



UNIVERSIDAD DE EXTREMADURA

CENTRO UNIVERSITARIO DE MÉRIDA

Ingeniería Técnica en Topografía



**APUNTES
DE
FOTOGRAMETRÍA II**

Juan Antonio Pérez Álvarez



**UNIVERSIDAD DE EXTREMADURA
CENTRO UNIVERSITARIO DE MÉRIDA**

Titulación: Ingeniero Técnico en Topografía



APUNTES DE

FOTOGRAMETRÍA II

*Juan Antonio Pérez Álvarez
Mérida, Septiembre de 2001*

ÁREA TEMÁTICA 1: TRANSFORMACIONES DE COORDENADAS

TEMA 1. TRANSFORMACIONES BIDIMENSIONALES	7
1.1. Introducción.....	8
1.2. Transformación bidimensional conforme.....	8
1.2.1. Giro.....	8
1.2.2. Traslación.....	9
1.2.3. Cambio de escala.....	10
1.2.4. Expresión general.....	10
1.2.5. Determinación de los parámetros.....	11
1.2.6. Precisión de la transformación.....	16
1.3. Transformación afin bidimensional.....	16
1.3.1. Expresión general.....	16
1.3.2. Determinación de los parámetros.....	18
1.3.3. Caso particular.....	21
1.3.4. Precisión de la transformación.....	22
1.4. Transformación proyectiva bidimensional.....	22
1.4.1. Expresión general.....	25
1.4.2. Determinación de los parámetros.....	25
1.4.3. Precisión de la transformación.....	26
Bibliografía.....	26
TEMA 2. TRANSFORMACIONES TRIDIMENSIONALES	29
2.1. Introducción.....	29
2.2. Transformación bidimensional conforme.....	30
2.2. Transformación tridimensional de semejanza.....	31
2.2.1. Rotaciones (matriz de Euler).....	31
2.2.1.1. Primera rotación.....	32
2.2.1.2. Segunda rotación.....	33
2.2.1.3. Tercera rotación.....	34
2.2.2. Traslación y cambio de escala.....	36
2.2.3. Expresión general.....	36

2.3. Linealización de la expresión general.....	37
2.4. Determinación de los parámetros	39
2.5. Expresión general para valores pequeños de los ángulos	46
2.6. Alternativas a la matriz de rotación	47
2.6.1. Matriz de Cayley	47
2.6.2. Matriz de Olinde Rodrigues	48
2.6.3. Matriz de Thomson	50
2.6.4. Matriz de Shut.....	51
2.7. Precisión de la transformación tridimensional de semejanza	53
2.8. Transformación tridimensional afin.....	54
2.9. Transformación tridimensional polinómica.....	55
Bibliografía.....	56

ÁREA TEMÁTICA 2: FOTOGRAMETRÍA ANALÍTICA

TEMA 3. INTRODUCCIÓN. ORIENTACIÓN INTERNA ANALÍTICA..... 57

3.1. Introducción.....	57
3.2. Fases del proceso de restitución analítica	59
3.3. Sistemas de coordenadas fotogramétricas	60
3.4. Reconstrucción de los haces (Orientación Interna)	61
3.4.1. Transformación de coordenadas comparador	62
3.4.2. Corrección de distorsión	62
3.4.3. Corrección de esfericidad.....	64
3.4.4. Corrección de refracción.....	66
3.4.5. Determinación de coordenadas imagen.....	67
Bibliografía.....	68

TEMA 4. ORIENTACIÓN EXTERNA. ORIENTACIÓN EN UN PASO..... 69

4.1. Introducción.....	69
4.2. Determinación simultánea de todos los elementos de orientación	69
4.3. Condición de colinealidad	70
4.4. Linealización de las ecuaciones de colinealidad.....	74
4.4.1. Coeficientes de la función lineal aproximada F_x	75
4.4.2. Coeficientes de la función lineal aproximada F_y	76
4.5. Proceso de cálculo	76
4.5.1. Sistema de ecuaciones indirectas	77
4.5.2. Solución del sistema.....	80
4.5.3. Método de la variación de coordenada imagen.....	81
4.6. Cálculo de las coordenadas terreno	81
Bibliografía.....	82

TEMA 5. ORIENTACIÓN EXTERNA. ORIENTACIÓN EN DOS PASOS..... 83

5.1. Introducción.....	83
5.2. Orientación relativa.	84
5.3. Condición de colinealidad	84
5.3.1 Expresión de la función linealizada	85
5.3.2. Valores aproximados. Ecuaciones de la paralaje.	86
5.4. Condición de coplaneidad.....	86
5.4.1. Linealización de la ecuación de coplaneidad	89
5.4.2. Coeficientes de la función lineal aproximada Δ	90
5.4.3. Sistema de ecuaciones indirectas	92

5.5. Expresión de la ecuación para valores pequeños de los ángulos	93
5.6. Orientación relativa por empalme de fotos consecutivas	93
5.6.1. Linealización de la ecuación de coplaneidad	94
5.6.2. Coeficientes de la función lineal aproximada Δ	95
5.6.3. Sistemas de ecuaciones indirectas.....	96
5.6.4. Expresión de la ecuación Δ para valores pequeños de los ángulos	97
5.7. Orientación relativa de pares de fotos independientes.....	97
5.7.1. Linealización de la ecuación de coplaneidad	98
5.7.2. Coeficientes de la función lineal aproximada Δ	98
5.7.3. Sistemas de ecuaciones indirectas.....	100
5.7.4. Expresión de la ecuación Δ para valores pequeños de los ángulos	100
5.8. Cálculo de coordenadas modelo	101
5.8.1. Empalme de fotos consecutivas	101
5.8.2. Fotogramas independientes.....	103
5.9. Orientación absoluta	104
Bibliografía.....	105

ÁREA TEMÁTICA 3: FOTOGRAMETRÍA DIGITAL

TEMA 6. INTRODUCCIÓN. LA IMAGEN DIGITAL	107
6.1. Introducción.....	107
6.2. Evolución histórica de la fotogrametría.....	108
6.3. La imagen digital	114
6.4. Ventajas e inconvenientes de las imágenes digitales.....	116
6.5. Almacenamiento de la imagen digital	117
6.6. Formatos gráficos de almacenamientos de imágenes digitales.....	118
6.7. Compresión de imágenes digitales	119
6.8. Calidad de la imagen	124
6.8.1. Geométrica	124
6.8.2. Radiométrica.....	124
6.8.3. Ruido.....	124
6.9. Análisis de imágenes digitales.....	125
6.9.1. Técnicas de realce de la imagen.....	125
6.9.2. Ecuación del histograma	128
6.9.3. Filtros	128
6.9.4. Segmentación de la imagen.....	132
Bibliografía.....	134
TEMA 7. SISTEMAS DE ADQUISICIÓN DE IMÁGENES DIGITALES.....	135
7.1. Introducción.....	135
7.2. Escáner.....	136
7.2.1. Tipo de escáner	138
7.2.2. Problemática del escáner.....	139
7.2.3. Test de calibración	139
7.2.4. Problemática radiométrica de las imágenes obtenidas con escáners.....	140
7.2.5. Características generales de los escáners	140
7.3. Cámaras digitales.....	141
7.3.1. Requisitos.....	141
7.3.2. Sensores digitales aerotransportados. (ADS).....	142
7.3.3. Sensores lineales	142
7.3.4. Sensores matriciales.....	145
Bibliografía.....	146

TEMA 8. CORRELACIÓN Y ORIENTACIONES.....	147
8.1. Introducción.....	147
8.2. Principio de la correlación de imágenes.....	148
8.2.1. Correlación de imágenes en una dimensión.....	149
8.2.2. Correlación de imágenes en dos dimensiones.....	150
8.3. Métodos de correlación.....	151
8.4. Geometría epipolar.....	156
8.5. Correlación y segmentación.....	160
8.6. Técnicas automáticas, semiautomáticas y automáticas de orientación.....	161
8.7. Orientación automática.....	162
8.7.1. Orientación interna.....	162
8.7.2. Orientación Relativa.....	164
8.7.3 Orientación Absoluta.....	164
8.8. Técnicas automáticas y semiautomáticas de transferencia de puntos.....	165
Bibliografía.....	165

ÁREA TEMÁTICA 4: INSTRUMENTOS DE RESTITUCIÓN

TEMA 9. INSTRUMENTOS ANALÍTICOS.....	167
9.1. Introducción.....	168
9.2. Instrumentos para aplicaciones analíticas.....	168
9.3. Comparadores.....	168
9.3.1. Componentes básicos de un comparador.....	169
9.3.2. Sistema de observación.....	169
9.3.3. Sistema de medición.....	170
9.3.4. Sistema de lectura y registro.....	171
9.3.5. Monocomparadores.....	172
9.3.6. Transferidores y marcadores de puntos.....	172
9.3.7. Estereocomparadores.....	173
9.3.8. Errores que afectan a las coordenadas imagen.....	175
9.4. Instrumentos analíticos.....	176
9.4.1. Principios básicos.....	176
9.5. Configuración básica.....	177
9.6. Bucles de trabajo en un restituidor analítico.....	178
9.7. Componentes físicos y periféricos de un restituidor analítico.....	179
9.7.1. Estereocomparador (unidad óptica-mecánica).....	179
9.7.2. El Ordenador.....	180
9.7.2.1. Arquitectura basada en un tratamiento centralizado.....	181
9.7.2.2. Arquitectura basada en un tratamiento distribuido.....	181
9.7.2.3. Procesador en Tiempo Real.....	182
9.7.3. Sistema de inyección de imágenes.....	183
9.7.4. Dispositivo de correlación.....	184
9.7.5. Sistemas de adquisición de datos.....	185
9.7.6. Periféricos de salida de datos.....	185
9.7.7. Otros componentes.....	185
9.8. Componentes lógicos (software).....	185
9.9. Clasificación de los instrumentos analíticos.....	186
9.9.1. Restituidores analíticos con coordenadas imagen.....	187
9.9.2. Restituidores analíticos con coordenadas objeto.....	188
9.9.3. Restituidores analítico equipados con correladores.....	189
Bibliografía.....	189

TEMA 10. INSTRUMENTOS DIGITALES	191
10.1. Introducción	191
10.2. Sistemas Fotogramétricos Digitales.....	192
10.3. Características de las estaciones de trabajo	192
10.4. Componentes de un Sistema Fotogramétrico Digital	192
10.4.1. Sistema físico (<i>Hardware</i>)	193
10.4.1.1. Sistema de visión estereoscópica.....	194
10.4.1.2. Dispositivo interactivo de medición estereoscópica (3D)	197
10.4.1.3. Funciones del procesador de imágenes	198
10.4.2. Sistema lógico (<i>Software</i>)	198
10.4.2.1. Automatización de las estaciones de trabajo	198
10.4.2.2. Modo de trabajo.....	200
Bibliografía	201

ÁREA TEMÁTICA 5: INTRODUCCIÓN A LA FOTOGRAMETRÍA POR SATÉLITE

TEMA 11. INTRODUCCIÓN A LA FOTOGRAMETRÍA POR SATÉLITE	203
11.1. Introducción	203
11.1. Programas espaciales	204
11.3. Categorías de la fotogrametría por satélite	211
11.3.1. Cartografía bidimensional.....	211
11.3.2. Cartografía tridimensional	212
11.4. Elementos de la fotogrametría por satélite	214
11.5. Modelo matemático en fotogrametría por satélite	215
Bibliografía	217

TEMA 1

TRANSFORMACIONES BIDIMENSIONALES

- 1.1. Introducción**
 - 1.2. Transformación bidimensional conforme**
 - 1.2.1. Giro**
 - 1.2.2. Traslación**
 - 1.2.3. Cambio de escala**
 - 1.2.4. Expresión general**
 - 1.2.5. Determinación de los parámetros**
 - 1.2.6. Precisión de la transformación**
 - 1.3. Transformación afín bidimensional**
 - 1.3.1. Expresión general**
 - 1.3.2. Determinación de los parámetros**
 - 1.3.3. Caso particular**
 - 1.3.4. Precisión de la transformación**
 - 1.4. Transformación proyectiva bidimensional**
 - 1.4.1. Expresión general**
 - 1.4.2. Determinación de los parámetros**
 - 1.4.3. Precisión de la transformación**
 - Bibliografía**
-

1.1. Introducción

Un problema que frecuentemente nos encontramos en fotogrametría es la conversión de un sistema de coordenadas rectangulares a otro. Debido a que en fotogrametría, normalmente se determinan las coordenadas desconocidas de una serie de puntos, con respecto a un sistema de coordenadas rectangulares arbitrario. El proceso de conversión de un sistema de coordenadas a otro es llamado “*transformaciones de coordenadas*”.

El procedimiento requiere que los mismos puntos tengan sus coordenadas conocidas en ambos sistemas, el arbitrario y el sistema final de coordenadas. Tales puntos son llamados “*puntos de control*”.

Las transformaciones de coordenadas se realizan para figuras de la misma dimensión, por tanto hablaremos de dos tipos de transformaciones:

- *Bidimensionales.*
- *Tridimensionales.*

Dentro de estos grupos de transformaciones se verán:

- Transformaciones bidimensionales:
 - De Semejanza o conforme.
 - Afin.
 - Proyectiva.

- Transformación tridimensional:
 - De Semejanza o conforme.
 - Afin.
 - Proyectiva.
 - Polinómica.

1.2. Transformación bidimensional conforme

Una transformación de semejanza aplicada sobre una figura, es aquella que no varía su verdadera forma después de la transformación.

Para aplicar una transformación bidimensional de semejanza es necesario conocer como mínimo las coordenadas de dos puntos en ambos sistemas. Se mejora la precisión en la transformación, si los puntos se eligen lo más alejados posibles.

Una transformación de coordenadas bidimensional de semejanza consiste en tres pasos básicos:

- Giro.
- Cambio de escala.
- Traslación.

Supongamos dos sistemas de coordenadas ortogonales (X, Y) (x, y) independientes, donde un punto P está referido a los dos sistemas. Se van a deducir las relaciones entre las coordenadas de este punto en ambos sistemas, en los casos mencionados anteriormente.

1.2.1. Giro

Partiendo de los sistemas de coordenadas de referencia (X, Y) y arbitrario (x, y) y suponiendo este último girado un valor α respecto del sistema de referencia (*Fig. 1*).

De la figura 1 puede deducirse fácilmente las expresiones:

$$\begin{aligned} \overline{OC} &= \overline{OD} - \overline{CD} = \overline{OD} - \overline{AB} & \overline{PC} &= \overline{PA} + \overline{AC} = \overline{PA} + \overline{BD} \\ \overline{OC} &= \overline{OB} \cos\alpha - \overline{PB} \operatorname{sen}\alpha & \overline{PC} &= \overline{PB} \cos\alpha + \overline{OB} \operatorname{sen}\alpha \\ X &= x \cos\alpha - y \operatorname{sen}\alpha & Y &= x \operatorname{sen}\alpha + y \cos\alpha \end{aligned}$$

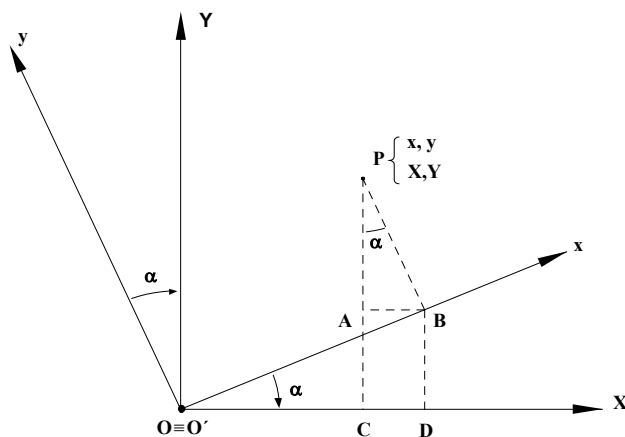


Figura 1. Sistemas de coordenadas girados un ángulo α .

Obteniéndose las coordenadas de un punto $P(x, y)$ en el sistema de referencia:

$$\begin{aligned} X &= x \cos \alpha - y \operatorname{sen} \alpha \\ Y &= x \operatorname{sen} \alpha + y \cos \alpha \end{aligned}$$

Expresado las expresiones anteriores en forma matricial tendremos:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\operatorname{sen} \alpha \\ \operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Llamando a la matriz de rotación de los senos y cosenos por $R = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\operatorname{sen} \alpha \\ \operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$

Podremos expresar el giro de la forma:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

1.2.2. Traslación

Consideremos ahora el caso de la figura 2, es decir, los ejes de ambos sistemas son paralelos, pero el origen del sistema (x, y) tiene de coordenadas (T_x, T_y) respecto del sistema (X, Y)

De la figura 2 se deduce que:

$$\begin{aligned} X &= x + T_x \\ Y &= y + T_y \end{aligned}$$

Expresando las coordenadas en forma matricial tendremos:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \end{bmatrix}$$

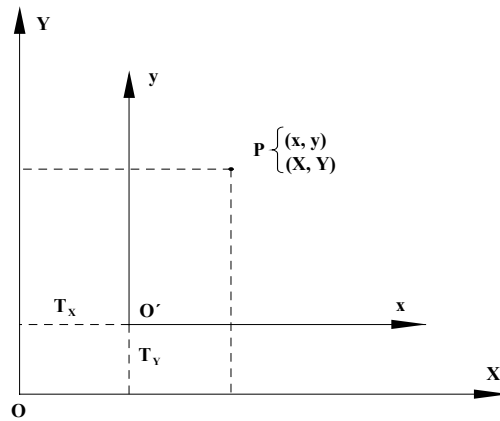


Figura 2. Sistemas de coordenadas con origen de coordenadas diferentes.

1.2.3. Cambio de escala

Supongamos ambos sistemas de coordenadas con origen de coordenadas coincidentes y diferentes unidades de medida (Fig. 3).

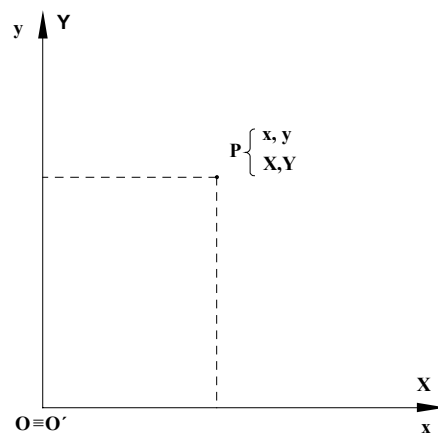


Figura 3. Sistemas con diferentes unidades de medida.

Como en el caso anterior de la figura 3 se desprende que las coordenadas de un punto $P(x, y)$ pueden expresarse de la forma:

$$\begin{aligned} X &= \lambda x \\ Y &= \lambda y \end{aligned} \Rightarrow \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

1.2.4. Expresión general

Considerando el caso más general, es decir, ejes girados, trasladados y con diferentes unidades de medida, tendremos:

$$\begin{aligned} X &= \lambda(x \cos \alpha - y \sin \alpha) + T_x \\ Y &= \lambda(x \sin \alpha + y \cos \alpha) + T_y \end{aligned}$$

Expresado en forma matricial la expresión anterior se tiene:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \end{bmatrix}$$

pudiendo expresar la relación anterior de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \end{bmatrix}$$

donde los parámetros de la transformación a calcular son respectivamente a , b , T_x , T_y . Conocidos los parámetros a y b puede determinarse el giro y el factor de escala ($a = \lambda \cos\alpha$, $b = \lambda \operatorname{sen}\alpha$).

Esta transformación es conocida con el nombre de “**Transformación de Helmert**”.

1.2.5. Determinación de los parámetros

Existen varias formas de solucionar las incógnitas de este problema:

1. *Situando el origen de cada uno de los dos sistemas de coordenadas, en un origen común (c.d.g.).*
2. *Aplicando la metodología de mínimos cuadrados. (Sistema de observaciones indirectas).*

➤ *Primera solución:*

Partiendo de la expresión general:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \end{bmatrix}$$

donde las incógnitas a determinar son a , b , T_x , T_y , siendo:

- T_x , T_y la traslación del sistema de coordenadas arbitrario respecto del sistema de referencia.
- a y b el giro y la traslación conjuntamente. ($\lambda = \sqrt{a^2 + b^2}$; $\tan\alpha = b/a$)

Conocidas las coordenadas de dos puntos en ambos sistemas podrán determinarse las cuatro incógnitas de la transformación de semejanza. No obstante, si en alguna coordenada existiese algún error en su determinación, los elementos de la T.S. serán calculados erróneamente, no existiendo posibilidad de detectar el error al efectuar la operación. Por ello, partiremos del hecho de tener un número de puntos mayor de dos, para poder determinar con mayor fiabilidad las incógnitas de una T.S. bidimensional.

Planteamiento del problema:

Conocidas las coordenadas de dos puntos en ambos sistemas podrán determinarse las cuatro incógnitas de la transformación de semejanza. No obstante, si en alguna coordenada existiese algún error en su determinación, los elementos de la T.S. serán calculados erróneamente, no existiendo posibilidad de detectar el error al efectuar la operación. Por ello, partiremos del hecho de tener un número de puntos mayor de dos, para poder determinar con mayor fiabilidad las incógnitas de una T.S. bidimensional.

Dada una figura formada por un número “n” de puntos $(P_1, P_2, P_3, \dots, P_n)$, siendo $n \geq 2$, la cual está referida a dos sistemas de coordenadas ortogonales, que se diferencian en un giro, una traslación y un cambio de escala.

Tenemos como dato de partida las coordenadas de “n” puntos en ambos sistemas; cada punto da lugar a dos ecuaciones; por lo tanto tendremos un sistema con $2n$ ecuaciones con cuatro incógnitas (a, b, T_x, T_y), llamados parámetros de la transformación:

Datos de partida: $P_i \quad (x_i, y_i) \quad (X_i, Y_i) \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (n \geq 2)$.

$$\begin{array}{cccc}
 X_1 & Y_1 & x_1 & y_1 \\
 X_2 & Y_2 & x_2 & y_2 \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 X_n & Y_n & x_n & y_n \\
 \hline
 \sum_{i=1}^n X_i & \sum_{i=1}^n Y_i & \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n y_i
 \end{array}$$

Obtenemos las coordenadas del centro de gravedad (centroides) de ambos sistemas:

$$x_G = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \quad ; \quad y_G = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n} \quad ; \quad X_G = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} \quad ; \quad Y_G = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{n}$$

Resultando las coordenadas de los “n” puntos con origen en sus centroides respectivos:

$$\begin{array}{cccc}
 x'_1 = x_1 - x_G & y'_1 = y_1 - y_G & X'_1 = X_1 - X_G & Y'_1 = Y_1 - Y_G \\
 x'_2 = x_2 - x_G & y'_2 = y_2 - y_G & X'_2 = X_2 - X_G & Y'_2 = Y_2 - Y_G \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 x'_n = x_n - x_G & y'_n = y_n - y_G & X'_n = X_n - X_G & Y'_n = Y_n - Y_G \\
 \hline
 \sum_{i=1}^n x'_i = 0 & \sum_{i=1}^n y'_i = 0 & \sum_{i=1}^n X'_i = 0 & \sum_{i=1}^n Y'_i = 0
 \end{array}$$

Representando los sistemas de coordenadas (referencia y arbitrario) con origen en el centroide (c.d.g.) (Fig. 4).

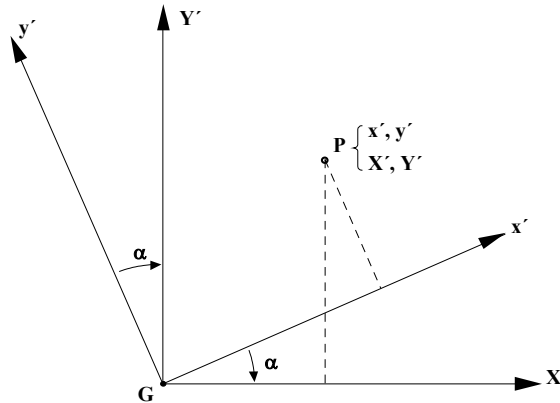


Fig. 4. Sistema arbitrario y de referencia referidos al origen común centroide.

Aplicando la expresión general de la transformación bidimensional conforme (7) al nuevo origen de coordenadas, resultará que las coordenadas de un punto P cualquiera vendrán dadas por la expresión:

$$\begin{aligned} X' &= \lambda(x' \cos \alpha - y' \sin \alpha) = a x' - b y' \\ Y' &= \lambda(x' \sin \alpha + y' \cos \alpha) = a y' + b x' \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} a &= \lambda \cos \alpha = \frac{\begin{bmatrix} X' & -y' \\ Y' & x' \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} x' & -y' \\ y' & x' \end{bmatrix}} = \frac{x'X' + y'Y'}{x'^2 + y'^2} \\ b &= \lambda \sin \alpha = \frac{\begin{bmatrix} x' & X' \\ y' & Y' \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} x' & -y' \\ y' & x' \end{bmatrix}} = \frac{x'Y' - y'X'}{x'^2 + y'^2} \end{aligned}$$

Para un número de puntos "n" ($n \geq 2$), $P_i (x_i, y_i), (X_i, Y_i) \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n)$.

$$\begin{aligned} X'_1 &= a x'_1 - b y'_1 & Y'_1 &= b x'_1 + a y'_1 \\ X'_2 &= a x'_2 - b y'_2 & Y'_2 &= b x'_2 + a y'_2 \\ X'_3 &= a x'_3 - b y'_3 & Y'_3 &= b x'_3 + a y'_3 \\ &\vdots & & \vdots \\ X'_n &= a x'_n - b y'_n & Y'_n &= b x'_n + a y'_n \end{aligned}$$

El valor de las incógnitas (a , b) vendrá dado por la expresión:

$$a = \lambda \cos \alpha = \frac{\sum_{i=1}^n (x'_i X'_i + y'_i Y'_i)}{\sum_{i=1}^n (x_i'^2 + y_i'^2)} \quad b = \lambda \sin \alpha = \frac{\sum_{i=1}^n (x'_i Y'_i - y'_i X'_i)}{\sum_{i=1}^n (x_i'^2 + y_i'^2)}$$

llamando respectivamente:

$$\left. \begin{aligned} I &= \sum_{i=1}^n (x'_i X'_i + y'_i Y'_i) \\ II &= \sum_{i=1}^n (x'_i Y'_i - y'_i X'_i) \\ III &= \sum_{i=1}^n (x_i'^2 + y_i'^2) \end{aligned} \right\} a = \frac{I}{III} \quad b = \frac{II}{III}$$

Una vez determinados los parámetros a y b (factor de escala y giro), podremos deducir los valores de T_x , T_y .

Para ello y partiendo de la expresión general:

$$\begin{aligned} X &= \lambda(x \cos \alpha - y \sin \alpha) + T_x = a x - b y + T_x \\ Y &= \lambda(x \sin \alpha + y \cos \alpha) + T_y = b x + a y + T_y \end{aligned}$$

y para un número “ n ” de puntos, siendo $n \geq 2$, podremos establecer los sistemas de ecuaciones:

$$\begin{aligned} X_1 &= \lambda(x_1 \cos \alpha - y_1 \sin \alpha) + T_x & Y_1 &= \lambda(x_1 \sin \alpha + y_1 \cos \alpha) + T_y \\ X_2 &= \lambda(x_2 \cos \alpha - y_2 \sin \alpha) + T_x & Y_2 &= \lambda(x_2 \sin \alpha + y_2 \cos \alpha) + T_y \\ & \cdot & & \cdot \\ & \cdot & & \cdot \\ X_n &= \lambda(x_n \cos \alpha - y_n \sin \alpha) + T_x & Y_n &= \lambda(x_n \sin \alpha + y_n \cos \alpha) + T_y \end{aligned}$$

despejando de ellos el valor de las traslaciones, obtendremos:

$$T_x = \frac{\sum_{i=1}^n X_i - a \sum_{i=1}^n x_i + b \sum_{i=1}^n y_i}{n} \quad T_y = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i - a \sum_{i=1}^n y_i - b \sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

➤ *Segunda solución:*

Datos de partida: $P_i (x_i, y_i) (X_i, Y_i) \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (n \geq 2)$

Partiendo de la fórmula general, las ecuaciones de observación para n puntos serán

$$\begin{array}{ll}
 P_1 \Rightarrow X_1 = a x_1 - b y_1 + T_x & Y_1 = a y_1 + b x_1 + T_y \\
 P_2 \Rightarrow X_2 = a x_2 - b y_2 + T_x & Y_2 = a y_2 + b x_2 + T_y \\
 \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot \\
 P_n \Rightarrow X_n = a x_n - b y_n + T_x & Y_n = a y_n + b x_n + T_y
 \end{array}$$

Expresando el sistema de ecuaciones anterior en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} x_1 & -y_1 & 1 & 0 \\ y_1 & x_1 & 0 & 1 \\ x_2 & -y_2 & 1 & 0 \\ y_2 & x_2 & 0 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_n & -y_n & 1 & 0 \\ y_n & x_n & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ T_x \\ T_y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ X_2 \\ Y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ X_n \\ Y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{X_1} \\ V_{Y_1} \\ V_{X_2} \\ V_{Y_2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ V_{X_n} \\ V_{Y_n} \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} [A] & [X] - [L] & = & [V] \\ (2n,4) & (4,1) \quad (2n,1) & & (2n,1) \end{matrix}$$

donde $[A] [X]-[L]=[V]$ representa la forma general de las ecuaciones de observación indirecta. Aplicando la condición de mínimo al sistema de ecuaciones.

$$\Phi = \sum_{i=1}^n V_i^2 = [V]^T [W] [V]$$

$$\Phi = ([A][X] - [L])^T [W] ([A][X] - [L])$$

$$\Phi = [X]^T [A]^T [W] [A] [X] - [L]^T [W] [A] [X] - [X]^T [A]^T [W] [L] + [L]^T [W] [L]$$

$$\Phi = [X]^T [A]^T [W] [A] [X] - 2[L]^T [W] [A] [X] + [L]^T [W] [L]$$

Para minimizar la función Φ , habrá que calcular su derivada parcial con respecto a X :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial X} = 0 \text{ (mínimo)}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial X} = 2[X]^T [A]^T [W] [A] - 2[L]^T [W] [A] = 0$$

$$[X] = ([A]^T [W] [A])^{-1} [A]^T [W] [L]$$

$$[X] = [N]^{-1} [t]; [N] = [A]^T [W] [A]; [t] = [A]^T [W] [L]$$

En el caso de utilizar observaciones con igual precisión (los pesos de las observaciones son idénticos $[W] = 1$), la solución a la que se llega es:

$$[X] = ([A]^T [A])^{-1} [A]^T [L]$$

1.2.6. Precisión de la transformación

Estableciendo los sistemas de coordenadas por medio de la expresión general, se procederá a resolver los parámetros de la transformación, según lo visto anteriormente.

Aplicando la expresión de la transformación e introduciendo en ella los parámetros que han sido obtenidos a partir de los mismos puntos P_i , (x_i, y_i) , $(i=1, 2, \dots, n; n > 2)$ y que han servido para su determinación, se obtendrán unos nuevos valores del sistema de referencia (X^c, Y^c) , que no coincidirán con los datos de partida (supuestos estos sin error). Pueden determinarse fácilmente los residuos de la transformación, restando estos valores, que llamaremos los calculados en la transformación, a los de partida, resultando:

$$V_X = X_i^c - X_i$$

$$V_Y = Y_i^c - Y_i$$

El error medio de las coordenadas puede obtenerse de la expresión:

$$\sigma_{XY} = \pm \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (V_{X_i}^2 + V_{Y_i}^2)}{l - m}}$$

donde:

- $\sum_{i=1}^n (V_{X_i}^2 + V_{Y_i}^2)$, son la suma al cuadrado de los residuos en X e Y para cada uno de los “ n ” puntos que han intervenido en el ajuste.
- l es el número de relaciones de observación (número de ecuaciones) que intervienen en el proceso de cálculo de los parámetros, es decir, $l = 2n$.
- m , es el número de relaciones de observación mínimas que se necesitan para resolver los parámetros, en esta transformación $m=4$.

Por tanto:

$$\sigma_{XY} = \pm \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (V_{X_i}^2 + V_{Y_i}^2)}{2n - 4}}$$

1.3. Transformación afín bidimensional

La transformación de coordenadas afín bidimensional, es sólo una pequeña modificación de la transformación de semejanza (2-D) vista anteriormente, a la cual se le incluyen diferentes factores de escala (dirección eje de abscisas y ordenadas) y falta de ortogonalidad entre sus ejes.

Esta transformación es usada comúnmente en fotogrametría para pasar coordenadas medidas del sistema comparador al sistema de marcas fiduciales.

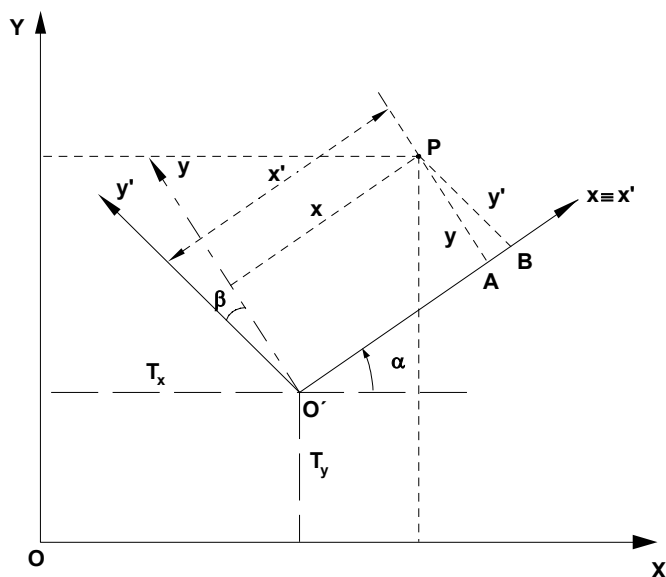


Fig. 5. Sistema arbitrario no ortogonal, girado, desplazado y con diferentes unidades de medida respecto al sistema de referencia.

Llamando:

- X, Y: sistema de coordenadas de referencia.
- x', y': sistemas arbitrario de coordenadas a transformar (no ortogonal).
- x, y: sistema arbitrario ortogonal.
- β : ángulo de falta de perpendicularidad entre los ejes (x', y').
- α : ángulo de rotación entre ambos sistemas.
- λ_x : factor de escala en dirección del eje x.
- λ_y : factor de escala en dirección del eje y.

De la figura 5 deducimos la relación entre los sistemas (x, y) (x', y')

$$\begin{aligned} \text{sen } \beta &= \frac{\overline{AB}}{\overline{PB}} \Rightarrow \overline{AB} = \overline{PB} \text{ sen } \beta \Rightarrow \overline{AB} = y' \text{ sen } \beta \\ \text{cos } \beta &= \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} \Rightarrow \overline{PA} = \overline{PB} \text{ cos } \beta \Rightarrow \overline{PA} = y' \text{ cos } \beta \end{aligned}$$

Las coordenadas vendrán dadas por las expresiones:

$$\begin{aligned} x &= x' - \overline{AB} = x' - y' \text{ sen } \beta \\ y &= y' \text{ cos } \beta \end{aligned}$$

Aplicando los correspondientes factores de escala:

$$\begin{aligned} x &= \lambda_x x' - \lambda_y y' \text{ sen } \beta \\ y &= \lambda_y y' \text{ cos } \beta \end{aligned} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\text{sen } \beta \\ 0 & \text{cos } \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_x x' \\ \lambda_y y' \end{bmatrix} \quad (1)$$

La relación entre el sistema de referencia y el sistema (x, y) será:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \end{bmatrix} \quad (2)$$

1.3.1. Expresión general

Sustituyendo la expresión (1) en la (2) obtendremos:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\sin \beta \\ 0 & \cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_x x' \\ \lambda_y y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \end{bmatrix}$$

Desarrollando la expresión anterior:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\cos \alpha \sin \beta - \sin \alpha \cos \beta \\ \sin \alpha & -\sin \alpha \sin \beta + \cos \alpha \cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_x x' \\ \lambda_y y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \end{bmatrix}$$

Las coordenadas de un punto P(x', y') vendrán dadas en el sistema arbitrario ortogonal por las expresiones:

$$\begin{aligned} X &= \lambda_x x' \cos \alpha - \lambda_y y' (\cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta) + T_x \\ Y &= \lambda_x x' \sin \alpha + \lambda_y y' (\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta) + T_y \end{aligned}$$

Expresando de forma reducida las anteriores ecuaciones tendremos:

$$\begin{aligned} X &= a x' - b y' + T_x \\ Y &= c x' + d y' + T_y \end{aligned} \Rightarrow \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \end{bmatrix}$$

Siendo a, b, c, d, Tx, Ty los seis parámetros de la transformación a determinar. Cada uno de los parámetros están dados por las expresiones:

$$\begin{aligned} a &= \lambda_x \cos \alpha \\ b &= \lambda_y (\cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta) = \lambda_y \sin(\alpha + \beta) \\ c &= \lambda_x \sin \alpha \\ d &= \lambda_y (\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta) = \lambda_y \cos(\alpha + \beta) \end{aligned}$$

1.3.2. Determinación de los parámetros

Al igual que en la transformación anterior, pueden determinarse los parámetros de dos maneras diferentes.

➤ *Primera solución:*

Partiendo de la expresión general:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \end{bmatrix}$$

donde las incógnitas a determinar son los seis parámetros representados por a, b, c, d, T_x, T_y .

Conocidas las coordenadas de tres puntos en ambos sistemas, pueden determinarse los seis parámetros incógnitas de la transformación afín. Normalmente al utilizarse esta transformación, para pasar del sistema comparador al de las marcas fiduciales, suelen medirse las coordenadas de al menos cuatro marcas fiduciales, proporcionando redundancia en la determinación de los parámetros.

