft} df,$$

és a dir, $H(f)$ és la transformada de Fourier de la funció $h(t)$, anomenada *resposta a l'impuls* del sistema.

3.7.2 La solució de d'Alambert de l'equació d'ona

Considerem l'equació d'ona unidimensional per a la funció $u(x, t)$, $-\infty < x < \infty$, $t > 0$, amb desplaçament inicial donat per la funció $f(x)$ i velocitat inicial zero:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad -\infty < x < \infty$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0, \quad -\infty < x < \infty$$

Per tal de resoldre l'anterior problema de contorn formulat en un domini infinit, sigui

$$U(f, t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) e^{-j2\pi fx} dx,$$

la transformada de Fourier $\mathcal{F}(u(x, t))$, actuant \mathcal{F} sobre la variable x . Calculem les transformades de les derivades segones de $u(x, t)$ respecte de x i de t :

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) \right) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) e^{-j2\pi fx} dx = \\ &= \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) e^{-j2\pi fx} dx \right) = \frac{\partial^2 U(f, t)}{\partial t^2}. \end{aligned}$$

I també, per la propietat de derivació de la transformació de Fourier:

$$\mathcal{F} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \right) = (j2\pi f)^2 U(f, t) = -4\pi^2 f^2 U(f, t).$$

Així, l'equació d'ona ens queda transformada en l'equació diferencial següent:

$$\frac{\partial^2 U(f, t)}{\partial t^2} + 4\pi^2 f^2 c^2 U(f, t) = 0, \quad t > 0.$$

La solució general de l'equació anterior és:

$$U(f, t) = \alpha(f) \cos(2\pi fct) + \beta(f) \sin(2\pi fct).$$

Fent $t = 0$ i aplicant la primera condició inicial determinem la funció $\alpha(f)$,

$$\alpha(f) = U(f, 0) = \mathcal{F}(u(x, 0)) = \mathcal{F}(f(x)) = F(f).$$

Derivant $U(f, t)$ respecte a t , fent $t = 0$ i aplicant la segona condició inicial:

$$2\pi f c \beta(f) = \frac{\partial U}{\partial t}(f, 0) = \mathcal{F}\left(\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0)\right) = 0.$$

Per tant,

$$U(f, t) = F(f) \cos(2\pi f c t) = \frac{1}{2}F(f) \left(e^{j2\pi f c t} + e^{-j2\pi f c t}\right)$$

d'on, finalment, obtenim l'expressió

$$u(x, t) = \mathcal{F}^{-1}(U(f, t)) = \frac{1}{2}(f(x + ct) + f(x - ct)),$$

coneguda com a solució de d'Alambert de l'equació d'ona.

4 Sèries i transformades discretes de Fourier

4.1 Sèries discretes de Fourier

La successió d'exponencials complexes

$$\left\{ \phi_n(t) = e^{j2\pi \frac{n}{T}t}; n \in \mathbb{Z} \right\}$$

—que tal com s'ha vist anteriorment constitueix una base ortogonal de l'espai de Hilbert $L^2(0, T)$ — té la propietat notable que si mostreigem cada funció $\phi_n(t)$ en els N punts equiespaiats

$$t_k = k \frac{T}{N}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1,$$

llavors s'obté també una base ortogonal de \mathbb{C}^N . És a dir, posant

$$\omega = e^{j\frac{2\pi}{N}},$$

tenim que la component k -èsima del vector corresponent a la funció $\phi_n(t)$ val

$$\phi_n(t_k) = \phi_n\left(k \frac{T}{N}\right) = e^{j2\pi \frac{n}{T}k \frac{T}{N}} = e^{j\frac{2\pi}{N}kn} = \omega^{kn}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1; n \in \mathbb{Z}.$$

És a dir, la successió $\{\phi_n; n \in \mathbb{Z}\}$ de vectors de \mathbb{C}^N que volem considerar té per terme general

$$\phi_n = \left(1, \omega^n, \omega^{2n}, \dots, \omega^{kn}, \dots, \omega^{(N-1)n}\right),$$

i es té el resultat següent:

