 par Eva Bayer–Fluckiger

Hermann Minkowski,

Grand Prix de l'Académie à 18 ans

La décomposition des nombres entiers en sommes de carrés intéresse les mathématiciens depuis l'Antiquité et est associée à plusieurs grands noms des mathématiques : Fermat, Lagrange, Legendre, Gauss... Ce thème fut aussi celui du Grand Prix de l'Académie des Sciences de Paris en 1881, que remporta le jeune Hermann Minkowski.

Hermann Minkowski est né le 22 juin 1864 à Alexotas, en Russie (aujourd'hui Lituanie). La famille Minkowski est venue s'installer à Königsberg, en Prusse (aujourd'hui Kaliningrad, Russie) en 1872, alors que le petit Hermann avait 8 ans et demi. Il était le plus jeune de trois frères – ses aînés se nommaient Max et Oskar. D'après les témoignages de l'époque, tous les trois étaient très brillants. Oskar et Hermann ont fréquenté le Altstädtishe Gymnasium de Köningberg (ce qui signifie « lycée de la vieille ville ». En allemand, « lycée » se dit « gymnasium », car on y pratique la gymnastique de l'esprit...). Le jeune Hermann était excellent dans toutes les disciplines, et tout particulièrement en mathématiques. Son professeur, Hübner, l'a encouragé et conseillé. Ainsi Hermann a eu accès à des ouvrages de mathématiques de haut niveau, tel par exemple le livre de Gauss, *Disquisitiones arithmeticae*, paru en 1801, qui est un trésor d'idées, méthodes et résultats de la théorie des nombres. Très vite, Hermann s'est passionné pour les recherches arithmétiques, et a même écrit quelques petits travaux dans la continuité de ceux de Gauss.

Photo : Smithsonian Institution Libraries
Dibner librairie of the history of science and technology

À l'Université de Königsberg, il y avait alors une seule chaire de mathématiques, dont le titulaire était Heinrich Weber, lui aussi grand spécialiste de la théorie des nombres. Sur les conseils de son professeur de lycée Hübner, Hermann a contacté Heinrich Weber et a eu plusieurs conversations mathématiques avec lui. Ceci a beaucoup impressionné Weber, puisqu'il a écrit à son collègue Richard Dedekind qu'il a eu l'occasion de faire la connaissance d'un jeune génie de la théorie des nombres, très prometteur.

A partir de 1798, on sait donc tout sur la décomposabilité d'un entier en sommes de carrés – mais la question plus précise de connaître le nombre de décompositions reste ouverte.

Au printemps 1880, Hermann Minkowski termine ses études secondaires, obtient le bac (Abitur) à 15 ans, et il s'inscrit à l'Université de Königsberg.

Sommes de carrés

Au printemps 1881, l'Académie des Sciences de Paris a mis au concours un Grand Prix pour le meilleur mémoire sur la « *Décomposition des nombres entiers en une somme de cinq carrés* ». Ce sujet se situe dans la continuité des travaux de Gauss et de Dirichlet que connaissait Hermann Minkowski, ainsi cette mise au concours l'a vivement intéressé. Il s'est immédiatement mis au travail pour résoudre le problème posé par l'Académie.
De quoi s'agit-il ? L'étude des sommes de carrés est presque aussi ancienne que les mathématiques elles-mêmes – par exemple, Diophante s'est intéressé aux sommes de deux et de trois carrés, et on pense qu'il avait remarqué que tout nombre entier positif est une somme de quatre carrés. Par exemple, 5 est une somme de deux carrés : $5 = 1 + 4$. On ne peut pas écrire 3 comme une somme de deux carrés, par contre $3 = 1 + 1 + 1$, il est donc une somme de trois carrés. Il n'est pas possible de décomposer 7 comme somme de trois carrés, mais $7 = 4 + 1 + 1 + 1$, donc 7 est une somme de quatre carrés. Expérimentalement, on constate (tout comme Diophante) que l'on arrive à écrire n'importe quel nombre entier positif comme une somme de quatre carrés, mais encore faut-il le démontrer !