Partiendo de conocer las coordenadas en ambos sistemas, de un número “ n ” de puntos de control, siendo ($n \geq 3$) tendremos que cada punto da lugar a dos ecuaciones; por lo tanto tendremos un sistema con $2n$ ecuaciones con seis incógnitas.

$$P_i (x'_i, y'_i) (X_i, Y_i) \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (n \geq 3)$$

x'_1	y'_1	X_1	Y_1
x'_2	y'_2	X_1	Y_1
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
x'_n	y'_n	X_n	Y_n
$\sum_{i=1}^n x'_i$	$\sum_{i=1}^n y'_i$	$\sum_{i=1}^n X_i$	$\sum_{i=1}^n Y_i$

Obtenemos las coordenadas del centro de gravedad de la figura 6:

$$x_G = \frac{\sum_{i=1}^n x'_i}{n} ; \quad y_G = \frac{\sum_{i=1}^n y'_i}{n} ; \quad X_G = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} ; \quad Y_G = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{n}$$

Resultando las coordenadas de los “ n ” puntos con origen en el centroide:

$x''_1 = x'_1 - x_G$	$y''_1 = y'_1 - y_G$	$X''_1 = X_1 - X_G$	$Y''_1 = Y_1 - Y_G$
$x''_2 = x'_2 - x_G$	$y''_2 = y'_2 - y_G$	$X''_2 = X_2 - X_G$	$Y''_2 = Y_2 - Y_G$
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
$x''_n = x'_n - x_G$	$y''_n = y'_n - y_G$	$X''_n = X_n - X_G$	$Y''_n = Y_n - Y_G$
$\sum_{i=1}^n x''_i = 0$	$\sum_{i=1}^n y''_i = 0$	$\sum_{i=1}^n X''_i = 0$	$\sum_{i=1}^n Y''_i = 0$

Representando los sistemas de coordenadas con orígenes comunes en el centroide de referencia, se tendrá:

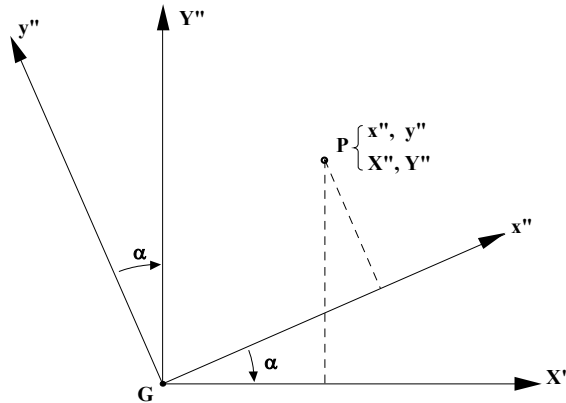


Fig. 6. Sistema arbitrario y de referencia con origen común en el centroide.

Para un número de puntos "n" ($n \geq 3$) se formarán las siguientes ecuaciones:

$$\begin{array}{ll}
 X''_1 = a x''_1 - b y''_1 & Y''_1 = c x''_1 + d y''_1 \\
 X''_2 = a x''_2 - b y''_2 & Y''_2 = c x''_2 + d y''_2 \\
 X''_3 = a x''_3 - b y''_3 & Y''_3 = c x''_3 + d y''_3 \\
 \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot \\
 X''_n = a x''_n - b y''_n & Y''_n = c x''_n + d y''_n
 \end{array}$$

Una vez determinados los parámetros a b c d (factores de escala y giros) podremos deducir los valores de T_x y T_y .

Partiendo de la expresión general:

$$\begin{aligned}
 X &= a x' - b y' + T_x \\
 Y &= c x' + d y' + T_y
 \end{aligned}$$

Para un número "n" de puntos, siendo $n \geq 2$ las traslaciones se obtienen sin ninguna complicación, despejándolas de la expresión general.

$$T_x = \frac{\sum_{i=1}^n X_i - a \sum_{i=1}^n x'_i + b \sum_{i=1}^n y'_i}{n} \qquad T_y = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i - c \sum_{i=1}^n x'_i - d \sum_{i=1}^n y'_i}{n}$$

➤ Segunda solución:

Datos de partida: $P_i (x'_i, y'_i) (X_i, Y_i) \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (n \geq 3)$

Partiendo de la fórmula general, las ecuaciones de observación para “n” puntos serán

$$\begin{array}{ll}
 P_1 \Rightarrow X_1 = a x'_1 - b y'_1 + T_x & Y_1 = c x'_1 + d y'_1 + T_y \\
 P_2 \Rightarrow X_2 = a x'_2 - b y'_2 + T_x & Y_2 = c x'_2 + d y'_2 + T_y \\
 \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot \\
 P_n \Rightarrow X_n = a x'_n - b y'_n + T_x & Y_n = c x'_n + d y'_n + T_y
 \end{array}$$

Expresando el sistema de ecuaciones anterior en forma matricial:

$$\begin{bmatrix}
 x'_1 & -y'_1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & x'_1 & y'_1 & 0 & 1 \\
 x'_2 & -y'_2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & x'_2 & y'_2 & 0 & 1 \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 x'_n & y'_n & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & x'_n & y'_n & 0 & 1
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 a \\
 b \\
 c \\
 d \\
 T_x \\
 T_y
 \end{bmatrix}
 -
 \begin{bmatrix}
 X_1 \\
 Y_1 \\
 X_2 \\
 Y_2 \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 X_n \\
 Y_n
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 V_{X1} \\
 V_{Y1} \\
 V_{X2} \\
 V_{Y2} \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 V_{Xn} \\
 V_{Yn}
 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix}
 [A] & [X] & - & [L] & = & [V] \\
 (2n,6) & (4,1) & & (2n,1) & & (2n,1)
 \end{matrix}$$

donde las incógnitas las obtendremos a partir de la resolución del sistema utilizando la metodología de mínimos cuadrados:

$$[X] = ([A]^T [A])^{-1} [A]^T [L]$$

1.3.3. Caso particular

Si los sistemas (x', y') (x, y) fuesen ortogonales, la expresión general quedará:

$$\begin{array}{l}
 X = a x' - b y' + T_x \\
 Y = c x' + d y' + T_y
 \end{array}$$

Siendo los parámetros de transformación:

$$\begin{array}{ll}
 a = \lambda_x \cos \alpha & c = \lambda_x \sin \alpha \\
 b = \lambda_y \sin \alpha & d = \lambda_y \cos \alpha
 \end{array}$$

Resultando la expresión general:

$$\begin{array}{l}
 X = \lambda_x x' \cos \alpha - \lambda_y y' \sin \alpha + T_x \\
 Y = \lambda_x x' \sin \alpha + \lambda_y y' \cos \alpha + T_y
 \end{array}$$

1.3.4. Precisión de la transformación

Como en la transformación anterior, una vez determinados los parámetros de la transformación pueden obtenerse sin ningún tipo de dificultad los residuos en X e Y de cada uno de los puntos que han intervenido en el cálculo de la transformación y proceder a determinar el error medio cuadrático. En este caso resulta el siguiente valor:

$$\sigma_{XY} = \pm \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (V_{X_i}^2 + V_{Y_i}^2)}{1 - m}} = \pm \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (V_{X_i}^2 + V_{Y_i}^2)}{2n - 6}}$$

1.4. Transformación proyectiva bidimensional

Las ecuaciones de la transformación bidimensional proyectiva posibilitan el cálculo analítico de coordenadas de puntos del sistema de referencia sobre un plano (X, Y) a partir de las coordenadas de sus puntos homólogos en el sistema arbitrario (x', y'), pertenecientes a otro plano inclinado (fotograma, imagen digital). En la figura 7 se ilustra la situación mencionada.

En estas ecuaciones se supone que la coordenada "Z" del sistema de referencia es conocida al estar situados los puntos sobre un mismo plano. En el caso de considerar puntos que no estén contenidos en dicho plano, los valores de las coordenadas planimétricas (X, Y) que se obtengan, tendrán un error proporcional al error de la "Z" considerada. En la práctica, estas ecuaciones suelen emplearse en aquellos casos en los que se suponen pequeñas variaciones de relieve y altura de vuelo constante sobre el terreno. Habitualmente estas ecuaciones se utilizan para la rectificación de fotogramas aislados.

Los sistemas de coordenadas utilizados en la figura 7 son respectivamente:

- (X, Y, Z) sistema de referencia (sistema terreno).
- (x', y', z') sistema arbitrario (sistema imagen), con ejes inclinados respecto al sistema de referencia (pe. fotograma, imagen digital)
- (x̄', ȳ', z̄') sistema arbitrario (sistema imagen ideal), con ejes paralelos al sistema de referencia.

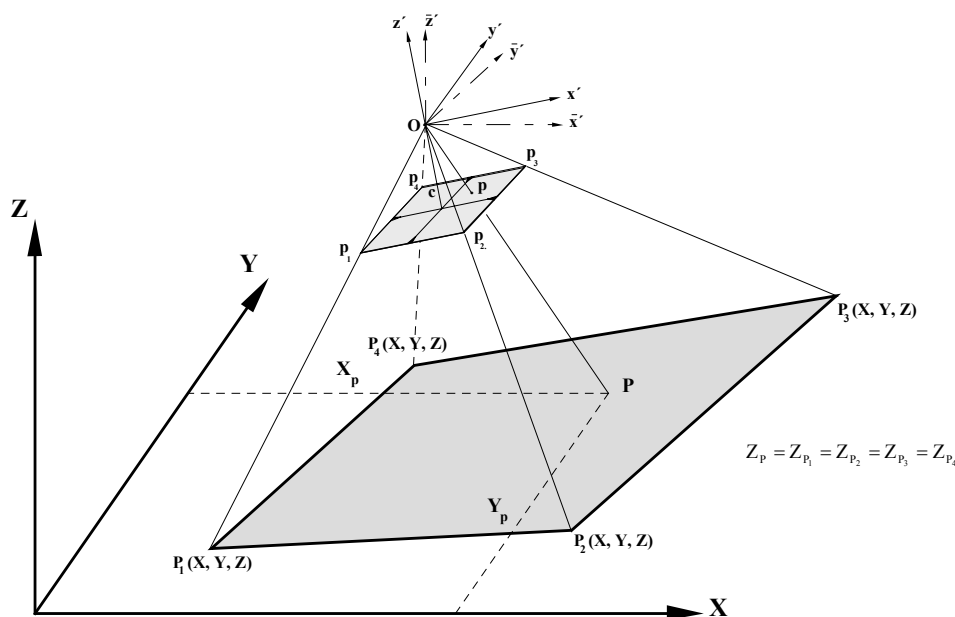


Fig. 7. Reconstrucción de una toma fotográfica.

Considerando el caso de un fotograma inclinado, su orientación angular quedará perfectamente definido por tres ángulos (ω , φ , κ).

Si al sistema de coordenadas imagen (sistema ideal) $(\bar{x}', \bar{y}', \bar{z}')$ se le imprimen las tres rotaciones (ω , φ , κ), el sistema pasará a ser el sistema arbitrario (sistema imagen) (x', y', c) , figura 8.

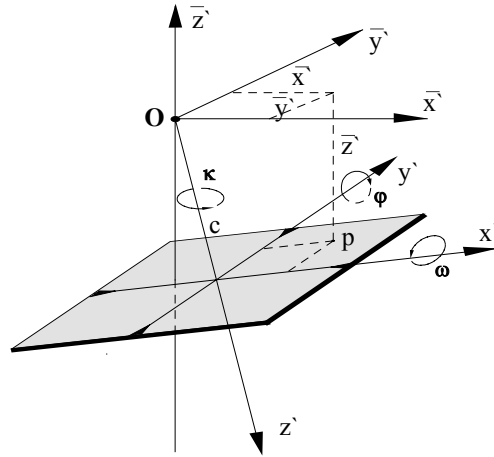


Figura 8. Sistemas de coordenadas sobre la imagen.

La transformación por rotación en el plano imagen será:

$$\begin{aligned} x &= a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}c \\ y &= a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}c \\ z &= a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}c \end{aligned}$$

Quedando la expresión anterior en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ c \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ c \end{bmatrix}$$

donde R es la matriz de rotación (ω , φ , κ), siendo los valores de cada uno de los coeficientes:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \cos \varphi \cos \kappa \\ a_{12} &= -\cos \varphi \sin \kappa \\ a_{13} &= \sin \varphi \\ a_{21} &= \cos \omega \sin \kappa + \sin \omega \sin \varphi \cos \kappa \\ a_{22} &= \cos \omega \cos \kappa - \sin \omega \sin \varphi \sin \kappa \\ a_{23} &= -\sin \omega \cos \varphi \\ a_{31} &= \sin \omega \sin \kappa - \cos \omega \sin \varphi \cos \kappa \\ a_{32} &= \sin \omega \cos \kappa + \cos \omega \sin \varphi \sin \kappa \\ a_{33} &= \cos \omega \cos \varphi \end{aligned}$$

Considerando el sistema fotográfico paralelo al sistema de referencia (Fig. 9).

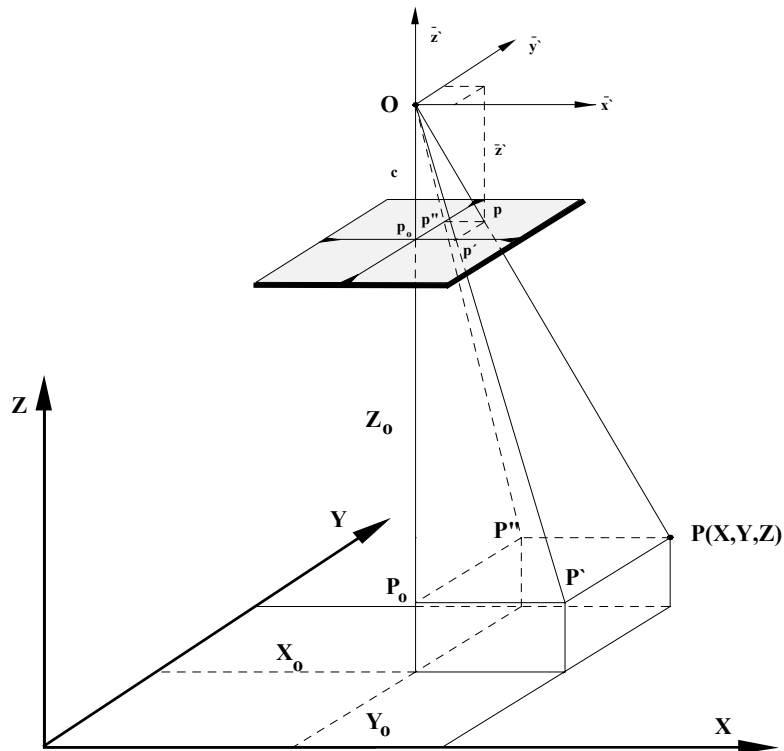


Figura 9. Toma fotográfica ideal (imagen paralela al sistema terreno).

Por semejanza podremos deducir de la anterior figura 9 que:

$$\lambda = \frac{\overline{P'P''}}{\overline{p'p''}} = \frac{\overline{PP'}}{\overline{pp'}} = \frac{\overline{OP''}}{\overline{Op''}}$$

Sustituyendo cada uno de los segmentos por las correspondientes coordenadas, llegaremos:

$$\lambda = \frac{X - X_0}{x} = \frac{Y - Y_0}{y} = \frac{Z - Z_0}{z}$$

Expresando en forma matricial las ecuaciones anteriores tendremos:

$$\begin{bmatrix} X - X_0 \\ Y - Y_0 \\ Z - Z_0 \end{bmatrix} = \lambda R \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ c \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ c \end{bmatrix}$$

Separando las tres ecuaciones de la expresión anterior:

$$\begin{aligned} X &= X_0 + \lambda(a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}c) \\ Y &= Y_0 + \lambda(a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}c) \\ Z &= Z_0 + \lambda(a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}c) \end{aligned}$$

y dividiendo las dos primeras expresiones por la tercera tendremos:

$$X = X_0 + (Z - Z_0) \frac{a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}c}{a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}c}$$

$$Y = Y_0 + (Z - Z_0) \frac{a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}c}{a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}c}$$

1.4.1. Expresión general

Despejando $a_{33}c$ del denominador en las dos ecuaciones obtendremos:

$$X = X_0 + (Z - Z_0) \frac{a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}c}{a_{33}c \left(\frac{a_{31}}{a_{33}c} x' + \frac{a_{32}}{a_{33}c} y' + 1 \right)}$$

$$Y = Y_0 + (Z - Z_0) \frac{a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}c}{a_{33}c \left(\frac{a_{31}}{a_{33}c} x' + \frac{a_{32}}{a_{33}c} y' + 1 \right)}$$

Como $c, X_0, Y_0, Z_0, \omega, \varphi, \kappa$ son constante y el terreno lo consideramos llano, todos los puntos tendrán igual Z , pudiendo escribir las ecuaciones de la forma siguiente:

$$X = \frac{a_1 x' + b_1 y' + c_1}{a_3 x' + b_3 y' + 1}$$

$$Y = \frac{a_2 x' + b_2 y' + c_2}{a_3 x' + b_3 y' + 1}$$

Conocidas las coordenadas de un número de puntos $n \geq 4$ en ambos sistemas (x', y') (X, Y) , pueden calcularse los ocho parámetros de transformación $(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2)$.

Una vez calculados estos parámetros se pueden obtener las coordenadas sobre el sistema de referencia de los puntos correspondientes que se midan sobre el sistema fotográfico. Este proceso es conocido como “*Rectificación analítica o numérica*”.

1.4.2. Determinación de los parámetros

Datos de partida: $P_i (x'_i, y'_i) (X_i, Y_i) \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (n \geq 4)$

Para cada uno de los “ n ” puntos se pueden formar los siguientes juego de ecuaciones:

Pto 1:

$$X_1 = a_1 x'_1 + b_1 y'_1 - a_3 x'_1 X_1 - b_3 y'_1 X_1 + c_1$$

$$Y_1 = a_2 x'_1 + b_2 y'_1 - a_3 x'_1 Y_1 - b_3 y'_1 Y_1 + c_2$$

Pto 2:

$$X_2 = a_1 x'_2 + b_1 y'_2 - a_3 x'_2 X_2 - b_3 y'_2 X_2 + c_1$$

$$Y_2 = a_2 x'_2 + b_2 y'_2 - a_3 x'_2 Y_2 - b_3 y'_2 Y_2 + c_2$$

$$\begin{matrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{matrix}$$

Pto n:

$$X_n = a_1 x'_n + b_1 y'_n - a_3 x'_n X_n - b_3 y'_n X_n + c_1$$

$$Y_n = a_2 x'_n + b_2 y'_n - a_3 x'_n Y_n - b_3 y'_n Y_n + c_2$$

Expresando el sistema de ecuaciones en forma matricial, se procederá a resolver aplicando la metodología de mínimos cuadrados.

$$\begin{bmatrix} x'_1 & 0 & -x'_1 X_1 & y'_1 & 0 & -y'_1 X_1 & 1 & 0 \\ 0 & x'_1 & -x'_1 Y_1 & 0 & y'_1 & -y'_1 Y_1 & 0 & 1 \\ x'_2 & 0 & -x'_2 X_2 & y'_2 & 0 & -y'_2 X_2 & 1 & 0 \\ 0 & x'_2 & -x'_2 Y_2 & 0 & y'_2 & -y'_2 Y_2 & 0 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x'_n & 0 & -x'_n X_n & y'_n & 0 & -y'_n X_n & 1 & 0 \\ 0 & x'_n & -x'_n Y_n & 0 & y'_n & -y'_n Y_n & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ X_2 \\ Y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ X_n \\ Y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{X_1} \\ V_{Y_1} \\ V_{X_2} \\ V_{Y_2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ V_{X_n} \\ V_{Y_n} \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} [A] & [X] - [L] = [V] \\ (2n,8) & (8,1) \quad (2n,1) \quad (2n,1) \end{matrix}$$

1.4.3. Precisión de la transformación

Para esta transformación el error medio vendrá dada por:

$$\sigma_{XY} = \pm \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (V_{X_i}^2 + V_{Y_i}^2)}{2n - 8}}$$

Bibliografía

- American Society of Photogrammetry. Manual of Photogrammetry, ASPRS, 4ª edición (1980), ISBN 0-937294-01-2.
- Burnside, C.D., Mapping from Aerial Photographs, Mackays of Chatham, Kent, Londres(Inglaterra), 2ª edición (1985), ISBN 0-00-383036-5.
- Chueca, M., Topografía (Tomo II), Dossat, Madrid (1982), ISBN 84-237-0591-9.
- Domingo, L., Las Transformaciones de semejanza en fotogrametría, Universidad Politécnica de Madrid (E.U.I.T.T.), Diciembre 1982.
- Krauss, K., Photogrammetry, Dümmler/Bonn (1993), ISBN 3-427-78684-6.

- Lerma, J.L., Problemas de Fotogrametría II, Servicio de publicaciones de la Universidad Politécnica de Valencia (1999), ISBN 84-7721-846-3.
- Lerma, J.L., Problemas de Fotogrametría III, Servicio de publicaciones de la Universidad Politécnica de Valencia (1999), ISBN 84-7721-805-6.
- Wolf, P.R. y Dewitt, B.A., Elements of Photogrammetry with Applications in GIS, McGraw-Hill, EEUU, 3ª edición (2000), ISBN 0-07-292454-3.
- Zhizhuo, W., Principles of Photogrammetry, Beijing, China (1990), ISBN 7-81030-00-8.

TEMA 2

TRANSFORMACIONES TRIDIMENSIONALES

2.1. Introducción

2.2. Transformación tridimensional de semejanza

2.2.1. Rotaciones (matriz de Euler)

2.2.1.1. Primera rotación

2.2.1.2. Segunda rotación

2.2.1.3. Tercera rotación

2.2.2. Traslación y cambio de escala

2.2.3. Expresión general

2.3. Linealización de la expresión general

2.4. Determinación de los parámetros

2.5. Expresión general para valores pequeños de los ángulos

2.6. Alternativas a la matriz de rotación

2.6.1. Matriz de Cayley

2.6.2. Matriz de Olinde Rodrigues

2.6.3. Matriz de Thomson

2.6.4. Matriz de Shut

2.7. Precisión de la transformación tridimensional de semejanza

2.8. Transformación tridimensional afín

2.9. Transformación tridimensional polinómica

Bibliografía

2.1. Introducción

Como ya se comentó en el tema anterior, se van a estudiar en este capítulo las transformaciones de coordenadas tridimensionales siguientes:

- De Semejanza o conforme.
- Afín.
- Polinómica.

Como su nombre indica, una transformación conforme tridimensional de coordenadas comprende la conversión de un sistema tridimensional a otro. Este tipo de transformación de coordenadas es muy usada en fotogrametría analítica, para solucionar varios problemas básicos:

- Conversión de coordenadas imagen tridimensional medidas sobre fotogramas inclinados a un sistema fotográfico vertical equivalente, el cual es paralelo al sistema de coordenadas terreno (absoluto o relativo).
- Conexión de modelos tridimensionales adyacentes, cada uno de ellos con su propio sistema de coordenadas independiente, para obtener finalmente un bloque de modelos referidos a un sistema de coordenadas común.
- Transformación de un modelo tridimensional (o bloque de modelos) en su propio sistema de coordenadas independiente al sistema terreno o algún otro sistema objeto.

2.2. Transformación tridimensional de semejanza

Una transformación tridimensional de semejanza es aquella que no varía la verdadera forma del objeto después de realizar la transformación.

Partiendo de los sistemas de la figura 1, se quiere transformar las coordenadas de puntos del sistema (x, y, z) al sistema (X, Y, Z). Como puede observarse en esta figura, los dos sistemas de coordenadas no son paralelos necesitando la transformación, el uso de siete parámetros de transformación independientes:

- tres rotaciones (Ω, Φ, K)
- un factor de escala (λ)
- tres traslaciones (T_x, T_y, T_z)

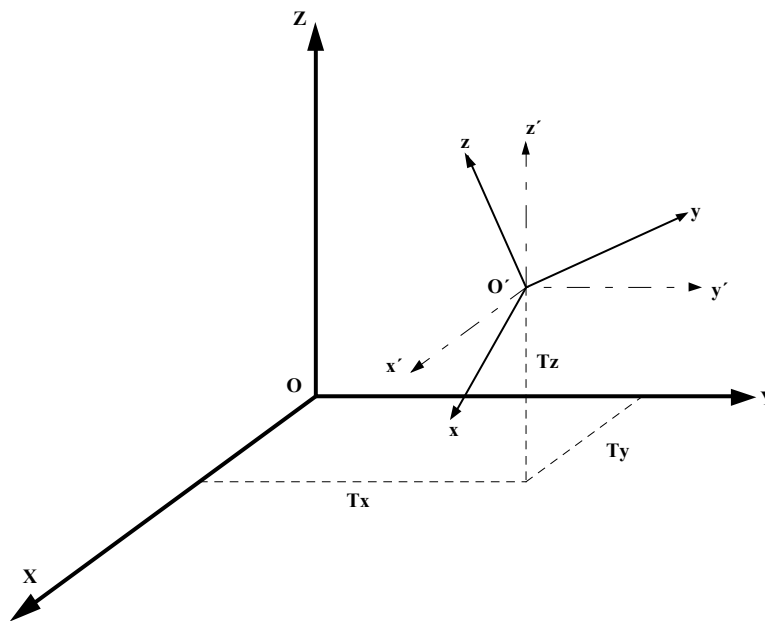


Figura 1. Sistema tridimensional de referencia y arbitrario.

2.2.1. Rotaciones (matriz de Euler)

En la figura 1, un sistema de coordenadas (x', y', z') paralelo al sistema objeto (X, Y, Z) es construido en O' origen del sistema (x, y, z) . En la deducción de las fórmulas de rotación, se convendrá en realizar las tres rotaciones, para convertir el sistema (x', y', z') en el sistema (x, y, z) .

Las ecuaciones de rotación serán deducidas según una secuencia de tres rotaciones independientes de dos dimensiones, ya que cada giro producirá variaciones en las coordenadas (x', y', z') de un punto cualquiera, teniendo en cuenta que la coordenada que se mide en el eje entorno al cual se efectúe el giro, no variará con este. Estas rotaciones, ilustradas en la figura son:

- *Primera rotación (Ω):* rotación alrededor del eje x' , la cual convierte las coordenadas (x', y', z') en $(x_\Omega, y_\Omega, z_\Omega)$.
- *Segunda rotación (Φ):* rotación alrededor del eje y_Ω , la cual convierte las coordenadas $(x_\Omega, y_\Omega, z_\Omega)$ en (x_Φ, y_Φ, z_Φ) .
- *Tercera rotación (K):* rotación alrededor del eje z_Φ , la cual convierte las coordenadas (x_Φ, y_Φ, z_Φ) en $(x_K, y_K, z_K) \equiv (x, y, z)$.

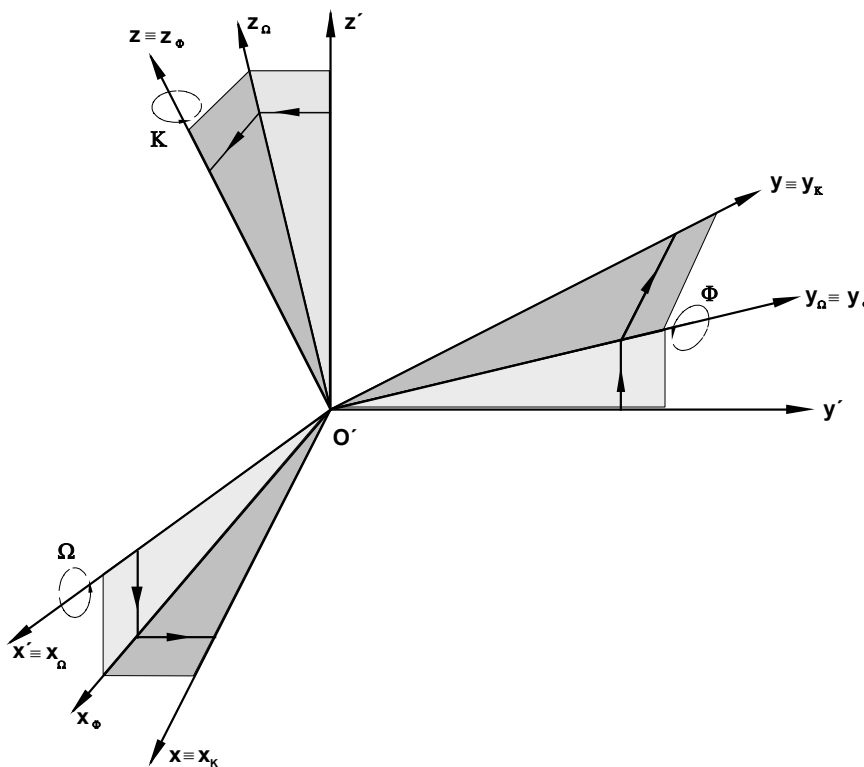


Fig. 2. Definición de las rotaciones sobre cada uno de los ejes del sistema tridimensional.

Se convendrá en definir una rotación positiva en el sentido de las agujas del reloj cuando se observa desde el origen a la dirección positiva del eje entorno al cual se realiza el giro.

2.2.1.1. Primera rotación (Ω)

Efectuando sobre el sistema de coordenadas tridimensional (x', y, z') el giro Ω , el nuevo sistema (Fig. 3) pasará ser ($x_\Omega, y_\Omega, z_\Omega$).

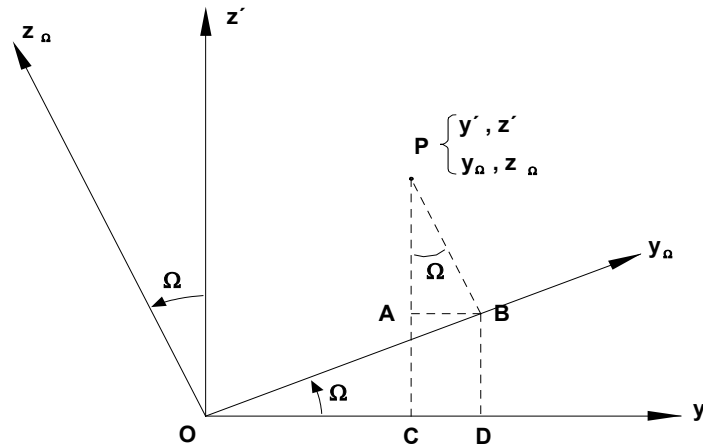


Figura 3. Giro alrededor del eje de las abscisas (Ω).

De la figura anterior se deducen las expresiones siguientes:

$$\begin{aligned} \overline{OA} &= \overline{OC} - \overline{AC} = \overline{OC} - \overline{DB} & \overline{AP} &= \overline{PD} + \overline{DA} = \overline{PD} + \overline{BC} \\ \overline{OA} &= \overline{OB} \cos \Omega - \overline{PB} \sin \Omega & \overline{AP} &= \overline{PB} \cos \Omega + \overline{OB} \sin \Omega \\ y' &= y_\Omega \cos \Omega - z_\Omega \sin \Omega & z' &= z_\Omega \cos \Omega + y_\Omega \sin \Omega \end{aligned}$$

expresando estas en forma matricial se llega a:

$$\begin{bmatrix} y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \Omega & -\sin \Omega \\ \sin \Omega & \cos \Omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_\Omega \\ z_\Omega \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} y' \\ z' \end{bmatrix} = [A] \begin{bmatrix} y_\Omega \\ z_\Omega \end{bmatrix}$$

Despejando de la expresión anterior:

$$\begin{bmatrix} y_\Omega \\ z_\Omega \end{bmatrix} = [A]^{-1} \begin{bmatrix} y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \Omega & \sin \Omega \\ -\sin \Omega & \cos \Omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y' \\ z' \end{bmatrix}$$

Las coordenadas del nuevo sistema de coordenadas una vez realizado el giro Ω son:

$$\begin{aligned} x_\Omega &= x' \\ y_\Omega &= y' \cos \Omega + z' \sin \Omega \\ z_\Omega &= -y' \sin \Omega + z' \cos \Omega \end{aligned}$$

Expresado estas en forma matricial, tendremos:

$$\begin{bmatrix} x_\Omega \\ y_\Omega \\ z_\Omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \Omega & \sin \Omega \\ 0 & -\sin \Omega & \cos \Omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$$

Otra forma de resolver el giro Ω es a partir de la figura 4.

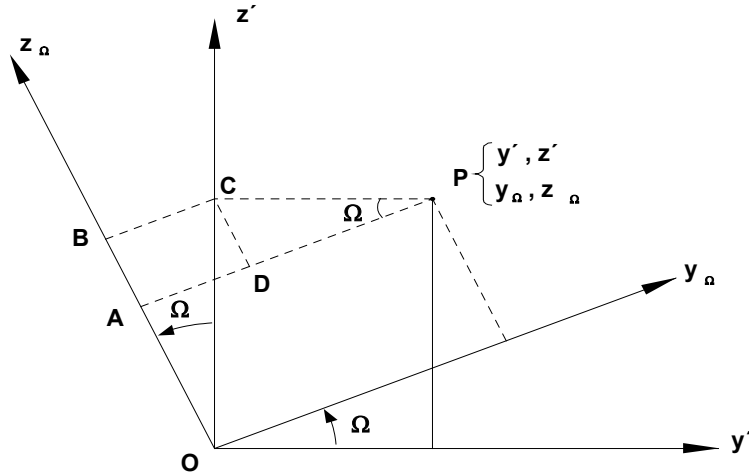


Figura 4. Giro alrededor del eje de las abscisas (Ω).

De la figura 4 se deduce:

$$\begin{aligned} \overline{PA} &= \overline{AD} + \overline{DP} = \overline{BC} + \overline{DP} & \overline{OA} &= \overline{OB} - \overline{AB} = \overline{OB} - \overline{CD} \\ \overline{PA} &= \overline{OC} \operatorname{sen}\Omega + \overline{CP} \operatorname{cos}\Omega & \overline{OA} &= \overline{OC} \operatorname{cos}\Omega - \overline{CP} \operatorname{sen}\Omega \\ y_{\Omega} &= z' \operatorname{sen}\Omega + y' \operatorname{cos}\Omega & z_{\Omega} &= z' \operatorname{cos}\Omega - y' \operatorname{sen}\Omega \end{aligned}$$

Obteniéndose idénticas expresiones para las nuevas coordenadas de un punto.

$$\begin{aligned} x_{\Omega} &= x' \\ y_{\Omega} &= y' \operatorname{cos}\Omega + z' \operatorname{sen}\Omega \\ z_{\Omega} &= -y' \operatorname{sen}\Omega + z' \operatorname{cos}\Omega \end{aligned}$$

2.2.1.2. Segunda rotación (Φ)

Si giramos el sistema $(x_{\Omega}, y_{\Omega}, z_{\Omega})$ la cantidad Φ , este pasará (Fig. 5) a ser el nuevo sistema de coordenadas tridimensional $(x_{\Phi}, y_{\Phi}, z_{\Phi})$.

De la figura 5 se deducen las expresiones:

$$\begin{aligned} \overline{OD} &= \overline{OB} - \overline{DB} = \overline{OB} - \overline{AC} & \overline{PD} &= \overline{PA} + \overline{AD} = \overline{PA} + \overline{CB} \\ \overline{OD} &= \overline{OC} \operatorname{cos}\Phi - \overline{PC} \operatorname{sen}\Phi & \overline{PD} &= \overline{PC} \operatorname{cos}\Phi + \overline{OC} \operatorname{sen}\Phi \\ x_{\Phi} &= x_{\Omega} \operatorname{cos}\Phi - z_{\Omega} \operatorname{sen}\Phi & z_{\Phi} &= z_{\Omega} \operatorname{cos}\Phi + x_{\Omega} \operatorname{sen}\Phi \end{aligned}$$

Las nuevas coordenadas del punto P que se obtienen una vez efectuado el giro son:

$$\begin{aligned} x_{\Phi} &= x_{\Omega} \operatorname{cos}\Phi - z_{\Omega} \operatorname{sen}\Phi \\ y_{\Phi} &= y_{\Omega} \\ z_{\Phi} &= z_{\Omega} \operatorname{cos}\Phi + x_{\Omega} \operatorname{sen}\Phi \end{aligned}$$

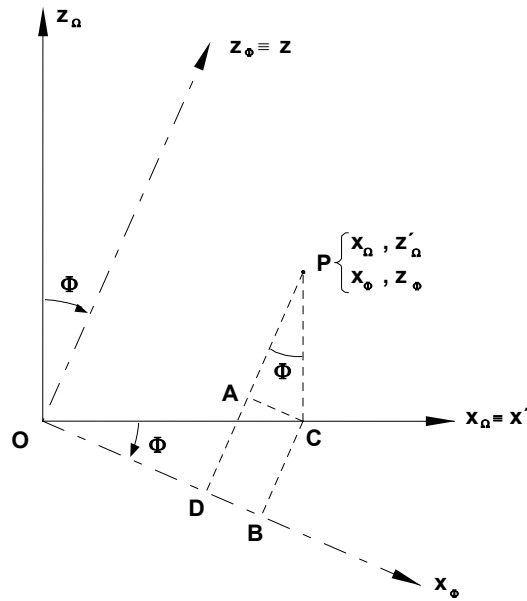


Figura 5. Giro alrededor del eje de las ordenadas (Φ).

Expresado en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} x_\phi \\ y_\phi \\ z_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \Phi & 0 & -\text{sen } \Phi \\ 0 & 1 & 0 \\ \text{sen } \Phi & 0 & \cos \Phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_\Omega \\ y_\Omega \\ z_\Omega \end{bmatrix}$$

2.2.1.3. Tercera rotación (K)

Esta última rotación alrededor del eje z_ϕ convertirá las coordenadas (x_ϕ, y_ϕ, z_ϕ) en (x_K, y_K, z_K) que a su vez coincidirán con las del sistema (x, y, z) .

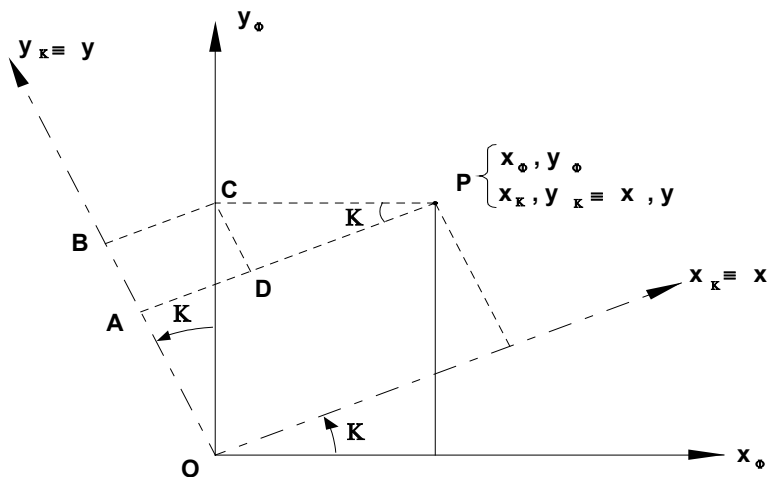


Figura 6. Giro alrededor del eje de las alturas (K).