Teorema 4.1 *Els vectors $\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_{N-1}$ constitueixen una base ortogonal de l'espai \mathbb{C}^N .*

Demostració: Atès que \mathbb{C}^N té dimensió N , només cal demostrar l'ortogonalitat dels vectors. Si $n \neq m$:

$$\begin{aligned} (\phi_n, \phi_m) &= \sum_{k=0}^{N-1} \omega^{kn} \overline{\omega^{km}} = \sum_{k=0}^{N-1} \omega^{kn} \omega^{-km} \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \omega^{k(n-m)} = \frac{1 - \omega^{N(n-m)}}{1 - \omega^{n-m}} = 0, \end{aligned}$$

on s'ha tingut en compte que $\omega^N = 1$. ■

D'altra banda, si $n = m$:

$$\|\phi_n\|^2 = N.$$

Així, si

$$x = (x(0), x(1), \dots, x(N-1)) \in \mathbb{C}^N$$

tenim que la descomposició d'aquest vector x en termes de la base ortogonal de \mathbb{C}^N que s'està considerant és:

$$x = \sum_{n=0}^{N-1} X(n) \phi_n, \quad (48)$$

on el coeficient $X(n)$ és el corresponent coeficient de Fourier del vector x respecte del terme ϕ_n . Per tant,

$$X(n) = \frac{(x, \phi_n)}{\|\phi_n\|^2} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \omega^{-nk} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}. \quad (49)$$

Si a la fórmula (48) considerem la component k -èsima tenim:

$$x(k) = \sum_{n=0}^{N-1} X(n) e^{j\frac{2\pi}{N}nk}. \quad (50)$$

Notes:

1. Si la seqüència $x(0), x(1), \dots, x(N-1)$ s'exten periòdicament a tot \mathbb{Z} de tal forma que

$$x(k+N) = x(k), \quad k \in \mathbb{Z},$$

llavors la suma (50) representa aquesta extensió periòdica. Això és així perquè $\omega^{n(k+N)} = \omega^{nk} \omega^{nN} = \omega^{nk}$.

2. Anàlogament, si entenem que la fórmula (49) defineix $X(n)$ per a tot $n \in \mathbb{Z}$, és compleix

$$X(n+N) = X(n), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

3. Amb les consideracions anteriors, les fórmules (49) i (50) es poden escriure

$$X(n) = \frac{1}{N} \sum_k x(k) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$$

i

$$x(k) = \sum_n X(n) e^{j\frac{2\pi}{N}nk},$$

on els índex k i n recorren N valors enters consecutius.

Així, tenim la seqüència $x(k)$ representada mitjançant una *sèrie discreta de Fourier*. Els coeficients d'aquesta sèrie venen donats per la seqüència $X(n)$.

Exemple 4.1: Sigui

$$x(k) = \begin{cases} 1, & k = 0, 1, 2, 3 \\ -1, & k = 4, 5, 6, 7. \end{cases}$$

Tenim en compte que $\omega = e^{j\frac{\pi}{4}}$ i, per tant, $\omega^4 = -1$, tenim

$$X(n) = \frac{1}{8} \sum_{k=0}^7 x(k) \omega^{-nk} = \frac{1}{8} (1 + \omega^{-n} + \omega^{-2n} + \omega^{-3n}) (1 - (-1)^n)$$

$$= \begin{cases} 0, & n \text{ parell} \\ \frac{1}{2(1 - \omega^{-n})}, & n \text{ imparell.} \end{cases}$$

Notem que

$$X(N - n) = \frac{1}{2(1 - \omega^{-(8-n)})} = \frac{1}{2(1 - \omega^n)} = \overline{X(n)}.$$

Aquesta propietat és general si la seqüència $\{x(k)\}$ és real.

