Axioma del Supremo

April 18, 2007

Cota Superior e Inferior

Antes de presentarles el axioma del supremo, axioma de los números reales, debemos estudiar una serie de definiciones que sirven para acotar conjuntos: cotas superiores e inferiores, máximos y mínimos, supremos e ínfimos.

Acotado Superiormente

Un conjunto A es acotado superiormente si existe un real M que es mayor que todos los elementos del conjunto A, es decir

$$(\exists M \in \mathbb{R})\,(\forall x \in A)\ \text{tal que: } x \leq M.$$

A este número M, se le llamará cota superior de A.

Observación

Cualquier otro real mayor que M, también será una cota superior de A.

Acotado Inferiormente

Un conjunto A es acotado inferiormente si existe un real m que es menor que todos los elementos del conjunto A, es decir

$$(\exists m \in \mathbb{R})\,(\forall x \in A)\ \text{tal que: } m \leq x.$$

A este número m se le llamará cota inferior de A.

Observación

Cualquier otro real menor que m, también será una cota inferior de A.

Observación

Un conjunto acotado superior e inferiormente, se dice **acotado**.

Cota Superior e Inferior

Ejemplos

1. $A = (-\infty, 5)$. Este intervalo es acotado superiormente, una cota superior es 5, y el conjunto de las cotas superiores es $[5, \infty)$.
   No hay cotas superiores $m < 5$, ya que siempre existe $\varepsilon > 0$ tal que $m + \epsilon \in A$ y $m < m + \varepsilon$.
   El intervalo no es acotado inferiormente pues dado un real $m < 5$, una cota inferior para m sería $m - 1$, pero $m - 1 \in A$.

1. $A = [-1, 3]$. Este intervalo es acotado superior e inferiormente. El conjunto de las cotas superiores es el intervalo $[3, \infty)$. Y el de las cotas inferiores es el intervalo $(-\infty, -1]$.

Observación

Una forma de demostrar que un real c es una cota superior para un conjunto A, es probar que ningún real $x > c$ pertenece a A.

Ejemplo

$A = \left\{x \in \mathbb{R} : x^2 \leq 2\right\}$

Veamos si $c = \frac{3}{2}$ es cota superior de A. Si $x > \frac{3}{2}$, entonces $x^2 > \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} > 2$. Por lo tanto $x \notin A$. Esto quiere decir que ningún real mayor que $\frac{3}{2}$ puede estar en A.

Máximo y Mínimo

Máximo

Diremos que un conjunto A posee máximo, si posee una cota superior que pertenece al conjunto.

Mínimo

Diremos que un conjunto A posee mínimo, si posee una cota inferior que pertenece al conjunto.

Observación

- Estas dos definiciones nos dicen que el máximo de un conjunto es el mayor elemento del conjunto y que el mínimo de un conjunto es el menor elemento del conjunto.
- Si el máximo existe, este es único. Lo mismo ocurre con el mínimo.

Ejemplo

1. $A = (-\infty, 5)$. No posee máximo, ya que el conjunto de todas las cotas superiores es $[5, \infty)$ y $(-\infty, 5] \cap [5, \infty) = \emptyset$.
2. $A = [-1, 3]$. Posee como mínimo a -1 y como máximo a 3.

Supremo e Infimo

Supremo

Diremos que un conjunto A posee supremo, si existe un real s que satisface las dos siguientes condiciones:

1. s es una cota superior de A.
2. Cualquier otra cota superior de A es mayor que s.

Notación
El supremo de A, se denota por $\sup A$.

Ínfimo

Diremos que un conjunto A posee ínfimo, si existe un real u que satisface las dos siguientes condiciones:

1. u es una cota inferior de A.
2. Cualquier otra cota inferior de A es menor que u.

Notación
El ínfimo de A, se denota por $\inf A$.

Ejemplo

1. $A = (-\infty, 5)$. Tiene como supremo el valor 5, ya que 5 es cota superior del conjunto y cualquier otra cota superior de A será mayor que 5. No tiene ínfimo pues no está acotado inferiormente.

1. $A = [-1, 3]$ .Está acotado superior e inferiormente y tiene a -1 como ínfimo y a 3 como supremo (-1 es mínimo y 3 es máximo).