Au XVII^e siècle, Pierre de Fermat a caractérisé les sommes de deux carrés et s'est attaqué aux sommes de quatre carrés. Magistrat à Toulouse, ce mathématicien amateur lisait le traité de Diophante avec enthousiasme, et a contribué à la renaissance de la théorie des nombres – sujet qui s'était un peu endormi depuis les travaux de Diophante au III^e siècle. Fermat a obtenu plusieurs résultats remarquables et a initié des méthodes mathématiques importantes, comme par exemple la descente infinie. Cependant, il s'est généralement contenté de donner des résultats avec parfois un schéma de démonstration ou indication d'une méthode, mais presque jamais de démonstration complète. C'est aussi lui qui, en 1737, a noté dans la marge du traité de Diophante le célèbre dernier théorème de Fermat, qui est devenu un des problèmes des plus célèbres des mathématiques, résolu seulement en 1995 par Andrew Wiles ! En 1659, Fermat a écrit une lettre à Carcavi, autre mathématicien amateur de l'époque. Cette lettre contenait un résumé de ses résultats en théorie des nombres – avec ses propres mots « voici sommairement le compte de mes rêveries sur le sujet des nombres ». Entre bien d'autres résultats, il y parle de sommes de deux carrés, et dit que si p est un nombre premier de la forme $4n + 1$, où n est un entier positif, alors p est une somme de deux carrés d'entiers. Ce résultat n'est pas évident – on en connaît aujourd'hui plusieurs démonstrations, mais aucune n'est vraiment triviale.
D'autre part, il est facile de montrer qu'un produit de deux sommes de deux carrés est encore une somme de deux carrés : il suffit de vérifier la formule $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ad - bc)^2 + (ac + bd)^2$. On obtient ainsi une caractérisation des sommes de deux carrés : un nombre entier n est une somme de deux carrés si et seulement si $n = m^2 p_1 \dots p_r$, où m est un entier quelconque, $p_1, \dots, p_r$ des nombres premiers tels que soit $p_i = 2$, soit p_i est de la forme $4k + 1$, avec k entier positif.
Fermat a aussi remarqué que l'écriture d'un nombre premier en tant que somme de deux carrés est « essentiellement unique » : on a par exemple $5 = 1^2 + 2^2 = (-1)^2 + 2^2 = 1^2 + (-2)^2 = (-1)^2 + (-2)^2$. En intervertissant les rôles de 1 et de 2, on obtient 8 façons d'écrire 5 en tant que somme de deux carrés – mais ces écritures ne sont pas fondamentalement différentes. Grâce aux considérations ci–dessus, on obtient une formule pour le nombre de représentations d'un nombre en tant que somme de deux carrés.

Corps de nombres

Un corps de nombres est une généralisation du corps des nombres rationnels $\mathbb{Q}$, et un anneau d'entiers est une généralisation de l'anneau des entiers $\mathbb{Z}$. Par exemple, l'anneau des entiers de Gauss $\mathbb{Z}[i]$, où i est un nombre complexe tel que $i^2 = -1$, est par définition $\mathbb{Z}[i] = \{ a + bi \mid a, b$ appartiennent à $\mathbb{Z} \}$, et c'est l'anneau des entiers du corps quadratique $\mathbb{Q}[i] = \{ a + bi \mid a, b$ appartiennent à $\mathbb{Q} \}$. L'anneau $\mathbb{Z}[i]$ se plonge de façon naturelle dans le corps des nombres complexes, et la restriction de la norme complexe induit une norme $N : \mathbb{Z}[i]$ vers $\mathbb{Z}$. On a $N(a + bi) = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$. Ainsi, les sommes de deux carrés d'entiers sont les normes des entiers de Gauss – cette observation est à la base de l'une des démonstrations du théorème de Fermat sur les sommes de deux carrés. Issue des travaux d'Euler, Gauss, Minkowski et bien d'autres, l'étude des corps de nombres et des anneaux d'entiers est devenue une partie très importante de la théorie des nombres. La géométrie des nombres de Minkowski est un outil indispensable : elle est basée sur le fait que l'on peut plonger les corps de nombres dans des espaces géométriques, de façon à représenter les anneaux des entiers sous forme de réseaux. Par exemple, $\mathbb{Q}[i]$ se plonge dans les nombres complexes, lesquels s'identifient à un espace euclidien de dimension 2, et l'anneau des entiers de Gauss sera représenté par le réseau cubique dans cet espace.

Fermat s'est aussi intéressé aux sommes de quatre carrés, mais nous ne savons pas s'il avait réellement résolu ce problème. C'est finalement Lagrange qui a publié, en 1770, la première démonstration du « théorème des quatre carrés » pressenti par Diophante. On montre par une formule similaire – mais plus compliquée – à celle des sommes de deux carrés, qu'un produit de deux sommes de quatre carrés est une somme de quatre carrés. Il suffit donc de montrer que tout nombre premier est une somme de quatre carrés. Là aussi, nous disposons aujourd'hui de plusieurs démonstrations dont la plus conceptuelle est peut–être celle qui utilise la notion des quaternions. D'autres sont tout à fait élémentaires, mais aucune n'est triviale.

« Travaillez, Monsieur, à devenir un géomètre éminent », ***écrivit Camille Jordan à Minkowski.***

Les sommes de trois carrés s'avèrent être plus difficiles – c'est Legendre qui les a caractérisées en 1798. Il montre qu'un entier est une somme de trois carrés si et seulement s'il n'est pas de la forme $4^r(8m+7)$, où r et m sont des entiers positifs ou nuls. Peu de temps après, dans son grand traîté *Disquisitiones Arithmeticae*, Gauss a obtenu une nouvelle démonstration, dans un cadre beaucoup plus général. Il a également donné une formule pour le nombre de représentations d'un entier comme somme de trois carrés. Attention : un produit de deux sommes de trois carrés n'est pas toujours une somme de trois carrés !