Així doncs tenim,

$$x(k) = X(1) e^{j\frac{\pi}{4}k} + X(3) e^{j\frac{\pi}{4}3k} + \overline{X(3)} e^{-j\frac{\pi}{4}3k} + \overline{X(1)} e^{-j\frac{\pi}{4}k}$$

$$= 2\Re\left(X(1) e^{j\frac{\pi}{4}k}\right) + 2\Re\left(X(3) e^{j\frac{\pi}{4}3k}\right),$$

i tenint en compte que

$$X(1) = \frac{1}{2(1 - e^{-j\frac{\pi}{4}})} = \frac{1}{4} + j \frac{1}{4 - 4\sqrt{2}},$$

$$X(3) = \frac{1}{2(1 - e^{-j\frac{3\pi}{4}})} = \frac{1}{4} - j \frac{1}{4 + 4\sqrt{2}},$$

obtenim finalment,

$$x(k) = \frac{1}{2} \cos\left(k \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2 - 2\sqrt{2}} \sin\left(k \frac{\pi}{4}\right)$$

$$+ \frac{1}{2} \cos\left(3k \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2 + 2\sqrt{2}} \sin\left(3k \frac{\pi}{4}\right).$$

Aquesta sèrie discreta de Fourier representa l'extensió periòdica amb període $N = 8$ de la seqüència $\{1, 1, 1, 1, -1, -1, -1, -1\}$. \square

4. Sigui $x(t)$ una funció de $L^2(0, T)$. Si definim

$$x(k) \equiv x\left(k \frac{T}{N}\right), \quad k = 0, 1, \dots, N - 1,$$

llavors $X(n)$ és una aproximació del coeficient c_n de la sèrie de Fourier de $x(t)$ respecte de la base $\{e^{j2\pi \frac{n}{T}t}; n \in \mathbb{Z}\}$. En efecte,

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-j2\pi \frac{n}{T}t} dt \approx \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{N-1} x\left(k \frac{T}{N}\right) e^{-j2\pi \frac{n}{T}k \frac{T}{N}} \frac{T}{N}$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} = X(n).$$

5. La relació exacta entre $X(n)$ i c_n es pot determinar de la forma següent:

$$\begin{aligned}
X(n) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \omega^{-kn} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\sum_{i=-\infty}^{\infty} c_i e^{j \frac{2\pi}{T} k \frac{T}{N}} \right) \omega^{-kn} \\
&= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\sum_{i=-\infty}^{\infty} c_i \omega^{ki} \right) \omega^{-kn} = \frac{1}{N} \sum_{i=-\infty}^{\infty} c_i \left(\sum_{k=0}^{N-1} \omega^{ki} \omega^{-kn} \right) \\
&= \frac{1}{N} \sum_{i=-\infty}^{\infty} c_i(\phi_i, \phi_n) = c_n + \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{\infty} c_{n+mN}.
\end{aligned}$$

La contribució a $X(n)$ dels coeficients diferents del c_n dona lloc al terme que es coneix com “error d’aliasing”.

4.2 Transformada de Fourier per a temps discret

Considerem ara, tal com es va fer en l’estudi de la transformada (continua) de Fourier, el comportament límit de la sèrie discreta de Fourier d’una seqüència periòdica quan el període N tendeix a infinit. S’obté així la representació espectral d’una seqüència aperiòdica definida en tot \mathbb{Z} .

Sigui $x(k)$ una seqüència definida per a tot $k \in \mathbb{Z}$ tal que $x(k) = 0$ quan k no pertany a l’interval $0 \leq k < M$. Si $N > M$, sigui

$$\tilde{x}(k) = \begin{cases} x(k), & k = 0, 1, \dots, M-1 \\ 0, & k = M, M+1, \dots, N-1 \end{cases}$$

i

$$\tilde{x}(k+N) = \tilde{x}(k).$$

És a dir, $\tilde{x}(k)$ és periòdica amb període N i $\tilde{x}(k)$ “convergeix” cap a $x(k)$ quan $N \rightarrow \infty$.