Características de intervalos

Resumimos ahora las características anteriores en el caso de intervalos, dados $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$:

	min	max	inf	sup
$[a, b]$	a	b	a	b
(a, b)	$\nexists$	$\nexists$	a	b
$[a, b)$	a	$\nexists$	a	b
$(a, b]$	$\nexists$	b	a	b
$(-\infty, b]$	$\nexists$	b	$\nexists$	b
$(-\infty, b)$	$\nexists$	$\nexists$	$\nexists$	b
(a, ∞)	$\nexists$	$\nexists$	a	$\nexists$
$[a, \infty)$	a	$\nexists$	a	$\nexists$

Queda propuesto como ejercicio, argumentar la tabla anterior.

Propiedades del supremo

Observación

Siempre se tendrá que si el mínimo m de un conjunto A existe entonces el ínfimo u de A también existe y son iguales. Esto es porque, el mínimo m es una cota inferior de A y por la definición de ínfimo tendremos que $m < u$.
Por otro lado, como m pertenece al conjunto, toda cota inferior debe ser menor que él, en particular el ínfimo u, es decir $u < m$. Por lo tanto $m = u$.
Lo mismo se tendrá para máximo y supremo.

Propiedades

Sean A y B dos conjuntos, definimos $A + B = \{x + y : x \in A, y \in B\}$ y $A \cdot B = \{x \cdot y : x \in A, y \in B\}$, entonces

- $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$.
- $\sup(A \cdot B) = \sup(A) \cdot \sup(B)$. Para $A, B \subseteq [0, \infty)$.

Proof.

Sólo demostraremos la primera propiedad, la segunda quedará como ejercicio.
Demostraremos la prmera propiedad demostrando las dos desigualdades que nos darán la igualdad.

Primero $\sup(A + B) \leq \sup(A) + \sup(B)$: Un elemento de $A + B$ se escribe como $x + y$, y este número es menor que $\sup(A) + \sup(B)$, pues $x \leq \sup(A)$ e $y \leq \sup(B)$. Con lo cual tenemos que $\sup(A) + \sup(B)$ es una cota superior del conjunto $A + B$. Entonces el supremo de $A + B$ debe ser menor que $\sup(A) + \sup(B)$. Luego se tiene la desigualdad $\sup(A + B) \leq \sup(A) + \sup(B)$.

Segundo $\sup(A + B) \geq \sup(A) + \sup(B)$: Sabemos que para todo $x \in A$ e $y \in B$, $x + y \leq \sup(A + B)$, es decir para todo $x \in A$ se tiene $x \leq \sup(A + B) - y$, lo que equivale a decir que para todo $y \in B$, se tiene que el real $\sup(A + B) - y$, es cota superior de A.Entonces para todo $y \in B$ se tiene que $\sup(A) \leq \sup(A + B) - y$. Como es para todo $y \in B$,entonces tenemos $y \leq \sup(A + B) - \sup(A)$. Luego $\sup(B) \leq \sup(A + B) - \sup(A)$. Con lo cual se tiene la otra desigualdad. $\square$

Axioma del Supremo

En la parte anterior vimos que hay conjuntos acotados superiormente que no poseen máximo. En estos casos como en el ejemplo del intervalo $(-\infty, 5)$, el candidato a ser máximo era 5, pero este no pertenecía al conjunto.

Sin embargo nuestra intuición nos dice que todo conjunto acotado superiormente posee supremo. De hecho, la única forma que un conjunto no posea supremo parece ser, que no sea acotado.

Sin embargo esta intuición no se puede deducir de las propiedades de los reales, por lo tanto lo tenemos que agregar como axioma.

Axioma del Supremo:

Todo conjunto no vacío y acotado superiormente posee un supremo.

Observaciones

- Se puede demostrar que todo conjunto no vacío acotado inferiormente pose ínfimo. En efecto, basta verificar que $\inf(A) = -\sup(-A)$.
- No es cierta la propiedad si se cambia supremo por máximo. En efecto $(-\infty, 5)$ no tiene máximo pero sí supremo.

Aplicación 1

Para ilustrar una de las aplicaciones del axioma del supremo, vamos a definir la parte entera de un real $x > 0$.

Parte Entera

La parte entera de un real $x > 0$, se definirá como el supremo del conjunto $A = \{n \in \mathbb{N} : n \leq x\}$ .Esto está bien definido pues el conjunto A es acotado superiormente por x y además $0 \in A$. Por lo tanto por el axioma del supremo, el conjunto A posee supremo. Este supremo será denotado por $[x]$ y se llamará cajón inferior de x o parte entera de x.

Ejemplo:

La parte entera del real $3,5$ es: $[3,5] = 3$.