De la figura 6 se deducen las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} \overline{PA} &= \overline{AD} + \overline{DP} = \overline{BC} + \overline{DP} & \overline{OA} &= \overline{OB} - \overline{AB} = \overline{OB} - \overline{CD} \\ \overline{PA} &= \overline{OC} \operatorname{sen} K + \overline{CP} \operatorname{cos} K & \overline{OA} &= \overline{OC} \operatorname{cos} K - \overline{CP} \operatorname{sen} K \\ y_K &= y_\phi \operatorname{sen} K + x_\phi \operatorname{cos} K & z_K &= y_\phi \operatorname{cos} K - x_\phi \operatorname{sen} K \end{aligned}$$

En el nuevo sistema girado el punto P tiene las siguientes coordenadas:

$$\begin{aligned} x_K &\equiv X = x_\phi \operatorname{cos} K + y_\phi \operatorname{sen} K \\ y_K &\equiv Y = -x_\phi \operatorname{sen} K + y_\phi \operatorname{cos} K \\ z_K &\equiv Z = z_\phi \end{aligned}$$

Expresando esta en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} x_K \\ y_K \\ z_K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \operatorname{cos} K & \operatorname{sen} K & 0 \\ -\operatorname{sen} K & \operatorname{cos} K & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_\phi \\ y_\phi \\ z_\phi \end{bmatrix}$$

Sustituyendo cada una de las rotaciones obtenidas anteriormente llegamos a:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \operatorname{cos} K & \operatorname{sen} K & 0 \\ -\operatorname{sen} K & \operatorname{cos} K & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \operatorname{cos} \Phi & 0 & -\operatorname{sen} \Phi \\ 0 & 1 & 0 \\ \operatorname{sen} \Phi & 0 & \operatorname{cos} \Phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_\Omega \\ y_\Omega \\ z_\Omega \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \operatorname{cos} K & \operatorname{sen} K & 0 \\ -\operatorname{sen} K & \operatorname{cos} K & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \operatorname{cos} \Phi & 0 & -\operatorname{sen} \Phi \\ 0 & 1 & 0 \\ \operatorname{sen} \Phi & 0 & \operatorname{cos} \Phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \operatorname{cos} \Omega & \operatorname{sen} \Omega \\ 0 & -\operatorname{sen} \Omega & \operatorname{cos} \Omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$$

Llamando R_K , R_Φ , R_Ω a las matrices de rotación de los giros K , Φ , Ω .

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = R_K R_\Phi R_\Omega \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} \quad \text{siendo } R = R_K R_\Phi R_\Omega$$

Desarrollando el producto de las tres matrices de rotación tendremos:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \operatorname{cos} \Phi \operatorname{cos} K & \operatorname{cos} \Omega \operatorname{sen} K + \operatorname{sen} \Omega \operatorname{sen} \Phi \operatorname{cos} K & \operatorname{sen} \Omega \operatorname{sen} K - \operatorname{cos} \Omega \operatorname{sen} \Phi \operatorname{cos} K \\ -\operatorname{cos} \Phi \operatorname{sen} K & \operatorname{cos} \Omega \operatorname{cos} K - \operatorname{sen} \Omega \operatorname{sen} \Phi \operatorname{sen} K & \operatorname{sen} \Omega \operatorname{cos} K + \operatorname{cos} \Omega \operatorname{sen} \Phi \operatorname{sen} K \\ \operatorname{sen} \Phi & -\operatorname{sen} \Omega \operatorname{cos} \Phi & \operatorname{cos} \Omega \operatorname{cos} \Phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$$

La matriz de rotación R es una matriz ortogonal (ya que está formada por tres matrices ortogonales), por tanto la matriz inversa igual a la traspuesta.

$$\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$$

Usando esta propiedad podremos escribir la expresión de coordenadas (x', y', z') en términos de coordenadas (x, y, z) , llegando a:

$$\mathbf{X}' = \mathbf{R}^T \mathbf{X}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \mathbf{R}^T \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

donde:

$$\begin{array}{lll} a_{11} = \cos \Phi \cos K & a_{12} = -\cos \Phi \sin K & a_{13} = \sin \Phi \\ a_{21} = \cos \Omega \sin K + \sin \Omega \sin \Phi \cos K & a_{22} = \cos \Omega \cos K - \sin \Omega \sin \Phi \sin K & a_{23} = -\sin \Omega \cos \Phi \\ a_{31} = \sin \Omega \sin K - \cos \Omega \sin \Phi \cos K & a_{32} = \sin \Omega \cos K + \cos \Omega \sin \Phi \sin K & a_{33} = \cos \Omega \cos \Phi \end{array}$$

2.2.2. Traslación y factor de escala

Considerando el sistema (x', y', z') desplazado la magnitud (T_x, T_y, T_z) con respecto al sistema (X, Y, Z) y diferente unidad de medida entre ambos sistemas (referencia y arbitrario), podremos llegar a obtener la forma:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{bmatrix}$$

2.2.3. Expresión general

Considerando el caso más general, ejes girados, trasladados y con diferentes unidades de medida, la expresión final resultante sería:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{bmatrix}$$

Los elementos de la matriz de rotación $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{33}$ no son lineales, es decir, vienen expresados en función del seno y coseno de los ángulos de rotación. Podríamos expresar los cosenos en función de los senos respectivos y considerar estos últimos como incógnitas, pero estaríamos ante un sistema muy complicado.

2.3. Linealización de la expresión general

Partiendo de la expresión general anteriormente deducida:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{bmatrix}$$

donde los coeficientes de la matriz de rotación vienen dados por los valores:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \cos \Phi \cos K & a_{12} &= -\cos \Phi \sin K & a_{13} &= \sin \Phi \\ a_{21} &= \cos \Omega \sin K + \sin \Omega \sin \Phi \cos K & a_{22} &= \cos \Omega \cos K - \sin \Omega \sin \Phi \sin K & a_{23} &= -\sin \Omega \cos \Phi \\ a_{31} &= \sin \Omega \sin K - \cos \Omega \sin \Phi \cos K & a_{32} &= \sin \Omega \cos K + \cos \Omega \sin \Phi \sin K & a_{33} &= \cos \Omega \cos \Phi \end{aligned}$$

Linealizando las ecuaciones para un punto P mediante el desarrollo en serie de Taylor hasta el primer término:

$$X_p = (X_p)_0 + \left(\frac{\partial X_p}{\partial \lambda}\right)_0 d\lambda + \left(\frac{\partial X_p}{\partial \Omega}\right)_0 d\Omega + \left(\frac{\partial X_p}{\partial \Phi}\right)_0 d\Phi + \left(\frac{\partial X_p}{\partial K}\right)_0 dK + \left(\frac{\partial X_p}{\partial T_x}\right)_0 dT_x + \left(\frac{\partial X_p}{\partial T_y}\right)_0 dT_y + \left(\frac{\partial X_p}{\partial T_z}\right)_0 dT_z$$

$$Y_p = (Y_p)_0 + \left(\frac{\partial Y_p}{\partial \lambda}\right)_0 d\lambda + \left(\frac{\partial Y_p}{\partial \Omega}\right)_0 d\Omega + \left(\frac{\partial Y_p}{\partial \Phi}\right)_0 d\Phi + \left(\frac{\partial Y_p}{\partial K}\right)_0 dK + \left(\frac{\partial Y_p}{\partial T_x}\right)_0 dT_x + \left(\frac{\partial Y_p}{\partial T_y}\right)_0 dT_y + \left(\frac{\partial Y_p}{\partial T_z}\right)_0 dT_z$$

$$Z_p = (Z_p)_0 + \left(\frac{\partial Z_p}{\partial \lambda}\right)_0 d\lambda + \left(\frac{\partial Z_p}{\partial \Omega}\right)_0 d\Omega + \left(\frac{\partial Z_p}{\partial \Phi}\right)_0 d\Phi + \left(\frac{\partial Z_p}{\partial K}\right)_0 dK + \left(\frac{\partial Z_p}{\partial T_x}\right)_0 dT_x + \left(\frac{\partial Z_p}{\partial T_y}\right)_0 dT_y + \left(\frac{\partial Z_p}{\partial T_z}\right)_0 dT_z$$

donde:

- $(X_p)_0, (Y_p)_0, (Z_p)_0$ son los valores obtenidos en la expresión general para los valores aproximados de los parámetros (p.e., $\Omega=0, \Phi=0, K=0$).
- $\left(\frac{\partial X_p}{\partial \lambda}\right)_0, \left(\frac{\partial X_p}{\partial \Omega}\right)_0, \dots, \left(\frac{\partial Z_p}{\partial T_z}\right)_0$ son las derivadas parciales de la función con respecto a los parámetros desconocidos, evaluados para la aproximación estimada.

Los valores de las derivadas parciales son respectivamente:

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial \lambda} &= x a_{11} + y a_{12} + z a_{13} = r_{11} \\ \frac{\partial X}{\partial \Omega} &= 0 = r_{12} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial X}{\partial \lambda} = x a_{11} + y a_{12} + z a_{13} = r_{11}$$

$$\frac{\partial X}{\partial \Omega} = 0 = r_{12}$$

$$\frac{\partial X}{\partial \Phi} = \lambda [-x (\text{sen } \Phi \cos K) + y (\text{sen } \Phi \text{sen } K) + z \cos \Phi] = r_{13}$$

$$\frac{\partial X}{\partial K} = \lambda [-x (\cos \Phi \text{sen } K) - y (\cos \Phi \cos K)] = \lambda [x a_{12} - y a_{11}] = r_{14}$$

$$\frac{\partial X}{\partial T_x} = 1 = r_{15}$$

$$\frac{\partial X}{\partial T_y} = 0 = r_{16}$$

$$\frac{\partial X}{\partial T_z} = 0 = r_{17}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial \lambda} = x a_{21} + y a_{22} + z a_{23} = r_{21}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial Y}{\partial \Omega} &= \lambda [x (-\text{sen } \Omega \text{sen } K + \cos \Omega \text{sen } \Phi \cos K) + y (-\text{sen } \Omega \cos K - \cos \Omega \text{sen } \Phi \text{sen } K) + z (-\cos \Omega \cos \Phi)] = \\ &= -\lambda (x a_{31} + y a_{32} + z a_{33}) = r_{22} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial \Phi} = \lambda [x (\text{sen } \Omega \cos \Phi \cos K) + y (-\text{sen } \Omega \cos \Phi \text{sen } K) + z (\text{sen } \Omega \text{sen } \Phi)] = r_{23}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial K} = \lambda [x (\cos \Omega \cos K - \text{sen } \Omega \text{sen } \Phi \text{sen } K) + y (-\cos \Omega \text{sen } K - \text{sen } \Omega \text{sen } \Phi \cos K)] = \lambda [x a_{22} - y a_{21}] = r_{24}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial T_x} = 0 = r_{25}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial T_y} = 1 = r_{26}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial T_z} = 0 = r_{27}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial \lambda} = x a_{31} + y a_{32} + z a_{33} = r_{31}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial Z}{\partial \Omega} &= \lambda [x (\cos \Omega \text{sen } K + \text{sen } \Omega \text{sen } \Phi \cos K) + y (\cos \Omega \cos K - \text{sen } \Omega \text{sen } \Phi \text{sen } K) + z (-\text{sen } \Omega \cos \Phi)] = \\ &= \lambda (x a_{21} + y a_{22} + z a_{23}) = r_{32} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial \Phi} = \lambda [x (-\cos \Omega \cos \Phi \cos K) + y (\cos \Omega \cos \Phi \text{sen } K) + z (-\cos \Omega \text{sen } \Phi)] = r_{33}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial K} = \lambda [x (\text{sen } \Omega \cos K + \cos \Omega \text{sen } \Phi \text{sen } K) + y (-\text{sen } \Omega \text{sen } K + \cos \Omega \text{sen } \Phi \cos K)] = \lambda [x a_{32} - y a_{31}] = r_{34}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial T_x} = 0 = r_{35}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial T_y} = 0 = r_{36}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial T_z} = 1 = r_{37}$$

2.4. Determinación de los parámetros

Las incógnitas a determinar son:

- ☞ Tres giros (Ω, Φ, K).
- ☞ Tres desplazamientos (T_X, T_Y, T_Z).
- ☞ Factor de escala (λ)

Para determinar estas siete incógnitas bastará conocer las coordenadas de dos puntos en sistema de referencia (X, Y, Z) y en el sistema arbitrario (x, y, z), así como la altitud de un tercer punto en ambos sistemas (Z) y (z).

Al determinar los siete parámetros con este número de puntos mencionados, no tendríamos comprobación de los resultados, por eso normalmente y para este tipo de transformación se emplean un número de puntos $n \geq 3$.

➤ *Primera solución:*

Partiendo de las ecuaciones de la expresión general linealizadas y conociendo las coordenadas en ambos sistemas de una serie de puntos, podremos formar las ecuaciones siguientes:

$$P_i \quad (x_i, y_i, z_i) \quad (X_i, Y_i, Z_i) \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (n \geq 3)$$

Pto 1:

$$\begin{aligned} r_{11}^1 d\lambda + r_{12}^1 d\Omega + r_{13}^1 d\Phi + r_{14}^1 dK + r_{15}^1 dT_X + r_{16}^1 dT_Y + r_{17}^1 dT_Z &= X_1 - (X_1)_0 \\ r_{21}^1 d\lambda + r_{22}^1 d\Omega + r_{23}^1 d\Phi + r_{24}^1 dK + r_{25}^1 dT_X + r_{26}^1 dT_Y + r_{27}^1 dT_Z &= Y_1 - (Y_1)_0 \\ r_{31}^1 d\lambda + r_{32}^1 d\Omega + r_{33}^1 d\Phi + r_{34}^1 dK + r_{35}^1 dT_X + r_{36}^1 dT_Y + r_{37}^1 dT_Z &= Z_1 - (Z_1)_0 \end{aligned}$$

Pto 2:

$$\begin{aligned} r_{11}^2 d\lambda + r_{12}^2 d\Omega + r_{13}^2 d\Phi + r_{14}^2 dK + r_{15}^2 dT_X + r_{16}^2 dT_Y + r_{17}^2 dT_Z &= X_2 - (X_2)_0 \\ r_{21}^2 d\lambda + r_{22}^2 d\Omega + r_{23}^2 d\Phi + r_{24}^2 dK + r_{25}^2 dT_X + r_{26}^2 dT_Y + r_{27}^2 dT_Z &= Y_2 - (Y_2)_0 \\ r_{31}^2 d\lambda + r_{32}^2 d\Omega + r_{33}^2 d\Phi + r_{34}^2 dK + r_{35}^2 dT_X + r_{36}^2 dT_Y + r_{37}^2 dT_Z &= Z_2 - (Z_2)_0 \\ \cdot & \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ \cdot & \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ \cdot & \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \end{aligned}$$

Pto n:

$$\begin{aligned} r_{11}^n d\lambda + r_{12}^n d\Omega + r_{13}^n d\Phi + r_{14}^n dK + r_{15}^n dT_X + r_{16}^n dT_Y + r_{17}^n dT_Z &= X_n - (X_n)_0 \\ r_{21}^n d\lambda + r_{22}^n d\Omega + r_{23}^n d\Phi + r_{24}^n dK + r_{25}^n dT_X + r_{26}^n dT_Y + r_{27}^n dT_Z &= Y_n - (Y_n)_0 \\ r_{31}^n d\lambda + r_{32}^n d\Omega + r_{33}^n d\Phi + r_{34}^n dK + r_{35}^n dT_X + r_{36}^n dT_Y + r_{37}^n dT_Z &= Z_n - (Z_n)_0 \end{aligned}$$

Los valores $(X_1)_0, (Y_1)_0, (Z_1)_0, \dots, (X_n)_0, (Y_n)_0, (Z_n)_0$ se han obtenido de las ecuaciones generales, donde los parámetros introducidos para su cálculo son valores de la primera aproximación:

Para los giros se pueden tomar como primera aproximación el valor de $\Omega_a=0$; $\Phi_a=0$; $K_a=0$ o calcular un valor para el giro acimutal (K) como la diferencia angular entre dos puntos en ambos

sistemas (Fig. 7).

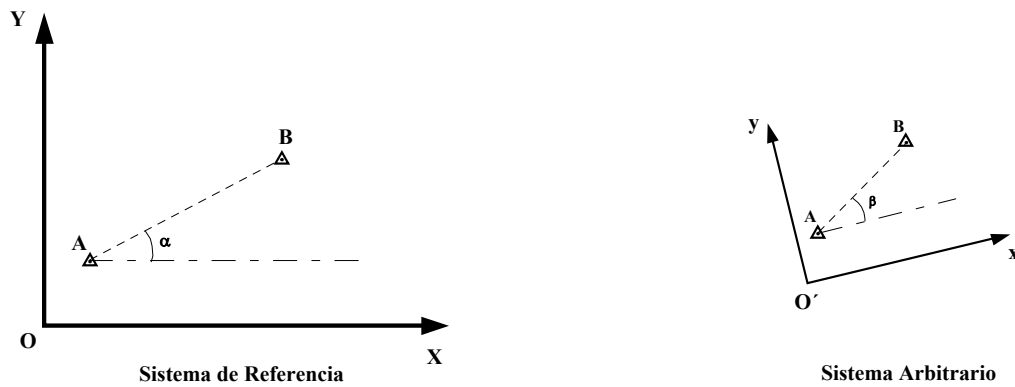


Fig. 7. Cálculo aproximado del giro acimutal.

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \operatorname{arctg} \left(\frac{Y_B - Y_A}{X_B - Y_A} \right) \\ \beta &= \operatorname{arctg} \left(\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \right) \end{aligned} \right\} \Rightarrow K_a = (\alpha - \beta)$$

El factor de escala puede obtenerse a partir de la media aritmética de todos los factores de escalas posibles:

$$\lambda_a = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^n D_i^j}{\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^n d_i^j}$$

D = distancia sistema de referencia
d = distancia sistema arbitrario

También puede obtenerse a partir de la media aritmética ponderada de todos los factores de escala calculables. El peso que puede darse a un cierto factor de escala sería:

$$\lambda = \frac{D}{d}$$

Suponemos la distancia en el sistema de referencia sin error:

$$d\lambda = \frac{-D}{d^2} dd = \frac{-D/d}{d} dd = \frac{-\lambda}{d} dd = \frac{C_1}{d}$$

El error en la escala es inversamente proporcional a la distancia en el sistema arbitrario. Tomando pesos inversamente proporcionales al cuadrado del error:

$$W = \frac{C_2}{\left(\frac{C_1}{d}\right)^2} = \frac{C_2 d^2}{(C_1)^2} = C d^2$$

El peso es directamente proporcional al cuadrado de la distancia en el sistema arbitrario. Tomando entonces para el factor de escala la media aritmética ponderada:

$$\lambda_a = \frac{W_1^2 \lambda_1^2 + W_1^3 \lambda_1^3 + \dots + W_{n-1}^n \lambda_{n-1}^n}{W_1^2 + W_1^3 + \dots + W_{n-1}^n} = \frac{C(d_1^2)^2 \frac{D_1^2}{d_1^2} + C(d_1^3)^2 \frac{D_1^3}{d_1^3} + \dots + C(d_{n-1}^n)^2 \frac{D_{n-1}^n}{d_{n-1}^n}}{C(d_1^2)^2 + C(d_1^3)^2 + \dots + C(d_{n-1}^n)^2}$$

$$\lambda_a = \frac{d_1^2 D_1^2 + d_1^3 D_1^3 + \dots + d_{n-1}^n D_{n-1}^n}{(d_1^2)^2 + (d_1^3)^2 + \dots + (d_{n-1}^n)^2}$$

$$\lambda_a = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n (d_i^j D_i^j)}{\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n (d_i^j)^2}$$

Al sustituir estos valores aproximados en la expresión general:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Para cada punto tendremos tres ecuaciones de la forma:

$$\begin{array}{lll} X_1 = \lambda x_1 + T_X^1 & Y_1 = \lambda y_1 + T_Y^1 & Z_1 = \lambda z_1 + T_Z^1 \\ X_2 = \lambda x_2 + T_X^2 & Y_2 = \lambda y_2 + T_Y^2 & Z_2 = \lambda z_2 + T_Z^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ X_n = \lambda x_n + T_X^n & Y_n = \lambda y_n + T_Y^n & Z_n = \lambda z_n + T_Z^n \end{array}$$

Despejando de cada una de ellas las traslaciones aproximadas, tendremos:

$$T_{X_a} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i - \lambda \sum_{i=1}^n x_i}{n} \quad T_{Y_a} = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i - \lambda \sum_{i=1}^n y_i}{n} \quad T_{Z_a} = \frac{\sum_{i=1}^n Z_i - \lambda \sum_{i=1}^n z_i}{n}$$

Expresando el sistema de ecuaciones para n puntos en forma matricial:

$$\begin{bmatrix}
 r_{11}^1 & r_{12}^1 & r_{13}^1 & r_{14}^1 & r_{15}^1 & r_{16}^1 & r_{17}^1 \\
 r_{21}^1 & r_{22}^1 & r_{23}^1 & r_{24}^1 & r_{25}^1 & r_{26}^1 & r_{27}^1 \\
 r_{31}^1 & r_{32}^1 & r_{33}^1 & r_{34}^1 & r_{35}^1 & r_{36}^1 & r_{37}^1 \\
 r_{11}^2 & r_{12}^2 & r_{13}^2 & r_{14}^2 & r_{15}^2 & r_{16}^2 & r_{17}^2 \\
 r_{21}^2 & r_{22}^2 & r_{23}^2 & r_{24}^2 & r_{25}^2 & r_{26}^2 & r_{27}^2 \\
 r_{31}^2 & r_{32}^2 & r_{33}^2 & r_{34}^2 & r_{35}^2 & r_{36}^2 & r_{37}^2 \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 r_{11}^n & r_{12}^n & r_{13}^n & r_{14}^n & r_{15}^n & r_{16}^n & r_{17}^n \\
 r_{21}^n & r_{22}^n & r_{23}^n & r_{24}^n & r_{25}^n & r_{26}^n & r_{27}^n \\
 r_{31}^n & r_{32}^n & r_{33}^n & r_{34}^n & r_{35}^n & r_{36}^n & r_{37}^n
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 d\lambda \\
 d\Omega \\
 d\Phi \\
 dK \\
 dT_x \\
 dT_y \\
 dT_z
 \end{bmatrix}
 -
 \begin{bmatrix}
 X_1 - (X_1)_0 \\
 Y_1 - (Y_1)_0 \\
 Z_1 - (Z_1)_0 \\
 X_2 - (X_2)_0 \\
 Y_2 - (Y_2)_0 \\
 Z_2 - (Z_2)_0 \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 X_n - (X_n)_0 \\
 Y_n - (Y_n)_0 \\
 Z_n - (Z_n)_0
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 V_{x_1} \\
 V_{y_1} \\
 V_{z_1} \\
 V_{x_2} \\
 V_{y_2} \\
 V_{z_2} \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 V_{x_n} \\
 V_{y_n} \\
 V_{z_n}
 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix}
 [A] & [X] - & [L] & = & [V] \\
 (3n,7) & (7,1) & (3n,1) & & (3n,1)
 \end{matrix}$$

Aplicando la condición de mínimo al sistema de ecuaciones, considerando observaciones de igual peso:

$$[X] = ([A]^T [A])^{-1} [A]^T [L]$$

Resolviendo el sistema se obtendrán las siete incógnitas ($d\lambda, d\Omega, d\Phi, dK, dT_x, dT_y, dT_z$) que serán las correcciones a realizar a la primera aproximación.

Tras realizar la primera iteración los parámetros de transformación serán:

$$\begin{aligned}
 \lambda^1 &= \lambda_a + d\lambda & T_x^1 &= T_{x_a} + dT_x \\
 \Omega^1 &= \Omega_a + d\Omega & T_y^1 &= T_{y_a} + dT_y \\
 \Phi^1 &= \Phi_a + d\Phi & T_z^1 &= T_{z_a} + dT_z \\
 K^1 &= K_a + dK
 \end{aligned}$$

El proceso es iterativo, es decir, se vuelve a repetir el proceso introduciendo los nuevos valores calculados en las operaciones anteriores, deteniéndose el número de iteraciones cuando el valor de los parámetros de transformación obtenidos en la última iteración apenas varíe con la anterior calculada.

➤ *Segunda solución:*

Partiendo de la expresión general y conociendo las coordenadas en ambos sistemas de una serie de puntos, podremos determinar las coordenadas del centroide.

$$P_i (x_i, y_i, z_i) (X_i, Y_i, Z_i) \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (n \geq 3)$$

$$\begin{array}{cccccc}
 X_1 & Y_1 & Z_1 & x_1 & y_1 & z_1 \\
 X_2 & Y_2 & Z_2 & x_2 & y_2 & z_2 \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 X_n & Y_n & Z_n & x_n & y_n & z_n \\
 \hline
 \sum_{i=1}^n X_i & \sum_{i=1}^n Y_i & \sum_{i=1}^n Z_i & \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n y_i & \sum_{i=1}^n z_i
 \end{array}$$

$$X_G = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} \quad Y_G = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{n} \quad Z_G = \frac{\sum_{i=1}^n Z_i}{n} \quad x_G = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \quad y_G = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n} \quad z_G = \frac{\sum_{i=1}^n z_i}{n}$$

Resultando las coordenadas de n puntos en los dos sistemas, con origen el centro de gravedad:

$$\begin{array}{cccccc}
 X'_1 = X_1 - X_G & Y'_1 = Y_1 - Y_G & Z'_1 = Z_1 - Z_G & x'_1 = x_1 - x_G & y'_1 = y_1 - y_G & z'_1 = z_1 - z_G \\
 X'_2 = X_2 - X_G & Y'_2 = Y_2 - Y_G & Z'_2 = Z_2 - Z_G & x'_2 = x_2 - x_G & y'_2 = y_2 - y_G & z'_2 = z_2 - z_G \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 X'_n = X_n - X_G & Y'_n = Y_n - Y_G & Z'_n = Z_n - Z_G & x'_n = x_n - x_G & y'_n = y_n - y_G & z'_n = z_n - z_G \\
 \hline
 \sum_{i=1}^n X'_i = 0 & \sum_{i=1}^n Y'_i = 0 & \sum_{i=1}^n Z'_i = 0 & \sum_{i=1}^n x'_i = 0 & \sum_{i=1}^n y'_i = 0 & \sum_{i=1}^n z'_i = 0
 \end{array}$$

Al referir las coordenadas de ambos sistemas a sus respectivos centroides se ha conseguido eliminar las traslaciones, quedando las ecuaciones de la expresión general reducidas a la expresión siguiente:

$$\begin{bmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$$

El sistema de ecuaciones linealizadas para los “ n ” puntos será de la forma:

Pto 1:

$$\begin{array}{l}
 r_{11}^1 d\lambda + r_{12}^1 d\Omega + r_{13}^1 d\Phi + r_{14}^1 dK = X'_1 - (X'_1)_0 \\
 r_{21}^1 d\lambda + r_{22}^1 d\Omega + r_{23}^1 d\Phi + r_{24}^1 dK = Y'_1 - (Y'_1)_0 \\
 r_{31}^1 d\lambda + r_{32}^1 d\Omega + r_{33}^1 d\Phi + r_{34}^1 dK = Z'_1 - (Z'_1)_0
 \end{array}$$

Pto 2:

$$\begin{aligned} r_{11}^2 d\lambda + r_{12}^2 d\Omega + r_{13}^2 d\Phi + r_{14}^2 dK &= X'_2 - (X'_2)_0 \\ r_{21}^2 d\lambda + r_{22}^2 d\Omega + r_{23}^2 d\Phi + r_{24}^2 dK &= Y'_2 - (Y'_2)_0 \\ r_{31}^2 d\lambda + r_{32}^2 d\Omega + r_{33}^2 d\Phi + r_{34}^2 dK &= Z'_2 - (Z'_2)_0 \\ \cdot & \cdot \cdot \cdot \cdot \\ \cdot & \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ \cdot & \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \end{aligned}$$

Pto n:

$$\begin{aligned} r_{11}^n d\lambda + r_{12}^n d\Omega + r_{13}^n d\Phi + r_{14}^n dK &= X'_n - (X'_n)_0 \\ r_{21}^n d\lambda + r_{22}^n d\Omega + r_{23}^n d\Phi + r_{24}^n dK &= Y'_n - (Y'_n)_0 \\ r_{31}^n d\lambda + r_{32}^n d\Omega + r_{33}^n d\Phi + r_{34}^n dK &= Z'_n - (Z'_n)_0 \end{aligned}$$

donde:

- $\left(\frac{\partial X'}{\partial T_x}\right), \left(\frac{\partial X'}{\partial T_y}\right), \left(\frac{\partial X'}{\partial T_z}\right), \left(\frac{\partial Y'}{\partial T_x}\right), \dots, \left(\frac{\partial Z'}{\partial T_z}\right) = 0$
- $r_{11} = \left(\frac{\partial X'}{\partial \lambda}\right), r_{12} = \left(\frac{\partial X'}{\partial \Omega}\right), \dots, r_{34} = \left(\frac{\partial Z'}{\partial K}\right)$

Los parámetros introducidos para el cálculo son valores de la primera aproximación:

Giros (pueden obtenerse) a partir de:

- ☞ $\Omega_a=0 ; \Phi_a=0 ; K_a=0$
- ☞ $\left. \begin{aligned} \alpha &= \arctg\left(\frac{Y_B - Y_A}{X_B - X_A}\right) \\ \beta &= \arctg\left(\frac{Y_B - Y_A}{X_B - X_A}\right) \end{aligned} \right\} \Rightarrow K_a = (\alpha - \beta), \Omega_a=0 ; \Phi_a=0$

El factor de escala se puede calcular:

- ☞ $\lambda_a = \frac{D_1^2}{d_1^2} + \frac{D_1^3}{d_1^3} + \dots + \frac{D_{n-1}^n}{d_{n-1}^n}$
- ☞ $\lambda_a = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n (d_i^j D_i^j)}{\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n (d_i^j)^2}$

En el caso de sustituir los giros $\Omega_a=0 ; \Phi_a=0 ; K_a=0$ en la expresión general:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{lll}
 X'_1 = \lambda x'_1 & Y'_1 = \lambda y'_1 & Z'_1 = \lambda z'_1 \\
 X'_2 = \lambda x'_2 & Y'_2 = \lambda y'_2 & Z'_2 = \lambda z'_2 \\
 \cdot & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot \\
 X'_n = \lambda x'_n & Y'_n = \lambda y'_n & Z'_n = \lambda z'_n
 \end{array}$$

Expresando el sistema de ecuaciones para n puntos en forma matricial:

$$\begin{bmatrix}
 r_{11}^1 & r_{12}^1 & r_{13}^1 & r_{14}^1 \\
 r_{21}^1 & r_{22}^1 & r_{23}^1 & r_{24}^1 \\
 r_{31}^1 & r_{32}^1 & r_{33}^1 & r_{34}^1 \\
 r_{11}^2 & r_{12}^2 & r_{13}^2 & r_{14}^2 \\
 r_{21}^2 & r_{22}^2 & r_{23}^2 & r_{24}^2 \\
 r_{31}^2 & r_{32}^2 & r_{33}^2 & r_{34}^2 \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 r_{11}^n & r_{12}^n & r_{13}^n & r_{14}^n \\
 r_{21}^n & r_{22}^n & r_{23}^n & r_{24}^n \\
 r_{31}^n & r_{32}^n & r_{33}^n & r_{34}^n
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 d\lambda \\
 d\Omega \\
 d\Phi \\
 dK
 \end{bmatrix}
 -
 \begin{bmatrix}
 X'_1 - (X'_1)_0 \\
 Y'_1 - (Y'_1)_0 \\
 Z'_1 - (Z'_1)_0 \\
 X'_2 - (X'_2)_0 \\
 Y'_2 - (Y'_2)_0 \\
 Z'_2 - (Z'_2)_0 \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 X'_n - (X'_n)_0 \\
 Y'_n - (Y'_n)_0 \\
 Z'_n - (Z'_n)_0
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 V_{X_1} \\
 V_{Y_1} \\
 V_{Z_1} \\
 V_{X_2} \\
 V_{Y_2} \\
 V_{Z_2} \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 V_{X_n} \\
 V_{Y_n} \\
 V_{Z_n}
 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{llll}
 [A] & [X] & [L] & = [V] \\
 (3n,4) & (4,1) & (3n,1) & (3n,1)
 \end{array}$$

Resolviendo el sistema por mínimos cuadrados mediante proceso iterativo se procederá a repetir el proceso descrito hasta ahora, obteniéndose las cuatro incógnitas (factor de escala y tres giros). Una vez obtenidos estos se procederá a calcular las tres traslaciones.

$$T_X = \frac{\sum_{i=1}^n X_i - \lambda \left(a_{11} \sum_{i=1}^n x_i + a_{12} \sum_{i=1}^n y_i + a_{13} \sum_{i=1}^n z_i \right)}{n}$$

$$T_Y = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i - \lambda \left(a_{21} \sum_{i=1}^n x_i + a_{22} \sum_{i=1}^n y_i + a_{23} \sum_{i=1}^n z_i \right)}{n}$$

$$T_Z = \frac{\sum_{i=1}^n Z_i - \lambda \left(a_{31} \sum_{i=1}^n x_i + a_{32} \sum_{i=1}^n y_i + a_{33} \sum_{i=1}^n z_i \right)}{n}$$

2.5. Expresión general para valores pequeños de los ángulos

Suponiendo que los valores de los ángulos a calcular (Ω, Φ, K) sean lo suficientemente pequeños ($\Delta\Omega, \Delta\Phi, \Delta K$) como para poder sustituir el valor de los senos por los ángulos ($\text{sen}\Delta\alpha \approx \Delta\alpha$) y los cosenos por la unidad ($\text{cos}\Delta\alpha \approx 1$), la matriz de rotación “R” resultante sería:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & -\Delta K & \Delta\Phi \\ \Delta K & 1 & -\Delta\Omega \\ -\Delta\Phi & \Delta\Omega & 1 \end{bmatrix}$$

Sustituyendo el valor de R en la expresión general de la transformación, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 & -\Delta K & \Delta\Phi \\ \Delta K & 1 & -\Delta\Omega \\ -\Delta\Phi & \Delta\Omega & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{bmatrix}$$

De este sistema que es totalmente lineal, compuesto por “3n” ecuaciones del tipo (38), pueden formarse directamente las ecuaciones de observación indirectas que permitirían resolver las siete incógnitas por aplicación de la metodología de mínimos cuadrados.

Así pues, si se conocen las coordenadas de n puntos “(n≥3)” en ambos sistemas, podría llegar a establecerse el siguiente sistema de ecuaciones de observación:

$$P_i \quad (x_i, y_i, z_i) \quad (X_i, Y_i, Z_i) \quad i = 1,2,3,\dots,n \quad (n \geq 3)$$

$$\begin{bmatrix} x_1 & 0 & z_1 & -y_1 & 1 & 0 & 0 \\ y_1 & -z_1 & 0 & x_1 & 0 & 1 & 0 \\ z_1 & y_1 & -x_1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n & 0 & z_n & -y_n & 1 & 0 & 0 \\ y_n & -z_n & 0 & x_n & 0 & 1 & 0 \\ z_n & y_n & -x_n & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ \lambda \Delta\Omega \\ \lambda \Delta\Phi \\ \lambda \Delta K \\ T_x \\ T_y \\ T_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \\ \dots \\ X_n \\ Y_n \\ Z_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} [A] & [X] = [L] \\ (3n,7) & (7,1) \quad (3n,1) \end{matrix}$$

Hay que prestar especial consideración en el planteamiento descrito puesto que la matriz de rotación “R” obtenida no es ortogonal, ya que se han tomado valores aproximados para los senos y cosenos de los ángulos de rotación. El valor del determinante de la matriz de rotación debería de ser uno, cuando en realidad este vale:

$$\Delta = 1 + \Delta\Omega^2 + \Delta\Phi^2 + \Delta K^2 \neq 1$$

El hecho de que la matriz de rotación no sea ortogonal produce que la transformación pierda su carácter de semejanza.

2.6. Alternativas a la matriz de rotación

Hasta ahora se ha utilizado la matriz de rotación ortogonal basada en funciones trigonométricas de tres parámetros independientes Ω, Φ, K (*matriz de Euler*), los cuales representan los tres giros que pueden realizarse alrededor de cada uno de los ejes de un sistema tridimensional (X, Y, Z) .

Veremos a continuación otras posibilidades de obtener matrices ortogonales de aplicación en Fotogrametría.

Las matrices ortogonales vistas hasta ahora, permiten la orientación de un sistema tridimensional mediante la realización de una o más rotaciones, las cuales presentan el inconveniente de trabajar con funciones racionales de tres parámetros independientes.

A continuación se verá la construcción de matrices ortogonales, basadas en parámetros matemáticos y que han sido fruto de numerosas investigaciones.

2.6.1. Matriz de Cayley. (R_C)

Fue Cayley el primero en demostrar que una matriz de la forma que a continuación se detalla debe de ser siempre ortogonal.

$$R_C = (I - S)(I + S)^{-1}$$

siendo "I" la matriz unidad y "S" una matriz antisimétrica, tal que:

$$S = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{bmatrix} \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Estudiando las propiedades de las matrices $(I + S)$ e $(I - S)$, puede decirse que $(I - S)^T = (I + S)$ e $(I + S)^T = (I - S)$.

Puede demostrarse que la expresión de la matriz dada por Cayley es una rotación. Para ello, se verá que su determinante es la unidad y que la traspuesta es su inversa. Partiendo de la expresión de Cayley y trasponiendo obtendremos que:

$$R_C^T = (I - S)^{-1} (I + S)$$

Podemos deducir si conmutamos signos que:

$$(I \mp S) (I \pm S)^{-1} = (I \pm S)^{-1} (I \mp S)$$

despejando de esta expresión llegamos:

$$\begin{aligned} (I - S) (I + S)^{-1} &= (I + S)^{-1} (I - S) \\ (I + S) (I - S)^{-1} &= (I - S)^{-1} (I + S) \end{aligned}$$

Para demostrar que el determinante de la matriz de Cayley es igual a la unidad ($|R_C| = 1$), se van a obtener los determinantes de $(I - S)$ e $(I + S)$ respectivamente y se van a multiplicar ambos.

