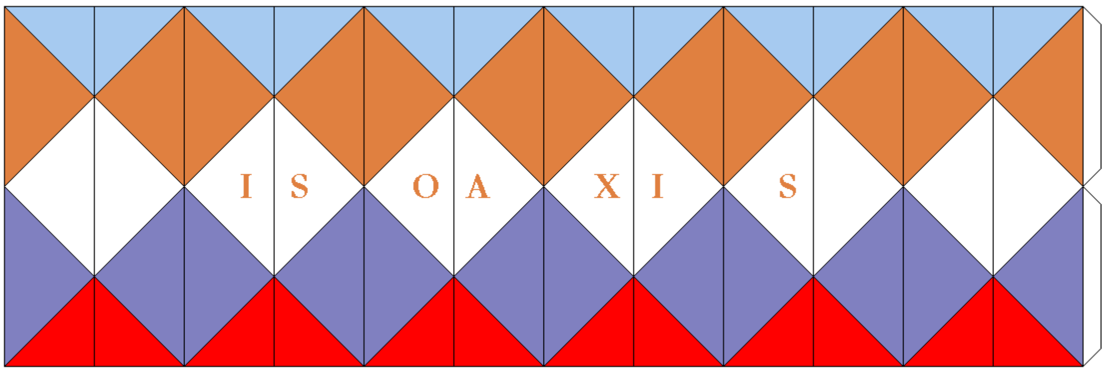
Calidociclos y Anillos de tetraedros

Julio Castiñeira Merino
I.E.S. Marqués de Lozoya
Cuéllar, Segovia

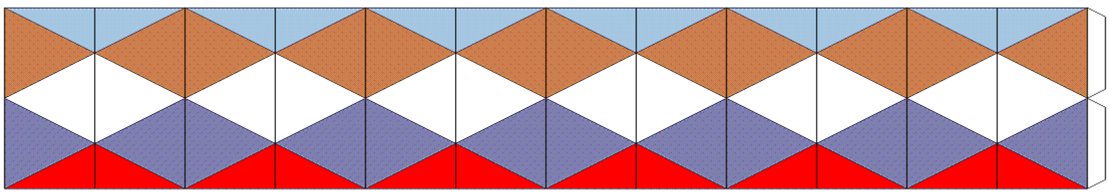
Un calidociclo (Kaleidocycle en inglés) es un anillo de tetraedros generalmente no regulares. Los calidociclos fueron inventados en 1977 por los americanos Doris Schattschneider y Wallace Walker. Doris Schattschneider es matemática y Wallace Walker es un diseñador gráfico.
El nombre es la unión de tres palabras griegas: Kalós = Bello, Eîdos = Figura, Kyclos = Anillo, rueda.
Los calidociclos pueden girar sobre su centro actuando como bisagras las aristas que unen los tetraedros.

Un Precedente: El Isoaxis®

El Isoaxis fue diseñado por Walker en 1958 cuando trabajaba en un proyecto en la Academia de Artes Cranbrook de Michigan. El Isoaxis está registrado como patente USA número 3302321.
El modelo plano del Isoaxis consta de 60 triángulos isósceles rectángulos dispuestos en un arreglo rectangular de 5 filas y 12 columnas.

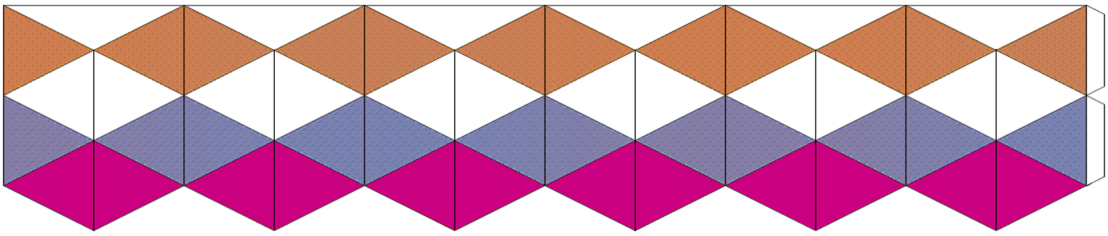


Al doblarlo a lo largo de sus lados se convierte en una superficie anular que puede girar alrededor de su centro.
Alargando la red del Isoaxis, El vértice de los triángulos isósceles que forman la red es menor de noventa grados.

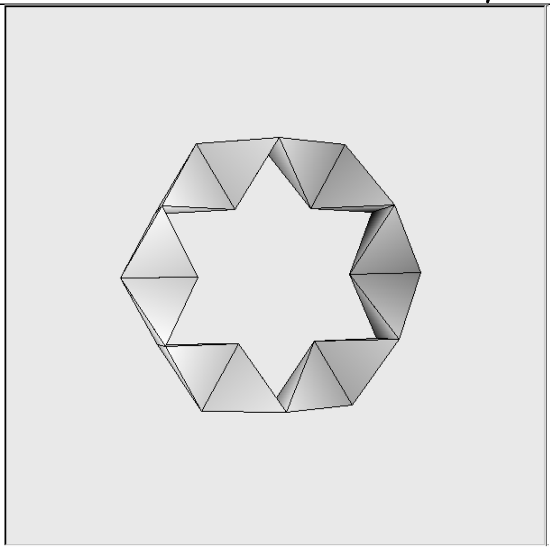


Cuando el ángulo del vértice es menor o igual que $\gamma = 2 \cdot arc\ tg \frac{\sqrt{3}}{2}$, (por qué es este ángulo y no otro se verá más adelante), al unir las caras de color rojo con las de color azul claro se forma un anillo de 12 tetraedros congruentes cuyas caras son triángulos isósceles. Este anillo tiene la