Ahora veamos que $[x]$ es un número natural.

Como $[x] = \sup(A)$, el real $[x] - \frac{1}{2}$, no puede ser una cota superior de A. Luego debe existir un elemento n_0 en A tal que $[x] - \frac{1}{2} < n_0$. Por otra parte, como $[x]$ es una cota superior de A se tiene que $n_0 \leq [x]$.

Veamos que n_0 es una cota superior de A. Esto lo tendremos si todo natural n que sea mayor estricto que n_0, no pertenece a A.

Si $n > n_0$, se deduce que $n \geq n_0 + 1$. Pero sabemos que $n_0 + 1 > [x] + \frac{1}{2}$. Con esto tenemos que $n > [x] + \frac{1}{2} > [x]$. Por lo tanto, n es mayor que el supremo de A y entonces $n \notin A$. Con esto concluimos que n_0 es una cota superior de A. Como $n_0 \in A$, concluimos que es un máximo y por ende es igual a $[x]$.

Observación

Una consecuencia importante de esto último es que $[x] \leq x < [x] + 1$.

Aplicación 2

Otra forma de utilizar el axioma del supremo es deducir propiedades acerca de $\mathbb{R}$.

Teorema

Los números naturales nos son acotados superiormente.

Demostración.

Lo haremos por contradicción, es decir, supongamos que $\mathbb{N}$ es acotado superiormente, esto implicaría por el axioma del supremo que $\mathbb{N}$ posee supremo, el cual llamaremos s. Para este supremo se tendría que$[s] \leq s < [s] + 1$, donde $[s] + 1 \in \mathbb{N}$. Lo cual contradice que s es cota superior de $\mathbb{N}$. $\square$

Teorema (Propiedad Arquimediana)

El conjunto $\mathbb{R}$ es arquimediano, es decir, para todo real $x > 0$, existe un natural $n \in \mathbb{N}$, tal que $n \cdot x > 1$.

Demostración.

Lo haremos por contradicción, es decir, si no se tuviese la propiedad, existiría un real positivo x tal que el conjunto $\{n \cdot x : n \in \mathbb{N}\}$,sería acotado por 1, siendo no vacío, tendría un supremo L. Pero entonces $\frac{L}{x}$ sería una cota superior para los naturales, lo cual contradice el teorema recién visto. $\square$

Observación

El último teorema puede interpretarse como: sumar una cantidad suficientemente grande de veces x consigo mismo da origen a un real que es mayor que 1, sin importar que tan pequeño sea x. Y además el valor de 1 puede cambiarse por cualquier real positivo.

Ejemplo: $\inf \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N} = 0$. Si suponemos que esto no es cierto, es decir existe $m > 0$ tal que $\forall n \in \mathbb{N},\ m \leq \frac{1}{n}$. Por la propiedad arquimediana, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $mn_0 > 1$, lo cual equivale a $m > \frac{1}{n_0}$. Lo cual es una contradicción.

Aplicación 2

Teorema (∗)

Los racionales son densos en los reales. Esto significa que dados dos reales x, y con $x < y$, entonces existe un racional r tal que $x < r < y$.

Demostración.

- Si x e y son racionales podemos escoger $r = \frac{x+y}{2}$.
- Si alguno de ellos no es racional analizaremos dos situaciones:
  - Primero, si $y - x \geq 1$ con y no racional, entonces podemos escoger $r = [y]$. Pues sabemos que $x \leq y - 1 < r = [y] < y$. Si y es racional, entonces podemos escoger $r = [x] + 1$, pues en este caso tenemos $x < [x] + 1 = r \leq x + 1 < y$.
  - Segundo, si $y - x < 1$ con y no racional, podemos definir $r = \frac{n}{m}$, con $m = \left[\frac{1}{y-x}\right] + 1$ y $n = [my]$. Se demuestra que r satisface la propiedad estableciendo la siguientes relaciones: $my - mx > 1$ (se obtiene de $m > \frac{1}{y-x}$) ; $n + 1 > my$, entonces $my > n > mx$ (y no es racional).

□

Aplicación 3

Otra aplicación es ocupar el axioma del supremo como **constructor de números**.

Vamos a utilizar los resultados anteriores para definir la raíz cuadrada de un número. Buscaremos un número $s > 0$ tal que $s^2 = 2$.