Desarrollando ambas matrices tendremos:

$$(I-S) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & c & -b \\ -c & 2 & a \\ b & -a & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & c/2 & -b/2 \\ -c/2 & 1 & a/2 \\ b/2 & -a/2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(I+S) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & -c & b \\ c & 2 & -a \\ -b & a & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -c/2 & b/2 \\ c/2 & 1 & -a/2 \\ -b/2 & a/2 & 1 \end{bmatrix}$$

Los respectivos determinantes serán:

$$\begin{aligned} |I-S| &= \begin{vmatrix} 1 & c/2 & -b/2 \\ -c/2 & 1 & a/2 \\ b/2 & -a/2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a/2 \\ -a/2 & 1 \end{vmatrix} - \frac{c}{2} \begin{vmatrix} -c/2 & a/2 \\ b/2 & 1 \end{vmatrix} - \frac{b}{2} \begin{vmatrix} -c/2 & 1 \\ b/2 & -a/2 \end{vmatrix} = \\ &= 1 + \frac{a^2}{4} + \frac{c^2}{4} - \frac{abc}{4} + \frac{abc}{4} + \frac{b^2}{4} = 1 + \frac{(a^2 + b^2 + c^2)}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |I+S| &= \begin{vmatrix} 1 & -c/2 & b/2 \\ c/2 & 1 & -a/2 \\ -b/2 & a/2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -a/2 \\ a/2 & 1 \end{vmatrix} + \frac{c}{2} \begin{vmatrix} c/2 & -a/2 \\ -b/2 & 1 \end{vmatrix} + \frac{b}{2} \begin{vmatrix} c/2 & 1 \\ -b/2 & a/2 \end{vmatrix} = \\ &= 1 + \frac{a^2}{4} + \frac{c^2}{4} - \frac{abc}{4} + \frac{abc}{4} + \frac{b^2}{4} = 1 + \frac{(a^2 + b^2 + c^2)}{4} \end{aligned}$$

Multiplicando ambas matrices demostramos que:

$$|R_c| = |(I-S)| |(I+S)^{-1}| = \frac{|(I-S)|}{|(I+S)|} = \frac{1 + \frac{(a^2 + b^2 + c^2)}{4}}{1 + \frac{(a^2 + b^2 + c^2)}{4}} = 1 \text{ (la matriz de Cayley es ortogonal)}$$

2.6.2. Matriz de Olinde Rodrigues. (R_R)

Desarrollando la expresión dada por Cayley, $R_C = (I-S)(I+S)^{-1}$, obtendremos la primera forma de matriz ortogonal presentada por Rodrigues.

Para ello, partiendo de los valores de las matrices $(I-S)$ e $(I+S)$

$$(I-S) = \begin{bmatrix} 1 & c/2 & -b/2 \\ -c/2 & 1 & a/2 \\ b/2 & -a/2 & 1 \end{bmatrix} \quad (I+S) = \begin{bmatrix} 1 & -c/2 & b/2 \\ c/2 & 1 & -a/2 \\ -b/2 & a/2 & 1 \end{bmatrix}$$

sustituyendo en $R_C=(I-S)(I+S)^{-1}$ llegamos a obtener:

$$R_C = (I-S)(I+S)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & c/2 & -b/2 \\ -c/2 & 1 & a/2 \\ b/2 & -a/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -c/2 & b/2 \\ c/2 & 1 & -a/2 \\ -b/2 & a/2 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

Si desarrollamos íntegramente esta matriz, obtendremos la matriz de rotación presentada por Rodrigues.

Para calcular la inversa de $(I-S)$, tendremos que desarrollar la expresión siguiente:

$$(I+S)^{-1} = \frac{1}{\Delta} \text{Adj}[(I+S)^T] = \frac{1}{\left(1 + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4}\right)} \text{Adj}[(I+S)^T]$$

siendo los adjuntos de $(I-S)$:

$$\text{Adj}[(I+S)] = \begin{bmatrix} 1 + \frac{a^2}{4} & -\frac{c}{2} + \frac{ab}{4} & \frac{b}{2} + \frac{ac}{4} \\ \frac{c}{2} + \frac{ab}{4} & 1 + \frac{b^2}{4} & -\frac{a}{2} + \frac{bc}{4} \\ -\frac{b}{2} + \frac{ac}{4} & \frac{a}{2} + \frac{bc}{4} & 1 + \frac{c^2}{4} \end{bmatrix}$$

y los adjuntos traspuestos:

$$\text{Adj}[(I-S)^T] = \begin{bmatrix} 1 + \frac{a^2}{4} & \frac{c}{2} + \frac{ab}{4} & -\frac{b}{2} + \frac{ac}{4} \\ -\frac{c}{2} + \frac{ab}{4} & 1 + \frac{b^2}{4} & \frac{a}{2} + \frac{bc}{4} \\ \frac{b}{2} + \frac{ac}{4} & -\frac{a}{2} + \frac{bc}{4} & 1 + \frac{c^2}{4} \end{bmatrix}$$

sustituyendo estos valores en la expresión $R_C=(I-S)(I+S)^{-1}$ tendremos que:

$$R_R = \frac{1}{\left(1 + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4}\right)} \begin{bmatrix} 1 & c/2 & -b/2 \\ -c/2 & 1 & a/2 \\ b/2 & -a/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 + \frac{a^2}{4} & \frac{c}{2} + \frac{ab}{4} & -\frac{b}{2} + \frac{ac}{4} \\ -\frac{c}{2} + \frac{ab}{4} & 1 + \frac{b^2}{4} & \frac{a}{2} + \frac{bc}{4} \\ \frac{b}{2} + \frac{ac}{4} & -\frac{a}{2} + \frac{bc}{4} & 1 + \frac{c^2}{4} \end{bmatrix}$$

Desarrollando el producto de las dos matrices:

$$R_R = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} 1 + \frac{a^2}{4} - \frac{abc}{8} - \frac{b^2}{4} + \frac{abc}{8} - \frac{c^2}{4} & \frac{c}{2} + \frac{ab}{4} + \frac{c}{2} + \frac{b^2c}{8} + \frac{ab}{4} - \frac{b^2c}{8} & -\frac{b}{2} + \frac{ac}{4} + \frac{ac}{4} + \frac{bc^2}{8} - \frac{b}{2} - \frac{b^2c}{8} \\ -\frac{c}{2} - \frac{a^2c}{8} + \frac{ab}{4} - \frac{c}{2} + \frac{a^2c}{8} + \frac{ab}{4} & 1 + \frac{b^2}{4} - \frac{abc}{8} - \frac{a^2}{4} + \frac{abc}{8} - \frac{c^2}{4} & -\frac{ac^2}{8} + \frac{bc}{4} + \frac{bc}{4} + \frac{a}{2} + \frac{a}{2} + \frac{ac^2}{8} \\ \frac{b}{2} + \frac{a^2b}{8} - \frac{a^2b}{8} + \frac{ac}{4} + \frac{ac}{4} + \frac{b}{2} & \frac{ab^2}{8} + \frac{bc}{4} - \frac{a}{2} - \frac{ab^2}{8} + \frac{bc}{4} - \frac{a}{2} & 1 + \frac{c^2}{4} - \frac{abc}{8} - \frac{a^2}{4} + \frac{abc}{8} - \frac{c^2}{4} \end{bmatrix}$$

Obtendremos la matriz de rotación presentada por Rodrigues:

$$R_R = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} 1 + \frac{(a^2 - b^2 - c^2)}{4} & c + \frac{ab}{2} & -b + \frac{ac}{2} \\ -c + \frac{ab}{2} & 1 + \frac{(b^2 - a^2 - c^2)}{4} & a + \frac{bc}{2} \\ b + \frac{ac}{2} & -a + \frac{bc}{2} & 1 + \frac{(c^2 - a^2 - b^2)}{4} \end{bmatrix}$$

La expresión anterior presenta la gran ventaja de no aparecer términos trigonométricos.

La matriz de rotación de Rodrigues puede adoptar la siguiente expresión simplificada, donde se han eliminado términos de segundo orden.

$$R_R = \begin{bmatrix} 1 & c & -b \\ -c & 1 & a \\ b & -a & 1 \end{bmatrix}$$

2.6.3. Matriz de Thomson. (R_T)

Los coeficientes de la matriz de Rodrigues obtenidos anteriormente (48), pueden ser reorganizados con el objetivo de obtener una nueva expresión, de tal forma que su uso sea más simple para los cálculos.

Partiendo de la matriz de rotación de Rodrigues y efectuando el siguiente cambio de variable llegaremos:

$$\Delta' = 1 - \frac{1}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$$

sabemos que $\Delta = 1 + \frac{1}{4}(a^2 + b^2 + c^2) \Rightarrow \frac{1}{4}(a^2 + b^2 + c^2) = \Delta - 1$, sustituyendo en la anterior expresión, obtenemos que $\Delta' = 1 - (\Delta - 1) = 2 - \Delta$.

De idéntica forma podremos decir:

$$1 + \frac{1}{4}(a^2 - b^2 - c^2) = \Delta - \frac{1}{4}(a^2 + b^2 + c^2) + \frac{a^2}{2} = \Delta' + \frac{a^2}{2}$$

$$1 + \frac{1}{4}(b^2 - a^2 - c^2) = \Delta - \frac{1}{4}(a^2 + b^2 + c^2) + \frac{b^2}{2} = \Delta' + \frac{b^2}{2}$$

$$1 + \frac{1}{4}(c^2 - a^2 - b^2) = \Delta - \frac{1}{4}(a^2 + b^2 + c^2) + \frac{c^2}{2} = \Delta' + \frac{c^2}{2}$$

Sustituyendo estos valores en la matriz de rotación de Rodrigues:

$$R_R = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} 1 + \frac{(a^2 - b^2 - c^2)}{4} & c + \frac{ab}{2} & -b + \frac{ac}{2} \\ -c + \frac{ab}{2} & 1 + \frac{(b^2 - a^2 - c^2)}{4} & a + \frac{bc}{2} \\ b + \frac{ac}{2} & -a + \frac{bc}{2} & 1 + \frac{(c^2 - a^2 - b^2)}{4} \end{bmatrix}$$

y desarrollando esta expresión tendremos:

$$R_T = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} \Delta' + \frac{a^2}{2} & c + \frac{ab}{2} & -b + \frac{ac}{2} \\ -c + \frac{ab}{2} & \Delta' + \frac{b^2}{2} & a + \frac{bc}{2} \\ b + \frac{ac}{2} & -a + \frac{bc}{2} & \Delta' + \frac{c^2}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} \Delta' & c & -b \\ -c & \Delta' & a \\ b & -a & \Delta' \end{bmatrix} + \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} \frac{a^2}{2} & \frac{ab}{2} & \frac{ac}{2} \\ \frac{ab}{2} & \frac{b^2}{2} & \frac{bc}{2} \\ \frac{ac}{2} & \frac{bc}{2} & \frac{c^2}{2} \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} \Delta' & c & -b \\ -c & \Delta' & a \\ b & -a & \Delta' \end{bmatrix} + \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} \Delta' & c & -b \\ -c & \Delta' & a \\ b & -a & \Delta' \end{bmatrix} + \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a & b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

Resultando que la matriz de Thomson viene dada por:

$$R_T = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} \Delta' & c & -b \\ -c & \Delta' & a \\ b & -a & \Delta' \end{bmatrix} + \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix}$$

La gran ventaja de usar las matrices de Rodrigues y Thomson es el hecho de poder determinar los parámetros de la matriz de rotación a partir de ecuaciones lineales.

2.6.4. Matriz de Shut. (R_S).

Según sea el giro aplicado y la dirección del eje de rotación (en la misma dirección de algún eje de coordenadas), el sistema puede llegar a alguna inconsistencia, por ello, y generalizando el sistema de Cayley, podremos escribir la matriz de Shut como:

$$R_S = (dI - S)(dI + S)^{-1}$$

donde $(dI - S)$ y $(dI + S)$ valdrán respectivamente:

$$(dI - S) = \begin{bmatrix} d & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & c & -b \\ -c & 0 & a \\ 0 & -a & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & c & -b \\ -c & d & a \\ b & -a & d \end{bmatrix}$$

$$(dI + S) = \begin{bmatrix} d & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ 0 & a & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & -c & b \\ c & d & -a \\ -b & a & d \end{bmatrix}$$

Sustituyendo estos valores en $R_s = (dI - S)(dI + S)^{-1}$:

$$R_s = (dI - S)(dI + S)^{-1} = \begin{bmatrix} d & c & -b \\ -c & d & a \\ b & -a & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d & -c & b \\ c & d & -a \\ -b & a & d \end{bmatrix}^{-1}$$

La inversa de la matriz $(dI + S)$ vendrá dada por:

$$(dI + S)^{-1} = \frac{1}{\Delta} \text{Adj}[(dI + S)^T] = \frac{1}{d(d^2 + a^2 + b^2 + c^2)} \text{Adj}[(dI + S)^T]$$

donde los adjuntos de la matriz son:

$$\text{Adj}[(dI + S)] = \begin{bmatrix} d^2 + a^2 & -cd + ab & bd + ac \\ cd + ab & d^2 + b^2 & -ad + bc \\ -bd + a & ad + bc & d^2 + c^2 \end{bmatrix}$$

y los adjuntos traspuestos:

$$\text{Adj}[(dI + S)^T] = \begin{bmatrix} d^2 + a^2 & cd + ab & -bd + ac \\ -cd + ab & d^2 + b^2 & ad + bc \\ bd + a & -ad + bc & d^2 + c^2 \end{bmatrix}$$

Sustituyendo estos valores en la matriz de Shur tendremos:

$$R_s = \frac{1}{d(d^2 + a^2 + b^2 + c^2)} \begin{bmatrix} d^2 + a^2 & -cd + ab & bd + ac \\ cd + ab & d^2 + b^2 & -ad + bc \\ -bd + a & ad + bc & d^2 + c^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d^2 + a^2 & cd + ab & -bd + ac \\ -cd + ab & d^2 + b^2 & ad + bc \\ bd + a & -ad + bc & d^2 + c^2 \end{bmatrix}$$

desarrollando el producto de estas matrices:

$$R_s = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} d^3 + a^2d + abc - c^2d - abc - b^2d & abd + cd^2 + cd^2 + cb^2 - cb^2 + abd & acd - bd^2 + bc^2 + acd - bd^2 - bc^2 \\ -cd^2 - ca^2 + abd - cd^2 + a^2c + bda & -abc - dc^2 + d^3 + db^2 + abc - da^2 & -ac^2 + bcd + bcd + ad^2 + ad^2 + ac^2 \\ bd^2 + ba^2 - a^2b + acd + acd + bd^2 & ab^2 + bcd - ad^2 - ab^2 + bcd - ad^2 & abc - db^2 - abc - da^2 + d^3 + dc^2 \end{bmatrix}$$

Simplificando la expresión anterior, obtendremos la matriz de rotación de Shut:

$$R_s = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} d^3 + a^2d - c^2d - b^2d & 2abd + 2cd^2 & 2acd - 2bd^2 \\ 2abd - 2cd^2 & d^3 + b^2d - a^2d - c^2d & 2bcd + 2ad^2 \\ 2bd^2 + 2acd & 2bcd - 2ad^2 & d^3 + c^2d - a^2d - b^2d \end{bmatrix}$$

introduciendo en la expresión el valor del determinante tendremos:

$$R_s = \frac{1}{(d^2 + a^2 + b^2 + c^2)} \begin{bmatrix} d^2 + a^2 - c^2 - b^2 & 2ab + 2cd & 2ac - 2bd \\ 2ab - 2cd & d^2 + b^2 - a^2 - c^2 & 2bc + 2ad \\ 2ac + 2bd & 2bc - 2ad & d^2 + c^2 - a^2 - b^2 \end{bmatrix}$$

La matriz de rotación de Rodrigues puede adoptar la siguiente expresión simplificada, donde se han eliminado términos de segundo orden:

$$R_R = \begin{bmatrix} 1 & 2c & -2b \\ -2c & 1 & 2a \\ 2b & -2a & 1 \end{bmatrix}$$

2.7. Precisión de la transformación tridimensional de semejanza

Para cada punto P_i ($i=1, 2, 3, \dots, n; n \geq 3$) de posición conocida en ambos sistemas que van a intervenir en la resolución de los parámetros de la transformación tridimensional de coordenadas, pueden escribirse tres ecuaciones que relacionan:

- Las coordenadas del sistema de referencia; datos (X, Y) .
- Las coordenadas medidas en el sistema arbitrario (x, y) .
- Los parámetros a determinar indirectamente $(\lambda, \Omega, \Phi, K, T_x, T_y, T_z)$.

Resueltos los parámetros de la transformación e introduciéndolos en las ecuaciones generales así como los puntos utilizados en la determinación de las incógnitas $P_i, (X_i, Y_i, Z_i), (x_i, y_i, z_i), (i=1, 2, \dots, n; n \geq 3)$ que han servido para su determinación, se obtendrán unos nuevos valores del sistema de referencia (X_i^c, Y_i^c, Z_i^c) , que no coincidirán con los datos de partida (supuestos estos sin error). Pueden determinarse fácilmente los residuos de la transformación, restando a estos valores, que llamaremos los calculados en la transformación a los de partida, resultando:

$$V_x = X_i^c - X_i \quad V_y = Y_i^c - Y_i \quad V_z = Z_i^c - Z_i$$

El error medio cuadrático de las coordenadas, puede obtenerse de la expresión:

$$\sigma_{XYZ} = \pm \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (V_{X_i}^2 + V_{Y_i}^2 + V_{Z_i}^2)}{1 - m}}$$

donde:

- $\sum_{i=1}^n (V_{X_i}^2 + V_{Y_i}^2 + V_{Z_i}^2)$ suma de los residuos (en X, Y, Z) al cuadrado de todos los puntos que han intervenido en el cálculo de los parámetros.
- l es el número de relaciones de observación (número de ecuaciones) que intervienen en el proceso de cálculo de los parámetros, es decir, $l = 3n$.
- m , es el número de relaciones de observación mínimas que se necesitan para resolver los parámetros, en esta transformación $m=7$.

Por tanto:

$$\sigma_{XYZ} = \pm \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (V_{X_i}^2 + V_{Y_i}^2 + V_{Z_i}^2)}{3n - 7}}$$

2.8. Transformación tridimensional afín

Partiendo al igual que en la transformación anterior, de dos sistemas tridimensionales de coordenadas (el de referencia y el arbitrario) y considerando que existen diferentes factores de escalas ($\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z$) para cada uno de los ejes de coordenadas “x, y, z” del sistema arbitrario, estaremos asumiendo entre ambos sistemas una relación de afinidad.

En la figura 7 puede observarse las variaciones de forma del objeto en ambos sistemas, debidas a existencia de factores de escalas diferentes a lo largo de los tres ejes de coordenadas.

Este tipo de transformación se utiliza en fotogrametría cuando un modelo estereoscópico se forma con fotografías tomadas con distintas cámaras (las distancias principales son diferentes).

Esta transformación será expresada en función de nueve parámetros independientes, siendo estos:

- Tres giros (Ω, Φ, K).
- Tres factores de escala ($\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z$).
- Tres traslaciones (T_x, T_y, T_z).

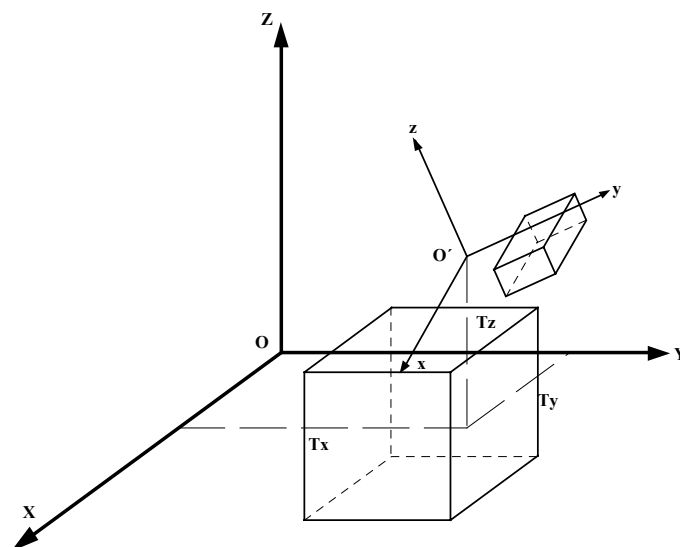


Fig 7. Objetos con diferente morfología según el sistema en el que se encuentre.

Partiendo de la expresión general de una transformación tridimensional conforme:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{bmatrix}$$

Eliminando el factor de escala e introduciendo en la expresión anterior la relación de afinidad, resulta la expresión general de esta transformación:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_x & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_y & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{bmatrix}$$

Estas ecuaciones contienen nueve parámetros desconocidos, los tres giros (Ω , Φ , K) contenidos en los nueve coeficientes de la matriz de rotación (a_{11} , a_{12} , ..., a_{33}), los tres factores de escala (λ_x , λ_y , λ_z) y las tres traslaciones (T_x , T_y , T_z).

Para determinar estas nueve incógnitas se necesita un mínimo tres puntos de posición conocida en ambos sistemas. No obstante, con esta configuración se obtendrá una única solución, ya que el número de ecuaciones a plantear para resolver las nueve incógnitas será de nueve. Por ello, si se quiere obtener una solución por medio de mínimos cuadrados será necesario conocer las coordenadas de un número de puntos mayor o igual que tres ($n > 3$).

2.9. Transformación tridimensional polinómica

Existen varios tipos de polinomios utilizados en fotogrametría, pudiendo ser utilizados aquellos que se consideren más apropiados según el objeto del ajuste.

Usualmente se utilizan como consecuencia de la propagación de los errores sistemáticos introducidos en cada uno de los modelos que forman la pasada.

Las siguientes ecuaciones expresan uno de los polinomios mencionados anteriormente

$$\begin{aligned} X &= a_0 + a_1x + a_2y + a_3z + a_4x^2 + a_5y^2 + a_6z^2 + a_7xy + a_8xz + a_9yz + \dots \\ Y &= b_0 + b_1x + b_2y + b_3z + b_4x^2 + b_5y^2 + b_6z^2 + b_7xy + b_8xz + b_9yz + \dots \\ Z &= c_0 + c_1x + c_2y + c_3z + c_4x^2 + c_5y^2 + c_6z^2 + c_7xy + c_8xz + c_9yz + \dots \end{aligned}$$

siendo los coeficientes " a_0 , a_1 , a_2 , ..., c_n " los parámetros de la transformación polinómica a determinar. Así por ejemplo, eligiendo una transformación polinómica de grado uno, las ecuaciones a plantear serían:

$$\begin{aligned} X &= a_0 + a_1x + a_2y + a_3z \\ Y &= b_0 + b_1x + b_2y + b_3z \\ Z &= c_0 + c_1x + c_2y + c_3z \end{aligned}$$

Expresando estas ecuaciones en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{bmatrix}$$

$$[X] = [B] [x] + [L]$$

En este caso las incógnitas a determinar son doce:

- Coeficientes de la matriz [B] “ $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3$ ”.
- Los coeficientes de la matriz [C] “ a_0, b_0, c_0 ”.

El número mínimo de puntos de posición conocida en ambos sistemas que se necesita para resolver el sistema de ecuaciones utilizando la metodología de mínimos cuadrados es mayor de cuatro ($n > 4$).

Bibliografía

- American Society of Photogrammetry. Manual of Photogrammetry, ASPRS, 4ª Edición (1980), ISBN 0-937294-01-2.
- Burnside, C.D., Mapping from Aerial Photographs, Mackays of Chatham, Kent, Londres (Inglaterra), 2ª edición (1985), ISBN 0-00-383036-5.
- Domingo, L., Las Transformaciones de semejanza en fotogrametría, Universidad Politécnica de Madrid (E.U.I.T.T.), Diciembre 1982.
- Ghosh, S.K., Analytical Photogrammetry, Pergamon Press, New York (USA), 2ª edición (1988), 0-08-036103-X.
- Julia, J.E., Fotogrametría Analítica, E.T.S. de Ingenieros de Montes (U.P.M.) y Facultad de Ciencias Exactas y Tecnología (Universidad Nacional de Tucuman). 1992
- Krauss, K., Photogrammetry, Dümmler/Bonn (1993), ISBN 3-427-78684-6.
- Lerma, J.L., Problemas de Fotogrametría II, Servicio de publicaciones de la Universidad Politécnica de Valencia (1999), ISBN 84-7721-846-3.
- Lerma, J.L., Problemas de Fotogrametría III, Servicio de publicaciones de la Universidad Politécnica de Valencia (1999), ISBN 84-7721-805-6.
- López-Cuervo, S., Fotogrametría, Egraf S.A., Madrid (1980), ISBN 84-3000-2559-6.
- Shut, G.H., An Introduction to Analytical Strip Triangulation with a Fortran Program, Paper NRC (Publicación AP-PR 34), Diciembre 1966.
- Shut, G.H., On exact linear equations for the computation of the rotational elements of absolute orientation, Photogrammetria 17, nº 1, 1960/61.
- Shut, G.H., Construction of orthogonal matrices and their application in analytical photogrammetry. Photogrammetria 15, nº 4, 1958/59.
- Thompson, E.H., An exact linear solution of the problem of absolute orientation. Photogrammetria 15, nº 4, 1958/59.
- Thompson, E.H., The construction of orthogonal matrices. Photogrammetric Record 3(13), Abril 1952.
- Wolf, P.R. y Dewitt, B.A., Elements of Photogrammetry with Applications in GIS, McGraw-Hill, EEUU, 3ª edición (2000), ISBN 0-07-292454-3.
- Zhizhuo, W., Principles of Photogrammetry, Beijing, China (1990), ISBN 7-81030-00-8.

TEMA 3

INTRODUCCIÓN. ORIENTACIÓN INTERNA ANALÍTICA

- 3.1. Introducción**
- 3.2. Fases del proceso de restitución analítica**
- 3.3. Sistemas de coordenadas fotogramétricas**
- 3.4. Reconstrucción de los haces (Orientación Interna)**
 - 3.4.1. Transformación de coordenadas comparador**
 - 3.4.2. Corrección de distorsión**
 - 3.4.3. Corrección de esfericidad**
 - 3.4.4. Corrección de refracción**
 - 3.4.5. Determinación de coordenadas imagen**
- Bibliografía**

3.1. Introducción

La Fotogrametría como la ciencia, arte y técnica de obtener información fiable de los objetos y su entorno mediante el registro, medida e interpretación de imágenes fotográfica y datos obtenidos a partir de energía electromagnética radiante y otros fenómenos, definición del Manual de la Sociedad Americana de Fotogrametría, ha usado casi desde sus inicios a las fotografías como fuente primaria de información.

La fotografía no es más que el registro del haz perspectivo de rayos generados por el objeto por medio de una cámara métrica. El uso de la fotografía como fuente de información, aporta ventajas que no proporcionan los métodos de topografía clásica:

- *El registro es total, continuo y objetivo.*
- *Tiene un alto rendimiento.*
- *No interacciona con el objeto a medir.*
- *Es de fácil manejo y conservación.*

Pero todas las ventajas que se derivan de las posibilidades de este tipo de registro no tendrían sentido si no existiera un método que nos permitiera pasar de la información bidimensional, proporcionadas por las fotografías a la información tridimensional que necesitamos para determinar la forma, dimensiones

y posición en el espacio del objeto de nuestro estudio.

Este método conocido con el nombre de *Método General de la Fotogrametría* para el que es necesario dos fotografías tomadas desde dos puntos de vistas diferentes y a partir de la reconstrucción de la forma de cada uno de los haces y de sus situación en el espacio con respecto a un cierto sistema de referencia, usando el principio de la visión estereoscópica que permite identificar los rayos homólogos de cada haz, es capaz de proporcionarnos las coordenadas de cada uno de los puntos objetos.

La aplicación del método general no es más que la resolución de un problema de geometría de intersecciones entre dos haces perspectivos, abordado en la práctica por varios caminos.

La Fotogrametría Analítica, no es más que una de estas soluciones desarrollada en los últimos treinta años, gracias al avance experimentado en el sector informático, permitiendo desarrollar el gran volumen, gestión de datos y cálculo numérico que esta solución necesita.

Las distintas soluciones adoptadas a la hora de resolver la primera fase del Método General (reconstrucción de la forma de cada haz perspectivo, a partir de fotografías) han dado lugar a las siguientes tres soluciones:

- *Solución Analógica.*
- *Solución Analítica.*
- *Solución Digital.*

En la *solución analítica* se reconstruye matemáticamente la forma de cada haz, relacionando puntos y líneas en los diferentes sistemas (fotografía, modelo, terreno) y aplicando los principios geométricos existentes en el momento de la toma de vistas. Para obtener una solución al sistema, es necesario formular una serie de ecuaciones de condición que relacionen los valores medidos y los parámetros desconocidos. Estas ecuaciones de condición son: *condición de colinealidad, condición de coplaneidad y condición de transferencia de escala.*

La fotogrametría analítica se basa en las medidas de coordenadas realizadas sobre fotogramas, para poder pasar a través de cálculos correspondientes a las coordenadas terreno del objeto seleccionado desde dos posiciones distintas.

En la restitución analítica no se necesita formar ningún modelo plástico espacial y orientarlo según un sistema de coordenadas absolutas, para poder realizar sobre el, las mediciones de coordenadas de puntos del terreno (restitución analógica).

La solución del problema que entraña la obtención analítica de las coordenadas de un punto del terreno partir de las coordenadas imagen, pasa por la aplicación de varios métodos, que podemos englobarlos en dos grupos enunciados anteriormente (condición de colinealidad y coplaneidad).

El primer grupo de métodos (*aplicación de la condición de colinealidad –orientación en un paso–*), se calculan simultáneamente todos los elementos de orientación de los dos fotogramas, lo que obliga a la intersección de los rayos homólogos y que estos contengan a su vez a los puntos de apoyos.

El segundo grupo de métodos (*condición de coplaneidad o colinealidad –orientación en dos pasos–*) realiza la restitución por fases, obteniendo primero los elementos de orientación relativa, formando por ello la intersección de los rayos homólogos y seguidamente y tras el conocimiento de las coordenadas terreno de puntos comunes (modelo-terreno) realizar una transformación espacial de semejanza.

3.2. Fases de restitución analítica

Con independencia de si la orientación externa se realiza en uno o dos pasos, en general puede decirse que las fases son básicamente:

1. Medición de coordenadas del fotograma en el comparador, obteniéndose las coordenadas comparador.
2. Reconstrucción de los haces de rayos: obtención de las coordenadas imagen¹, tras realizar las correspondientes correcciones debidas a las distorsiones, a la refracción atmosférica y la esfericidad.
3. Cálculo y determinación de todos los elementos de orientación para los dos fotogramas.
4. Cálculo de las coordenadas terreno.

Los dos primeros pasos son comunes para cualquiera de los dos métodos elegidos para la restitución analítica.

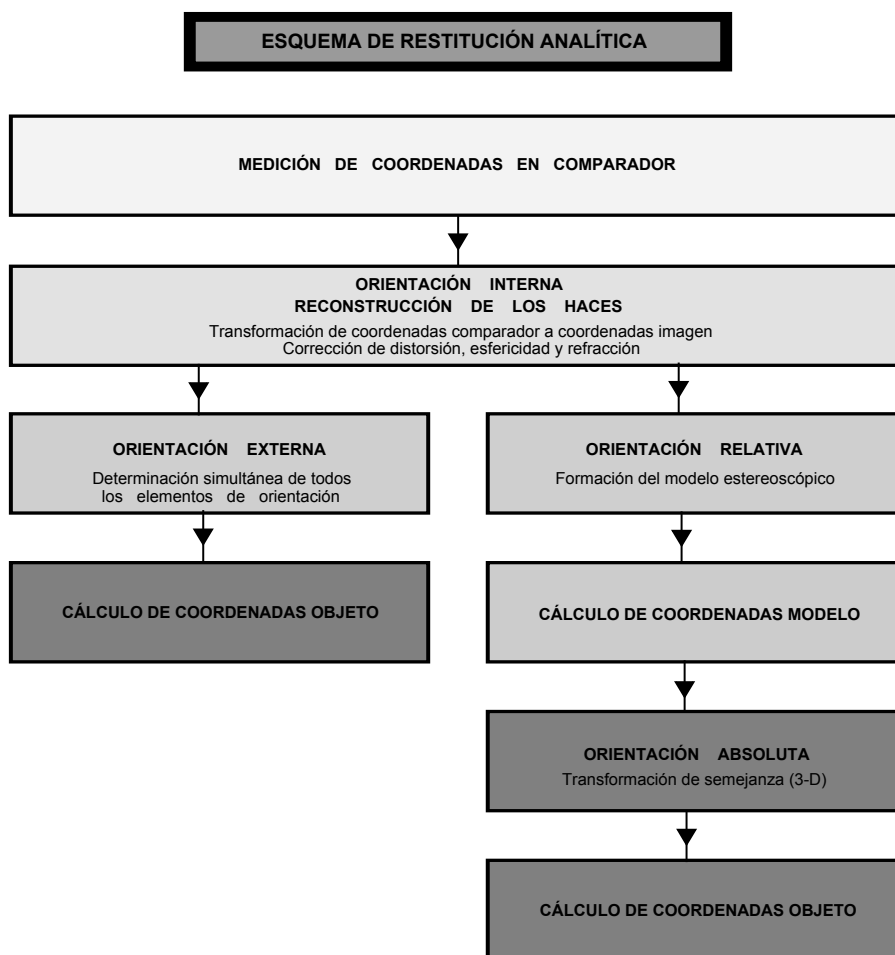


Figura 1. Esquema de fases de restitución analítica.

¹ Coordenadas imagen también llamadas coordenadas placas, placa o cliché. El sistema de coordenadas imagen es un sistema plano al que se le añade un tercer eje, perpendicular al plano de la fotografía, pasando por el centro de proyección al que consideramos origen de coordenadas.

3.3. Sistemas de coordenadas fotogramétricas

Los sistemas usados en fotogrametría son cartesianos y responden al conjunto de coordenadas que se pueden obtener de un mismo punto del terreno a lo largo de todo el proceso fotogramétrico de restitución (Fig. 2).

Por lo tanto nos encontraremos siempre y cuando realicemos dos tomas fotográficas de un objeto, los siguientes tipos de coordenadas:

- ☞ *Coordenadas comparador.* (x_k, y_k) . Coordenadas planas referidos a cualquier sistema cartesiano plano de la imagen del punto representado en el cliché. Para cualquier punto del objeto fotografiado tendremos dos pares de coordenadas.
 - ◆ Fotograma izquierdo: (x'_k, y'_k)
 - ◆ Fotograma derecho: (x''_k, y''_k)
- ☞ *Coordenadas imagen* (x', y', c) (x'', y'', c) . Coordenadas de la imagen de un punto respecto al sistema definido por las marcas fiduciales del fotograma y el eje principal, correspondiendo (x', y') al fotograma izquierdo y (x'', y'') al fotograma derecho.
- ☞ *Coordenadas modelo* (X, Y, Z) . Coordenadas de un punto en el modelo métrico, obtenido tras realizar la orientación relativa.
- ☞ *Coordenadas terreno* (X, Y, Z) . Coordenadas de un punto restituído en el sistema definido por los puntos de apoyos, es decir sistema absoluto de coordenadas.

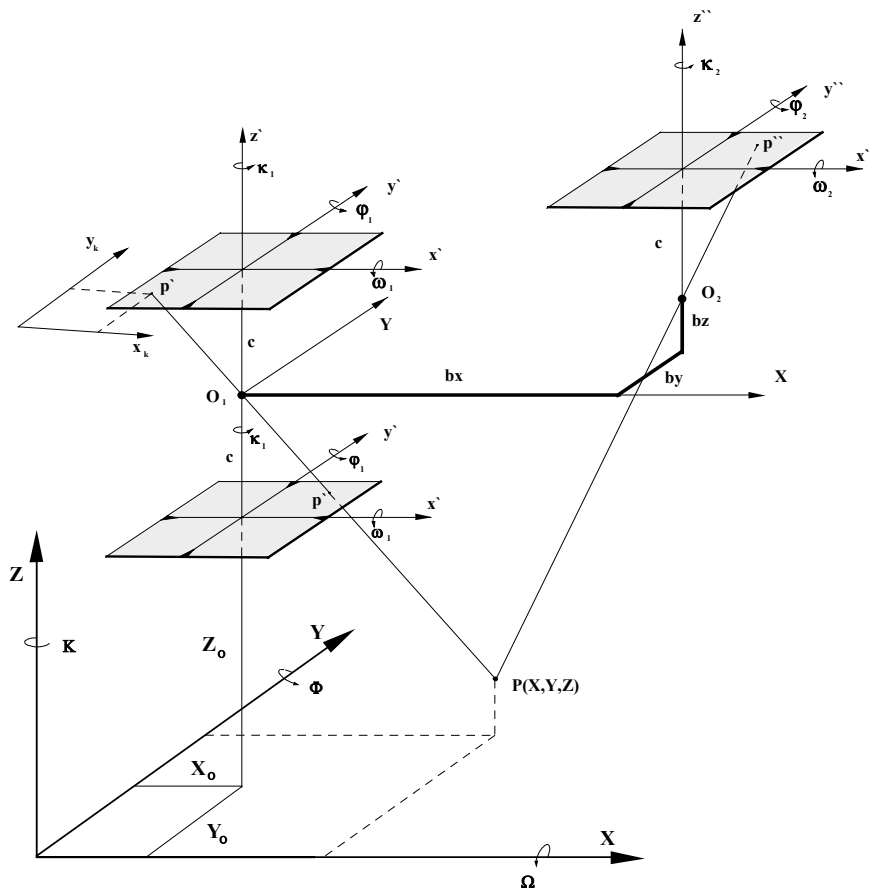


Figura 2. Sistema de coordenadas usadas en fotogrametría.

Sistemas de coordenadas y giros utilizados en la figura 2.