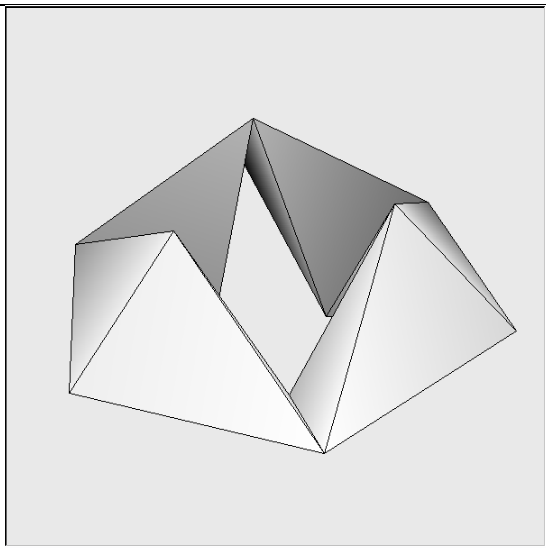
propiedad de girar sobre su centro de simetría. Si el ángulo del vértice es exactamente γ el agujero del anillo desaparece y el calidociclo se llama *cerrado.* Si el ángulo es mayor que dicho ángulo el anillo es abierto como el del Isoaxis. Notemos que el ángulo γ es ligeramente superior a 81 grados.
del Isoaxis.
Es posible extraer el borde superior y unirlo al inferior formando una red de la forma siguiente:



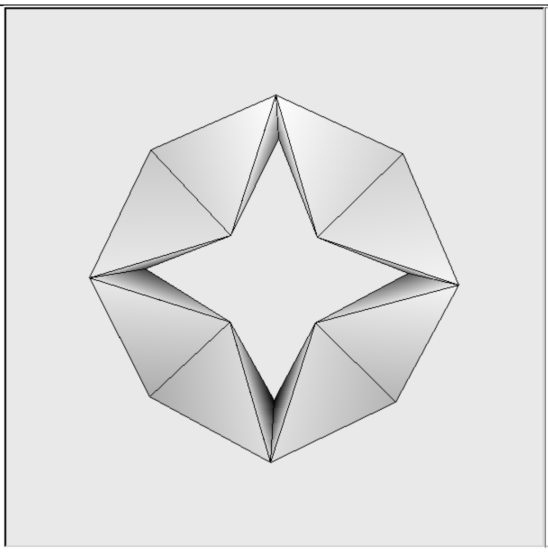
Con esta red es más fácil construir los calidociclos. También podemos variar el número de columnas en la red y se obtener nuevos calidociclos.



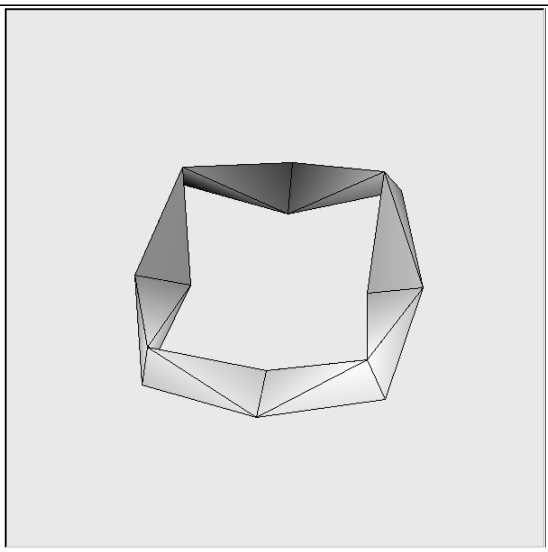
Calidociclo de orden 12



Calidociclo de orden 6



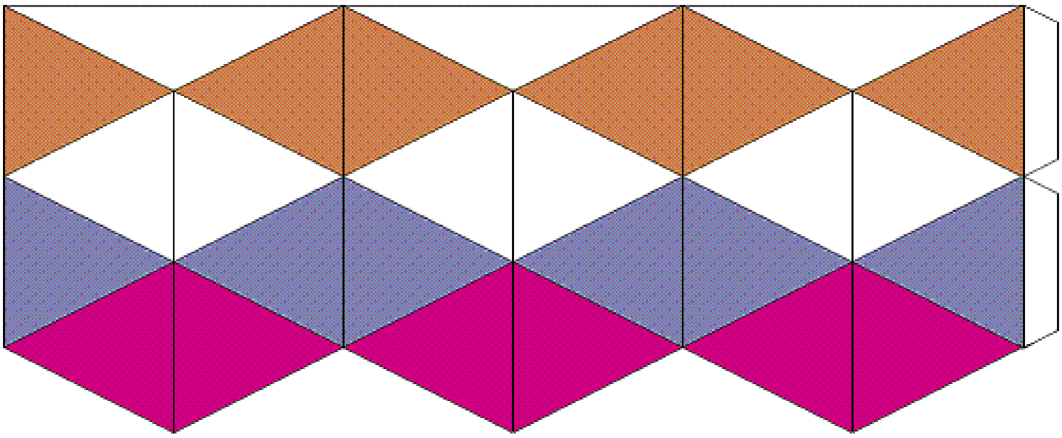
Calidociclo de orden 8



Otro calidociclo de orden 8

Cada columna es el desarrollo de un tetraedro cuyas caras son triángulos isósceles congruentes. Es por tanto un tetraedro isósceles. Es también un esfenoide. Recordemos la terminología tradicional:

Un tetraedro isósceles es el que tiene las aristas opuestas iguales, y un esfenoide es el tetraedro que tiene las caras opuestas iguales y además las caras son triángulos isósceles. Esfenoide es un término de origen griego que significa "con forma de cuña". Los esfenoides con caras iguales (o isohédricos son tetraedros isósceles), pero el recíproco no es cierto. Más adelante veremos ejemplos de tetraedros isósceles que no son esfenoides. Los tetraedros isósceles son interesantes entre otras cosas por ser dados justos y su uso es corriente en algunos juegos de rol. El término esfenoide es usual en cristalografía.