Definint

$$X(f) \equiv \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) e^{-j2\pi f k} \tag{51}$$

i considerant la sèrie discreta de Fourier de $\tilde{x}(k)$, tenim

$$\tilde{x}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{X}(n) e^{j \frac{2\pi}{N} n k} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X\left(\frac{n}{N}\right) e^{j \frac{2\pi}{N} n k}, \tag{52}$$

ja que

$$\tilde{X}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{x}(k) e^{-j \frac{2\pi}{N} n k} = \frac{1}{N} X\left(\frac{n}{N}\right).$$

La funció de la variable contínua f definida mitjançant la fórmula (51) s’anomena *transformada de Fourier per a temps discret* de la seqüència $x(k)$.

Si posem $f_n = \frac{n}{N}$ i $\Delta f = f_{n+1} - f_n = \frac{1}{N}$, la fórmula (52) és:

$$\tilde{x}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} X(f_n) e^{j2\pi f_n k} \Delta f.$$

Fent $N \rightarrow \infty$ obtenim

$$x(k) = \int_0^1 X(f) e^{j2\pi f k} df \quad (53)$$

que és la fórmula que inverteix la transformació donada per (51).

Notem que $X(f)$ és una funció periòdica (en f) amb període $F = 1$. Per tant, la sèrie (51) es pot interpretar com la sèrie de Fourier de $X(f)$ amb coeficient k -èsim $x(-k)$. Així,

$$x(-k) = \frac{1}{F} \int_0^F X(f) e^{-j\frac{2\pi}{F} f k},$$

és a dir,

$$x(k) = \int_0^1 X(f) e^{j2\pi f k} df$$

que és, novament, la fórmula d'inversió.

La transformada de Fourier per a temps discret estarà definida per a tota seqüència $x(k)$ (encara que aquesta no sigui de duració finita) tal que la sèrie $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |x(k)|$ sigui convergent.

Exemple 4.2: Considerem la seqüència $\{x(k), k \in \mathbb{Z}\}$, tal que:

$$x(k) = \begin{cases} 1, & -N \leq k \leq N \\ 0, & \text{altrament} \end{cases}$$

La seva transformada és la funció:

$$\begin{aligned} X(f) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) e^{-j2\pi f k} = \sum_{k=-N}^N e^{-j2\pi f k} \\ &= e^{j2\pi f N} \sum_{k=0}^{2N} e^{-j2\pi f k} = e^{j2\pi f N} \frac{1 - e^{-j2\pi f (2N+1)}}{1 - e^{-j2\pi f}} \\ &= \frac{e^{j2\pi f (N+1/2)} - e^{-j2\pi f (N+1/2)}}{e^{j\pi f} - e^{-j\pi f}} = \frac{\sin 2\pi f (N + 1/2)}{\sin \pi f}. \end{aligned}$$

En aquest exemple la fórmula d'inversió ens dona

$$\begin{aligned} x(k) &= \int_0^1 \frac{\sin 2\pi f (N + 1/2)}{\sin \pi f} e^{j2\pi f k} df \\ &= \int_0^1 \frac{\sin 2\pi f (N + 1/2)}{\sin \pi f} \cos(2\pi f k) df. \end{aligned}$$

Per exemple, avaluant l'expressió anterior per a $N = 4$ i $k = -8, -7, \dots, 0, 1, \dots, 7$ obtenim la seqüència

$$\{0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0\}.$$

□

4.3 Transformada discreta de Fourier

Considerem ara el problema d'aproximar la transformada de Fourier $X(f)$ d'una funció $x(t)$. Dividint l'eix t en trossos de longitud T_s tenim

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt \approx \sum_{k=-\infty}^{\infty} T_s x(kT_s)e^{-j2\pi fkT_s}.$$

De fet, es pot demostrar que si $X(f)$ val 0 fora d'un interval $(-F, F)$ i $T_s \leq 1/(2F)$, llavors l'anterior aproximació és una igualtat.