- Coordenadas comparador: (x_k, y_k)
- Coordenadas placas de la imagen izquierda /derecha: (x', y') (x'', y'')
- Constante focal de la cámara: c
- Punto del terreno; puntos imagen: P, p', p''
- Centros de proyección: O_1, O_2
- Componentes de la base: b_x, b_y, b_z
- Origen del sistema modelo con respecto al sistema terreno: (X_0, Y_0, Z_0)
- Coordenadas en el sistema de puntos de apoyos(terreno): (X, Y, Z)
- Coordenadas modelo: (X, Y, Z)
- Inclinación transversal: ω_1, ω_2
- Inclinación longitudinal: ϕ_1, ϕ_2
- Giro alrededor del eje Z: κ_1, κ_2
- Giro del modelo alrededor de los ejes terreno: Ω, Φ, K

3.4. Reconstrucción de los haces (orientación interna)

Obtenidas las coordenadas comparador, el paso siguiente es obtener las coordenadas imagen de la perspectiva de los mismos puntos medidos en el cliché, para que con ellas y unida a la distancia principal(focal) de la toma, podamos reconstruir cualquier rayo de la perspectiva definida por la toma fotogramétrica(se va a reconstruir el haz de rayos definido por los puntos imagen y el centro de proyección).

Hay que considerar ciertas fuentes de error del proceso fotogramétrico, que hacen que los puntos imagen no aparezcan en las posiciones teóricas, dadas por las leyes teóricas de la perspectiva.

Estas son:

- *El punto principal no coincide con el centro fiducial.*
- *La película fotogramétrica ha sufrido deformación.*
- *El objetivo está afectado de distorsión.*
- *La refracción atmosférica.*
- *La esfericidad terrestre.*

Para la obtención de las coordenadas imagen de la perspectiva, deberemos considerar las anteriores causas reagrupándolas de forma que las dos primeras nos fuerzan a la realización de una transformación de coordenadas y las tres últimas a corregir las coordenadas ya transformadas, a partir de las expresiones aproximadas que valoran dichas correcciones.

3.4.1. Transformación de las coordenadas comparador

Se pretende obtener las coordenadas transformadas del punto (x_T, y_T) a partir de las coordenadas comparador (x_K, y_K) . Hay que tener en cuenta conjuntamente la falta de coincidencia de los ejes y la deformación de la película. (Fig. 3).

Apliquemos la fórmula general de una transformación bidimensionales afin

$$\begin{aligned} x_F &= \lambda_x x_K \cos \alpha - \lambda_y y_K (\cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta) + T_x \\ y_F &= \lambda_x x_K \sin \alpha + \lambda_y y_K (\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta) + T_y \end{aligned}$$

donde T_X , T_Y el desplazamiento del sistema O_F con respecto al O_K . La expresión anterior puede expresarse en función de los parámetros a , b , c y d .

$$\begin{aligned} x_F &= a x_K - b y_K + T_X \\ y_F &= c x_K + d y_K + T_Y \end{aligned}$$

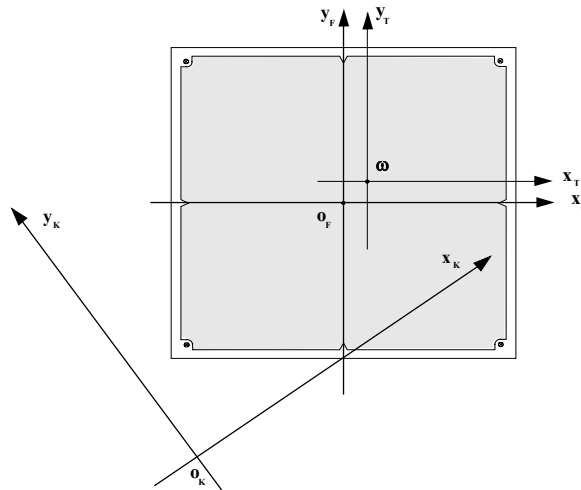


Figura 3. Transformación de las coordenadas comparador.

En forma matricial, las ecuaciones anteriores son:

$$\begin{bmatrix} x_F \\ y_F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_K \\ y_K \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_X \\ T_Y \end{bmatrix}$$

Las coordenadas transformadas serán:

$$\begin{aligned} x_T &= x_F - x_\omega \\ y_T &= y_F - y_\omega \end{aligned}$$

siendo (x_ω, y_ω) valores obtenidos por la calibración de la cámara (*datos conocidos –certificado de calibración de la cámara–*).

La determinación de los parámetros de la transformación se obtienen por aplicación de la metodología de mínimos cuadrados, tras la medición de las coordenadas de las marcas fiduciales en el comparador.

3.4.2. Corrección de distorsión

En el certificado de calibración de la cámara métrica viene la curva de distorsión radial correspondiente a cada una de las cuatro semidiagonales, marcando la distorsión radial en función de la distancia al punto principal de simetría.

De la tabla de distorsión de las cuatro semidiagonales pueden obtenerse en un gráfico las cuatro curvas de distorsión (*Fig. 5*)

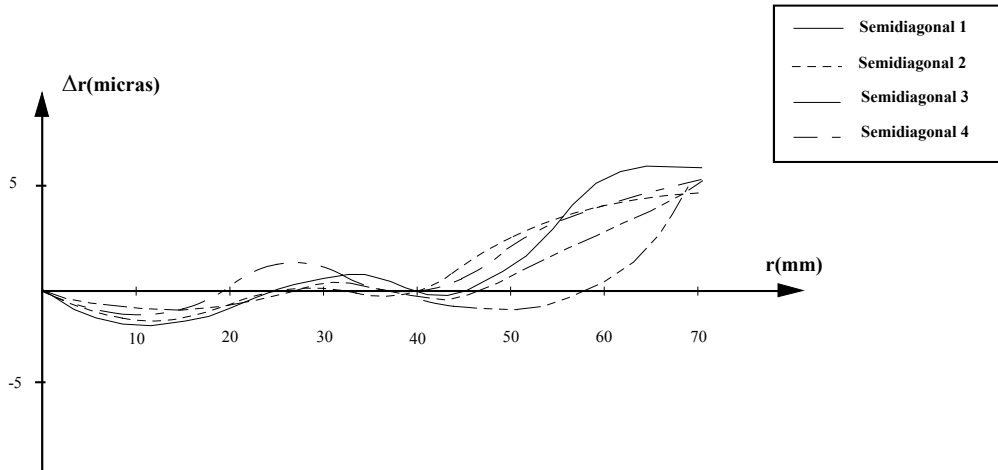


Fig.5. Curva de distorsión.

Las cuatro curvas suelen ser bastante coincidentes, tomándose la curva media para obtener los valores de la distorsión radial (*Fig. 6*).

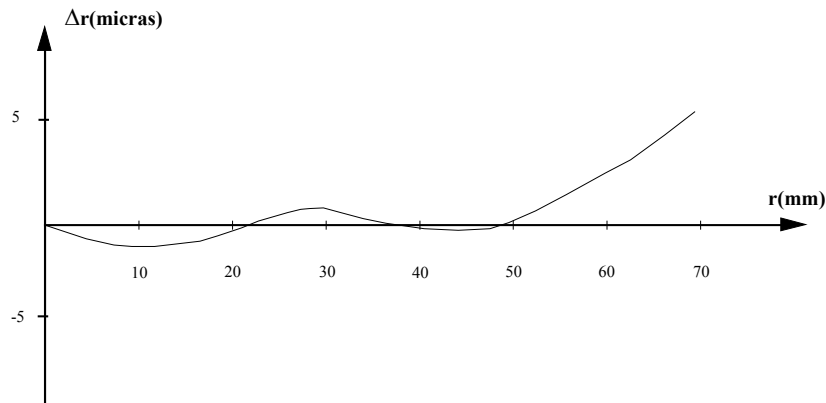


Figura 6. Curva media de distorsión.

Cuando se produce un descentrado en los elementos que componen la lente, se producirá una mayor variación entre las curvas, siendo la distorsión tangencial para cada curva, la diferencia entre la distorsión de la curva y la media de las cuatro curvas. La distorsión tangencial no se suele considerar nunca. Caso que su valor sea grande se procederá al arreglo de la lente.

La corrección por distorsión (*Fig. 7*) que se lleva a cabo es la radial y no la tangencial. Para cada punto tendremos una distancia al punto principal de simetría y a esa distancia le corresponde un valor en la curva de distorsión radial (Δr).

De la figura 7 se pueden obtener las siguientes relaciones:

$$x' = x_T + \Delta x_T = \frac{\Delta r x_T}{r} + x_T$$

$$y' = y_T + \Delta y_T = \frac{\Delta r y_T}{r} + y_T$$

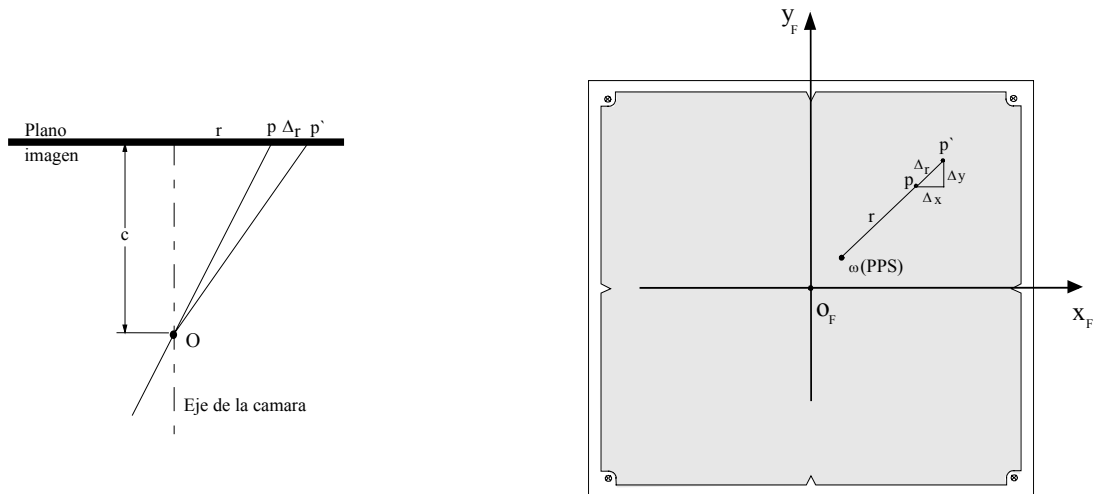


Figura 7. Corrección por distorsión.

El cálculo de la distorsión (Δr) radial se realizará por el método de aproximación a un polinomio de la distorsión radial de la lente. Este método consiste en aproximar la curva de distorsión a un polinomio de la forma:

$$\Delta r = a_1 r + a_2 r^3 + a_3 r^5 + a_4 r^7$$

Donde Δr es la distorsión radial de la lente, “ r ” es la distancia radial al punto principal. Los coeficientes a_1, a_2, a_3, a_4 definen la forma de la curva. Los valores de estos coeficientes se obtienen por aplicación de la metodología de mínimos cuadrados. (Fig. 8).

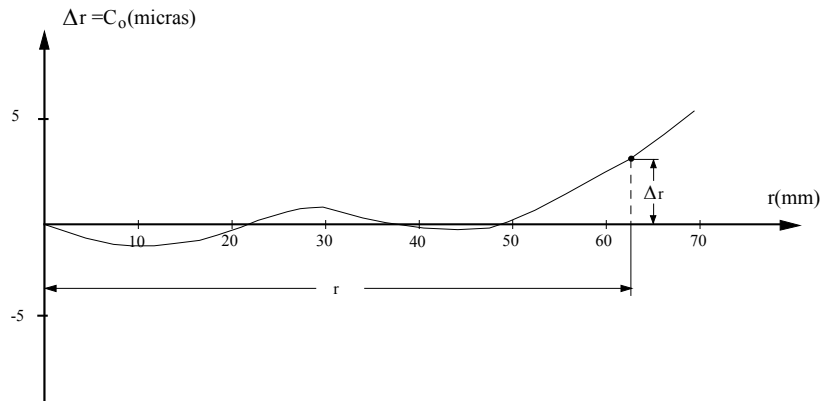


Figura.8. Curva de distorsión.

3.4.3. Corrección de esfericidad

La esfericidad terrestre produce una distorsión radial negativa(acerca los puntos radialmente). Es más importante cuanto más cerca de los bordes del fotograma se midan coordenadas.

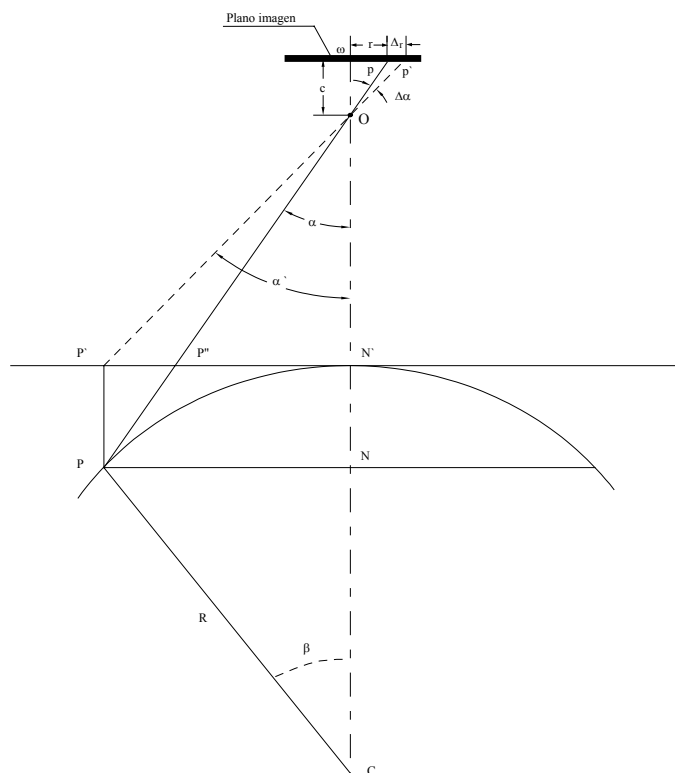


Figura 10. Corrección de esfericidad.

Podremos deducir de la figura 10 las expresiones:

$$r' = r + \Delta r \quad \alpha \approx \alpha' \quad P\bar{N}' = D$$

$$\text{tag} \alpha = \frac{r}{c} \Rightarrow \sec^2 \alpha \, d\alpha = \frac{dr}{c} \Rightarrow C_e = \Delta r = dr = c \sec^2 \alpha \, d\alpha = \frac{c}{\cos^2 \alpha} \, d\alpha$$

$$\text{sen} \beta = \frac{P\bar{N}}{R} \Rightarrow P\bar{N} = R \text{sen} \beta \approx P\bar{N}' = D$$

$$\text{cos} \beta = \frac{N\bar{C}}{R} \Rightarrow N\bar{C} = R \text{cos} \beta \approx R \left(1 - \frac{\beta^2}{2} \right) = R \left(1 - \frac{D^2}{2R^2} \right) = R - \frac{D^2}{2R}$$

$$NN' = R - N\bar{C} = R - R + \frac{D^2}{2R} = \frac{D^2}{2R}$$

$$\frac{r}{P\bar{N}} = \frac{c}{H + \frac{D^2}{2R}} \Rightarrow r = \frac{cD}{H + \frac{D^2}{2R}} = \frac{cD}{H} \frac{1}{\left(1 + \frac{D^2}{2RH} \right)} \approx \frac{cD}{H} \left(1 - \frac{D^2}{2RH} \right)$$

$$\text{tag} \alpha' = \frac{r'}{c} \Rightarrow r' = c \text{tag} \alpha' \approx c \text{tag} \alpha = \frac{cD}{H}$$

$$\Delta r = r' - r = \frac{cD}{H} - \frac{cD}{H} \left(1 - \frac{D^2}{2RH} \right) = \frac{cD^3}{2RH^2} = \frac{c}{2RH^2} \frac{H^3 r^3}{c^3} = \frac{Hr^3}{2Rc^2} = \frac{H}{2Rc^2} \left[\sqrt{(X_T^2 + Y_T^2)^3} \right]$$

La expresión que permite determinar la corrección de esfericidad resulta:

$$\Delta r = C_e = \frac{H}{2Rc^2} \left[\sqrt{(X_T^2 + Y_T^2)^3} \right]$$

3.4.4. Corrección de la refracción

La Refracción Atmosférica hace que la imagen de los puntos aparezca en los fotogramas más alejada del centro, de lo que en realidad le corresponde (la imagen de un punto P se ve desplazada a p' en vez de a p). Con lo cual es una corrección radial, análoga a la de distorsión, donde ($\Delta r = C_r$) puede obtenerse de la forma siguiente:

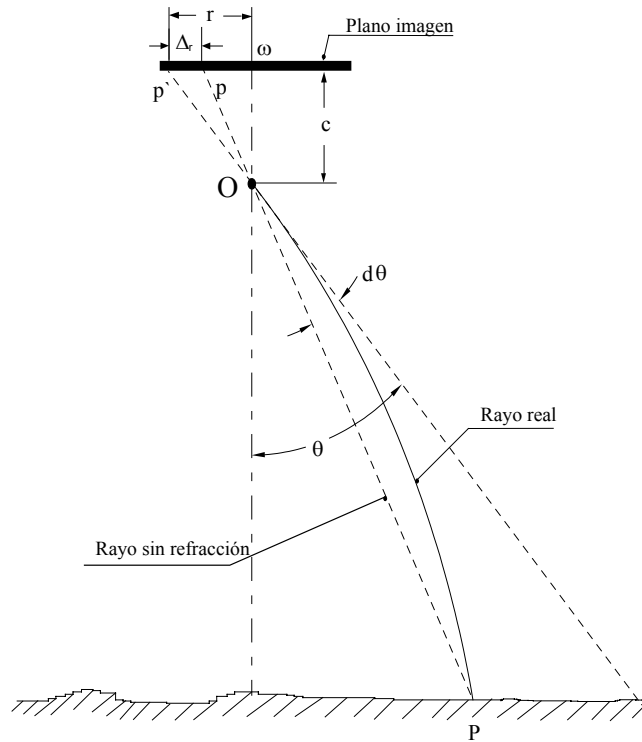


Figura 9. Corrección de refracción.

De la figura se deduce que:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{r}{c} \Rightarrow \sec^2 \theta d\theta = \frac{dr}{c} - \frac{r dc}{c^2} = \frac{dr}{c}$$

La corrección de refracción vendrá dada por la expresión:

$$C_r = \Delta r = dr = c \sec^2 \theta d\theta = \frac{c d\theta}{\cos^2 \theta} = \frac{\overline{OP}^2}{c} d\theta = \frac{r^2 + c^2}{c} d\theta$$

$$C_r = \frac{x_r^2 + y_r^2 + c^2}{c} d\theta$$

Para calcular el valor de $d\theta$ existen tablas en función de la altitud de vuelo y de las condiciones atmosféricas.

Otra forma de calcular esta corrección, partiendo de condiciones atmosféricas estándar establecidas por la Organización Internacional de Aviación Civil (ICAO) y tomas verticales:

$$C_r = (c^2 + x_T^2 + y_T^2) \left(\frac{\sqrt{x_T^2 + y_T^2}}{c^2} \right) d\theta_o$$

$$d\theta_o = \frac{T}{636620} - \frac{Q_o - Q_p}{Z_o - Z_p}$$

$$T = 178.46 - 17.14 Z_o + 0.6296 Z_o^2 - 0.01071 Z_o^3 + 0.000077 Z_o^4$$

$$Q_o = (2803.11 Z_o - 134.629 Z_o^2 + 3.2966 Z_o^3 - 0.04205 Z_o^4 + 0.000242 Z_o^5) 10^{-7}$$

$$Q_p = (2803.11 Z_p - 134.629 Z_p^2 + 3.2966 Z_p^3 - 0.04205 Z_p^4 + 0.000242 Z_p^5) 10^{-7}$$

Siendo:

- > c , distancia principal de la cámara métrica.
- > Z_o , altura de vuelo sobre el nivel del mar en Km.
- > Z_p , altura del terreno sobre el nivel del mar en km.
- > x_T, y_T , coordenadas transformadas en mm.

3.4.5. Determinación de las coordenadas imagen

Determinadas las coordenadas transformadas (x_T, y_T) quedaría suprimir los efectos producidos por la distorsión del objetivo de la cámara métrica, la refracción y la propia esfericidad terrestre sobre los rayos perspectivas, para obtener con ellos las coordenadas imágenes (x', y'). (Fig. 4).

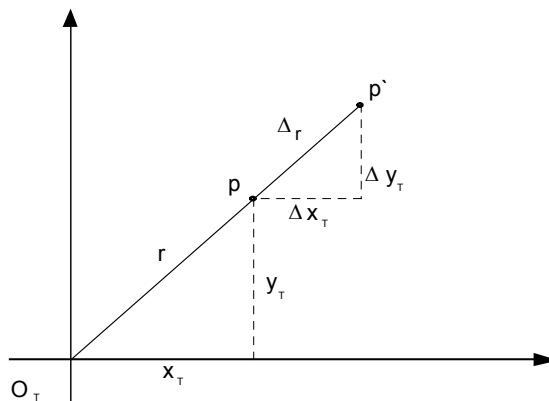


Figura 4. Corrección de distorsión, esfericidad y refracción.

De la figura 4 se deduce sin ningún problema las expresiones:

$$x' = x_T + \Delta x_T$$

$$y' = y_T + \Delta y_T$$

Por semejanza de triángulos (*Fig. 4*) se obtienen las relaciones:

$$\frac{\Delta r}{r} = \frac{\Delta x_T}{x_T} = \frac{\Delta y_T}{y_T}$$

Sustituyendo estas relaciones en las expresiones deducidas anteriormente tendremos:

$$x' = x_T + \frac{\Delta r}{r} x_T = x_T + \Delta r \left(\frac{x_T}{\sqrt{x_T^2 + y_T^2}} \right)$$

$$y' = y_T + \frac{\Delta r}{r} y_T = y_T + \Delta r \left(\frac{y_T}{\sqrt{x_T^2 + y_T^2}} \right)$$

Donde Δr es el efecto conjunto producido por la distorsión de la lente, refracción y esfericidad.

$$\Delta r = C_o + C_r + C_e$$

siendo respectivamente:

- C_o , corrección distorsión de la lente.
- C_r , corrección refracción de los rayos perspectivas.
- C_e , corrección esfericidad terrestre.

$$x' = x_T + (C_o + C_r + C_e) \left(\frac{x_T}{\sqrt{x_T^2 + y_T^2}} \right)$$

$$y' = y_T + (C_o + C_r + C_e) \left(\frac{y_T}{\sqrt{x_T^2 + y_T^2}} \right)$$

Bibliografía

- American Society of Photogrammetry. Manual of Photogrammetry, ASPRS, 4ª Edición (1980), ISBN 0-937294-01-2.
- Burnside, C.D., Mapping from Aerial Photographs, Mackays of Chatham, Kent, Londres (Inglaterra), 2ª edición (1985), ISBN 0-00-383036-5.
- Domingo Clavo, L., Apuntes de Fotogrametría II, Universidad Politécnica de Madrid (E.U.I.T.T.), Diciembre 1980.
- Ghosh, S.K., Analytical Photogrammetry, Pergamon Press, New York (USA), Segunda edición, 1988, 0-08-036103-X.
- Guillem, S y Herráez, B., Restitución analítica, Servicio de publicaciones de la Universidad Politécnica de Valencia, 1992.
- Krauss, K., Photogrammetry, Dümmler/Bonn (1993), ISBN 3-427-78684-6.
- Lerma, J.L., Problemas de Fotogrametría I, Servicio de publicaciones de la Universidad Politécnica de Valencia (1999), ISBN 84-7721-804-8.
- Moffitt, F.H. y Mikhail, E.M., Photogrammetry, Harper & Row Publishers., New York (1980), 3ª edición, ISBN 0-216-91996-7.
- Wolf, P.R. y Dewitt, B.A., Elements of Photogrammetry with Applications in GIS, McGraw-Hill, EEUU, 3ª edición (2000), ISBN 0-07-292454-3.

TEMA 4

ORIENTACIÓN EXTERNA. ORIENTACIÓN EN UN PASO

4.1. Introducción

4.2. Determinación simultánea de todos los elementos de orientación

4.3. Condición de colinealidad

4.4. Linealización de las ecuaciones de colinealidad

4.4.1. Coeficientes de la función lineal aproximada F_x

4.4.2. Coeficientes de la función lineal aproximada F_y

4.5. Proceso de cálculo

4.5.1. Sistema de ecuaciones indirectas

4.5.2. Solución del sistema

4.5.3. Método de la variación de coordenada imagen

4.6. Cálculo de las coordenadas terreno

Bibliografía

4.1. Introducción

La Fotogrametría como la ciencia, arte y técnica de obtener información fiable de los objetos y su entorno mediante el registro, medida e interpretación de imágenes fotográfica y datos obtenidos a partir de energía electromagnética radiante y otros fenómenos, definición del Manual de la Sociedad Americana de Fotogrametría, ha usado casi desde sus inicios a las fotografías como fuente primaria de información.

4.2. Determinación simultánea de todos los elementos de orientación

Una vez obtenidas las coordenadas imagen de los puntos proyectados y para poder realizar el proceso inverso de la perspectiva, es decir, obtener las coordenadas terreno de dichos puntos, es necesario situar los centros de proyección y los planos de la imagen en la misma posición espacial que cuando se realizaron las tomas, referenciando dichas posiciones al sistema de coordenadas absoluto del terreno. No sólo se pretende que la posición relativa entre las perspectivas se mantenga, lo cual se consigue con la orientación relativa sino a su vez, se obliga a que la intersección de los rayos homólogos se realice precisamente en el punto a restituir.

Se pretende desarrollar un proceso analítico de restitución de puntos cuyas imágenes se encuentran en dos tomas fotogramétricas sin tener por ello que realizar las consabidas orientaciones relativa y absoluta.

Para ello deberemos conocer los parámetros de orientación externa de las dos perspectivas obtenidas en el proceso fotogramétrico, lo cual se consigue por medio de aplicar la *condición de colinealidad*.

4.3. Condición de colinealidad

Condición que obliga a que se encuentren en la misma recta el centro de proyección, el punto imagen y el punto del terreno proyectado. De tal forma que si conseguimos esta condición en las dos perspectivas, queda asegurada la intersección de rayos homólogos en el punto del terreno prefijado (Fig. 1).

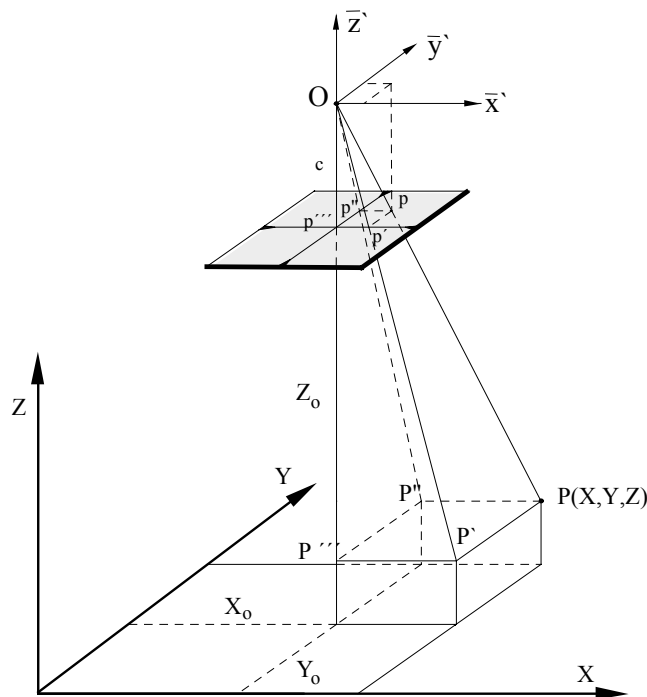


Figura 1. Condición de colinealidad.

Vamos a obtener primeramente la expresión analítica que expresa la condición de colinealidad entre dos puntos, para que con ayuda de esta, obtengamos los parámetros de orientación de la perspectiva central.

De la figura 1 se deduce fácilmente las relaciones siguientes:

$$\lambda = \frac{P'P'''}{p'p'''} = \frac{PP'}{pp'} = \frac{OP'''}{Op''}$$

$$\lambda = \frac{X - X_0}{x} = \frac{Y - Y_0}{y} = \frac{Z - Z_0}{z}$$

Expresado las anteriores relaciones en forma matricial tendremos que:

$$\begin{bmatrix} X - X_0 \\ Y - Y_0 \\ Z - Z_0 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (1)$$

Si al sistema de coordenadas imagen (x_p, y_p, z_p) se le imprimen las tres rotaciones $(\omega, \varphi, \kappa)$, el sistema pasará a ser el (x', y', z') (Fig. 2).

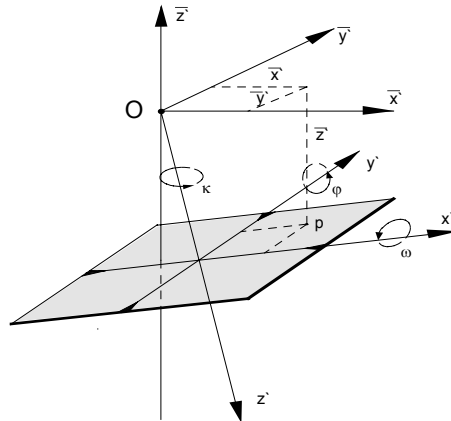


Figura 2. Rotaciones sobre el sistema de coordenadas imagen.

La transformación por rotación en el plano imagen será:

$$\begin{aligned} x &= a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}c \\ y &= a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}c \\ z &= a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}c \end{aligned}$$

Quedando en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ c \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ c \end{bmatrix} \quad (2)$$

donde R es la matriz de rotación $(\omega, \varphi, \kappa)$, siendo los valores de cada uno de los coeficientes:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \cos \varphi \cos \kappa \\ a_{12} &= -\cos \varphi \sin \kappa \\ a_{13} &= \sin \varphi \\ a_{21} &= \cos \omega \sin \kappa + \sin \omega \sin \varphi \cos \kappa \\ a_{22} &= \cos \omega \cos \kappa - \sin \omega \sin \varphi \sin \kappa \\ a_{23} &= -\sin \omega \cos \varphi \end{aligned}$$

$$a_{31} = \text{sen } \omega \text{ sen } \kappa - \text{cos } \omega \text{ sen } \varphi \text{ cos } \kappa$$

$$a_{32} = \text{sen } \omega \text{ cos } \kappa + \text{cos } \omega \text{ sen } \varphi \text{ sen } \kappa$$

$$a_{33} = \text{cos } \omega \text{ cos } \varphi$$

Sustituyendo en (1) los valores transformados del plano imagen (2), resulta:

$$\begin{bmatrix} X - X_o \\ Y - Y_o \\ Z - Z_o \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \lambda R \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ c \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ c \end{bmatrix} = \frac{1}{\lambda} R^{-1} \begin{bmatrix} X - X_o \\ Y - Y_o \\ Z - Z_o \end{bmatrix}$$

Dado que en una matriz ortogonal, se cumple que la matriz inversa es igual a la matriz traspuesta, y la matriz de rotación $[R]$ es ortogonal $[R^{-1}] = [R^T]$, llamando a $[R^{-1}] = [M]$, llegaremos a:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ c \end{bmatrix} = \frac{1}{\lambda} M \begin{bmatrix} X - X_o \\ Y - Y_o \\ Z - Z_o \end{bmatrix} = \frac{1}{\lambda} \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X - X_o \\ Y - Y_o \\ Z - Z_o \end{bmatrix}$$

Despejando las ecuaciones respectivamente tendremos:

$$x' = \frac{1}{\lambda} [m_{11}(X - X_o) + m_{12}(Y - Y_o) + m_{13}(Z - Z_o)]$$

$$y' = \frac{1}{\lambda} [m_{21}(X - X_o) + m_{22}(Y - Y_o) + m_{23}(Z - Z_o)]$$

$$c = \frac{1}{\lambda} [m_{31}(X - X_o) + m_{32}(Y - Y_o) + m_{33}(Z - Z_o)]$$

Dividiendo las dos primeras ecuaciones por la tercera y llevando al lado derecho la distancia principal de la cámara (c) obtendremos:

$$x' = -c \frac{m_{11}(X - X_o) + m_{12}(Y - Y_o) + m_{13}(Z - Z_o)}{m_{31}(X - X_o) + m_{32}(Y - Y_o) + m_{33}(Z - Z_o)}$$

(3)

$$y' = -c \frac{m_{21}(X - X_o) + m_{22}(Y - Y_o) + m_{23}(Z - Z_o)}{m_{31}(X - X_o) + m_{32}(Y - Y_o) + m_{33}(Z - Z_o)}$$

Expresiones que nos dan la condición de colinealidad. Estas ecuaciones contienen 12 cantidades independientes:

- Coordenadas imagen (x', y', c)
- Coordenadas del centro de proyección (X_o, Y_o, Z_o)
- Coordenadas del punto objeto (X, Y, Z)
- Elementos de rotación $(\omega, \varphi, \kappa)$ implícitos en los términos de la matriz $[M]$

La expresión (3) deducida anteriormente corresponden a una sola toma, es decir a un proyector. Las ecuaciones del segundo proyector se obtendrían de igual modo.

Estas ecuaciones pueden expresarse también de la forma siguiente:

$$\begin{bmatrix} X - X_o \\ Y - Y_o \\ Z - Z_o \end{bmatrix} = \lambda R \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ c \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ c \end{bmatrix}$$

Despejando para cada una de las coordenadas objeto:

$$\begin{aligned} X &= X_o + \lambda(a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}c) \\ Y &= Y_o + \lambda(a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}c) \\ Z &= Z_o + \lambda(a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}c) \end{aligned}$$

Dividiendo las dos primeras expresiones por la tercera tendremos:

$$\begin{aligned} X &= X_o + (Z - Z_o) \frac{a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}c}{a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}c} \\ Y &= Y_o + (Z - Z_o) \frac{a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}c}{a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}c} \end{aligned} \tag{4}$$

La distancia principal es siempre una cantidad conocida; (x', y') (x'', y'') son cantidades observadas normalmente. Si hay suficientes puntos de coordenadas conocidos en el sistema terreno y son estos observados y medidos en el instrumento, las incógnitas a resolver serán los tres giros del proyector izquierdo $(\omega_1, \varphi_1, \kappa_1)$ y los tres del proyector derecho $(\omega_2, \varphi_2, \kappa_2)$ y las coordenadas del centro de proyección izquierdo (X_{o1}, Y_{o1}, Z_{o1}) y derecho (X_{o2}, Y_{o2}, Z_{o2}) , en este caso se resolvería el problema de la *Intersección Inversa* en el espacio (3).

Si los giros y las coordenadas del centro de proyección en ambas tomas son conocidas, y efectuamos observaciones con el instrumento (x', y') , se pueden calcular coordenadas en el sistema terreno (X, Y, Z) , caso de la *Intersección Directa* en el espacio (4).

La dificultad que presentan estas ecuaciones cuando se utilizan para resolver las incógnitas correspondientes, es el hecho de no ser lineales. Un proceso de linealización ha de llevarse a cabo antes de obtener una solución simultánea de las ecuaciones. Además de la falta de linealidad de estas ecuaciones, a la hora de obtener los parámetros $(\omega_1, \varphi_1, \kappa_1)$ $(\omega_2, \varphi_2, \kappa_2)$ (X_{o1}, Y_{o1}, Z_{o1}) (X_{o2}, Y_{o2}, Z_{o2}) nos vamos a encontrar con la inexactitud de las observaciones realizadas (x', y') (x'', y'') .

4.4. Linealización de las ecuaciones de colinealidad

Las ecuaciones (3) pueden expresarse como:

$$\begin{aligned} F_x = 0 &= qx' + cr \\ F_y = 0 &= qy' + cs \end{aligned}$$

siendo:

$$\begin{aligned} q &= m_{31}(X - X_o) + m_{32}(Y - Y_o) + m_{33}(Z - Z_o) \\ r &= m_{11}(X - X_o) + m_{12}(Y - Y_o) + m_{13}(Z - Z_o) \\ s &= m_{21}(X - X_o) + m_{22}(Y - Y_o) + m_{23}(Z - Z_o) \end{aligned}$$

donde los términos $m_{11}, m_{12}, m_{13}, m_{21}, \dots$ son los coeficientes de la matriz $[M]$, con valores:

$$\begin{aligned} m_{11} &= \cos \varphi \cos \kappa \\ m_{12} &= \cos \omega \sin \kappa + \sin \omega \sin \varphi \cos \kappa \\ m_{13} &= \sin \omega \sin \kappa - \cos \omega \sin \varphi \cos \kappa \\ m_{21} &= -\cos \varphi \sin \kappa \\ m_{22} &= \cos \omega \cos \kappa - \sin \omega \sin \varphi \sin \kappa \\ m_{23} &= \sin \omega \cos \kappa + \cos \omega \sin \varphi \sin \kappa \\ m_{31} &= \sin \varphi \\ m_{32} &= -\sin \omega \cos \varphi \\ m_{33} &= \cos \omega \cos \varphi \end{aligned}$$

Aplicando el desarrollo en serie de Taylor a las anteriores ecuaciones, despreciando infinitésimos de segundo orden.

$$\begin{aligned} F_x = 0 &= (F_x)_0 + \left(\frac{\partial F_x}{\partial x'}\right)_0 dx' + \left(\frac{\partial F_x}{\partial X}\right)_0 dX + \left(\frac{\partial F_x}{\partial Y}\right)_0 dY + \left(\frac{\partial F_x}{\partial Z}\right)_0 dZ + \left(\frac{\partial F_x}{\partial X_o}\right)_0 dX_o + \\ &+ \left(\frac{\partial F_x}{\partial Y_o}\right)_0 dY_o + \left(\frac{\partial F_x}{\partial Z_o}\right)_0 dZ_o + \left(\frac{\partial F_x}{\partial \omega}\right)_0 d\omega + \left(\frac{\partial F_x}{\partial \varphi}\right)_0 d\varphi + \left(\frac{\partial F_x}{\partial \kappa}\right)_0 d\kappa \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} F_y = 0 &= (F_y)_0 + \left(\frac{\partial F_y}{\partial y'}\right)_0 dy' + \left(\frac{\partial F_y}{\partial X}\right)_0 dX + \left(\frac{\partial F_y}{\partial Y}\right)_0 dY + \left(\frac{\partial F_y}{\partial Z}\right)_0 dZ + \left(\frac{\partial F_y}{\partial X_o}\right)_0 dX_o + \\ &\left(\frac{\partial F_y}{\partial Y_o}\right)_0 dY_o + \left(\frac{\partial F_y}{\partial Z_o}\right)_0 dZ_o + \left(\frac{\partial F_y}{\partial \omega}\right)_0 d\omega + \left(\frac{\partial F_y}{\partial \varphi}\right)_0 d\varphi + \left(\frac{\partial F_y}{\partial \kappa}\right)_0 d\kappa \end{aligned} \quad (6)$$

donde $(F_x)_0, (F_y)_0$ son los valores de las ecuaciones originales particularizadas para valores aproximados de $X, Y, Z, X_o, Y_o, Z_o, \omega, \varphi, \kappa$ y los términos $\left(\frac{\partial F_x}{\partial x'}\right)_0, \left(\frac{\partial F_y}{\partial y'}\right)_0, \dots$ resultados de la aproximación.

