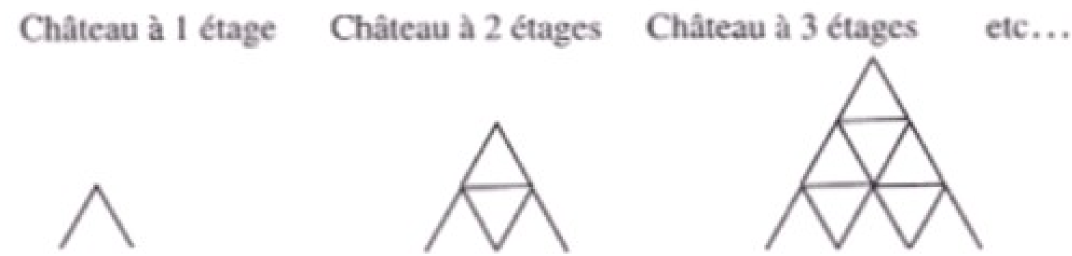
Château de cartes

Un château de cartes est un empilage organisé de la façon suivante:



Combien faut-il de cartes pour construire 5 étages, 12 étages, 100 étages et, de manière générale, n étages ?

Vous raconterez sur votre feuille les différentes étapes de votre recherche (vous pouvez minuter le temps, joindre vos brouillons…), les observations que vous avez pu faire et qui vous ont fait progresser ou changer de méthode (chercher seul).
L'évaluation portera principalement sur la qualité de la recherche.

Ce travail a été proposé en classe de 3ème. Les élèves ont mis en place des procédures personnelles pour compter les cartes dans des cas simples ; ils ont ensuite conjecturé une formule qu'ils ont vérifiée à l'aide de leurs premiers résultats.

Pour faire la synthèse des travaux des élèves l'enseignant a répertorié parmi les différentes productions les méthodes pertinentes.
Il a préparé un paperboard de plusieurs feuilles qui permettront aux élèves de présenter leur démarche devant la classe ; le choix a été fait d'illustrer les différentes procédures sur le même nombre d'étages ce qui est ici plus clair que de travailler sur des scans de copies.
Le TNI permet de garder les traces de toutes ces procédures afin d'en faire un bilan et de montrer qu'elles aboutissent toutes au même résultat.

Observation des premiers résultats :

Nombre d'étages (n)	Nombre de cartes (c)
1	2
2	7
3	15
4	26
5	40

+5 +8 +11 +14

+3 +3 +3

Cette procédure ne permet pas d'obtenir une formule générale.

On lui préférera celle-ci issue d'une recherche de proportionnalité entre le nombre de cartes et le nombre d'étages.

Observation des premiers résultats (bis) :

Nombre d'étages (n)	Nombre de cartes (c)	$\frac{c}{n}$
1	2	2
2	7	3,5
3	15	5
4	26	6,5
5	40	8