Suposem ara que $x(t)$ val 0 fora de l'interval $[0, T]$. Prenent $T_s = T/N$ i calculant $X(f)$ en els punt de la forma nf_0 , on $f_0 = 1/T$, tenim

$$X(nf_0) \approx \sum_{k=0}^{N-1} T_s x(kT_s)e^{-j2\pi nf_0 kT_s} = \sum_{k=0}^{N-1} T_s x(kT_s)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}.$$

Així doncs, el terme

$$X(n) \equiv X(nf_0) = X\left(\frac{n}{T}\right)$$

és el coeficient n -èsim de la sèrie discreta de Fourier de la seqüència

$$x(k) \equiv NT_s x(kT_s) = T x\left(k\frac{T}{N}\right).$$

Les consideracions anteriors motiven les definicions següents. Donada una seqüència

$$x(k), \quad k = 0, 1, \dots, N-1,$$

la seva *transformada discreta de Fourier* és la seqüència $X(n)$ donada per:

$$X(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \omega^{-nk}, \quad (54)$$

on $\omega = e^{j\frac{2\pi}{N}}$. Naturalment, la corresponent fórmula d'inversió és:

$$x(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X(n)e^{j\frac{2\pi}{N}nk} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X(n) \omega^{nk}. \quad (55)$$

D'acord amb la fórmula (54), per obtenir $X(n)$ per a un valor de n donat, s'haurien de fer $N-1$ multiplicacions (no comptem les sumes i suposem conegudes les potències de ω). Així, per calcular la transformada discreta de Fourier de $x(k)$ s'haurien de fer $(N-1)^2$ operacions (en el càlcul de $X(0)$ no n'hi han). El 1965 es va presentar l'algorisme *FFT* (Fast Fourier Transform) que permet calcular la transformada, quan N és una potència de 2, amb un nombre d'operacions d'ordre $(N/2) \log_2 N$.

L'algorisme *FFT* es basa en la següent descomposició ($N = 2N'$):

$$X(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} = \sum_{k=0}^{2N'-1} x(k)e^{-j\frac{2\pi}{2N'}nk}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{m=0}^{N'-1} x(2m)e^{-j\frac{2\pi}{2N'}n(2m)} + \sum_{m=0}^{N'-1} x(2m+1)e^{-j\frac{2\pi}{2N'}n(2m+1)} \\
&= \sum_{m=0}^{N'-1} x(2m)e^{-j\frac{2\pi}{N'}nm} + e^{-j\frac{2\pi}{N'}n} \sum_{m=0}^{N'-1} x(2m+1)e^{-j\frac{2\pi}{N'}nm} \\
&= X_p(n) + e^{-j\frac{2\pi}{N'}n} X_s(n), \tag{56}
\end{aligned}$$

on $X_p(n)$ i $X_s(n)$ són les transformades discretes de Fourier de les seqüències de termes parells i senars de la seqüència x i que tenen mida $N' = N/2$. El nombre d'operacions a realitzar en el càlcul de (56) és:

$$2 \left(\frac{N}{2} - 1 \right)^2 + (N - 1).$$

Si repetim la descomposició per calcular X_p i X_s , el nombre d'operacions a fer serà:

$$2 \left(2 \left(\frac{N}{4} - 1 \right)^2 + \left(\frac{N}{2} - 1 \right) \right) + (N - 1) = 2^2 \left(\frac{N}{2^2} - 1 \right)^2 + 2N - 3.$$

En general, si $N = 2^r$, iterant r vegades el procediment descrit, obtenim un nombre d'operacions

$$2^r \left(\frac{N}{2^r} - 1 \right)^2 + rN - (2^r - 1) = (r - 1)N + 1.$$

Atès que $(r - 1) = \log_2(N/2)$, el nombre anterior és d'ordre $N \log_2 N$. De fet, tenint en compte propietats de simetria addicionals, l'ordre del nombre d'operacions a realitzar per calcular la transformada ràpida es redueix encara a $(N/2) \log_2 N$.

4.3.1 Propietats de la transformada discreta de Fourier

Com en el cas continu, denotem per \mathcal{F} la transformació (discreta) de Fourier.