Formes quadratiques

Une forme quadratique est un polynôme homogène de degré deux, par exemple : $X^2 + XY + Y^2$, $X^2 + 82Y^2$, $2X^2 + 41Y^2$, $X^2 + 2Y^2 + 3Z^2$, etc. Bien sûr, n'importe quelle somme de carrés $X_1^2 + \ldots + X_n^2$ est une forme quadratique. On dit qu'une forme quadratique $Q(X_1, \ldots, X_n)$ représente un entier a s'il existe des entiers $N_1, \ldots, N_n$ tels que $Q(N_1, \ldots, N_n) = a$. Par exemple, si $Q(X_1, \ldots, X_n) = X_1^2 + \ldots + X_n^2$, alors Q représente un entier a si et seulement si a est une somme de n carrés d'entiers. L'un des problèmes les plus importants de la théorie des formes quadratiques entières est de déterminer les entiers représentés par une forme donnée. De façon plus précise, on cherche aussi à connaître le nombre de ces représentations. Ces questions généralisent celles que l'on se pose sur les sommes de carrés : quels sont les nombres entiers qui sont sommes de n carrés ? De combien de façons différentes peut-on exprimer un entier en tant qu'une somme de n carrés ? Les travaux de Minkowski et Smith se situent dans le cadre plus général de la représentation des entiers par des formes quadratiques.

Un Grand Prix...

À partir de 1798, on sait donc tout sur la décomposabilité d'un entier en sommes de carrés – mais la question plus précise de connaître le nombre de décompositions reste ouverte. En 1828, Jacobi donne une formule pour les sommes de quatre, six et huit carrés. En 1847, Eisenstein propose une formule pour les sommes de cinq carrés, mais sans aucune démonstration. Il est malheureusement mort jeune, et n'a pas eu la possibilité de publier les détails de son raisonnement.
C'est dans ce contexte que l'Académie des Sciences de Paris a proposé, au printemps 1881, le Grand Prix pour l'auteur du meilleur mémoire sur la « Décomposition des nombres entiers en une somme de cinq carrés ». L'Académie a attiré l'attention des concurrents sur un article d'une page d'Eisenstein de 1847 dans laquelle une formule sans démonstration est donnée. L'annonce de ce concours est paru dans les Comptes Rendus des Séances de l'Académie, et c'est probablement là que le jeune Hermann Minkowski en a pris connaissance.

... et deux lauréats

Un autre mathématicien a lu, en février 1881, l'annonce de cette mise au concours. Il s'agit du mathématicien anglais, Henry John Stephen Smith, professeur à l'Université d'Oxford, et âgé alors de 56 ans. Il a été fort surpris en voyant cette annonce – en effet, il a publié une solution du problème posé en 1867 déjà ! Son article est paru dans les *Proceedings of the Royal Society*, mais il semblerait que les mathématiciens français n'ont pas eu connaissance de ces travaux. Comme on peut le voir dans l'introduction aux *Œuvres Scientifiques* de Smith, celui-ci a alors été bien ennuyé, et se demandait ce qu'il fallait faire. Il a écrit à un de ses amis, pour lui demander conseil : doit-il écrire à l'Académie, ou peut–être à l'un des mathématiciens français de sa connaissance ? Justement, Smith connaissait assez bien Charles Hermite, lui aussi spécialiste de la théorie des nombres. Ce serait sans doute la bonne personne a contacter. Sur les conseils de son ami, Smith a alors écrit à Hermite. Celui-ci lui a aussitôt répondu, et lui a conseillé de participer au concours avec une version plus détaillée de ses travaux.

Pendant ce temps-là, à Königsberg, Hermann Minkowski a continué à travailler. Il a lui aussi résolu le problème posé par l'Académie, tout en le mettant dans un contexte beaucoup plus général. Il a rédigé un manuscrit d'une centaine de pages – en allemand ! Ceci posait un problème, car selon les règles de l'Académie, les *Mémoires* devaient être écrits en français. La date limite du concours était le 1er juin 1882, et Minkowski n'a envoyé son mémoire que le 29 mai. Mais il est bien arrivé à temps et a vivement intéressé la commission de l'Académie chargée du concours. Allant au-delà des problèmes de forme, les membres de cette commission ont bien compris que l'auteur de ce mémoire était un mathématicien très prometteur.