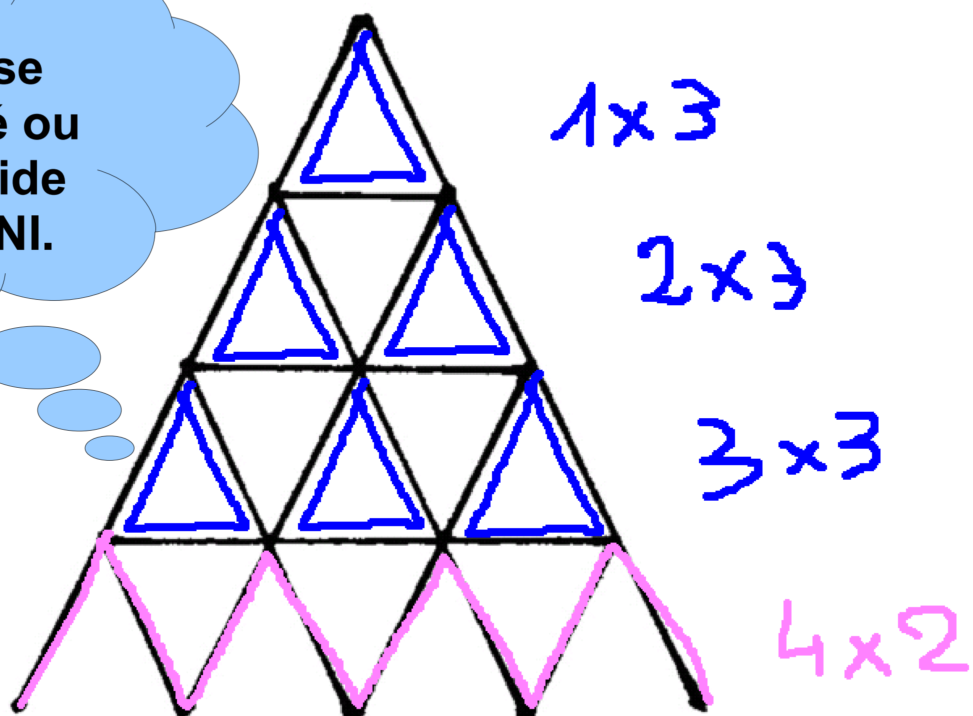
+1,5 +1,5 +1,5 +1,5

On en déduit que pour n étages
- le quotient est : $2 + 1,5 \times (n-1)$
- le nombre de cartes est : $n \times [2 + 1,5 \times (n-1)]$

Beaucoup de procédures sont issues d'analyses différentes de la configuration

Le motif de base peut être scanné ou reconstruit à l'aide des outils du TNI.

Compter la "base" puis les autres étages :

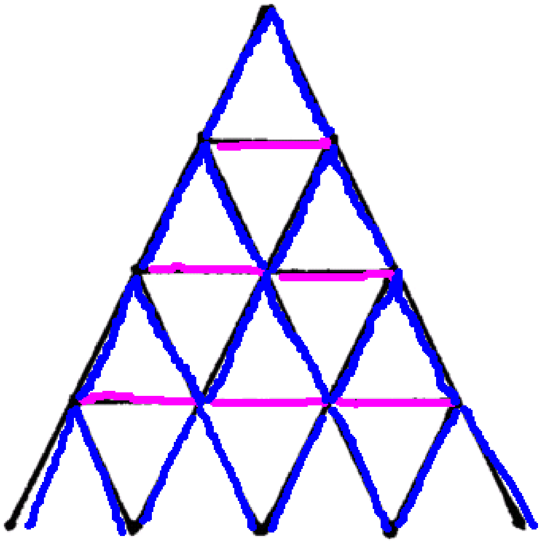


On en déduit pour n étages :

$$2\times n + 3\{(n-1)+(n-2)+\cdots+1\}$$

Cette procédure ne permet pas d'aboutir à une formule réduite.

Compter les cartes horizontales et les cartes obliques :



horizontales

étage	cartes
1	0
2	1
3	3 $= \frac{3\times 2}{2}$
4	6 $= \frac{4\times 3}{2}$
5	10 $= \frac{5\times 4}{2}$