1. *Linealitat*: Si $X(n)$ i $Y(n)$ són, respectivament, les transformades de les seqüències $x(k)$ i $y(k)$, llavors

$$\mathcal{F}(\alpha x(k) + \beta y(k)) = \alpha X(n) + \beta Y(n), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

2. *Simetria*: Si la seqüència $x(k)$ és real:

$$X(-n \bmod N) = \overline{X(n)}.$$

Si suposem la seqüència $X(n)$ periòdica amb període N , l'expressió anterior és, simplement

$$X(-n) = \overline{X(n)}.$$

3. *Dualitat*: Si $X(n)$ és la transformada de $x(k)$, llavors

$$\mathcal{F}(X(k)) = N x(-n \bmod N).$$

Si suposem la seqüència $x(k)$ periòdica amb període N , l'expressió anterior és

$$\mathcal{F}(X(k)) = N x(-n).$$

4. *Desplaçament en el temps*: Si $0 \leq m \leq N - 1$,

$$\mathcal{F}(x(k - m \bmod N)) = X(n) \omega^{-nm}.$$

En efecte,

$$\mathcal{F}(x(k - m \bmod N)) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k - m \bmod N) \omega^{-nk}.$$

Novament, si suposem la seqüència $x(k)$ periòdica amb període N , la suma anterior és

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{N-1} x(k - m) \omega^{-nk} &= \sum_{i=-m}^{-m+N-1} x(i) \omega^{-ni} \omega^{-nm} \\ &= \omega^{-nm} \sum_{i=0}^{N-1} x(i) \omega^{-ni} = \omega^{-nm} X(n), \end{aligned}$$

on s'ha tingut en compte que la suma $\sum_i x(i) \omega^{-ni}$ pren el mateix valor sempre que l'index i recorri N valors consecutius.

5. *Desplaçament en freqüència*:

$$\mathcal{F}(x(k) \omega^{-mk}) = X(n - m \bmod N).$$

6. *Convolució circular*: Donades les seqüències $x(k)$ i $y(k)$, sigui

$$z(k) \equiv \sum_{i=0}^{N-1} x(k - i \bmod N) y(i); \quad k = 0, 1, \dots, N - 1.$$

La seqüència $z(k)$ s'anomena *convolució circular* de $x(k)$ i es compleix

$$Z(n) = X(n)Y(n).$$

De fet, si com s'ha fet en les propietats anteriors, les seqüències $x(k)$ i $y(k)$ és consideren periòdiques, la convolució de $x(k)$ i $y(k)$ és, simplement,

$$\sum_{i=0}^{N-1} x(k - i) y(i).$$

7. *Multipliació:*

$$\mathcal{F}(x(k)y(k)) = \frac{1}{N} \left(\sum_{i=0}^{N-1} X(n-i \bmod N) Y(i) \right).$$

Si $X(n)$ i $Y(n)$ es consideren periòdiques, la suma anterior és

$$\frac{1}{N} \left(\sum_{i=0}^{N-1} X(n-i) Y(i) \right).$$

8. *Teorema de Parseval:*

$$\sum_{k=0}^{N-1} |x(k)|^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |X(n)|^2.$$

En efecte, atès que $\overline{X(n)}$ és la transformada de $\overline{x(-k)}$ (suposem altre cop les seqüències periòdiques i les sumes esteses a N valors consecutius del seu índex), tenim que $|X(n)|^2$ és la transformada de la convolució de $x(k)$ amb $\overline{x(-k)}$. Així, per la fórmula d'inversió,

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |X(n)|^2 w^{nk} = \sum_{i=0}^{N-1} x(k-i) \overline{x(-i)}.$$

Fent $k = 0$ obtenim

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |X(n)|^2 = \sum_{i=0}^{N-1} |x(-i)|^2 = \sum_{i=0}^{N-1} |x(i)|^2.$$

A Apèndix

A.1 Derivades laterals

Sigui $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ i $t_0 \in [a, b)$ un punt en el qual existeix el límit lateral $x(t_0^+)$. Si existeix el límit

$$x'_D(t_0) \equiv \lim_{h \downarrow 0} \frac{x(t_0 + h) - x(t_0^+)}{h}, \quad (\text{A1})$$

direm que $x'_D(t_0)$ és la *derivada lateral per la dreta* de x en el punt t_0 . Anàlogament, si a $t_0 \in (a, b]$ existeix $x(t_0^-)$ i existeix també el límit

$$x'_I(t_0) \equiv \lim_{h \downarrow 0} \frac{x(t_0^-) - x(t_0 - h)}{h}, \quad (\text{A2})$$

direm que $x'_I(t_0)$ és la *derivada lateral per l'esquerra* de x a t_0 .