Hemos visto que algunas redes del tipo de la figura dan origen a un calidociclo y otras no. Si la red está formada por triángulos equiláteros el calidociclo resultante se llama regular. Y si está formado por triángulos isósceles el calidociclo se llama calidociclo isósceles. Surge la pregunta de saber cuando una red de ese tipo determina un calidociclo y cuando no.

La respuesta depende del número de columnas y del ángulo del vértice del triángulo isósceles. Veámosla.

Observemos que el número de columnas coincide con el de tetraedros de la cadena, y que las aristas consecutivas que conectan los tetraedros se cruzan formando un ángulo recto, es decir son ortogonales. Como la cadena de tetraedros se cierra esto obliga a que el número de tetraedros es par y por tanto también el número de columnas. Observemos que con 4 tetraedros tampoco podemos construir un calidociclo, luego el número mínimo de tetraedros es seis.

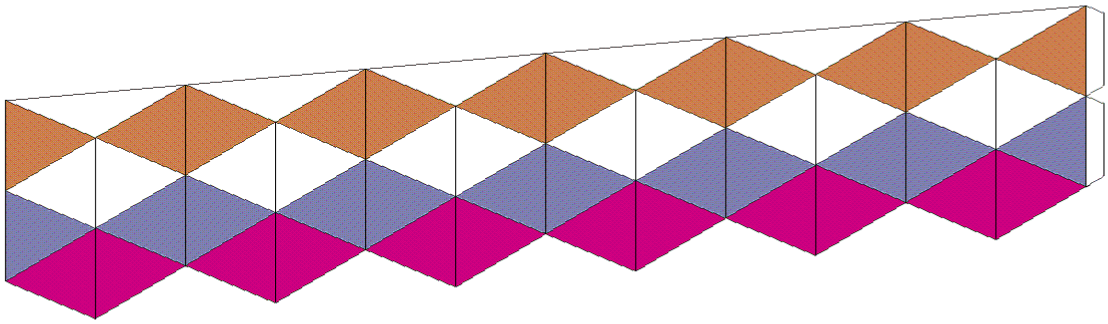
Es fácil probar que la cadena de tetraedros se puede cerrar y formar un calidociclo cuando $tg\frac{\gamma}{2} \leq cos\frac{2\pi}{n}$, o lo que es equivalente $\gamma \leq 2arc\,tg\cos\frac{2\pi}{n}$. La red origina un calidociclo cerrado si el ángulo $\gamma = 2arc\,tg\cos\frac{2\pi}{n}$.

Tenemos la siguiente tabla que relaciona el número de columnas de la red con el ángulo máximo en el vértice para obtener una red que genere un calidociclo. Observemos que no existen *calidociclos regulares* de orden 6.

Orden	**6**	**8**	**10**	**12**	**16**	**20**	**32**
Ángulo Máximo γ	53^0 8'	70^0 32'	77^0 57'	81^0 47'	85^0 28'	87^0 8'	88^0 53'

Calidociclos Oblicuos

Schattschneider generaliza esta construcción inclinando la red y llama a los calidociclos resultantes calidociclos oblicuos. Las caras son ahora triángulos acutángulos congruentes.



Los tetraedros son tetraedros isósceles, pues los ángulos en los vértices suman 180º. Estos calidociclos son, a mi juicio, menos bellos y menos interesantes.

Cortando los calidociclos

Existen otros anillos formados por tetraedros que no corresponden a la definición de calidociclo dada por Doris Schattscheider pues su desarrollo no se obtiene por una red rectangular de triángulos congruentes. Por su interés voy a hablar de algunos de ellos.

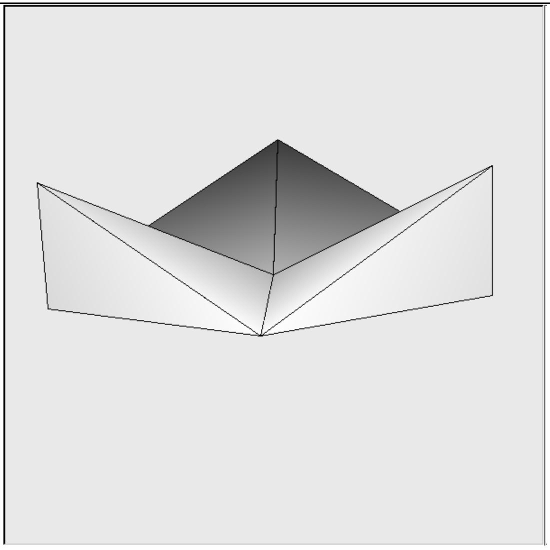
Si dividimos por uno de sus planos de simetría a un esfenoide isohédrico, obtenemos dos tetraedros. Dos caras de cada uno de esos tetraedros son triángulos rectángulos. Esos dos tetraedros pueden unirse de dos formas diferentes como muestran las figuras.

Con n de estos eslabones podemos formar dos tipos de calidociclos interesantes. Una construcción corresponde a cortar un calidociclo por un plano ecuatorial y la otra a cortar un calidociclo de orden $2n$ por n planos perpendiculares al plano ecuatorial.