Le rapporteur de l'Académie a estimé que les deux mémoires – celui de Smith et celui de Minkowski – ont bien résolu le problème proposé. Voici quelques extraits du rapport : « *Ce problème semble assez restreint au premier abord ; mais on avait lieu de penser que les théorèmes obtenus par cet illustre géomètre (Eisenstein) s'étaient offerts à lui comme conséquences dernières d'une longue série de recherches... L'Académie était donc fondée à espérer que ce voyage de découvertes imposé aux concurrents à travers une des régions les plus intéressantes et les moins explorées de l'Arithmétique produirait des résultats féconds pour la Science. Cette attente n'a pas été trompée.* » Le rapport analyse ensuite les deux mémoires, en leur trouvant beaucoup de points communs, avant de conclure : « *De même que nous n'avons pu séparer ces deux beaux Mémoires dans la courte analyse qui précède, nous ne saurions les présenter l'un sans l'autre aux suffrages de l'Académie. Tous deux en sont également dignes… Dans l'impossibilité où elle se trouve de mettre l'un d'eux au second rang, la Commission à l'unanimité émet le voeu que l'Académie accorde à chacun d'eux la totalité du prix...* »

Ainsi, la commission a donc recommandé l'attribution du prix aux deux mémoires. Ceci a été accepté par l'Académie. Smith n'a malheureusement pas vécu assez longtemps pour recevoir son prix, car il est mort deux mois auparavant. Pour Hermann Minkowski c'était le début d'une belle carrière. Il a bien reçu le prix, ainsi que les encouragements des mathématiciens français. En particulier, Camille Jordan lui a écrit « travaillez, Monsieur, à devenir un géomètre éminent ».
Minkowski a suivi les conseils de Jordan, et il a apporté des contributions fondamentales à la théorie arithmétique des formes quadratiques, à la géométrie des nombres (sujet qu'il a lui-même créé) ainsi qu'aux fondements mathématiques de la relativité restreinte. La conférence* a présenté quelques uns de ses travaux, et (surtout) des développements plus récents qui leur ont fait suite.

E. B.-F.

Géométrie des nombres

La *géométrie des nombres* est une méthode inventée par Hermann Minkowski : le but est d'étudier des objets arithmétiques, tels que des formes quadratiques ou des corps de nombres, par des méthodes géométriques. On représente ainsi les formes quadratiques $X^2 + Y^2$ et $X^2 + XY + Y^2$ par des réseaux dans le plan : la première correspond au réseau cubique, la deuxième au réseau hexagonal. Ceci permet de donner un sens géométrique à la représentation d'un entier par une forme quadratique. Par exemple, les représentations de 5 en tant que sommes de deux carrés seront données par les points du réseau cubique à distance racine de 5 de l'origine. Ce point de vue nouveau a permis à Minkowski d'obtenir de nouveaux résultats, ainsi que des démonstrations plus simples de résultats déjà connus (notamment de Charles Hermite) concernant par exemple la finitude du nombre de classes d'équivalence de formes quadratiques entières à n variables et de déterminant d. Ces méthodes géométriques s'appliquent également aux corps de nombres et à leurs anneaux d'entiers.

* Cet article a été écrit suite à la conférence éponyme donnée par Eva Bayer-Fruckiger le 10 mai 2006 à la BnF, dans le cadre du cycle *Un texte, un mathématicien* proposé par la SMF et la BnF, en partenariat avec France Culture et *Tangente*.

Bibliographie

Les sources

G. Eisenstein, *Note sur la représentation d'un nombre par la somme de cinq carrés*, J. reine angew. Math. 368 (1847) (=Mathematische Werke, Vol. 2, p.505, New York : Chelsea, 1975).
H. Minkowski, *Grundlagen für eine Theorie der quadratischen Formen mit ganzzahligen*
Koeffizienten (traduction française : *Mémoire sur la théorie des formes quadratiques, Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des sciences*, 2e s. 29 (1887), no 2, 180 pages (= Gessamelte Abhandlungen, Leipzig, Berlin : Teubner, (1911), New York : Chelsea (1967)).
H. Minkowski, *Geometrie der Zahlen*, Teubner, Leipzig (1896), Johnson Reprint Corp., New York (1968).
H.J.S. Smith, *Mémoire sur la représentation des nombres par des sommes de cinq carrés*, Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des sciences, 2e s. 29 (1887), 58 pages (= Collected Mathematical Papers, New York : Chelsea (1965), 623–680)

Pour aller plus loin

J. W. S. Cassels, *Rational quadratic forms*, Academic Press, London–New York–San Francisco (1978).
E. Grosswald, *Representations of integers as sums of squares*, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (1985).
M. Kneser, *Quadratische Formen*, Springer Verlag, Berlin–Heidelberg–New York (2002).
J. Martinet, *Réseaux parfaits des espaces euclidiens*, Masson (2000).
C. Moreno, S. Wagsta_, Jr., *Sums of squares of integers*, Chapman and Hall (2006).