De las funciones (5) y (6) los términos $\left(\frac{\partial Fx}{\partial x'}\right), \left(\frac{\partial Fy}{\partial y'}\right)$ son respectivamente:

$$\left(\frac{\partial Fx}{\partial x'}\right) = \left(\frac{\partial Fy}{\partial y'}\right) = q$$

pudiendo dividir todos los términos de las ecuaciones (5) y (6) por q .

4.4.1. Coeficientes de la función lineal aproximada Fx

$$\frac{\partial Fx}{\partial X} = \frac{1}{q}(x'm_{31} + cm_{11}) = A_{11}$$

$$\frac{\partial Fx}{\partial Y} = \frac{1}{q}(x'm_{32} + cm_{12}) = A_{12}$$

$$\frac{\partial Fx}{\partial Z} = \frac{1}{q}(x'm_{33} + cm_{13}) = A_{13}$$

$$\frac{\partial Fx}{\partial X_o} = -\frac{1}{q}(x'm_{31} + cm_{11}) = -A_{11}$$

$$\frac{\partial Fx}{\partial Y_o} = -\frac{1}{q}(x'm_{32} + cm_{12}) = -A_{12}$$

$$\frac{\partial Fx}{\partial Z_o} = -\frac{1}{q}(x'm_{33} + cm_{13}) = -A_{13}$$

$$\frac{\partial Fx}{\partial \omega} = \frac{x'}{q}[(Y - Y_o)(-\cos \omega \cos \varphi) + (Z - Z_o)(-\sin \omega \cos \varphi)] + \frac{c}{q}[(Y - Y_o)(-\sin \omega \sin \kappa + \cos \omega \sin \varphi \cos \kappa) +$$

$$+ (Z - Z_o)(\cos \omega \sin \kappa + \sin \omega \sin \varphi \cos \kappa)] = \frac{x'}{q}[(Y - Y_o)m_{33} + (Z - Z_o)m_{32}] + \frac{c}{q}[(Y - Y_o)m_{13} +$$

$$+ (Z - Z_o)m_{12}] = \frac{x'}{q}[-\Delta Y m_{33} + \Delta Z m_{32}] + \frac{c}{q}[-\Delta Y m_{13} + \Delta Z m_{12}] = A_{14}$$

$$\frac{\partial Fx}{\partial \varphi} = \frac{x'}{q}[(X - X_o)\cos \varphi + (Y - Y_o)(\sin \omega \sin \varphi) + (Z - Z_o)(-\cos \omega \sin \varphi)] + \frac{c}{q}[(X - X_o)(-\sin \varphi \cos \kappa) +$$

$$+ (Y - Y_o)(\sin \omega \cos \varphi \cos \kappa) + (Z - Z_o)(-\cos \omega \cos \varphi \cos \kappa)] = \frac{x'}{q}[\Delta X \cos \varphi + \Delta Y(\sin \omega \sin \varphi) +$$

$$+ \Delta Z(-\cos \omega \sin \varphi)] + \frac{c}{q}[\Delta X(-\sin \varphi \cos \kappa) + \Delta Y(\sin \omega \cos \varphi \cos \kappa) + \Delta Z(-\cos \omega \cos \varphi \cos \kappa)] = A_{15}$$

$$\frac{\partial Fx}{\partial \kappa} = \frac{c}{q}[(X - X_o)(\cos \omega \sin \kappa) + (Y - Y_o)(\cos \omega \cos \kappa - \sin \omega \sin \kappa) + (Z - Z_o)(\sin \omega \cos \kappa + \cos \omega \sin \kappa)] =$$

$$= \frac{c}{q}[\Delta X m_{21} + \Delta Y m_{22} + \Delta Z m_{23}] = A_{16}$$

Expresando la ecuación (4) como:

$$0 = dx' + A_{11}dX + A_{12}dY + A_{13}dZ - A_{11}dX_o - A_{12}dY_o - A_{13}dZ_o + A_{14}d\omega + A_{15}d\varphi + A_{16}d\kappa + P$$

donde $P = \frac{qx' + cr}{q}$

4.4.2. Coeficientes de la función lineal aproximada Fy

$$\frac{\partial Fy}{\partial X} = \frac{1}{q}(y'm_{31} + cm_{21}) = A_{21}$$

$$\frac{\partial Fy}{\partial Y} = \frac{1}{q}(y'm_{32} + cm_{22}) = A_{22}$$

$$\frac{\partial Fy}{\partial Z} = \frac{1}{q}(y'm_{33} + cm_{23}) = A_{23}$$

$$\frac{\partial Fy}{\partial X_o} = -\frac{1}{q}(y'm_{31} + cm_{21}) = -A_{21}$$

$$\frac{\partial Fy}{\partial Y_o} = -\frac{1}{q}(y'm_{32} + cm_{22}) = -A_{22}$$

$$\frac{\partial Fy}{\partial Z_o} = -\frac{1}{q}(y'm_{33} + cm_{23}) = -A_{23}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial Fy}{\partial \omega} &= \frac{y'}{q}[(Y - Y_o)(-\cos \omega \cos \varphi) + (Z - Z_o)(-\sin \omega \cos \varphi)] + \frac{c}{q}[(Y - Y_o)(-\sin \omega \cos \kappa - \cos \omega \sin \varphi \sin \kappa) + \\ &+ (Z - Z_o)(\cos \omega \cos \kappa - \sin \omega \sin \varphi \sin \kappa)] = \frac{y'}{q}[(Y - Y_o) - m_{33} + (Z - Z_o)m_{32}] + \frac{c}{q}[(Y - Y_o) - m_{23} + \\ &+ (Z - Z_o)m_{22}] = \frac{y'}{q}[-\Delta Y m_{33} + \Delta Z m_{32}] + \frac{c}{q}[-\Delta Y m_{23} + \Delta Z m_{22}] = A_{24} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial Fx}{\partial \varphi} &= \frac{y'}{q}[(X - X_o)\cos \varphi + (Y - Y_o)(\sin \omega \sin \varphi) + (Z - Z_o)(-\cos \omega \sin \varphi)] + \frac{c}{q}[(X - X_o)(\sin \varphi \sin \kappa) + \\ &+ (Y - Y_o)(-\sin \omega \cos \varphi \sin \kappa) + (Z - Z_o)(\cos \omega \cos \varphi \sin \kappa)] = \frac{y'}{q}[\Delta X \cos \varphi + \Delta Y(\sin \omega \sin \varphi) + \\ &+ \Delta Z(-\cos \omega \sin \varphi)] + \frac{c}{q}[\Delta X(\sin \varphi \sin \kappa) + \Delta Y(-\sin \omega \cos \varphi \sin \kappa) + \Delta Z(\cos \omega \cos \varphi \sin \kappa)] = A_{25} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial Fy}{\partial \kappa} &= \frac{c}{q}[(X - X_o)(\cos \omega \cos \kappa) + (Y - Y_o)(\cos \omega \sin \kappa - \sin \omega \sin \varphi \cos \kappa) + (Z - Z_o)(\sin \omega \sin \kappa + \cos \omega \sin \varphi \cos \kappa)] = \\ &= -\frac{c}{q}[\Delta X m_{11} + \Delta Y m_{12} + \Delta Z m_{13}] = A_{26} \end{aligned}$$

Expresando la ecuación (5) como:

$$0 = dy' + A_{21}dX + A_{22}dY + A_{23}dZ - A_{21}dX_o - A_{22}dY_o - A_{23}dZ_o + A_{24}d\omega + A_{25}d\varphi + A_{26}d\kappa + Q$$

con $Q = \frac{qy' + cs}{q}$

4.5. Proceso de cálculo

Una vez linealizadas las expresiones (3) y partiendo de las coordenadas de los puntos de apoyos, tanto en el terreno como en sistema imagen, podemos formar un sistema de ecuaciones a partir de:

$$0 = dx' + A_{11}dX + A_{12}dY + A_{13}dZ - A_{11}dX_o - A_{12}dY_o - A_{13}dZ_o + A_{14}d\omega + A_{15}d\varphi + A_{16}d\kappa + P$$

$$0 = dy' + A_{21}dX + A_{22}dY + A_{23}dZ - A_{21}dX_o - A_{22}dY_o - A_{23}dZ_o + A_{24}d\omega + A_{25}d\phi + A_{26}dk + Q$$

Siendo los coeficientes las derivadas parciales anteriormente descritas, pero particularizadas para valores aproximados de los parámetros de orientación y para las coordenadas del terreno (puntos de apoyo).

Todo sistema de ecuaciones formado con las anteriores expresiones se solucionará por aplicación de la metodología de mínimos cuadrados, aplicando la condición de que la suma de los cuadrados de los residuos sea mínima.

$$\Phi = \sum_{i=1}^n V_i^2 \quad i = 1, 2, 3, \dots, n$$

siendo V_i los residuos de las variables observadas, coordenadas imagen y coordenadas de los puntos de apoyo ($i = 4n + 3n$). En forma matricial (caso de observaciones de igual peso):

$$\Phi = [V]^T [V]$$

4.5.1. Sistema de ecuaciones indirectas

Lo primero que hay que conocer son las coordenadas de n puntos de apoyos ($n > 3$) y sus respectivas coordenadas imagen en dos fotogramas consecutivos y en segundo lugar, se deberá prefijar de antemano unos valores aproximados de los parámetros de orientación, tanto para el fotograma derecho como para el izquierdo.

El sistema quedará expresado en forma matricial, como:

$$[A] \begin{bmatrix} dx'_n \\ dy'_n \\ dx''_n \\ dy''_n \end{bmatrix} + [B] \begin{bmatrix} dX_n \\ dY_n \\ dZ_n \end{bmatrix} + [C] \begin{bmatrix} do_i \\ dg_i \\ do_d \\ dg_d \end{bmatrix} + [(F)_o] = 0$$

pudiendo reagruparse de forma:

$$[N] \begin{bmatrix} dx'_n \\ dy'_n \\ dx''_n \\ dy''_n \\ dX_n \\ dY_n \\ dZ_n \end{bmatrix} + [C][dP] + [(F)_o] = 0$$

donde $[(F)_o]$ = matriz columna formada por la diferencia entre coordenadas imagen observadas y calculadas, a partir de los parámetros aproximados en los dos fotogramas.

$$[(F)_0] = \begin{bmatrix} x'_{1(o)} - x'_{1(c)} \\ y'_{1(o)} - y'_{1(c)} \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ x'_{n(o)} - x'_{n(c)} \\ y'_{n(o)} - y'_{n(c)} \\ x''_{1(o)} - x''_{1(c)} \\ y''_{1(o)} - y''_{1(c)} \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ x''_{n(o)} - x''_{n(c)} \\ y''_{n(o)} - y''_{n(c)} \end{bmatrix}$$

Indicando los subíndices:

- (o) = observado
- (c) = calculado

- $x'_{1(o)}$ = coordenada imagen observada en la placa izquierda para el punto 1.
- $x'_{1(c)}$ = coordenada imagen calculada en la placa izquierda para el punto 1.
- $x''_{1(o)}$ = coordenada imagen observada en la placa derecha para el punto 1.
- $x''_{1(c)}$ = coordenada imagen calculada en la placa derecha para el punto 1.
- do_i = Corrección de las coordenadas del centro de proyección del fotograma izquierdo.
- dg_i = Corrección de los giros de la perspectiva izquierda.
- do_d = Corrección de las coordenadas del centro de proyección del fotograma derecho.
- dg_d = Corrección de los giros de la perspectiva derecha.
- dx'_n = Residuos de las coordenadas x' imagen de todos los puntos medidos en el fotograma izquierdo.
- dy'_n = Residuos de las coordenadas y' imagen de todos los puntos medidos en el fotograma izquierdo.
- dx''_n = Residuos de las coordenadas x'' imagen de todos los puntos medidos en el fotograma derecho.
- dy''_n = Residuos de las coordenadas y'' imagen de todos los puntos medidos en el fotograma derecho.
- dX_n = Residuos de las coordenadas X terreno de todos los puntos
- dY_n = Residuos de las coordenadas Y terreno de todos los puntos
- dZ_n = Residuos de las coordenadas Z terreno de todos los puntos

4.5.2. Solución del sistema

Partiendo del sistema anteriormente expuesto, las correcciones se obtendrán realizando la siguiente operación:

$$\begin{bmatrix} [N] \\ (4n, 4n+3n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [V] \\ (4n+3n, 1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [B] [dP] \\ (4n, 6) (6, 1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [(F)_0] \\ (4n, 1) \end{bmatrix} = 0$$

despejando los residuos de la anterior expresión:

$$[N][V] = -[B][dP] - [(F)_0] \Rightarrow [V] = -[N^{-1}][B][dP] - [N^{-1}][(F)_0]$$

$$[V] = [A][X] - [L]$$

donde: $[A] = -[N^{-1}][B]$; $[X] = [dP]$; $L = [N^{-1}][(F)_0]$

$$\Phi = V^T V \text{ (Condición de mínimo); } \frac{\partial \Phi}{\partial X} = \text{mínimo}$$

$$[X] = -([A^T][A])^{-1}[A^T][L]$$

Sustituyendo los valores anteriormente vistos, llegamos a:

$$[dP] = -[A^{-1}][A^{-1}]^T[A^T][L] = -([N^{-1}][B])^{-1}([N^{-1}][B])^T[N^{-1}][(F)_0]$$

$$[dP] = -[B^{-1}][N]([B^{-1}][N])^T[B^T][N^{-1}]^T[N^{-1}][(F)_0]$$

$$[dP] = -[B^{-1}][N]^T[N^T][B^{-1}]^T[B^T][N^{-1}]^T[N^{-1}][(F)_0]$$

Los parámetros de orientación serán después de la primera iteración:

Izquierdo

Derecho

$$X_o^i = X_{o(a)}^i + dX_o^i$$

$$X_o^d = X_{o(a)}^d + dX_o^d$$

$$Y_o^i = Y_{o(a)}^i + dY_o^i$$

$$Y_o^d = Y_{o(a)}^d + dY_o^d$$

$$Z_o^i = Z_{o(a)}^i + dZ_o^i$$

$$Z_o^d = Z_{o(a)}^d + dZ_o^d$$

$$\omega_1 = \omega_{1(a)} + d\omega_{1(o)}$$

$$\omega_2 = \omega_{2(a)} + d\omega_{2(o)}$$

$$\phi_1 = \phi_{1(a)} + d\phi_{1(o)}$$

$$\phi_2 = \phi_{2(a)} + d\phi_{2(o)}$$

$$\kappa_1 = \kappa_{1(a)} + d\kappa_{1(o)}$$

$$\kappa_2 = \kappa_{2(a)} + d\kappa_{2(o)}$$

definiendo con los subíndices (a) el carácter aproximado.

Tras varias iteraciones se obtendrá la solución final, utilizando por cada iteración los parámetros calculados en la anterior iteración, finalizando el proceso cuando los parámetros de orientación apenas varíen en la iteración "n" y "n+1".

4.5.3. Método de la variación de coordenadas imagen

El proceso de cálculo puede reducirse mucho si se consideran las coordenadas de los puntos de apoyos como exactas, siendo $dX=0$, $dY=0$, $dZ=0$, $dx'=0$, $dy'=0$, $dx''=0$, $dy''=0$ pudiéndose obtener por separado cada una de las dos perspectivas a partir de las expresiones:

$$\begin{bmatrix} dx'_n \\ dy'_n \end{bmatrix} + [B][dP] + [(F)_0] = 0 \quad \text{Haz izquierdo}$$

$$\begin{bmatrix} dx''_n \\ dy''_n \end{bmatrix} + [B][dP] + [(F)_0] = 0 \quad \text{Haz derecho}$$

Las dimensiones son:

$$\begin{matrix} [B] & [dP] & + & [(F)_0] & = & [V_n] \\ (2n,6) & (6,1) & & (6,1) & & (2n,1) \end{matrix}$$

Siendo en este caso la corrección de los parámetros:

$$[dP] = \left([B^T][B] \right)^{-1} [B^T] \left[- (F)_0 \right]$$

4.6. Cálculo de coordenadas terreno

Una vez obtenidos los parámetros definitivos de la orientación externa (X_0 , Y_0 , Z_0 , ω , φ , κ) para cada una de las dos placas, pueden obtenerse fácilmente las coordenadas terreno de cualquier puntos medido sobre el modelo, utilizando las ecuaciones (4)

$$X = X_0 + (Z - Z_0) \frac{a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}c}{a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}c}$$

$$Y = Y_0 + (Z - Z_0) \frac{a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}c}{a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}c}$$

Conocidas las coordenadas imagen de un punto P (x' , y') (x'' , y''), se pueden plantear un total de cuatro ecuaciones (dos para cada haz) del tipo anterior, donde las incógnitas a resolver son tres (X , Y , Z)

Así por ejemplo el haz izquierdo daría lugar a dos ecuaciones del tipo:

$$a_{31}Xx' - a_{31}X_0x' + a_{32}Xy' - a_{32}X_0y' - a_{33}Xc + a_{33}X_0c = a_{11}Zx' - a_{11}Z_0x' + a_{12}Zy' - a_{12}Z_0y' - a_{13}Zc + a_{13}Z_0c$$

$$a_{31}Yx' - a_{31}Y_0x' + a_{32}Yy' - a_{32}Y_0y' - a_{33}Yc + a_{33}Y_0c = a_{21}Zx' - a_{21}Z_0x' + a_{22}Zy' - a_{22}Z_0y' - a_{23}Zc + a_{23}Z_0c$$

Sacando las incógnitas de las expresiones anteriores tendremos:

$$X(a_{31}x' + a_{32}y' - a_{33}c) + Z(-a_{11}x' - a_{12}y' + a_{13}c) = X_0(a_{31}x' + a_{32}y' - a_{33}c) - Z_0(a_{11}x' + a_{12}y' - a_{13}c)$$

$$Y(a_{31}x' + a_{32}y' - a_{33}c) + Z(-a_{21}x' - a_{22}y' + a_{23}c) = Y_0(a_{31}x' + a_{32}y' - a_{33}c) - Z_0(a_{21}x' + a_{22}y' - a_{23}c)$$

Llamando

$$\begin{array}{lll} A_{11} = a_{31}x' + a_{32}y' - a_{33}c & A_{12} = 0 & A_{13} = -a_{11}x' - a_{12}y' + a_{13}c \\ A_{21} = 0 & A_{22} = a_{31}x' + a_{32}y' - a_{33}c & A_{23} = -a_{21}x' - a_{22}y' + a_{23}c \end{array}$$

$$\begin{aligned} L_1 &= X_0(a_{31}x' + a_{32}y' - a_{33}c) - Z_0(a_{11}x' + a_{12}y' - a_{13}c) \\ L_2 &= Y_0(a_{31}x' + a_{32}y' - a_{33}c) - Z_0(a_{21}x' + a_{22}y' - a_{23}c) \end{aligned}$$

Expresando el sistema de ecuaciones en forma matricial para los dos haces tendríamos:

$$\begin{array}{ccc} \begin{bmatrix} A_{11}^i & A_{12}^i & A_{13}^i \\ A_{21}^i & A_{22}^i & A_{23}^i \\ A_{11}^d & A_{12}^d & A_{13}^d \\ A_{21}^d & A_{22}^d & A_{23}^d \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} L_1^i \\ L_2^i \\ L_1^d \\ L_2^d \end{bmatrix} \\ [A] & [X] & & [L] \end{array}$$

Bibliografía

- American Society of Photogrammetry. Manual of Photogrammetry, ASPRS, 4ª edición (1980), ISBN 0-937294-01-2.
- Albert, J. & Kreiling, W., Manual Fotogramétrico de Bolsillo, Wichmann H., Alemania (1989), 4ª edición, ISBN 3-87907-176-4.
- Burnside, C.D., Mapping from Aerial Photographs, Mackays of Chatham, Kent, Londres(Inglaterra), 2ª edición (1985), ISBN 0-00-383036-5.
- Chueca, M., Topografía (Tomo II), Dossat, Madrid (1982), ISBN 84-237-0591-9.
- González, C., Apuntes de Fotogrametría Analítica, Universidad Politécnica de Madrid, (E.T.S.I.A.), 1997.
- Ghosh, S.K., Analytical Photogrammetry, Pergamon Press, New York (USA), 2ª edición (1988), ISBN 0-08-036103-X.
- Guillem, S y Herráez , B., Restitución analítica, Servicio de publicaciones de la Universidad Politécnica de Valencia, 1992.
- Krauss, K., Photogrammetry, Dümmler/Bonn (1993), ISBN 3-427-78684-6.
- Lerma, J.L., Problemas de Fotogrametría I, Servicio de publicaciones de la Universidad Politécnica de Valencia, 1999, ISBN 84-7721-804-8.
- López-Cuervo, S., Fotogrametría, Egraf S.A., Madrid (1980), ISBN 84-3000-2559-6.
- Moffitt, F.H. y Mikhail, E.M., Photogrammetry, Harper & Row Publishers., New York (1980), 3ª edición, ISBN 0-216-91996-7.
- Wolf, P.R. y Dewitt, B.A., Elements of Photogrammetry with Applications in GIS, McGraw-Hill, EEUU, 3ª edición (2000), ISBN 0-07-292454-3.
- Zhizhuo, W., Principles of Photogrammetry, Beijing, China (1990), ISBN 7-81030-00-8.

TEMA 5

ORIENTACIÓN EXTERNA. ORIENTACIÓN EN DOS PASOS

5.1. Introducción

5.2. Orientación relativa.

5.3. Condición de colinealidad

5.3.1 Expresión de la función linealizada

5.3.2. Valores aproximados. Ecuaciones de la paralaje.

5.4. Condición de coplaneidad

5.4.1. Linealización de la ecuación de coplaneidad

5.4.2. Coeficientes de la función lineal aproximada Δ

5.4.3. Sistemas de ecuaciones indirectas

5.5. Expresión de la ecuación para valores pequeños de los ángulos

5.6. Orientación relativa por empalme de fotos consecutivas

5.6.1. Linealización de la ecuación de coplaneidad

5.6.2. Coeficientes de la función lineal aproximada Δ

5.6.3. Sistemas de ecuaciones indirectas

5.6.4. Expresión de la ecuación Δ para valores pequeños de los ángulos

5.7. Orientación relativa de pares de fotos independientes

5.7.1. Linealización de la ecuación de coplaneidad

5.7.2. Coeficientes de la función lineal aproximada Δ

5.7.3. Sistemas de ecuaciones indirectas

5.7.4. Expresión de la ecuación Δ para valores pequeños de los ángulos

5.8. Cálculo de coordenadas modelo

5.8.1. Empalme de fotos consecutivas

5.8.2. Fotogramas independientes

5.9. Orientación absoluta

5.10. Cálculo de coordenadas terreno

Bibliografía

5.1. Introducción

En el caso de hacerse la orientación analítica externa en dos pasos el camino a seguir será el clásico de fotogrametría, es decir, primero se realiza la formación del modelo analítico (*orientación analítica relativa y cálculo de coordenadas modelo*) y se concluye con las fase de orientación absoluta y cálculo

de las coordenadas terreno, mediante una transformación tridimensional conforme de coordenadas.

5.2. Orientación relativa.

La orientación relativa se habrá realizado correctamente si se produce la intersección de todos los rayos homólogos. El mínimo número de puntos de intersección para lograr la formación del modelo es de cinco, distribuidos según Vön Grüber (Fig. 1).

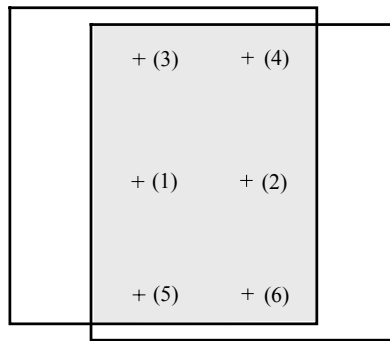


Figura 1. Distribución de Von Grüber sobre un par fotogramétrico.

La orientación relativa analítica consistirá, en la medida de coordenadas imagen de un número mínimo de puntos de dos tomas consecutivas y aplicación a cada uno de estos de la condición de coplaneidad (plano epipolar o nuclear) o por aplicación de la condición de colinealidad, con lo cual los dos rayos homólogos intersectan en un punto común del espacio modelo $P(X, Y, Z)$.

5.3. Condición de colinealidad

Pueden utilizarse las ecuaciones de colinealidad vistas en el tema anterior para resolver el problema de la reconstrucción numérica del método de orientación relativa de un solo proyector. Por ejemplo puede fijarse la fotografía izquierda a una determinada orientación y posición y asignar inicialmente para la escala modelo una base (bx) arbitraria. La fotografía de la derecha se ajusta aplicando rotaciones y traslaciones hasta que todas las paralajes del tipo P_y desaparezcan.

En la figura 2 puede apreciarse que las coordenadas del centro de proyección derecho ($X_{o_1}, Y_{o_1}, Z_{o_1}$) tienen unos ciertos valores (en el caso de la figura se le han asignado respectivamente para $X_{o_1}=0$, $Y_{o_1}=0$ y para Z_{o_1} un valor fijo, que por ejemplo puede ser la altura de vuelo). Respecto de las coordenadas del centro de proyección derecho ($X_{o_1}, Y_{o_1}, Z_{o_1}$), para X_{o_2} que es fijo, puede tomarse por ejemplo el valor de la base más la coordenada X_{o_1} , los restantes valores serán incógnitas a determinar durante el proceso de ajuste, al igual que los tres giros de la placa derecha.

Como se comentó anteriormente, la orientación relativa analítica se consigue imponiendo la condición de que los rayos intersecten en un punto, lo cual se consigue en este caso escribiendo colinealidad en ambas fotografías, al menos en cinco puntos objeto. La intersección de los rayos correspondientes se obtiene de forma automática ya que las ecuaciones de ambas fotografías para un punto objeto dado tienen las mismas coordenadas modelo para ese punto $O_1l'1$ y $O_2l''1$.

El sistema de ecuaciones de colinearidad que se forma contiene cinco incógnitas correspondientes a los elementos de orientación externa de la fotografía derecha ($Y_{o_2}=by, Z_{o_2}=bz, \omega_2, \varphi_2, \kappa_2$), más tres coordenadas desconocidas para cada punto objeto.

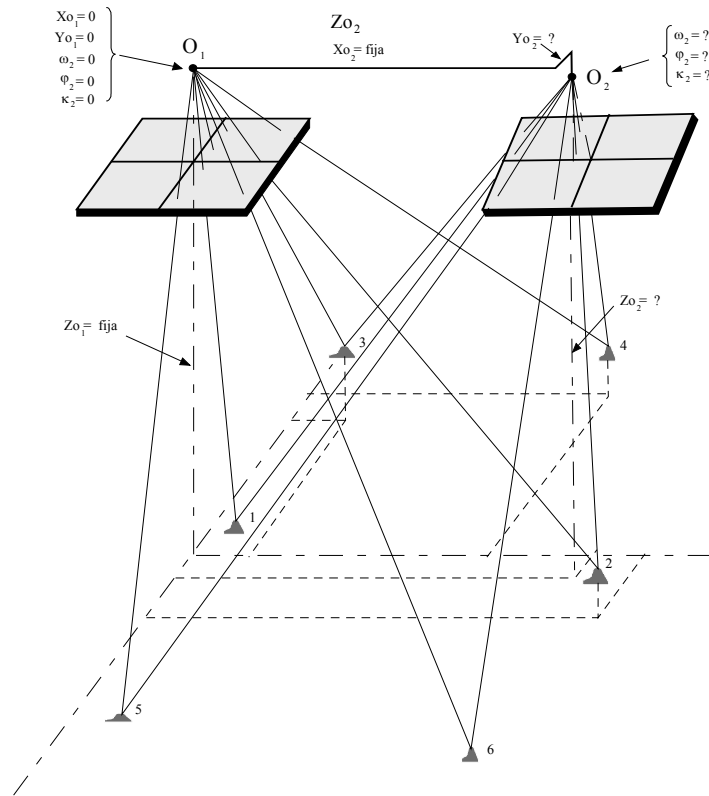


Figura 2. Modelo fotogramétrico objeto de orientación analítica relativa (condición de colinealidad).

Para cada punto utilizado en la orientación relativa pueden establecerse cuatro ecuaciones de colinealidad. A continuación se indican dos de estas ecuaciones:

$$x = -c \frac{m_{11}(X - X_o) + m_{12}(Y - Y_o) + m_{13}(Z - Z_o)}{m_{31}(X - X_o) + m_{32}(Y - Y_o) + m_{33}(Z - Z_o)}$$

$$y = -c \frac{m_{21}(X - X_o) + m_{22}(Y - Y_o) + m_{23}(Z - Z_o)}{m_{31}(X - X_o) + m_{32}(Y - Y_o) + m_{33}(Z - Z_o)}$$

5.3.1. Expresión de la función linealizada

Como ya se trató en el anterior tema (*apartado 4.4*), estas ecuaciones no son lineales y han de linealizarse usando el desarrollo en serie de Taylor, resultando:

$$F_x = 0 = (F_x)_0 + \left(\frac{\partial F_x}{\partial x'}\right)_0 dx' + \left(\frac{\partial F_x}{\partial X}\right)_0 dX + \left(\frac{\partial F_x}{\partial Y}\right)_0 dY + \left(\frac{\partial F_x}{\partial Z}\right)_0 dZ + \left(\frac{\partial F_x}{\partial X_o}\right)_0 dX_o +$$

$$+ \left(\frac{\partial F_x}{\partial Y_o}\right)_0 dY_o + \left(\frac{\partial F_x}{\partial Z_o}\right)_0 dZ_o + \left(\frac{\partial F_x}{\partial \omega}\right)_0 d\omega + \left(\frac{\partial F_x}{\partial \phi}\right)_0 d\phi + \left(\frac{\partial F_x}{\partial \kappa}\right)_0 d\kappa$$

$$F_y = 0 = (F_y)_0 + \left(\frac{\partial F_y}{\partial y'}\right)_0 dy' + \left(\frac{\partial F_y}{\partial X}\right)_0 dX + \left(\frac{\partial F_y}{\partial Y}\right)_0 dY + \left(\frac{\partial F_y}{\partial Z}\right)_0 dZ + \left(\frac{\partial F_y}{\partial X_o}\right)_0 dX_o +$$

$$\left(\frac{\partial F_y}{\partial Y_o}\right)_0 dY_o + \left(\frac{\partial F_y}{\partial Z_o}\right)_0 dZ_o + \left(\frac{\partial F_y}{\partial \omega}\right)_0 d\omega + \left(\frac{\partial F_y}{\partial \phi}\right)_0 d\phi + \left(\frac{\partial F_y}{\partial \kappa}\right)_0 d\kappa$$

Hay que tener en cuenta que en estas expresiones para los puntos de la placa izquierda, las correcciones a efectuar a las coordenadas del centro de proyección izquierdo (X_{O_1} , Y_{O_1} , Z_{O_1}), los tres giros de la placa de la derecha (ω_1 , φ_1 , κ_1) y X_{O_2} son cero ya que son cantidades constantes.

Los coeficientes de las expresiones anteriores expresiones se han visto en el apartado 4.4.

5.3.2. Valores aproximados. Ecuaciones de la paralaje

Para los valores aproximados de las incógnitas pueden tomarse para los giros el valor de cero ($\omega_2 = \varphi_2 = \kappa_2 = 0$), para $Y_{O_2} = 0$ y Z_{O_2} el mismo valor que para Z_{O_1} (por ejemplo H). Para las coordenadas de los puntos objeto (X , Y , Z) pueden obtenerse valores aproximados de las fotografía o mejor las que resultan de las ecuaciones de las paralaje, suponiendo un par estrictamente vertical, es decir, para un punto objeto P :

$$X_p = B \frac{x'_p}{x'_p - x''_p}$$

$$Y_p = B \frac{y'_p}{y'_p - y''_p}$$

$$Z_p = H - \frac{Bc}{x'_p - x''_p}$$

5.4. Condición de coplaneidad

Puede efectuarse el cálculo de los elementos de la orientación relativa analítica a partir de la condición de coplaneidad (plano epipolar o nuclear). Esta condición (Fig. 3) establece que los centros de proyección (O_1 , O_2), puntos imagen homólogos (p' , p'') y puntos objeto $P(X, Y, Z)$ han de estar contenido en un único plano.

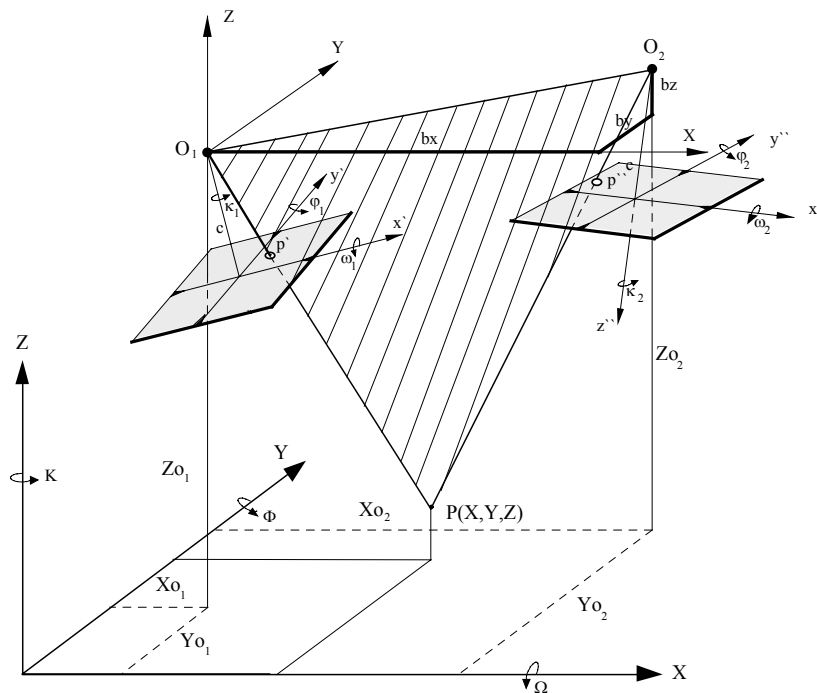


Figura 3. Condición de coplaneidad.

La condición de coplaneidad puede expresarse como:

$$\Delta = \begin{bmatrix} X_{o1} & Y_{o1} & Z_{o1} & 1 \\ X' & Y' & Z' & 1 \\ X_{o2} & Y_{o2} & Z_{o2} & 1 \\ X'' & Y'' & Z'' & 1 \end{bmatrix} = 0$$

Supongamos que el origen de coordenadas está en el centro de proyección izquierdo (O_1), la condición de coplaneidad (Fig. 4) puede expresarse de la forma siguiente:

$$\Delta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ bx & by & bz & 1 \\ \bar{x}' & \bar{y}' & \bar{z}' & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} bx & by & bz \\ \bar{x}' & \bar{y}' & \bar{z}' \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{bmatrix} = 0$$

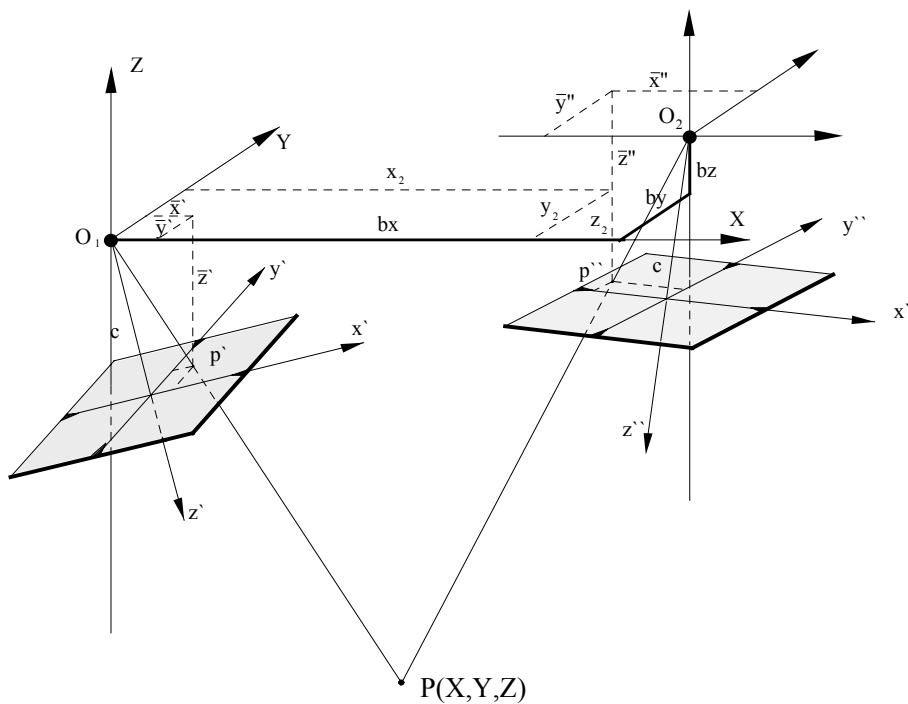


Figura 4. Sistema con origen en el centro de proyección izquierdo.

donde:

bx, by, bz son las coordenadas de O_2 en el sistema modelo

$\bar{x}', \bar{y}', \bar{z}'$ son las coordenadas de p' en el sistema modelo

x_2, y_2, z_2 son las coordenadas de p'' en el sistema modelo

Restando la primera fila de la última:

$$\Delta = \begin{bmatrix} bx & by & bz \\ \bar{x}' & y' & z' \\ x_2 - bx & y_2 - by & z_2 - bz \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} bx & by & bz \\ \bar{x}' & y' & z' \\ \bar{x}'' & \bar{y}'' & \bar{z}'' \end{bmatrix} = 0$$

donde $(\bar{x}_2, \bar{y}_2, \bar{z}_2)$ son las coordenadas del punto p'' respecto a O_2 en el sistema modelo.