Exemple A.1:

$$x : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x(t) = \begin{cases} t^2, & -1 \leq t < 0 \\ \sin t, & 0 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Es té $x'_D(0) = 1$ i $x'_I(0) = 0$. No existeix $x'(0)$. \square

Tal com succeeix a l'exemple anterior: si $x'_D(t_0) \neq x'_I(t_0)$, aleshores no existeix $x'(t_0)$.

Naturalment, si x és derivable a t_0 , aleshores $x'_D(t_0) = x'_I(t_0) = x'(t_0)$. En canvi, poden existir i ser iguals les dues derivades laterals a t_0 i, malgrat això, no ser x derivable a t_0 . L'exemple següent ho posa de manifest.

Exemple A.2:

$$x : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x(t) = \begin{cases} 0, & -1 \leq t < 0 \\ 1, & 0 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Es té $x'_D(0) = x'_I(0) = 0$. Malgrat això, la funció x ni tan sols és contínua en el punt 0. \square

Finalment, cal indicar que no s'ha de confondre les derivades laterals amb el límits laterals de la funció derivada.

Exemple A.3:

$$x : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x(t) = \begin{cases} t^2 \sin \frac{1}{t}, & t \neq 0 \\ 0, & t = 0 \end{cases}$$

És immediat comprovar que no existeixen els límits laterals $x'(0^+)$, $x'(0^-)$. No obstant això,

$$x'_D(0) = \lim_{h \downarrow 0} \frac{x(h) - x(0)}{h} = \lim_{h \downarrow 0} h \sin \frac{1}{h} = 0.$$

Anàlogament, $x'_I(0) = 0$. □

A.2 Funcions contínues a trossos

Sigui $x : I \rightarrow \mathbb{R}$, on I és un interval (obert, tancat o semiobert) d'extremes a i b . Diem que la funció és *contínua a trossos* a I si existeix una partició de I

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b,$$

tal que x és contínua en cada subinterval (t_{i-1}, t_i) , $1 \leq i \leq n$, i a més a més existeixen els límits laterals.

$$x(a^+); \quad x(t_i^-), x(t_i^+), \quad 1 \leq i \leq n-1; \quad x(b^-).$$

De fet, no cal que la funció x estigui definida en els punts t_i .

Naturalment, si x és una funció contínua a trossos a I aleshores $x \in L^2(I)$, essent

$$\int_I x^2(t) dt = \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} x^2(t) dt.$$

Tal com hem dit a l'apartat anterior, en general cal distingir entre derivades laterals i límits laterals de la funció derivada. Això no cal si x i x' són contínues a trossos.

Teorema A.1 *Siguin x i x' funcions contínues a trossos a $I = [a, b]$. Les derivades laterals de x , des de l'interior de l'interval, existeixen en cada $t \in I$ i coincideixen amb els corresponents límits laterals de x' .*

Demostració: Sigui $t_0 \in [a, b]$

$$x'_D(t_0) = \lim_{h \downarrow 0} \frac{x(t_0 + h) - x(t_0^+)}{h}.$$

Redefinint x , si és necessari, a t_0 com $x(t_0) = x(t_0^+)$ i aplicant el teorema del valor mitjà,

$$x'_D(t_0) = \lim_{h \downarrow 0} \frac{x(t_0 + h) - x(t_0)}{h} = \lim_{h \downarrow 0} x'(t_0 + \vartheta h) = x'(t_0^+).$$

Anàlogament, si $t_0 \in (a, b]$, es té que

$$x'_I(t_0) = x'(t_0^-).$$

■