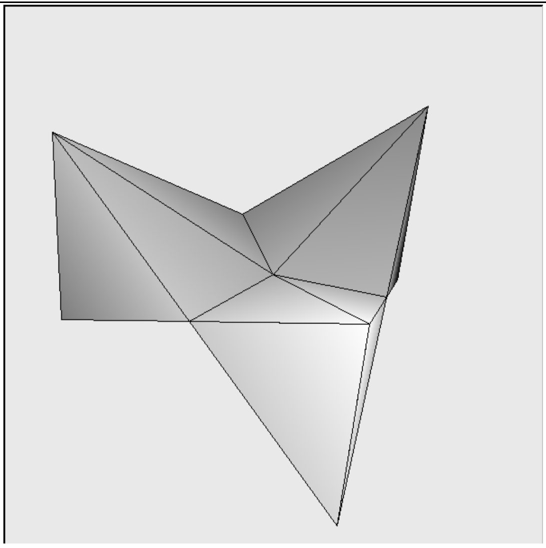
Asi obtenemos nuevas familias de calidociclos. Los ejemplos más interesantes los encontramos en los calidociclos cerrados

A partir del calidociclo cerrado de orden 6 cortando con un plano ecuatorial obtenemos la *mitad del anillo cerrado de las seis pirámides*, y cortando por tres planos perpendiculares al plano ecuatorial obtenemos el *cubo invertible o cubo de Schatz.*

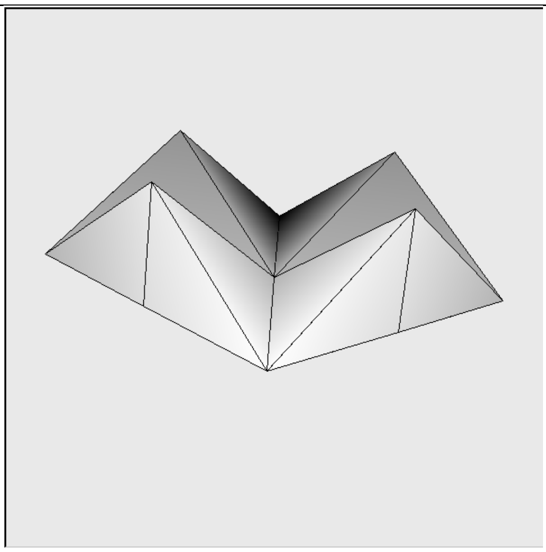
A partir del calidociclo cerrado de orden 8 cortando con un plano ecuatorial obtenemos la *doble corona.;* y cortando posteriormente por 4 planos perpendiculares al plano ecuatorial obtenemos la *mitad del octaedro*