Las rotación de cada una de las cámaras vendrán dadas por:

$$\begin{bmatrix} \bar{x}' \\ \bar{y}' \\ \bar{z}' \end{bmatrix} = [R_1] \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ c \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \bar{x}'' \\ \bar{y}'' \\ \bar{z}'' \end{bmatrix} = [R_2] \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ c \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \bar{x}' \\ \bar{y}' \\ \bar{z}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}^i & a_{12}^i & a_{13}^i \\ a_{21}^i & a_{22}^i & a_{23}^i \\ a_{31}^i & a_{32}^i & a_{33}^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ c \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \bar{x}'' \\ \bar{y}'' \\ \bar{z}'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}^d & a_{12}^d & a_{13}^d \\ a_{21}^d & a_{22}^d & a_{23}^d \\ a_{31}^d & a_{32}^d & a_{33}^d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ c \end{bmatrix}$$

La condición de coplaneidad puede expresarse de la forma siguiente:

$$\Delta = \begin{bmatrix} \bar{x}' & y' & z' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & bz & -by \\ -bz & 0 & bx \\ by & -bx & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}'' \\ y'' \\ z'' \end{bmatrix} = 0$$

$$\Delta = \begin{bmatrix} x' & y' & c \end{bmatrix} [R_1^T] \begin{bmatrix} 0 & bz & -by \\ -bz & 0 & bx \\ by & -bx & 0 \end{bmatrix} [R_2] \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ c \end{bmatrix} = 0$$

Sustituyendo ambas rotaciones en la expresión anterior llegaremos a:

$$\Delta = \begin{bmatrix} x' & y' & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11}^i & a_{21}^i & a_{31}^i \\ a_{12}^i & a_{22}^i & a_{32}^i \\ a_{13}^i & a_{23}^i & a_{33}^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & bz & -by \\ -bz & 0 & bx \\ by & -bx & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11}^d & a_{12}^d & a_{13}^d \\ a_{21}^d & a_{22}^d & a_{23}^d \\ a_{31}^d & a_{32}^d & a_{33}^d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ c \end{bmatrix} = 0$$

5.4.1. Linealización de la ecuación de coplaneidad

Partiendo de la expresión de la ecuación de coplaneidad y dividiendo la primera fila de esta expresión por bx , y llamando $\beta y = \frac{by}{bx}$, $\beta z = \frac{bz}{bx}$ obtendremos:

$$\Delta = \begin{bmatrix} 1 & \beta y & \beta z \\ \bar{x}' & \bar{y}' & \bar{z}' \\ \bar{x}'' & \bar{y}'' & \bar{z}'' \end{bmatrix} = 0$$

Desarrollando el determinante tendremos:

$$\Delta = (\bar{y}' \bar{z}'' - \bar{z}' \bar{y}'') + \beta y (\bar{z}' \bar{x}'' - \bar{x}' \bar{z}'') + \beta z (\bar{x}' \bar{y}'' - \bar{y}' \bar{x}'') = 0$$

siendo los coeficientes de la matriz de rotación del proyector derecho e izquierdo respectivamente:

$a_{11}^i = \cos \varphi_1 \cos \kappa_1$	$a_{11}^d = \cos \varphi_2 \cos \kappa_2$
$a_{12}^i = -\cos \varphi_1 \sin \kappa_1$	$a_{12}^d = -\cos \varphi_2 \sin \kappa_2$
$a_{13}^i = \sin \varphi_1$	$a_{13}^d = \sin \varphi_2$
$a_{21}^i = \cos \omega_1 \sin \kappa_1 + \sin \omega_1 \sin \varphi_1 \cos \kappa_1$	$a_{21}^d = \cos \omega_2 \sin \kappa_2 + \sin \omega_2 \sin \varphi_2 \cos \kappa_2$
$a_{22}^i = \cos \omega_1 \cos \kappa_1 - \sin \omega_1 \sin \varphi_1 \sin \kappa_1$	$a_{22}^d = \cos \omega_2 \cos \kappa_2 - \sin \omega_2 \sin \varphi_2 \sin \kappa_2$
$a_{23}^i = -\sin \omega_1 \cos \varphi_1$	$a_{23}^d = -\sin \omega_2 \cos \varphi_2$
$a_{31}^i = \sin \omega_1 \sin \kappa_1 - \cos \omega_1 \sin \varphi_1 \cos \kappa_1$	$a_{31}^d = \sin \omega_2 \sin \kappa_2 - \cos \omega_2 \sin \varphi_2 \cos \kappa_2$
$a_{32}^i = \sin \omega_1 \cos \kappa_1 + \cos \omega_1 \sin \varphi_1 \sin \kappa_1$	$a_{32}^d = \sin \omega_2 \cos \kappa_2 + \cos \omega_2 \sin \varphi_2 \sin \kappa_2$
$a_{33}^i = \cos \omega_1 \cos \varphi_1$	$a_{33}^d = \cos \omega_2 \cos \varphi_2$

Aplicando el desarrollo de Taylor a la expresión anterior (Δ) hasta el primer término, tendremos:

$$\Delta = (\Delta)_0 + \left(\frac{\partial \Delta}{\partial \beta y} \right)_0 d\beta y + \left(\frac{\partial \Delta}{\partial \beta z} \right)_0 d\beta z + \left(\frac{\partial \Delta}{\partial \omega_1} \right)_0 d\omega_1 + \left(\frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_1} \right)_0 d\varphi_1 + \left(\frac{\partial \Delta}{\partial \kappa_1} \right)_0 d\kappa_1 + \left(\frac{\partial \Delta}{\partial \omega_2} \right)_0 d\omega_2 + \left(\frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_2} \right)_0 d\varphi_2 + \left(\frac{\partial \Delta}{\partial \kappa_2} \right)_0 d\kappa_2$$

donde $(\Delta)_0$ es el valor de la ecuación general, particularizada para valores aproximados de $by, bz, \omega_1, \varphi_1, \kappa_1, \omega_2, \varphi_2, \kappa_2$, y los términos $\left(\frac{\partial \Delta}{\partial \beta y} \right)_0, \left(\frac{\partial \Delta}{\partial \beta z} \right)_0, \left(\frac{\partial \Delta}{\partial \omega_1} \right)_0, \dots, etc.$ resultado de la aproximación.

5.4.2. Coeficientes de la función lineal aproximada Δ

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \beta y} = \bar{x}'' z' - \bar{x}' z'' = B_{11}$$

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \beta z} = \bar{x}' \bar{y}'' - \bar{x}'' \bar{y}' = B_{12}$$

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \omega_1} = \left(z'' \frac{\partial y'}{\partial \omega_1} - y'' \frac{\partial z'}{\partial \omega_1} \right) + \beta y \left(\bar{x}'' \frac{\partial z'}{\partial \omega_1} - z'' \frac{\partial \bar{x}'}{\partial \omega_1} \right) + \beta z \left(\bar{y}'' \frac{\partial \bar{x}'}{\partial \omega_1} - \bar{x}'' \frac{\partial \bar{y}'}{\partial \omega_1} \right)$$

$$\frac{\partial y'}{\partial \omega_1} = x' (-\text{sen} \omega_1 \text{sen} \kappa_1 + \text{cos} \omega_1 \text{sen} \varphi_1 \text{cos} \kappa_1) + y' (-\text{sen} \omega_1 \text{cos} \kappa_1 - \text{cos} \omega_1 \text{sen} \varphi_1 \text{sen} \kappa_1) +$$

$$c(-\text{cos} \omega_1 \text{cos} \varphi_1) = -a_{31}^i x' - a_{32}^i y' - a_{33}^i c = -z'$$

$$\frac{\partial z'}{\partial \omega_1} = x' (\text{cos} \omega_1 \text{sen} \kappa_1 + \text{sen} \omega_1 \text{sen} \varphi_1 \text{cos} \kappa_1) + y' (\text{cos} \omega_1 \text{cos} \kappa_1 - \text{cos} \omega_1 \text{sen} \varphi_1 \text{sen} \kappa_1) +$$

$$c(-\text{sen} \omega_1 \text{cos} \varphi_1) = a_{21}^i x' + a_{22}^i y' + a_{23}^i c = \bar{y}'$$

$$\frac{\partial \bar{x}'}{\partial \omega_1} = 0$$

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \omega_1} = -(z'' z' + y'' \bar{y}') + \beta y (\bar{x}'' \bar{y}') + \beta z (\bar{x}'' z') = B_{13}$$

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_1} = \left(z'' \frac{\partial y'}{\partial \varphi_1} - y'' \frac{\partial z'}{\partial \varphi_1} \right) + \beta y \left(\bar{x}'' \frac{\partial z'}{\partial \varphi_1} - z'' \frac{\partial \bar{x}'}{\partial \varphi_1} \right) + \beta z \left(\bar{y}'' \frac{\partial \bar{x}'}{\partial \varphi_1} - \bar{x}'' \frac{\partial \bar{y}'}{\partial \varphi_1} \right)$$

$$\frac{\partial y'}{\partial \varphi_1} = x' (\text{sen} \omega_1 \text{cos} \varphi_1 \text{cos} \kappa_1) + y' (-\text{sen} \omega_1 \text{cos} \varphi_1 \text{sen} \kappa_1) + c (\text{sen} \omega_1 \text{sen} \varphi_1) = A_{11}$$

$$\frac{\partial z'}{\partial \varphi_1} = x' (-\text{cos} \omega_1 \text{cos} \varphi_1 \text{cos} \kappa_1) + y' (\text{cos} \omega_1 \text{cos} \varphi_1 \text{sen} \kappa_1) + c (-\text{cos} \omega_1 \text{sen} \varphi_1) = A_{12}$$

$$\frac{\partial \bar{x}'}{\partial \varphi_1} = x' (-\text{sen} \varphi_1 \text{cos} \kappa_1) + y' (\text{sen} \varphi_1 \text{sen} \kappa_1) + c (\text{cos} \varphi_1) = A_{13}$$

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_1} = (z'' A_{11} - y'' A_{12}) + \beta y (\bar{x}'' A_{12} - z'' A_{13}) + \beta z (\bar{y}'' A_{13} - \bar{x}'' A_{11}) = B_{14}$$

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \kappa_1} = \left(z'' \frac{\partial y'}{\partial \kappa_1} - y'' \frac{\partial z'}{\partial \kappa_1} \right) + \beta y \left(\bar{x}'' \frac{\partial z'}{\partial \kappa_1} - z'' \frac{\partial \bar{x}'}{\partial \kappa_1} \right) + \beta z \left(\bar{y}'' \frac{\partial \bar{x}'}{\partial \kappa_1} - \bar{x}'' \frac{\partial \bar{y}'}{\partial \kappa_1} \right)$$

$$\frac{\partial y'}{\partial \kappa_1} = x' (\text{cos} \omega_1 \text{cos} \kappa_1 - \text{sen} \omega_1 \text{sen} \varphi_1 \text{sen} \kappa_1) + y' (-\text{cos} \omega_1 \text{sen} \kappa_1 - \text{sen} \omega_1 \text{sen} \varphi_1 \text{cos} \kappa_1) +$$

$$= a_{22}^i x' - a_{21}^i y' = A_{14}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial z'}{\partial \kappa_1} &= x' (\text{sen} \omega_1 \text{cos} \kappa_1 + \text{cos} \omega_1 \text{sen} \varphi_1 \text{sen} \kappa_1) + y' (-\text{sen} \omega_1 \text{sen} \kappa_1 + \text{cos} \omega_1 \text{sen} \varphi_1 \text{cos} \kappa_1) + \\ &= a_{32}^i x' - a_{31}^i y' = A_{15}\end{aligned}$$

$$\frac{\partial x'}{\partial \kappa_1} = x' (-\text{cos} \varphi_1 \text{sen} \kappa_1) + y' (-\text{cos} \varphi_1 \text{cos} \kappa_1) = a_{12}^i x' - a_{11}^i y' = A_{16}$$

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \kappa_1} = (\bar{z}'' A_{14} - \bar{y}'' A_{15}) + \beta y (\bar{x}'' A_{15} - \bar{z}'' A_{16}) + \beta z (\bar{y}'' A_{16} - \bar{x}'' A_{14}) = B_{15}$$

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \omega_2} = \left(\bar{y}' \frac{\partial \bar{z}''}{\partial \omega_2} - \bar{z}' \frac{\partial \bar{y}''}{\partial \omega_2} \right) + \beta y \left(\bar{z}' \frac{\partial \bar{x}''}{\partial \omega_2} - \bar{x}' \frac{\partial \bar{z}''}{\partial \omega_2} \right) + \beta z \left(\bar{x}' \frac{\partial \bar{y}''}{\partial \omega_2} - \bar{y}' \frac{\partial \bar{x}''}{\partial \omega_2} \right)$$

$$\frac{\partial \bar{y}''}{\partial \omega_2} = x'' (-\text{sen} \omega_2 \text{sen} \kappa_2 + \text{cos} \omega_2 \text{sen} \varphi_2 \text{cos} \kappa_2) + y'' (-\text{sen} \omega_2 \text{cos} \kappa_2 - \text{cos} \omega_2 \text{sen} \varphi_2 \text{sen} \kappa_2) +$$

$$c (-\text{cos} \omega_2 \text{cos} \varphi_2) = -a_{31}^d x'' - a_{32}^d y'' - a_{33}^d c = -\bar{z}''$$

$$\frac{\partial \bar{z}''}{\partial \omega_2} = x'' (\text{cos} \omega_2 \text{sen} \kappa_2 + \text{sen} \omega_2 \text{sen} \varphi_2 \text{cos} \kappa_2) + y'' (\text{cos} \omega_2 \text{cos} \kappa_2 - \text{sen} \omega_2 \text{sen} \varphi_2 \text{sen} \kappa_2) +$$

$$c (-\text{sen} \omega_2 \text{cos} \varphi_2) = a_{21}^d x'' + a_{22}^d y'' + a_{23}^d c = \bar{y}''$$

$$\frac{\partial \bar{x}''}{\partial \omega_2} = 0$$

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \omega_2} = (\bar{z}'' \bar{z}' + \bar{y}'' \bar{y}') + \beta y (-\bar{y}'' \bar{x}') + \beta z (-\bar{z}'' \bar{x}') = B_{16}$$

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_2} = \left(\bar{y}' \frac{\partial \bar{z}''}{\partial \varphi_2} - \bar{z}' \frac{\partial \bar{y}''}{\partial \varphi_2} \right) + \beta y \left(\bar{z}' \frac{\partial \bar{x}''}{\partial \varphi_2} - \bar{x}' \frac{\partial \bar{z}''}{\partial \varphi_2} \right) + \beta z \left(\bar{x}' \frac{\partial \bar{y}''}{\partial \varphi_2} - \bar{y}' \frac{\partial \bar{x}''}{\partial \varphi_2} \right)$$

$$\frac{\partial \bar{y}''}{\partial \varphi_2} = x'' (\text{sen} \omega_2 \text{cos} \varphi_2 \text{cos} \kappa_2) + y'' (-\text{sen} \omega_2 \text{cos} \varphi_2 \text{sen} \kappa_2) + c (\text{sen} \omega_2 \text{sen} \varphi_2) = A_{21}$$

$$\frac{\partial \bar{z}''}{\partial \varphi_2} = x'' (-\text{cos} \omega_2 \text{cos} \varphi_2 \text{cos} \kappa_2) + y'' (\text{cos} \omega_2 \text{cos} \varphi_2 \text{sen} \kappa_2) + c (-\text{cos} \omega_2 \text{sen} \varphi_2) = A_{22}$$

$$\frac{\partial \bar{x}''}{\partial \varphi_2} = x'' (-\text{sen} \varphi_2 \text{cos} \kappa_2) + y'' (\text{sen} \varphi_2 \text{sen} \kappa_2) + c (\text{cos} \varphi_2) = A_{23}$$

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_2} = (-\bar{z}' A_{21} + \bar{y}' A_{22}) + \beta y (\bar{z}' A_{23} - \bar{x}' A_{22}) + \beta z (-\bar{y}' A_{23} + \bar{x}' A_{21}) = B_{17}$$

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \kappa_2} = \left(\bar{y}' \frac{\partial \bar{z}''}{\partial \kappa_2} - \bar{z}' \frac{\partial \bar{y}''}{\partial \kappa_2} \right) + \beta y \left(\bar{z}' \frac{\partial \bar{x}''}{\partial \kappa_2} - \bar{x}' \frac{\partial \bar{z}''}{\partial \kappa_2} \right) + \beta z \left(\bar{x}' \frac{\partial \bar{y}''}{\partial \kappa_2} - \bar{y}' \frac{\partial \bar{x}''}{\partial \kappa_2} \right)$$

$$\frac{\partial \bar{y}''}{\partial \kappa_2} = x'' (\text{cos} \omega_2 \text{cos} \kappa_2 - \text{sen} \omega_2 \text{sen} \varphi_2 \text{sen} \kappa_2) + y'' (-\text{cos} \omega_2 \text{sen} \kappa_2 - \text{sen} \omega_2 \text{sen} \varphi_2 \text{cos} \kappa_2) +$$

$$= a_{22}^d x'' - a_{21}^d y'' = A_{24}$$

Tras varias iteraciones se obtendrá la solución final, utilizando para cada iteración los parámetros calculados anteriormente.

5.5. Expresión de la ecuación de coplaneidad para valores pequeños

Partiendo de la expresión general

$$\Delta = \begin{bmatrix} bx & by & bz \\ \bar{x}' & \bar{y}' & \bar{z}' \\ \bar{x}'' & \bar{y}'' & \bar{z}'' \end{bmatrix} = 0$$

Considerando que los tres giros son valores pequeños, podemos expresar la anterior ecuación como:

$$\Delta = \begin{bmatrix} x' & y' & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \Delta\kappa_1 & -\Delta\varphi_1 \\ -\Delta\kappa_1 & 1 & \Delta\omega_1 \\ \Delta\varphi_1 & -\Delta\omega_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \beta z & -\beta y \\ -\beta z & 0 & 1 \\ \beta y & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\Delta\kappa_2 & \Delta\varphi_2 \\ \Delta\kappa_2 & 1 & -\Delta\omega_2 \\ -\Delta\varphi_2 & \Delta\omega_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ c \end{bmatrix} \approx 0$$

Desarrollando la expresión anterior quedándonos con los términos de primer orden:

$$\begin{aligned} & -x''y'(\beta z + \Delta\varphi_2) + x''c(\beta y - \Delta\kappa_2) + x'y''(\beta z + \Delta\varphi_1) - y'y''(\Delta\omega_1 - \Delta\omega_2) - y''c - x''c(\beta y - \Delta\kappa_1) - y'c - \\ & -c^2(\Delta\omega_1 - \Delta\omega_2) \approx 0 \end{aligned}$$

Expresión que corresponde a la *Ecuación General de la Paralaje*, donde los coeficientes están expresados en términos coordenadas imagen, en vez de coordenadas modelo.

5.6. Orientación relativa por empalme de fotos consecutivas

Supongamos que el sistema de referencia del modelo coincide con el sistema de referencia asociado a la primera fotografía (Fig. 5). Van a usarse componente de la base y elementos de rotación del haz derecho.

Por tanto $\omega_1 = \varphi_1 = \kappa_1 = 0$

La condición de coplaneidad quedará de la forma:

$$\Delta = \begin{bmatrix} x' & y' & z' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & bz & -by \\ -bz & 0 & bx \\ by & -bx & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{bmatrix} = 0$$

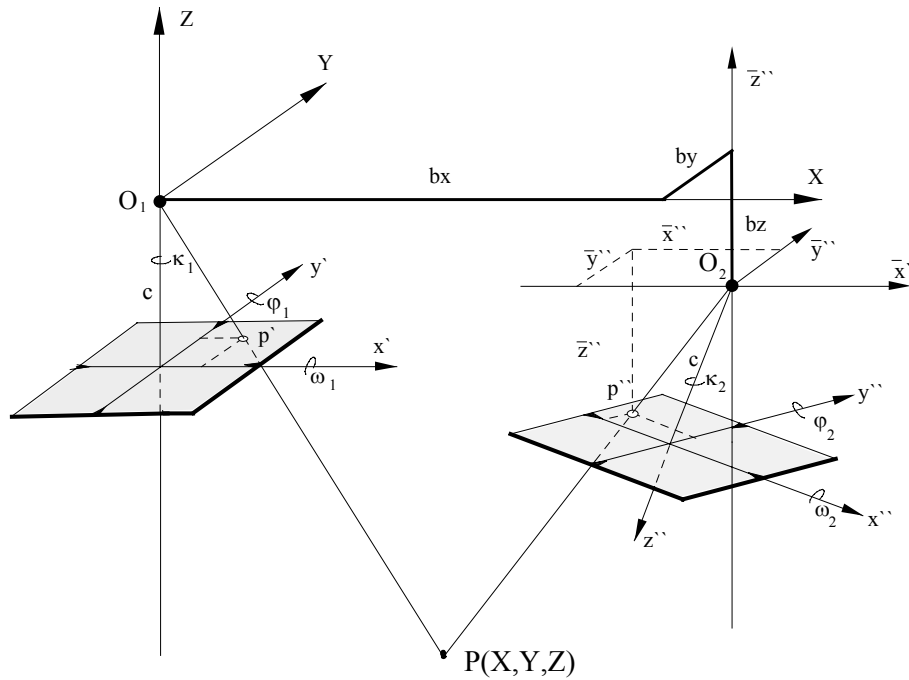


Figura 5. Orientación relativa por empalme de fotos consecutivas.

Sustituyendo en la expresión anteriormente vista de la condición la matriz de rotación de la placa derecha, tendremos:

$$\Delta = \begin{bmatrix} x' & y' & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & bz & -by \\ -bz & 0 & bx \\ by & -bx & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11}^d & a_{12}^d & a_{13}^d \\ a_{21}^d & a_{22}^d & a_{23}^d \\ a_{31}^d & a_{32}^d & a_{33}^d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ c \end{bmatrix} = 0$$

Incógnitas a resolver: $\beta_y, \beta_z, \omega_2, \phi_2, \kappa_2$

Llamando $\beta_z = \frac{bz}{bx}$, $\beta_y = \frac{by}{bx}$ (Componentes angulares de la base)

$$\Delta = \begin{bmatrix} x' & y' & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \beta_z & -\beta_y \\ -\beta_z & 0 & 1 \\ \beta_y & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11}^d & a_{12}^d & a_{13}^d \\ a_{21}^d & a_{22}^d & a_{23}^d \\ a_{31}^d & a_{32}^d & a_{33}^d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ c \end{bmatrix} = 0$$

5.6.1. Linealización de la ecuación Δ

Partiendo de la anterior expresión y aplicando el desarrollo en serie de Taylor, despreciando infinitésimos de segundo orden.

$$\Delta = (\Delta)_0 + \left(\frac{\partial \Delta}{\partial \beta_y} \right)_0 d\beta_y + \left(\frac{\partial \Delta}{\partial \beta_z} \right)_0 d\beta_z + \left(\frac{\partial \Delta}{\partial \omega_2} \right)_0 d\omega_2 + \left(\frac{\partial \Delta}{\partial \phi_2} \right)_0 d\phi_2 + \left(\frac{\partial \Delta}{\partial \kappa_2} \right)_0 d\kappa_2$$

donde $(\Delta)_0$ es el valor de la ecuación general, particularizada para valores aproximados de $b_y, b_z, \omega_2, \varphi_2, \kappa_2, \left(\frac{\partial \Delta}{\partial \beta y}\right)_0, \left(\frac{\partial \Delta}{\partial \beta z}\right)_0, \left(\frac{\partial \Delta}{\partial \omega_2}\right)_0, \dots, \text{etc.}$ resultado de la aproximación.

5.6.2. Coeficientes de la función lineal aproximada Δ

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \beta y} = \bar{x}'' z' - \bar{x}' z'' = B_{11}$$

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \beta z} = \bar{x}' y'' - \bar{x}'' y' = B_{12}$$

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \omega_2} = \left(\bar{y}' \frac{\partial z''}{\partial \omega_2} - \bar{z}' \frac{\partial y''}{\partial \omega_2} \right) + \beta y \left(\bar{z}' \frac{\partial \bar{x}''}{\partial \omega_2} - \bar{x}' \frac{\partial z''}{\partial \omega_2} \right) + \beta z \left(\bar{x}' \frac{\partial \bar{y}''}{\partial \omega_2} - \bar{y}' \frac{\partial \bar{x}''}{\partial \omega_2} \right)$$

$$\frac{\partial \bar{y}''}{\partial \omega_2} = \bar{x}'' (-\text{sen} \omega_2 \text{sen} \kappa_2 + \text{cos} \omega_2 \text{sen} \varphi_2 \text{cos} \kappa_2) + \bar{y}'' (-\text{sen} \omega_2 \text{cos} \kappa_2 - \text{cos} \omega_2 \text{sen} \varphi_2 \text{sen} \kappa_2) +$$

$$c (-\text{cos} \omega_2 \text{cos} \varphi_2) = -a_{31}^d \bar{x}'' - a_{32}^d \bar{y}'' - a_{33}^d c = -\bar{z}''$$

$$\frac{\partial \bar{z}''}{\partial \omega_2} = \bar{x}'' (\text{cos} \omega_2 \text{sen} \kappa_2 + \text{sen} \omega_2 \text{sen} \varphi_2 \text{cos} \kappa_2) + \bar{y}'' (\text{cos} \omega_2 \text{cos} \kappa_2 - \text{sen} \omega_2 \text{sen} \varphi_2 \text{sen} \kappa_2) +$$

$$c (-\text{sen} \omega_2 \text{cos} \varphi_2) = a_{21}^d \bar{x}'' + a_{22}^d \bar{y}'' + a_{23}^d c = \bar{y}''$$

$$\frac{\partial \bar{x}''}{\partial \omega_2} = 0$$

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \omega_2} = (\bar{z}'' z' + \bar{y}'' y') + \beta y (-\bar{y}'' \bar{x}') + \beta z (-\bar{z}'' \bar{x}') = B_{16}$$

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_2} = \left(\bar{y}' \frac{\partial z''}{\partial \varphi_2} - \bar{z}' \frac{\partial y''}{\partial \varphi_2} \right) + \beta y \left(\bar{z}' \frac{\partial \bar{x}''}{\partial \varphi_2} - \bar{x}' \frac{\partial z''}{\partial \varphi_2} \right) + \beta z \left(\bar{x}' \frac{\partial \bar{y}''}{\partial \varphi_2} - \bar{y}' \frac{\partial \bar{x}''}{\partial \varphi_2} \right)$$

$$\frac{\partial \bar{y}''}{\partial \varphi_2} = \bar{x}'' (\text{sen} \omega_2 \text{cos} \varphi_2 \text{cos} \kappa_2) + \bar{y}'' (-\text{sen} \omega_2 \text{cos} \varphi_2 \text{sen} \kappa_2) + c (\text{sen} \omega_2 \text{sen} \varphi_2) = A_{21}$$

$$\frac{\partial \bar{z}''}{\partial \varphi_2} = \bar{x}'' (-\text{cos} \omega_2 \text{cos} \varphi_2 \text{cos} \kappa_2) + \bar{y}'' (\text{cos} \omega_2 \text{cos} \varphi_2 \text{sen} \kappa_2) + c (-\text{cos} \omega_2 \text{sen} \varphi_2) = A_{22}$$

$$\frac{\partial \bar{x}''}{\partial \varphi_2} = \bar{x}'' (-\text{sen} \varphi_2 \text{cos} \kappa_2) + \bar{y}'' (\text{sen} \varphi_2 \text{sen} \kappa_2) + c (\text{cos} \varphi_2) = A_{23}$$

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_2} = (-\bar{z}' A_{21} + \bar{y}' A_{22}) + \beta y (\bar{z}' A_{23} - \bar{x}' A_{22}) + \beta z (-\bar{y}' A_{23} + \bar{x}' A_{21}) = B_{17}$$

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \kappa_2} = \left(\bar{y}' \frac{\partial z''}{\partial \kappa_2} - \bar{z}' \frac{\partial y''}{\partial \kappa_2} \right) + \beta y \left(\bar{z}' \frac{\partial \bar{x}''}{\partial \kappa_2} - \bar{x}' \frac{\partial \bar{z}''}{\partial \kappa_2} \right) + \beta z \left(\bar{x}' \frac{\partial \bar{y}''}{\partial \kappa_2} - \bar{y}' \frac{\partial \bar{x}''}{\partial \kappa_2} \right)$$

$$\frac{\partial y''}{\partial \kappa_2} = x'' (\cos \omega_2 \cos \kappa_2 - \sin \omega_2 \sin \varphi_2 \sin \kappa_2) + y'' (-\cos \omega_2 \sin \kappa_2 - \sin \omega_2 \sin \varphi_2 \cos \kappa_2) +$$

$$= a_{22}^d x'' - a_{21}^d y'' = A_{24}$$

$$\frac{\partial \bar{z}''}{\partial \kappa_2} = x'' (\sin \omega_2 \cos \kappa_2 + \cos \omega_2 \sin \varphi_2 \sin \kappa_2) + y'' (-\sin \omega_2 \sin \kappa_2 + \cos \omega_2 \sin \varphi_2 \cos \kappa_2) +$$

$$= a_{32}^d x'' - a_{31}^d y'' = A_{25}$$

$$\frac{\partial \bar{x}''}{\partial \kappa_2} = x'' (-\cos \varphi_2 \sin \kappa_2) + y'' (-\cos \varphi_2 \cos \kappa_2) = a_{12}^d x'' - a_{11}^d y'' = A_{26}$$

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \kappa_2} = (\bar{y}' A_{25} - \bar{z}' A_{24}) + \beta y (\bar{z}' A_{26} - \bar{x}' A_{25}) + \beta z (\bar{x}' A_{24} - \bar{y}' A_{26}) = B_{18}$$

5.6.3. Sistema de ecuaciones indirectas

Midiéndose las coordenadas imagen de un número de puntos ($n \geq 5$) en dos fotogramas consecutivos y fijándose para los parámetros de orientación valores aproximados.

$$\begin{bmatrix} B_{11}^1 & B_{12}^1 & B_{13}^1 & B_{14}^1 & B_{15}^1 \\ B_{11}^2 & B_{12}^2 & B_{13}^2 & B_{14}^2 & B_{15}^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ B_{11}^n & B_{12}^n & B_{13}^n & B_{14}^n & B_{15}^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\beta y \\ d\beta z \\ d\omega_2 \\ d\varphi_2 \\ d\kappa_2 \end{bmatrix} + [-(\Delta_0)] = 0$$

$$[B] \quad [X] + [-(\Delta)_0] = 0$$

Sistema que se resolverá por la metodología de mínimos cuadrados expresada anteriormente.

Parámetros de orientación tras la primera iteración:

$$\beta y^i = \beta y_a^i + d\beta y^i \quad \beta z^i = \beta z_a^i + d\beta z^i$$

$$\omega_2^i = \omega_{2a}^i + d\omega_2^i \quad \varphi_2^i = \varphi_{2a}^i + d\varphi_2^i$$

$$\kappa_2^i = \kappa_{2a}^i + d\kappa_2^i$$

Los subíndices "a" representan el valor aproximado.

Tras varias iteraciones se obtendrá la solución final, utilizando para cada iteración los parámetros calculados anteriormente.

5.6.4. Expresión de la ecuación para valores pequeños

$$\Delta = \begin{bmatrix} x' & y' & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \beta z & -\beta y \\ -\beta z & 0 & 1 \\ \beta y & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\Delta\kappa_2 & \Delta\phi_2 \\ \Delta\kappa_2 & 1 & -\Delta\omega_2 \\ -\Delta\phi_2 & \Delta\omega_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ c \end{bmatrix} \approx 0$$

Desarrollando la expresión anterior quedándonos con los términos de primer orden:

$$\beta z (x'y'' - x''y') + c\beta y (x'' - x') - \Delta\phi_2 (x''y') - \Delta\kappa_2 (cx'') + \Delta\omega_2 (y'y'' + c^2) + c (y'' - y') \approx 0$$

5.7. Orientación relativa de pares de fotos independientes

Elegimos el sistema de coordenadas modelo, de tal modo que el origen se encuentre en O_1 y el eje x pase por el centro de proyección del segundo proyector O_2 y el eje y sea paralelo al plano (x', y') , con lo cual $\omega_1 = \beta y = \beta z = 0$ (Fig. 6).

Van a usarse solamente los elementos de rotación $\phi_1, \kappa_1, \omega_2, \phi_2, \kappa_2$ (incógnitas)

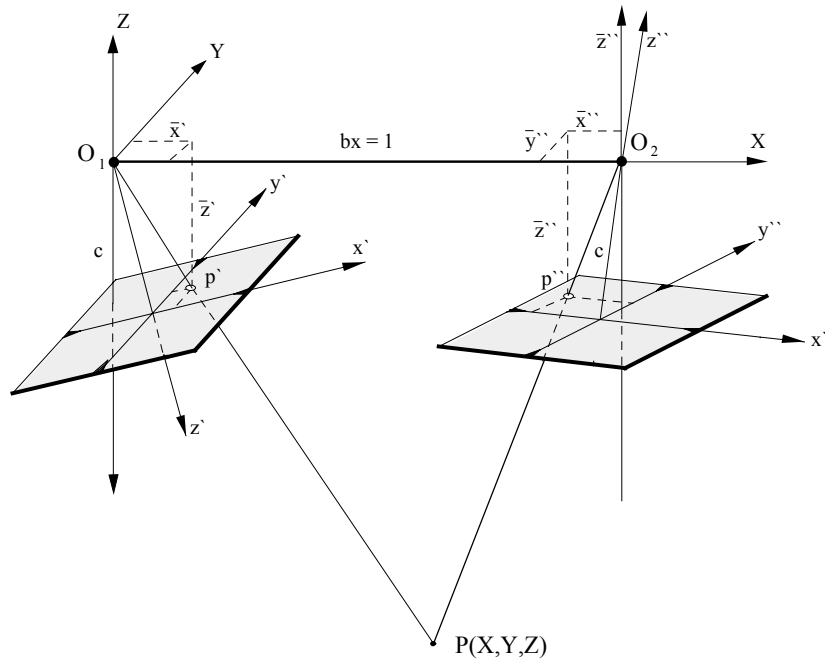


Figura 6. Orientación relativa de pares de fotos independientes.

En este caso la condición de coplaneidad vendrá dada por la expresión:

$$\Delta = \begin{bmatrix} \bar{x}' & \bar{y}' & \bar{z}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & bz & -by \\ -bz & 0 & bx \\ by & -bx & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}'' \\ \bar{y}'' \\ \bar{z}'' \end{bmatrix} = 0$$

Sustituyendo en la expresión anterior las rotaciones de cada una de las placas tendremos:

$$\Delta = \begin{bmatrix} x' & y' & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [R_1^T] \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [R_2] \\ y'' \\ c \end{bmatrix} = 0$$

$$\Delta = \begin{bmatrix} x' & y' & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11}^i & a_{21}^i & a_{31}^i \\ a_{12}^i & a_{22}^i & a_{32}^i \\ a_{13}^i & a_{23}^i & a_{33}^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11}^d & a_{12}^d & a_{13}^d \\ a_{21}^d & a_{22}^d & a_{23}^d \\ a_{31}^d & a_{32}^d & a_{33}^d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ c \end{bmatrix} = 0$$

5.7.1. Linealización de la ecuación Δ

Partiendo de la anterior expresión y aplicando el desarrollo en serie de Taylor, despreciando infinitésimos de segundo orden.

$$\Delta = (\Delta)_0 + \left(\frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_1} \right)_0 d\varphi_1 + \left(\frac{\partial \Delta}{\partial \kappa_1} \right)_0 d\kappa_1 + \left(\frac{\partial \Delta}{\partial \omega_2} \right)_0 d\omega_2 + \left(\frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_2} \right)_0 d\varphi_2 + \left(\frac{\partial \Delta}{\partial \kappa_2} \right)_0 d\kappa_2$$

donde $(\Delta)_0$ es el valor de la ecuación general, particularizada para valores aproximados de $\varphi_1, \kappa_1, \omega_2, \varphi_2, \kappa_2$ y los términos $\left(\frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_1} \right)_0, \left(\frac{\partial \Delta}{\partial \kappa_1} \right)_0, \left(\frac{\partial \Delta}{\partial \omega_2} \right)_0, \dots, etc.$ resultado de la aproximación.