pour n étages

$$\boxed{\frac{n\times(n-1)}{2}}$$

obliques

étages	cartes
1	2
2	6 $= 2\times 3$
3	12 $= 3\times 4$
4	20 $= 4\times 5$

pour n étages

$$\boxed{n\times(n+1)}$$

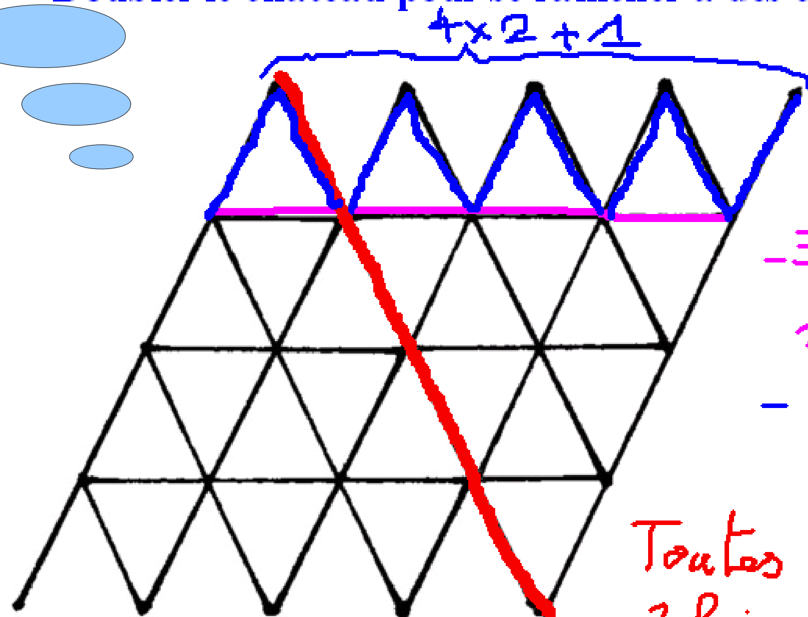
Total

$$n(n+1)+\frac{n\times(n-1)}{2}$$

Pour conjecturer la formule, il est nécessaire d'observer plus de résultats.

La figure a été obtenue en utilisant les outils de duplication et retournement du TNI.

Doubler le château pour se ramener à des étages identiques :



Il y a :

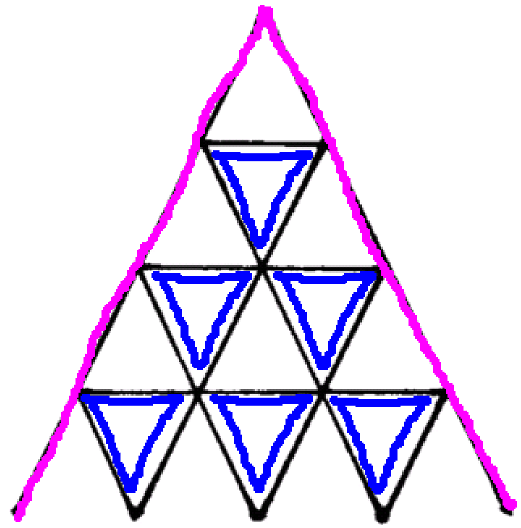
- 3 étages de 4 cartes horizontales
- 4 étages de 9 cartes obliques

Toutes les cartes sont comptées 2 fois sauf les 4 cartes de la diagonale ; il faut donc les rajouter avant de diviser par 2 :

Total : $\frac{3\times 4 + 4\times 9 + 4}{2}$

$\boxed{\text{Pour } n \text{ étages : } \frac{(n-1)\times n + n\times(2n+1)+n}{2}}$

Compter les bords et les triangles :



Il y a :
- 2×4 cartes sur les bords
- 6 triangles soit : 6×3 cartes

Total : $2 \times 4 + 6 \times 3$

Il faut trouver un lien entre le nombre de triangles et le nombre d'étages.

étages	triangles
1	0
2	1
3	$3 = \frac{3 \times 2}{2}$
4	$6 = \frac{4 \times 3}{2}$
5	$10 = \frac{5 \times 4}{2}$

Pour n étages

$$2 \times n + \frac{n \times (n-1)}{2} \times 3$$

Au lieu de refaire ce travail on peut remarquer que le nombre de triangles est le même que le nombre de cartes horizontales calculé dans une procédure précédente.

On a obtenu les formules suivantes :

$$n\times\left[2+1{,}5\times(n-1)\right]$$

$$n(n+1)+\frac{n\times(n-1)}{2}$$

$$\frac{(n-1)\times n+n\times(2n+1)+n}{2}$$

$$2\times n+\frac{n\times(n-1)}{2}\times 3$$

ces expressions sont-elles identiques ?

A l'aide de l'outil capture du TNI on récupère les différentes formules obtenues sur une même page.

Il reste à développer et réduire ces expressions afin de pouvoir les comparer.
On aboutit ainsi à la même formule : $\frac{3n^2+n}{2}$ **;**

il n'est bien sûr pas possible en classe de 3ème de la démontrer.