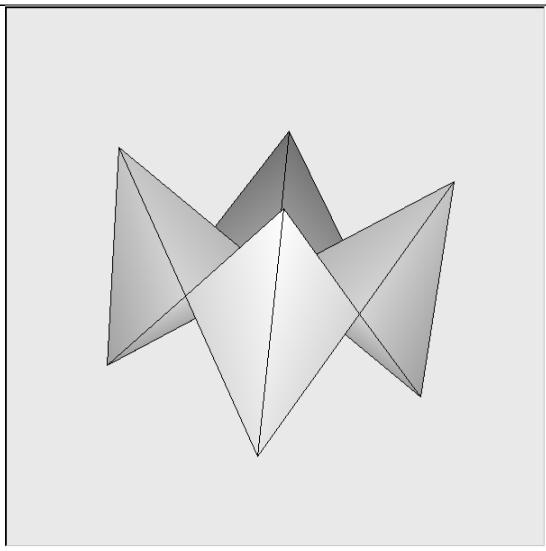
Mitad Corte ecuatorial K6



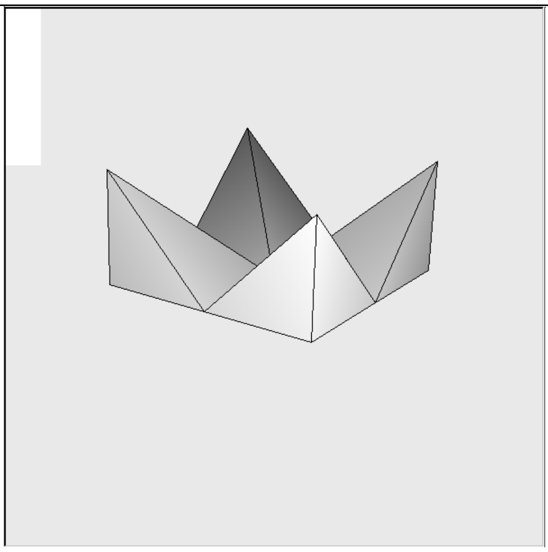
Mitad transversal k6



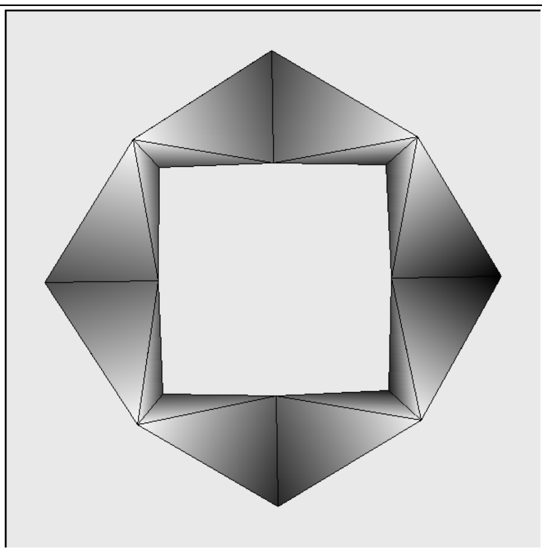
Mitad k8 ecuatorial



Doble corona



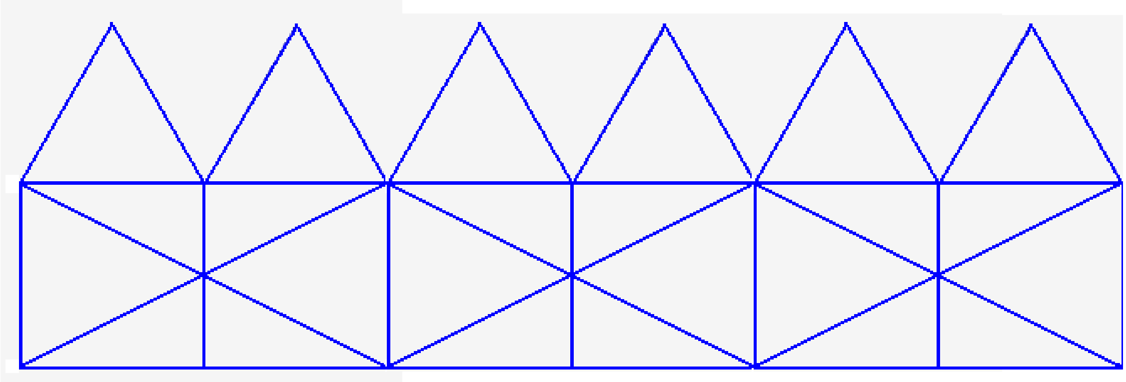
Semioctaedro



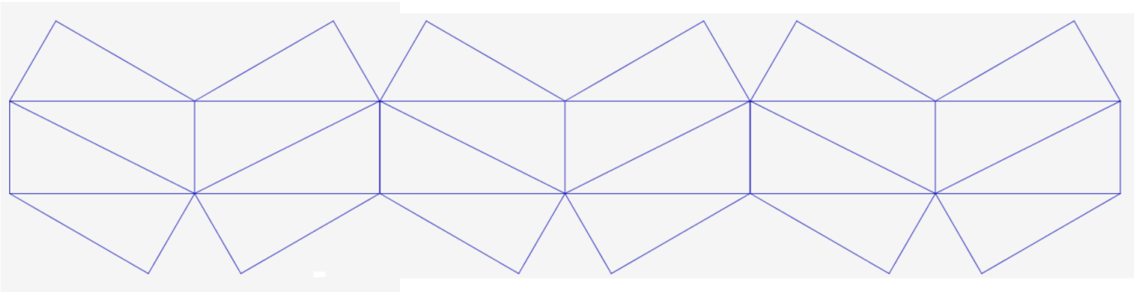
Semioctaedro-Otra posición 1

Desarrollos de los calidociclos por sección

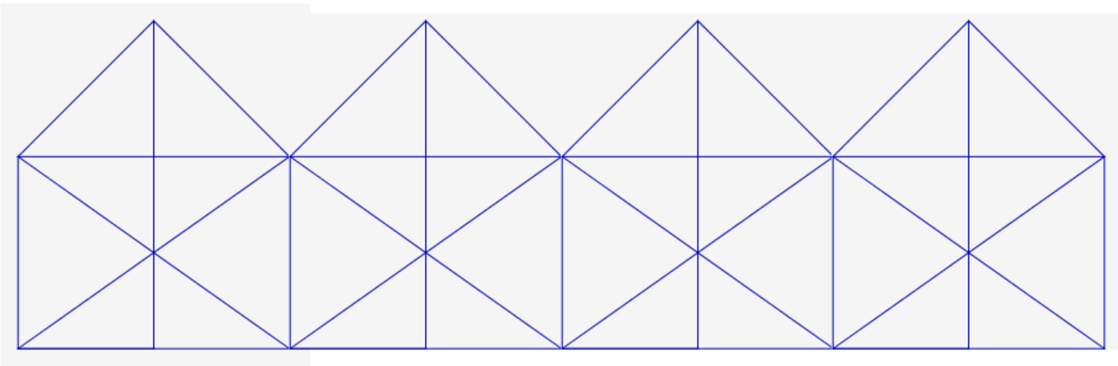
Los desarrollos de los calidociclos anteriores son



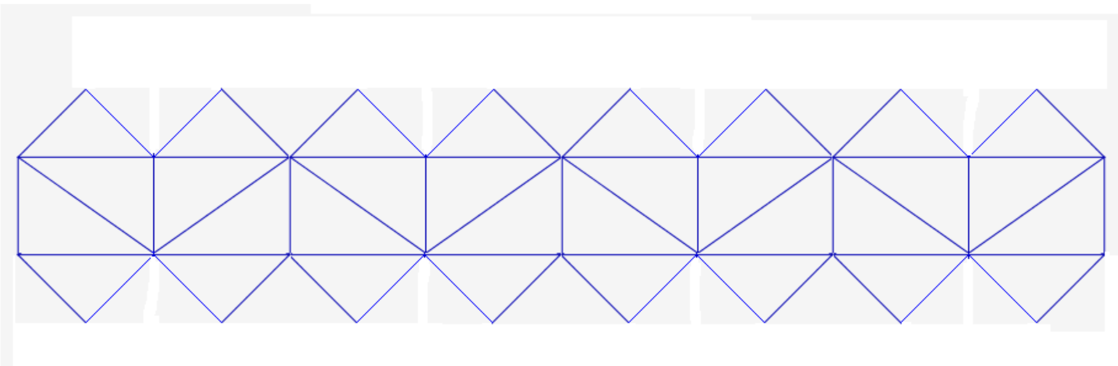
Desarrollo de la mitad del anillo cerrado de las seis pirámides