Consideremos nuevamente el conjunto $A = \left\{r \in \mathbb{R} : r^2 \leq 2\right\}$.Ya vimos que que A es acotado superiormente por $\frac{3}{2}$, además A es no vacío pues $0 \in A$. Por el axioma del supremo tenemos que A posee supremo. Demostraremos que no puede ocurrir que $s^2 < 2$, ni tampoco que $s^2 > 2$.

- **No puede ocurrir que $s^2 < 2$:**
  Probemos que si $s^2 < 2$, entonces $\exists \varepsilon \in (0, 1)$ tal que $(s + \varepsilon)^2 < 2$. En efecto

$$\begin{aligned}(s+\varepsilon)^2 &= s^2 + 2s\varepsilon + \varepsilon^2 \\ &\leq s^2 + (2s+1)\varepsilon\end{aligned}$$

  Si se escoje ε tal que

$$s^2 + (2s+1)\varepsilon < 2$$

  se habrá probado la propiedad.
  Basta para ello tomar $\varepsilon = \frac{2-s^2}{2(2s+1)}$.
  Luego $(s + \varepsilon)^2 < 2$, lo cual implica que $s + \varepsilon \in A$. Lo cual contradice que s es cota superior, ya que $s + \varepsilon > s$. Luego, no puede ser que $s^2 < 2$.

Aplicación 3

- **No puede ocurrir que $s^2 > 2$:**
  Se prueba que existe una cota superior de A menor que s, lo cual nos daría una contradicción pues s no sería la menor cota superior de a. Esto se puede hacer realizando un razonamiento similar al anterior llegando a que $(\exists \varepsilon \in (0,1))\ (s-\varepsilon)^2 > 2$, lo cual implica que $s-\varepsilon$ es una cota superior de A menor que s.

Finalmente podemos concluir que $s^2 = 2$.

Por lo tanto podemos definir lo siguiente:

Raíz cuadrada de 2:

$$\sqrt{2} = \sup\left\{r \in \mathbb{R} : r^2 \leq 2\right\}.$$

Ahora veremos que $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, es decir veamos que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Supongamos que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, entonces tendríamos que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, con $p, q \in \mathbb{N}$ y la fracción es irreductible (p y q no tienen factores enteros comunes). Entonces necesariamente p o q es impar, si no tendrían al número 2 como factor común.

Luego $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ equivale a $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$ (por la definición de raíz cuadrada). Entonces $p^2 = 2q^2$, lo cual implica que p^2es par, luego p es par.

En efecto si p fuese impar $p = 2m+1$, entonces $p^2 = 4m^2 + 4m + 1$, el cual es impar, lo cual no puede ser.

Entonces si p es par, lo podemos escribir $p = 2k$, con $k \in \mathbb{N}$. Luego $p^2 = 4k^2 = 2q^2 \Rightarrow q^2 = 2k^2 \Rightarrow q \text{ es par}$, lo cual dijimos que no podía ser. Entonces $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Extensiones

Lo anterior permite definir lo siguiente:

Raíz cuadrada de un número real positivo:

$$\sqrt{x} = \sup \left\{ r \in \mathbb{R} : r^2 \leq x \right\}.$$

De manera más general:

Raíz n-ésima de un número real positivo:

$$\sqrt[n]{x} = \sup \left\{ r \geq 0 : r^n \leq x \right\}.$$

Observación

El axioma del supremo hace la diferencia entre $\mathbb{R}$ y $\mathbb{Q}$.

Números irracionales

Observación

$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ se denomina $\mathbb{I}$ y se llaman **irracionales**.

Las siguientes propiedades quedan propuestas como ejercicios.

Propiedades

- $x, y \in \mathbb{Q} \;\Rightarrow\; x \pm y \in \mathbb{Q}$.
- $x \in \mathbb{Q}$, $y \in \mathbb{I} \;\Rightarrow\; x + y \in \mathbb{I}$.
- $x \in \mathbb{Q}^*, \; y \in \mathbb{I} \;\Rightarrow\; x \cdot y \in \mathbb{I}$.

El teorema $(*)$, puede extenderse a $\mathbb{I}$:

Proposición

$$\forall x, y \in \mathbb{Q},\; x < y,\; \exists i \in \mathbb{I},\; x < i < y.$$

Proof.

Sabemos, por $(*)$ que

$$\exists p,\; q \in \mathbb{Q},\; x < q < p < y.$$

Con esto definimos:

$$i = q + \frac{\sqrt{3}}{2}(p - q),$$

que por la propiedad anterior pertence a $\mathbb{I}$. $\square$