Desarrollo del Cubo invertible



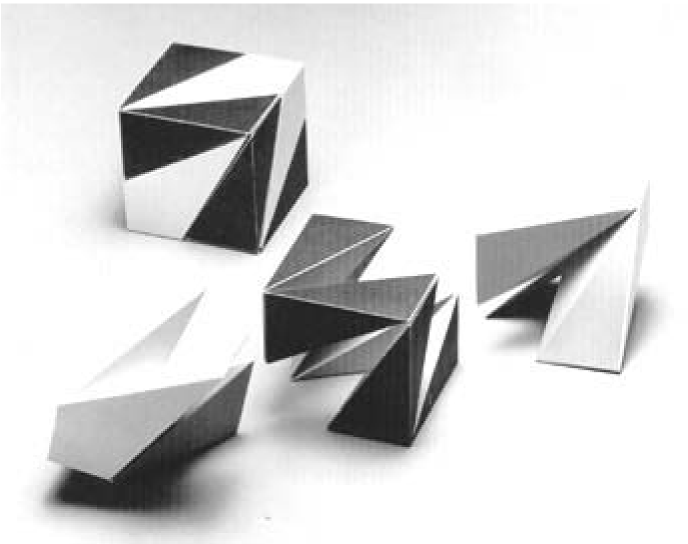
Desarrollo corte ecuatorial del calidociclo cuadrado- Doble corona



Desarrollo corte transversal del calidociclo cuadrado-Mitad del Octaedro.

Algunos de estos calidociclos tienen propiedades interesantes. Veamos algunos ejemplos.

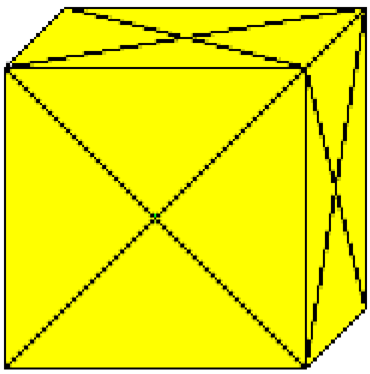
El cubo invertible



Inventado por el artista, inventor y técnico suizo Paul Schatz en 1929. Divide al cubo en tres partes de igual volumen: un calidociclo de orden 6 en forma de Z y dos cerrojos.

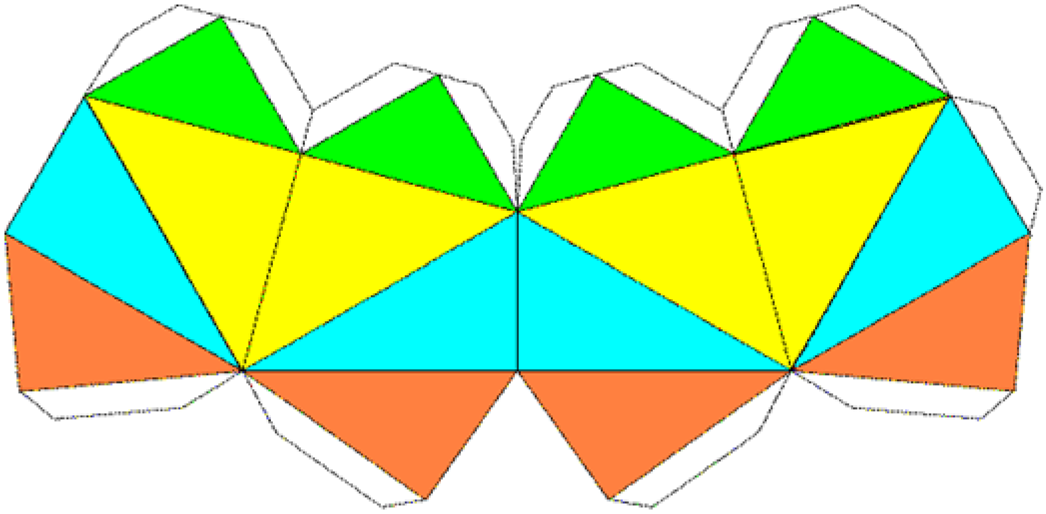
El milagro de Shinsei

Fue diseñado por Naoki Yoshimoto. Es un cubo que se descompone en dos calidociclos de orden 12.



Los módulos de estos calidociclos son los mismos que los de la doble corona, pero hay que tomar 12 tetraedros en lugar de ocho. El milagro de Shinsei es un ejemplo de cuerpo que se puede descomponer en uno o más calidociclos. Otro de ellos es el octaedro.

El Octaedro regular se puede descomponer en un calidociclo de orden 16. Un desarrollo de los tetraedros se muestra en la figura:



Decoración de los Calidociclos

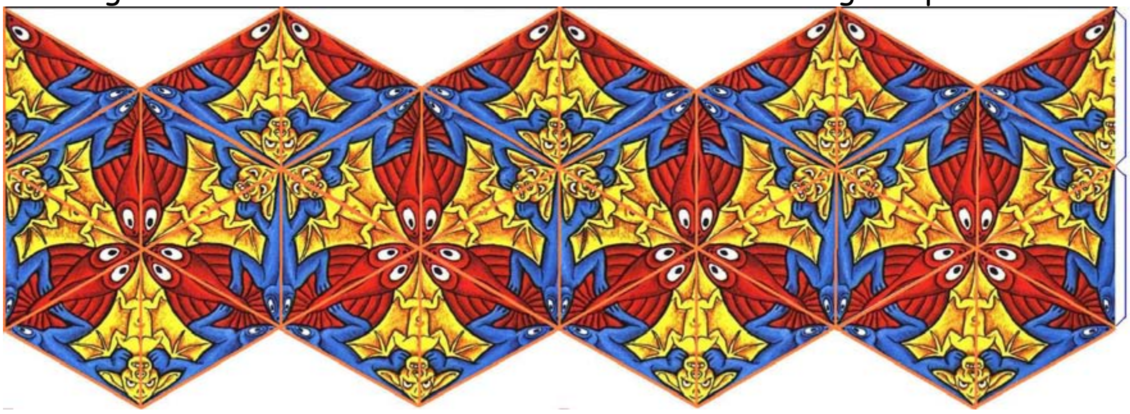
Schattschneider hace más bellos los calidociclos decorándolos con los mosaicos del artista holandés Escher. Aunque como vamos a ver hace un poco de trampa.

El artista Holandés Maurits Cornelis Escher (1898-1972) impresionado por los diseños en Mosaico de la Alambra realizó números obras de este tipo. Una de ellas se muestra en la figura de la izquierda y tiene el nombre de E85 y rebautizado por Schattschneider con el poético nombre de Tres elementos

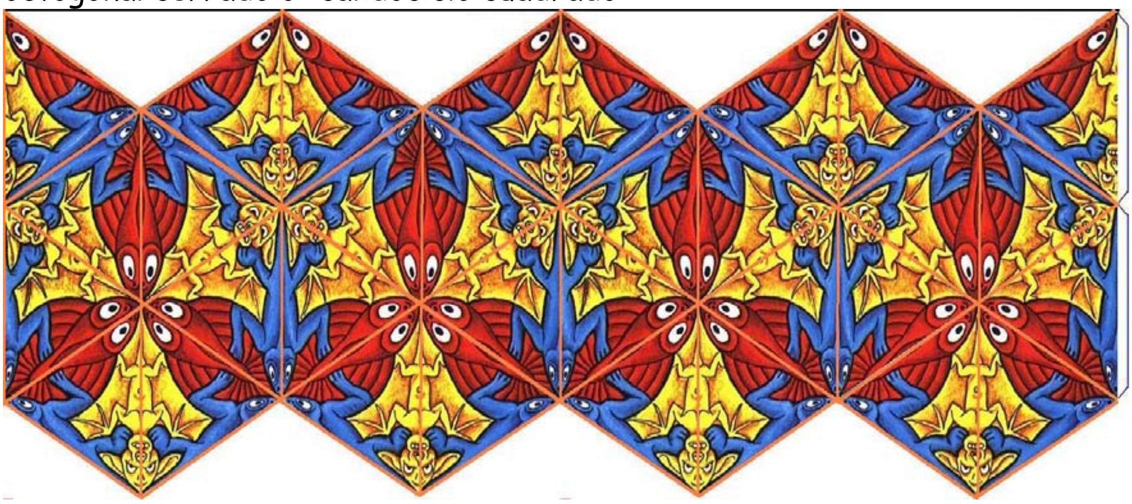
Observemos que el mosaico está formado por baldosas (teselas) hexagonales que a su vez tienen una simetría interna. Cada baldosa hexagonal está formada por tres baldosas con forma de rombo y cada rombo esta formado por dos baldosas triangulares simétricas respecto a una recta.

La idea de Schattschneider es decorar las caras de los calidociclos regulares con las baldosas triangulares de los Mosaicos de Escher. Así podemos obtener los calidociclos regulares para n mayor o igual que ocho.

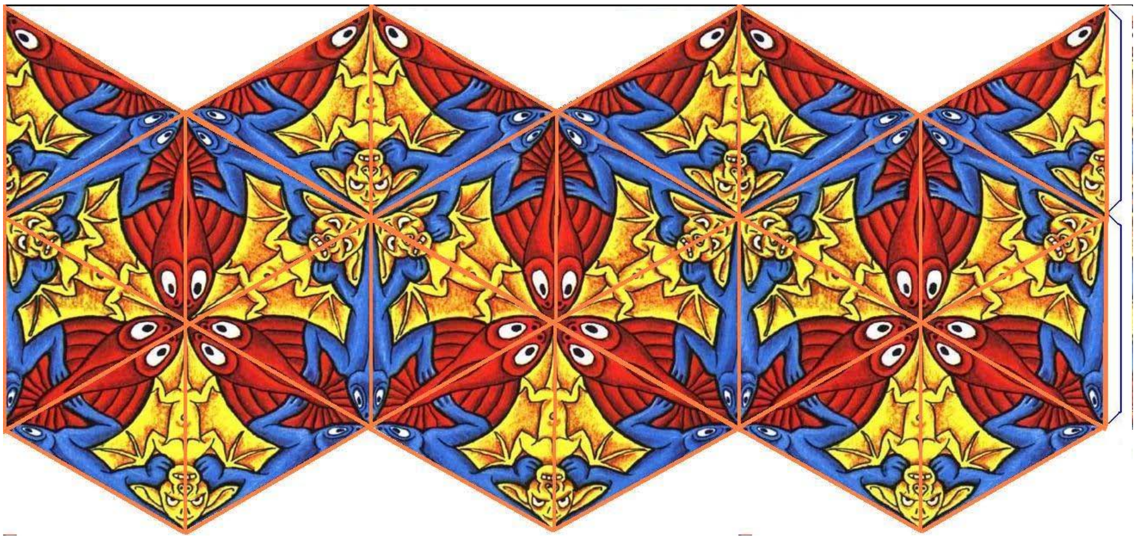
En la figura se muestra el desarrollo del calidociclo hexagonal para n= 8.



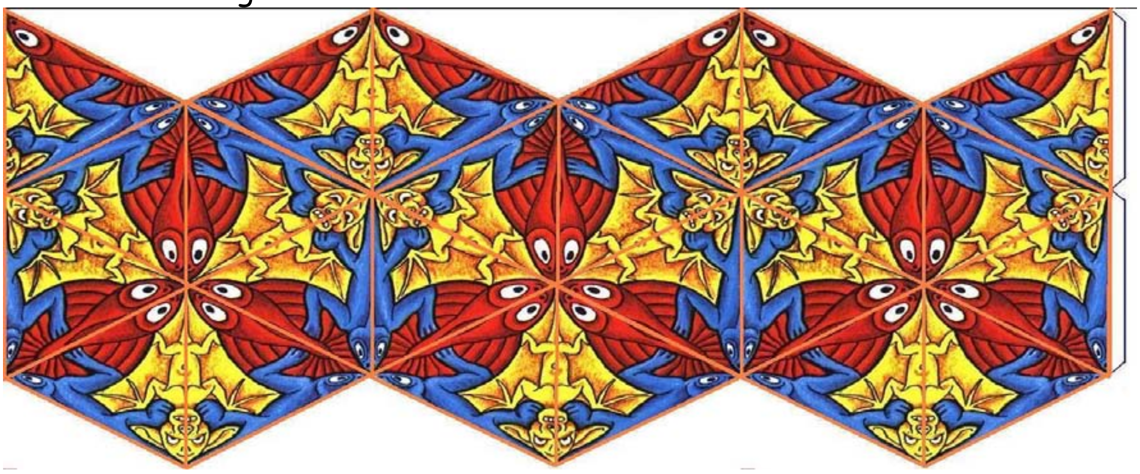
Para los calidociclos no regulares Schattschneider extiende o contrae la red para obtener calidociclos cerrados. Matemáticamente se trata de realizar una transformación afín. Un programa como Microsoft Paint lo realiza con el comando "Expandir". Usando un factor de "expansión" del 82% (aunque realmente es un factor de compresión) obtenemos la red del calidociclo octogonal cerrado o "calidociclo cuadrado"



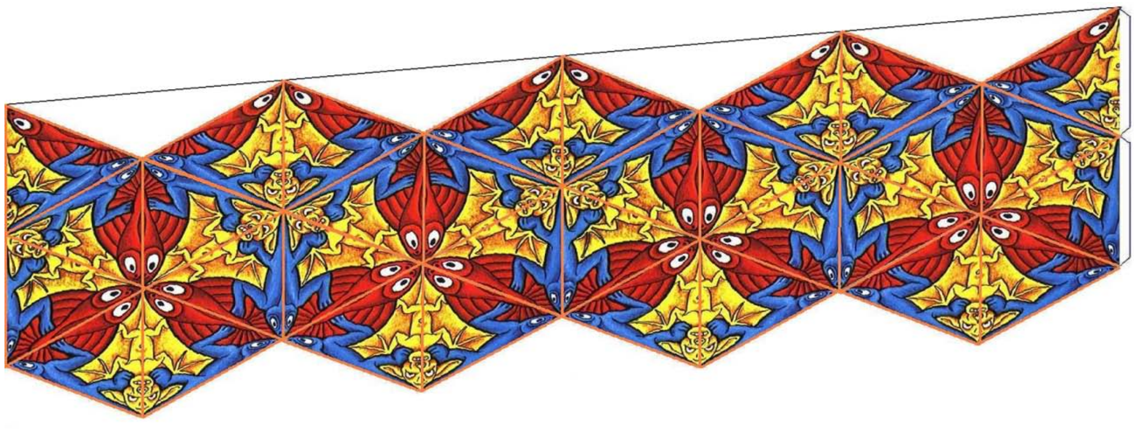
Partiendo de una red hexagonal de triángulos regulares, la cual no produce como sabemos ningún calidociclo



y aplicando un factor de expansión del 115% obtenemos la red del calidociclo hexagonal cerrado



Si a la red regular aplicamos una expansión en horizontal del 150% y una contracción de 5º obtenemos el desarrollo de un calidocilo oblicuo.



Schattschneider y Walker usando estas ideas y técnicas construyen 5 calidociclos cerrados de 6 tetraedros a los que llama calidociclos hexagonales; 4 calidociclos cerrados de 8 tetraedros a los que llama calidociclos cuadrados, aunque quizás un nombre más coherente sería el de calidociclo octogonal y un calidociclo oblicuo. En cada caso el mosaico de Escher es diferente.

Referencias

Libros

Doris Schattscheneider y Wallace Walker, M.C.Escher Calidociclos, Editorial Taco, 1987

Este libro es la traducción al español del original en inglés cuya primera edición es de 1977.

Páginas Web Sobre los calidociclos

http://www.mathematische-basteleien.de/index.htm
www.ac-noumea.nc/maths/amc/polyhedr/index_.htm
http://britton.disted.camosun.bc.ca/jbescher.htm
http://www.kaleidocycles.de/gallery.shtml

Páginas Web Sobre M.C. Escher

http://www.mcescher.com/home/homeuk.htm
http://home.comcast.net/~eschermc/
http://www.uv.es/~buso/escher/escher.html
http://thales.cica.es/rd/Recursos/rd99/ed99-0224-02/ed99-0224-02.html
http://library.thinkquest.org/16661/escher.html