5.7.2. Coeficientes de la función lineal aproximada Δ

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_1} = \left(z'' \frac{\partial y'}{\partial \varphi_1} - y'' \frac{\partial z'}{\partial \varphi_1} \right)$$

$$\frac{\partial z'}{\partial \varphi_1} = x' (-\cos \varphi_1 \cos \kappa_1) + y' (\cos \varphi_1 \sin \kappa_1) + c (-\sin \varphi_1) = A_{11}$$

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_1} = y'' A_{11} = B_{11}$$

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \kappa_1} = \left(z'' \frac{\partial y'}{\partial \kappa_1} - y'' \frac{\partial z'}{\partial \kappa_1} \right)$$

$$\frac{\partial y'}{\partial \kappa_1} = x' (\cos \omega_1 \cos \kappa_1) + y' (-\cos \omega_1 \sin \kappa_1) = A_{12}$$

$$\frac{\partial z'}{\partial \kappa_1} = x' (\cos \omega_1 \sin \varphi_1 \sin \kappa_1) + y' (\cos \omega_1 \sin \varphi_1 \cos \kappa_1) = A_{13}$$

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \kappa_1} = (z'' A_{12} - y'' A_{13}) = B_{15}$$

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \omega_2} = \left(\bar{y}' \frac{\partial \bar{z}''}{\partial \omega_2} - \bar{z}' \frac{\partial \bar{y}''}{\partial \omega_2} \right)$$

$$\frac{\partial \bar{y}''}{\partial \omega_2} = x'' (-\text{sen} \omega_2 \text{sen} \kappa_2 + \text{cos} \omega_2 \text{sen} \varphi_2 \text{cos} \kappa_2) + y'' (-\text{sen} \omega_2 \text{cos} \kappa_2 - \text{cos} \omega_2 \text{sen} \varphi_2 \text{sen} \kappa_2) +$$

$$c (-\text{cos} \omega_2 \text{cos} \varphi_2) = -a_{31}^d x'' - a_{32}^d y'' - a_{33}^d c = -\bar{z}''$$

$$\frac{\partial \bar{z}''}{\partial \omega_2} = x'' (\text{cos} \omega_2 \text{sen} \kappa_2 + \text{sen} \omega_2 \text{sen} \varphi_2 \text{cos} \kappa_2) + y'' (\text{cos} \omega_2 \text{cos} \kappa_2 - \text{cos} \omega_2 \text{sen} \varphi_2 \text{sen} \kappa_2) +$$

$$c (-\text{sen} \omega_2 \text{cos} \varphi_2) = a_{21}^d x'' + a_{22}^d y'' + a_{23}^d c = \bar{y}''$$

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \omega_2} = (\bar{z}'' \bar{z}' + \bar{y}'' \bar{y}') = B_{13}$$

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_2} = \left(\bar{y}' \frac{\partial \bar{z}''}{\partial \varphi_2} - \bar{z}' \frac{\partial \bar{y}''}{\partial \varphi_2} \right)$$

$$\frac{\partial \bar{y}''}{\partial \varphi_2} = x'' (\text{sen} \omega_2 \text{cos} \varphi_2 \text{cos} \kappa_2) + y'' (-\text{sen} \omega_2 \text{cos} \varphi_2 \text{sen} \kappa_2) + c (\text{sen} \omega_2 \text{sen} \varphi_2) = A_{21}$$

$$\frac{\partial \bar{z}''}{\partial \varphi_2} = x'' (-\text{cos} \omega_2 \text{cos} \varphi_2 \text{cos} \kappa_2) + y'' (\text{cos} \omega_2 \text{cos} \varphi_2 \text{sen} \kappa_2) + c (-\text{cos} \omega_2 \text{sen} \varphi_2) = A_{22}$$

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_2} = (-\bar{z}' A_{21} + \bar{y}' A_{22}) = B_{14}$$

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \kappa_2} = \left(\bar{y}' \frac{\partial \bar{z}''}{\partial \kappa_2} - \bar{z}' \frac{\partial \bar{y}''}{\partial \kappa_2} \right)$$

$$\frac{\partial \bar{y}''}{\partial \kappa_2} = x'' (\text{cos} \omega_2 \text{cos} \kappa_2 - \text{sen} \omega_2 \text{sen} \varphi_2 \text{sen} \kappa_2) + y'' (-\text{cos} \omega_2 \text{sen} \kappa_2 - \text{sen} \omega_2 \text{sen} \varphi_2 \text{cos} \kappa_2) +$$

$$= a_{22}^d x'' - a_{21}^d y'' = A_{23}$$

$$\frac{\partial \bar{z}''}{\partial \kappa_2} = x'' (\text{sen} \omega_2 \text{cos} \kappa_2 + \text{cos} \omega_2 \text{sen} \varphi_2 \text{sen} \kappa_2) + y'' (-\text{sen} \omega_2 \text{sen} \kappa_2 + \text{cos} \omega_2 \text{sen} \varphi_2 \text{cos} \kappa_2) +$$

$$= a_{32}^d x'' - a_{31}^d y'' = A_{24}$$

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \kappa_2} = (\bar{y}' A_{24} - \bar{z}' A_{25}) = B_{15}$$

5.7.3. Sistema de ecuaciones indirectas

Midiéndose las coordenadas imagen de un número de puntos ($n \geq 5$) en dos fotogramas consecutivos y fijándose para los parámetros de orientación valores aproximados.

$$\begin{bmatrix} B_{11}^1 & B_{12}^1 & B_{13}^1 & B_{14}^1 & B_{15}^1 \\ B_{11}^2 & B_{12}^2 & B_{13}^2 & B_{14}^2 & B_{15}^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ B_{11}^n & B_{12}^n & B_{13}^n & B_{14}^n & B_{15}^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\varphi_1 \\ d\kappa_1 \\ d\omega_2 \\ d\varphi_2 \\ d\kappa_2 \end{bmatrix} + [-(\Delta_0)] = 0$$

$$[B] \quad [X] + [-(\Delta)_0] = 0$$

Sistema que se resolverá por la metodología de mínimos cuadrados expresada anteriormente.

Parámetros de orientación tras la primera iteración:

$$\begin{aligned}
 \omega_2^i &= \omega_{2a}^i + d\omega_2^i & \varphi_1^i &= \varphi_{1a}^i + d\varphi_1^i \\
 \kappa_1^i &= \kappa_{1a}^i + d\kappa_1^i & \varphi_2^i &= \varphi_{2a}^i + d\varphi_2^i \\
 \kappa_2^i &= \kappa_{2a}^i + d\kappa_2^i
 \end{aligned}$$

Los subíndices "a" representan el valor aproximado.

Tras varias iteraciones se obtendrá la solución final, utilizando para cada iteración los parámetros calculados anteriormente.

5.7.4. Expresión de la ecuación para valores pequeños

Como en el caso anterior, suponiendo que los giros serán cantidades muy pequeñas, la expresión de la condición de coplaneidad puede expresarse de la forma:

$$\Delta = \begin{bmatrix} x' & y' & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \Delta\kappa_1 & -\Delta\varphi_1 \\ -\Delta\kappa_1 & 1 & 0 \\ \Delta\varphi_1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\Delta\kappa_2 & \Delta\varphi_2 \\ \Delta\kappa_2 & 1 & -\Delta\omega_2 \\ -\Delta\varphi_2 & \Delta\omega_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ c \end{bmatrix} \approx 0$$

Desarrollando la expresión anterior quedándonos con los términos de primer orden:

$$\Delta\varphi_1(x'y'') + \Delta\kappa_1(cx') - \Delta\varphi_2(x''y') - \Delta\kappa_2(cx'') + \Delta\omega_2(y'y'' + c^2) + c(y' - y'') \approx 0$$

5.8. Cálculo de las coordenadas modelo

Una vez realizada la orientación relativa (*modelo se habrá formado*) se habrá determinado cinco parámetros que permiten determinar las coordenadas modelo de cualquier punto que se mida sobre él.

5.8.1. Empalme de fotos consecutivas

Una vez realizada la orientación relativa, tendremos el valor de los parámetros $\beta_y, \beta_z, \omega_2, \varphi_2, \kappa_2$

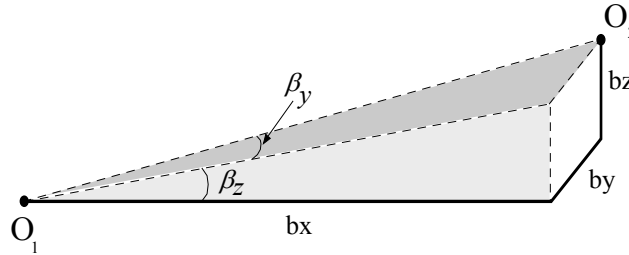


Figura 7. Componentes de la base

De la figura 7 pueden obtenerse fácilmente las componentes angulares de la base, por medio de las siguientes relaciones:

$$\beta_y = \frac{by}{bx} \Rightarrow by = bx \beta_y$$

$$\beta_z = \frac{bz}{bx} \Rightarrow bz = bx \beta_z$$

siendo bx la base aproximada (*base media de la pasada*).

Partiendo del mismo sistema de coordenadas, con origen en O_1 , vamos a calcular las coordenadas modelo.

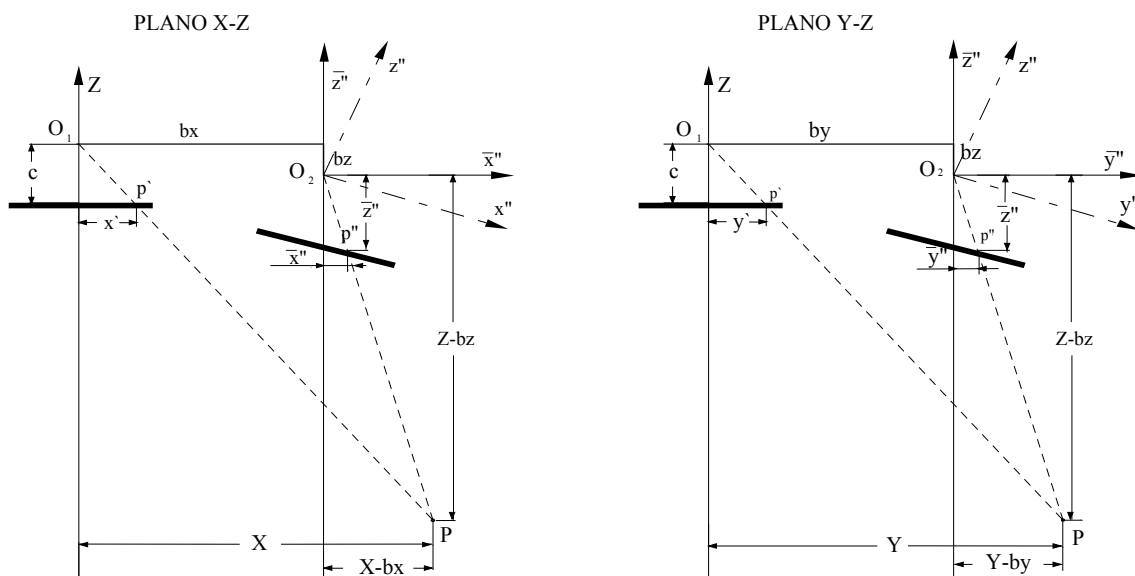


Figura 8. Cálculo de coordenadas modelo.

De la figura 8 podremos obtener las siguientes relaciones:

$$\frac{\overline{O_1P}}{\overline{O_1p'}} = \frac{X}{x'} = \frac{Y}{y'} = \frac{Z}{c} = \lambda \qquad \frac{\overline{O_2P}}{\overline{O_2p''}} = \frac{X - bx}{\overline{x''}} = \frac{Y - by}{\overline{y''}} = \frac{Z - bz}{\overline{z''}} = \mu$$

- (x', y', c) son las coordenadas imagen del punto P en el fotograma izquierdo en su posición actual.
- $(\overline{x''}, \overline{y''}, \overline{z''})$ coordenadas imagen de un punto P en el fotograma derecho, en posición ideal.

$$\begin{bmatrix} \overline{x''} \\ \overline{y''} \\ \overline{z''} \end{bmatrix} = [R_2] \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ c \end{bmatrix}$$

Despejando de las anteriores ecuaciones:

Haz izquierdo

$$X = \lambda x'$$

$$Y = \lambda y'$$

$$Z = \lambda c$$

Haz derecho

$$X = \mu \overline{x''} + bx$$

$$Y = \mu \overline{y''} + by$$

$$Z = \mu \overline{z''} + bz$$

Podremos establecer por punto un total de tres ecuaciones del tipo:

$$\textcircled{1} \quad X = \lambda x' = \mu \overline{x''} + bx$$

$$\textcircled{2} \quad Y = \lambda y' = \mu \overline{y''} + by$$

$$\textcircled{3} \quad Z = \lambda c = \mu \overline{z''} + bz$$

Con estas tres ecuaciones pueden resolverse las dos incógnitas (λ, μ) utilizando las ecuaciones $\textcircled{1}$ y $\textcircled{3}$.

Despejando de $\textcircled{1}$ $\lambda = \frac{\mu \overline{x''} + bx}{x'}$

y sustituyendo en $\textcircled{3}$ $c\mu \overline{x''} + cbx = \mu \overline{z''}x' + x'bz \Rightarrow \mu = \frac{x'bz - cbx}{c\overline{x''} - \overline{z''}x'}$

Una vez obtenido μ el valor de λ puede obtenerse sin ninguna complicación $\lambda = \frac{\overline{x''}bz - \overline{z''}bx}{c\overline{x''} - \overline{z''}x'}$

λ, μ son los factores de escala para cada punto del modelo. Sabiendo estos valores, podremos obtener las coordenadas modelo a partir de las coordenadas imagen, usando para ello las ecuaciones $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$, $\textcircled{3}$

Al obtener (λ, μ) de las ecuaciones $\textcircled{1}$, $\textcircled{3}$ obtendremos:

- Para X, Z un único valor

- Para Y dos valores:

$$Y_1 = \lambda y' \qquad Y_2 = \mu \overline{y''} + by$$

El valor final de Y será la media aritmética de ambos valores, siempre y cuando las diferencias entre

ambas no sean significativas:

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Donde $y_1 - y_2$ es la *paralaje Py* residual a escala modelo.

5.8.2. Fotogramas independientes

Realizada la orientación relativa se habrá obtenido $\varphi_1, \kappa_1, \omega_2, \varphi_2, \kappa_2$

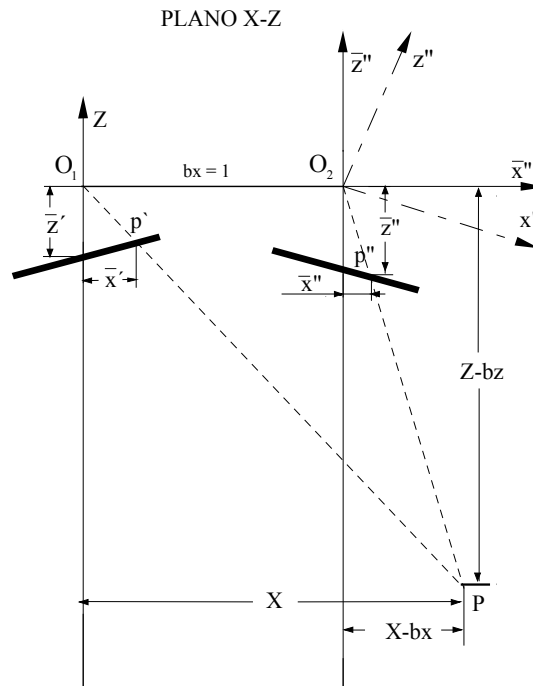


Figura 9. Cálculo de coordenadas modelo.

De la figura anterior se deducen las relaciones siguientes:

$$\frac{\overline{O_1P}}{\overline{O_1p'}} = \frac{X}{x'} = \frac{Y}{y'} = \frac{Z}{z'} = \lambda \qquad \frac{\overline{O_2P}}{\overline{O_2p''}} = \frac{X}{x''} = \frac{Y}{y''} = \frac{Z}{z''} = \mu$$

- $(\overline{x'}, \overline{y'}, \overline{z'})$ son las coordenadas imagen del punto P en el fotograma izquierdo en su posición ideal.
- $(\overline{x''}, \overline{y''}, \overline{z''})$ coordenadas imagen de un punto P en el fotograma derecho, en posición ideal.

$$\begin{bmatrix} \overline{x'} \\ \overline{y'} \\ \overline{z'} \end{bmatrix} = [R_1] \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ c \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \overline{x''} \\ \overline{y''} \\ \overline{z''} \end{bmatrix} = [R_2] \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ c \end{bmatrix}$$

Despejando de las anteriores ecuaciones:

Haz izquierdo

$$X = \lambda \bar{x}'$$

$$y = \lambda \bar{y}'$$

$$Z = \lambda \bar{z}'$$

Haz derecho

$$X = \mu \bar{x}'' + bx$$

$$y = \mu \bar{y}'' + by$$

$$Z = \mu \bar{z}'' + bz$$

Podremos establecer por punto un total de tres ecuaciones del tipo:

$$\textcircled{1} \quad X = \lambda \bar{x}' = \mu \bar{x}'' + bx$$

$$\textcircled{2} \quad y = \lambda \bar{y}' = \mu \bar{y}''$$

$$\textcircled{3} \quad Z = \lambda \bar{z}' = \mu \bar{z}''$$

Como en el anterior caso pueden resolverse las dos incógnitas (λ , μ) utilizando las ecuaciones $\textcircled{1}$ y $\textcircled{3}$.

Despejando de $\textcircled{1}$ $\lambda = \frac{\mu \bar{x}'' + bx}{\bar{x}'}$

y sustituyendo en $\textcircled{3}$ $c\mu \bar{x}'' + cbx = \mu \bar{z}'' \bar{x}' \Rightarrow \mu = \frac{\bar{z}' bx}{\bar{z}'' \bar{x}' - \bar{z}' \bar{x}''}$

Una vez obtenido μ el valor de λ puede obtenerse sin ninguna complicación $\lambda = \frac{\bar{z}'' bx}{\bar{z}'' \bar{x}' - \bar{z}' \bar{x}''}$

λ , μ son los factores de escala para cada punto del modelo. Sabiendo estos valores, podremos obtener las coordenadas modelo a partir de las coordenadas imagen, usando para ello las ecuaciones $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$, $\textcircled{3}$

Al obtener (λ , μ) de las ecuaciones $\textcircled{1}$, $\textcircled{3}$ obtendremos:

▪ Para X, Z un único valor

▪ Para Y dos valores: $y_1 = \lambda \bar{y}'$ $y_2 = \mu \bar{y}''$

El valor final de Y será la media aritmética de ambos valores, siempre y cuando las diferencias entre ambas no sean significativas:

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Donde $y_1 - y_2$ es la *paralaje Py* residual a escala modelo.

5.9. Orientación absoluta

Una vez calculadas las coordenadas modelo, la siguiente operación a realizar sería la nivelación del modelo y trasladarlo a su verdadera posición en el espacio.

Partimos del hecho de que se conocen las coordenadas de una serie de puntos ($n \geq 3$), tanto en el sistema modelo como en el terreno.

Datos conocidos:

$$\varnothing (X_i, Y_i, Z_i) \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (n \geq 3)$$

$$\varnothing (x_i, y_i, z_i) \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (n \geq 3)$$

El problema se reduce a resolver un sistema de ecuaciones de la siguiente forma (Transformación de semejanza tridimensional):

$$\begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{bmatrix} = \lambda [R] \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_o \\ Y_o \\ Z_o \end{bmatrix}$$

donde:

- λ : es el factor de escala.
- $[R]$: $f(\Omega, \Phi, K)$ matriz de rotación del sistema modelo al sistema terreno.
- X_o, Y_o, Z_o : traslaciones del sistema modelo respecto del terreno.

Por cada punto de coordenadas conocidas se establecerán un total de 3 ecuaciones, teniendo que resolver siete incógnitas $\lambda, X_o, Y_o, Z_o, \Omega, \Phi, K$.

El proceso de resolución de este tipo de transformaciones se ha estudiado en el *Tema 2*.

5.10. Cálculo de coordenadas terreno

Realizadas todas las fases de orientación (orientación interna, relativa, cálculo de coordenadas modelo y orientación absoluta) cualquier punto que se mida en el sistema del comparador podremos directamente obtener las coordenadas terreno, ya que se conocen todos los parámetros de orientación para poder pasar de un sistema a otro.

$$\begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{bmatrix} = \lambda [R] \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_o \\ Y_o \\ Z_o \end{bmatrix}$$

Bibliografía

- American Society of Photogrammetry. Manual of Photogrammetry, ASPRS, 4ª edición (1980), ISBN 0-937294-01-2.
- Albert, J. & Kreiling, W., Manual Fotogramétrico de Bolsillo, Wichmann H., Alemania (1989), 4ª edición, ISBN 3-87907-176-4.
- Burnside, C.D., Mapping from Aerial Photographs, Mackays of Chatham, Kent, Londres (Inglaterra), 2ª edición (1985), ISBN 0-00-383036-5.
- Chueca, M., Topografía (Tomo II), Dossat, Madrid (1982), ISBN 84-237-0591-9.
- González, C., Apuntes de Fotogrametría Analítica, Universidad Politécnica de Madrid, (E.T.S.I.A.), 1997.
- Ghosh, S.K., Analytical Photogrammetry, Pergamon Press, New York (USA), 2ª edición (1988), ISBN 0-08-036103-X.
- Guillem, S y Herráez, B., Restitución analítica, Servicio de publicaciones de la Universidad

- Politécnica de Valencia, 1992.
- Krauss, K., Photogrammetry, Dümmler/Bonn (1993), ISBN 3-427-78684-6.
 - Lerma, J.L., Problemas de Fotogrametría I, Servicio de publicaciones de la Universidad Politécnica de Valencia, 1999, ISBN 84-7721-804-8.
 - López-Cuervo, S., Fotogrametría, Egraf S.A., Madrid (1980), ISBN 84-3000-2559-6.
 - Moffitt, F.H. y Mikhail, E.M., Photogrammetry, Harper & Row Publishers., New York (1980), 3ª edición, ISBN 0-216-91996-7.
 - Wolf, P.R. y Dewitt, B.A., Elements of Photogrammetry with Applications in GIS, McGraw-Hill, EEUU, 3ª edición (2000), ISBN 0-07-292454-3.
 - Zhizhuo, W., Principles of Photogrammetry, Beijing, China (1990), ISBN 7-81030-00-8.

TEMA 6

INTRODUCCIÓN: LA IMAGEN DIGITAL

- 6.1. Introducción**
 - 6.2. Evolución histórica de la fotogrametría**
 - 6.3. La imagen digital**
 - 6.4. Ventajas e inconvenientes de las imágenes digitales**
 - 6.5. Almacenamiento de la imagen digital**
 - 6.6. Formatos gráficos de almacenamientos de imágenes digitales**
 - 6.7. Compresión de imágenes digitales**
 - 6.8. Calidad de la imagen**
 - 6.8.1. Geométrica**
 - 6.8.2. Radiométrica**
 - 6.8.3. Ruido**
 - 9. Análisis de imágenes digitales**
 - 6.9.1. Técnicas de realce de la imagen**
 - 6.9.2. Ecuación del histograma**
 - 6.9.3. Filtros**
 - 6.9.4. Segmentación de la imagen**
 - Bibliografía**
-

6.1. Introducción

La Asociación Americana de Fotogrametría y Teledetección (*ASPRS*) define la Fotogrametría como el arte, ciencia y tecnología de obtener información fidedigna de los objetos físicos y del medio ambiente mediante procesos de registro, medición e interpretación de imágenes fotográficas y de modelos de energía radiante electromagnética y otros fenómenos (*ASPRS, 1980*). Esta definición realizada en la 4ª edición del *Manual of Photogrammetry* difiere de la existente en las tres ediciones anteriores en las que el único medio de registro considerado era la fotografía. Esta modificación viene a reconocer que las imágenes pueden ser adquiridas, no sólo mediante el empleo de una cámara convencional sino mediante la utilización de sensores especiales, incluyendo los sensores multiespectrales (Thompson y Gruner, 1930).

6.2. Evolución Histórica de la Fotogrametría Digital

Los métodos fotogramétricos pueden ser clasificados en función de la forma de su resolución. Así se puede distinguir entre Fotogrametría Analógica, resolución mediante analogías mecánicas y Fotogrametría Electrónica en la que los sistemas óptico-mecánicos se sustituyen por un sistema informático encargado de la realización de los cálculos. La Fotogrametría Electrónica mediante la sustitución realizada se consigue una importante mejora en cuanto a la precisión de los resultados y flexibilidad del equipo, pudiendo utilizar fotografías de muy distinto origen (desde fotogramas de rango cercano a fotogramas aéreos) y diferentes características de toma (inclinación, base, focal, etc.).

Dentro de los métodos fotogramétricos electrónicos se pueden distinguir la Fotogrametría Analítica y la Fotogrametría Digital.

- La Fotogrametría Analítica aborda la resolución informatizada de los cálculos fotogramétricos, utilizando como información de entrada las medidas realizadas sobre la fotografía (en formato analógico). La utilización del apoyo informático permite la rápida obtención de las relaciones existentes entre los puntos del objeto y sus correspondientes imágenes así como los errores del sistema (Gosh, 1988).
- La Fotogrametría Digital se caracteriza por utilizar información (imágenes) en formato digital. Este aspecto va a determinar muchas de las ventajas e inconvenientes que tienen estas técnicas, definidos por los importantes cambios conceptuales y metodológicos que serán analizados en los sucesivos capítulos. Así Ackermann (1991) indica que " *con las cámaras digitales y el procesamiento de imágenes digitales, la Fotogrametría trabajará en un entorno completamente diferente, caracterizado por diferentes equipos, técnicas, oportunidades y por una forma distinta de pensar*".

Así una de las polémicas más vigentes en los últimos años dentro del mundo de la Fotogrametría es si la Fotogrametría Digital se puede plantear en la actualidad como una digna sucesora en cuanto a rendimiento y precisión de la Fotogrametría Analítica, o bien si aún le faltan muchos años para alcanzar los niveles de los métodos analíticos.

Al respecto es importante tener en cuenta que el cambio de la fotogrametría clásica analógica a la fotogrametría analítica no supuso ningún tipo de modificación en cuanto a principios ni resultados, consistiendo en una lógica evolución de los aspectos relacionados con la precisión y la productividad de los métodos fotogramétricos, se trata por tanto de una evolución metodológica. La transición entre la Fotogrametría Analítica y la Fotogrametría Digital se presenta como la aplicación de unos procedimientos clásicos a una plataforma nueva, así todos los procesos fotogramétricos convencionales continúan aplicándose y se producen los mismos productos: básicamente, coordenadas de los objetos, mapas y imágenes ortorrectificadas. Esta situación aparente no obstante oculta una perspectiva de modificación de toda la estructura como apuntó Ackermann, por lo que podríamos hablar de revolución tecnológica (Fig. 1).

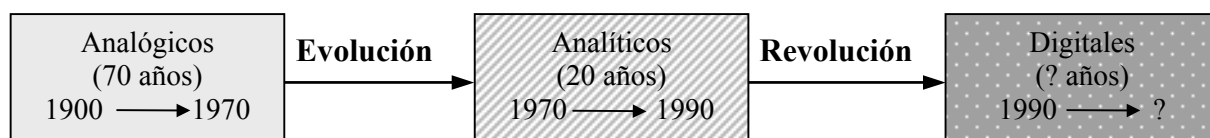


Figura 1.- Evolución de los métodos fotogramétricos

El periodo de desarrollo conceptual (1955-1982)

El inicio de la Historia de la Fotogrametría Digital se puede situar en 1955 con la publicación por parte de Rosenberg de un artículo (Rosenberg, 1955), acerca de la Teoría de la Información y la

Fotogrametría Electrónica. En dicho artículo se plantea que "*la Teoría de la Información es una guía y ayuda en el estudio, evaluación y desarrollo de métodos e instrumentos fotogramétricos, topográficos y cartográficos para la automatización electrónica de la elaboración de mapas*". El proceso cartográfico se contempla como un flujo de información que se inicia con el registro de la imagen y finaliza con la obtención final del mapa. Un sistema de fotogrametría comprendería el registro electrónico o digitalización de las imágenes y su almacenamiento en una cinta magnética o bien en forma de onda modulada de radio. El análisis consiste en realizar comparaciones electrónicas, ajustes y fusiones para desarrollar procesos fotogramétricos tales como la orientación, rectificación, medida del relieve. Rosenberg analiza diferentes posibilidades para el registro digital desde los aviones, algunas de las cuales han sido retomadas en los últimos años (*Thom, 1.993, Sclineider y Halin, 1994*). Sin embargo, Rosenberg fue consciente de las limitaciones técnicas de su época cuando indica que "*pasará mucho tiempo hasta que se alcance el nivel de una Fotogrametría Electrónica, completamente automatizada*", así predecía las dificultades que incluso persisten actualmente en el desarrollo de los sistemas, y que poco a poco se van solventando alcanzándose muchos de los objetivos inicialmente propuestos.

En 1958 Helava, inventor del restituidor analítico, describe las ventajas que tienen este tipo de restituidores frente a los clásicos de tipo analógico (Helava, 1958). Helava considera que las dos partes principales de un restituidor analítico son el sistema de visión-medición y el ordenador. La aparición de los sistemas analíticos planteó unas importantes expectativas, muchas de las cuales se han convertido en realidad, acerca de sus posibilidades de mejorar el rendimiento del procedimiento fotogramétrico y su mayor nivel de precisión. Los restituidores analíticos permiten un alto nivel de precisión, ofrecen gran versatilidad y un cierto grado de automatización, en especial en lo relativo a los procedimientos de orientación. Es importante establecer que el grado de automatización se alcanza mediante el cálculo numérico de los procedimientos de orientación y no mediante la automatización del proceso de medida que se sigue realizando mediante un índice flotante, al igual que en los restituidores clásicos de tipo analógico. No obstante, Helava menciona la posibilidad de reemplazar al operador humano por un instrumento mecánico, un correlador electrónico (*Hobrough, 1959*) para automatizar el trazado de curvas de nivel. También Helava indica la posibilidad de extraer información mediante el tratamiento de imágenes empleando técnicas de digitalización electrónica y posterior impresión.

En Sharp et al. (1965) se describe el sistema de compilación digital automatizada de mapas "*Digital Automatic Map Compilation (DAMQ)*" para el trazado de mapas topográficos y la producción de ortofotos utilizando imágenes digitalizadas. El sistema requiere un operador para la identificación estereoscópica, la medida precisa de puntos de control y la edición final del mapa utilizando la correlación de imágenes digitales para automatizar las medidas de paralaje. Sharp et al. (1965) indican que el aspecto básico de este sistema es la calidad de la digitalización debido a que todos los procesos dependen de la misma. En resumen, se pueden establecer tres aspectos diferenciales que están presentes en el restituidor digital en comparación con el analítico:

- a) El restituidor digital utiliza imágenes en formato digital.
- b) Algunos de las medidas están automatizadas.
- c) El usuario sólo se requiere para las tareas de interpretación y la edición final de resultados.

Rosenfeld (1965) se manifiesta. en contra de la interpretación completamente automatizada debido a que "*las imágenes del mundo real son tan complejas y tan variadas que no puede existir una aproximación estándar para la selección de medidas con el fin de la interpretación*", idea aún extensamente aceptada

Panton (1978) plantea la base para el desarrollo de lo que denominó algoritmos inteligentes de extracción de modelos digitales de terreno, de análisis de texturas, de extracción de elementos, de seguimiento de curvas de nivel y para la creación de estructuras de bases de dalos simbólicas. En la actualidad, es habitual hablar de "*sistemas de cartografía integrados*", "*bases de datos digitales*", "*bases de dalas digitales*" y "*estaciones de trabajo interactivas*", conceptos sin duda basados en el planteado por Panton.

En 1981 se describe por primera vez un restituidor completamente digital con una unidad de procesamiento central, un interfaz para el operador y una serie de periféricos (*Saijakoski, 1981*). Estos componentes tenían esencialmente la misma función que en los de los restituidores analíticos, pero con una diferencia esencial, las dos imágenes del estereomodelo eran almacenadas en formato digital, dichas imágenes se visualizan en la pantalla del operador controlada por la unidad de procesamiento central.

El periodo de diseño previo y primeras realizaciones (1982-1988)

Este período comprende los años que llevan desde el desarrollo de las ideas conceptuales analizadas en el apartado anterior hasta la aparición en el mercado de un restituidor digital (1988).

Case (1982) presenta el diseño de un prototipo de sistema fotogramétrico digital “*Digital Stereo Comparator Compiler (DSCQ)*”. Este fue concebido como un restituidor analítico que aceptaba, como información de entrada, imágenes en formato digital registradas en una cinta magnética. La utilización de este sistema era similar al de un restituidor analógico o analítico en lo relativo a aerotriangulación, mono o estereocompilación manual de planimetría o de datos de cota topográfica, pero permite la superposición gráfica de forma mono o estereoscópica para la edición y revisión de resultados e implementa estereocorrelación automatizada para la obtención de información de cota y para la transferencia de puntos.

Durante el período 1982-1984, se generaliza la expresión de Fotogrametría Digital y se comienza el desarrollo de diferentes sistemas y modelos, con diversos aspectos técnicos y soluciones técnicas.

En 1984 tiene lugar en Río de Janeiro el Congreso de la Sociedad Internacional de Fotogrametría y Teledetección (*ISPRS*). En dicho congreso, Albertz et al. (1984) presentan un sistema de procesamiento digital de imágenes adaptado, presentando cambios en el hardware, la estereovisión y las posibilidades de control “*3D*”. Albertz indica la necesidad de un operador, asistido por la correlación de imágenes para las labores de medida de paralaje.

Gugan y Dowinan (1986) exponen las cuatro características esenciales para un sistema de restitución fotogramétrica digital:

- a) Digitalización en tiempo real del modelo en “*3D*”.
- b) La visión estereoscópica
- c) La posibilidad de manejar volúmenes de imágenes grandes.
- d) La precisión de medida a nivel del subpixel.

Grün (1986) introduce nuevas ideas relativas al potencial y al diseño de las estaciones fotogramétricas digitales. Los nuevos diseños contemplan la utilización de imágenes digitales obtenidas con diferentes plataformas (cámaras aéreas, satélite, fotogrametría terrestre, etc.), lo que permite el realizar todos los trabajos de fotogrametría con un único sistema. Ésta es una de las grandes ventajas con respecto a los sistemas analógicos y analíticos, la integración de todo el proceso en un único sistema, flexible y universal, que permite obtener productos tanto en formato analógico (*hardcopy*) como en formato digital (*softcopy*). A Grün se debe la denominación de “*Softcopy Photogrammetry*” que ciertos autores norteamericanos, utilizan como sinónimo de la Fotogrametría Digital.

Como fruto de la popularidad de estas nuevas técnicas, en el período 1984-88 se crea un grupo de trabajo dentro de la ISPRS sobre Sistemas Fotogramétricos Integrados. En Makarovic (1986) se presentan los principales aspectos de los sistemas de tipo digital, este artículo marca la tendencia que se ha mantenido estos últimos años, del hardware al software, es decir, de los sistemas analógicos a los digitales, de los métodos manuales a los automatizados.

En el siguiente Congreso de la ISPRS celebrado en Kyoto en 1988, se presenta la primera estación de trabajo estereofotogramétrica digital comercial, la KERN DSP1 (*Cogan et al., 1988*). Todos estos

sistemas estaban basados en los sistemas de procesamiento de imágenes y su desarrollo estaba determinado por el auge de la utilización de imágenes satélite en formato digital (*LANDSAT, SPOT*), y la necesidad de contar con un sistema fotogramétrico que pudiera trabajar con este tipo de imágenes evitando la necesidad de su transformación a información analógica con la pérdida de información que ello conlleva. de información geográfica

En Euget (1988) se expone la relación explícita entre la estación fotogramétrica y la base de datos geográfica. Las funciones del operador consisten la detección y corrección de errores de los MDT generados automáticamente. El objetivo de las estaciones fotogramétricas digitales es aumentar el rendimiento con respecto a los restituidores de tipo analítico elevando el grado de automatización mientras que la ergonomía y la precisión se mantienen.

Konecny (1988) indica las ventajas del remuestreo epipolar de las imágenes para la visualización y la medición, un principio fundamental muy común en la actualidad, haciendo especial hincapié en los aspectos referentes a la integración de los resultados y a la conexión con SIG, procesamiento de diferentes tipos de datos (información de fotografías aéreas, datos geológicos, datos estadísticos, etc.) y la posibilidad de utilización de los sistemas por usuarios no expertos.

En Stokes (1988) se presenta un sistema de revisión de mapas rápido y preciso basado en la visión monoscópica de imágenes digitales, demostrando que la visión estereoscópica no es necesaria para todas las aplicaciones.

Schenk analiza los aspectos relativos a la automatización de las estaciones digitales (*Schenk, 1986, 1988*), estableciendo una fuerte crítica contra el procedimiento de ensayo y error apostando por la teoría de la cartografía real.

Según Helava (1988) la interacción humana es una antítesis a la eficiencia, representando además un aumento en el coste del hardware (visualización, control, etc.). El diseño de un sistema fotogramétrico digital debe encaminarse a la automatización total, así señala que *"el principal mérito de la Fotogrametría Digital es su potencial para una eficiente automatización"* Helava investiga en detalle las posibilidades de automatización de los procesos fotogramétricos, con la conclusión de que desde la orientación y la triangulación aérea, a la generación de ortofotos y DTM pueden o podrían ser automatizados, con una única excepción, el reconocimiento de formas. Sugiere centrarse en el problema de la interpretación de las imágenes, así como de la creación de sistemas de manejo de datos que permitieran el procesar los grandes volúmenes necesarios para la realización de proyectos reales.

El período de desarrollo de la interface de usuario, la automatización y la especialización (1988 -)

El grupo de trabajo de la *ISPRS II/III* establece la siguiente definición para los Sistemas de Fotogrametría Digital: *"un sistema de Fotogrametría Digital se define como un conjunto de software y hardware cuyo objetivo es la generación de productos fotogramétricos a partir de imágenes digitales mediante técnicas manuales y automatizadas"*. Estos dos tipos de técnicas, manuales y automatizadas, constituyen las líneas de investigación prioritarias desde 1988 y han dado lugar a un importante número de sistemas fotogramétricos que se han diseñado desde entonces.

Dowman (1989) describe un sistema para la cartografía a partir de datos derivados de imágenes de SPOT, estableciéndose una relación directa entre Fotogrametría y Teledetección. El sistema es flexible permitiendo que se puedan utilizar imágenes que provienen de diferentes sensores para su corrección, generación del MDT y para la interpretación planimétrica.

Helava (1991) se analiza la evolución que han sufrido las estaciones fotogramétricas digitales en los últimos 25 años, indicando el tremendo efecto revolucionario en la Fotogrametría, así como en la Teledetección y los SIG.

Förstner (1991) realiza una detallada descripción del papel de los conceptos y tareas "*La labor de la fotogrametría es la extracción de información a partir de imágenes siendo esta información de tipo geométrico y semántico*".

Ackermann (1992) describe el poder de las herramientas, que han posibilitado la rápida ascensión de la Fotogrametría Digital. El avance en la tecnología informática ha sido un factor determinante. Ackermann indica la necesidad de crear un sistema basándose en la precisión, la eficiencia, la fiabilidad y la universalidad, también hace hincapié en la fuerte convergencia entre la Fotogrametría y la Teledetección.

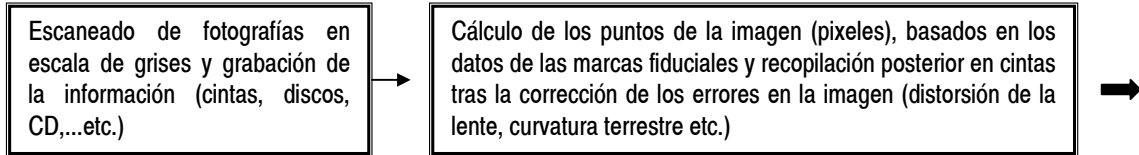
Leberl (1992) indica las diferencias entre "*softcopy*" y "*hardcopy*", los datos en informática se denominan "*softcopy format*" mientras que las reproducciones impresas de dichos datos se denominan "*hardcopy format*", así trasladando ese concepto a la Fotogrametría, las imágenes digitales serían "*softcopy*" mientras que las imágenes analógicas son "*hardcopy*".

La evaluación del estado actual y del desarrollo de la Fotogrametría Digital debe tener en cuenta diversos aspectos y consideraciones de diferentes naturaleza (Ackermann, 1996):

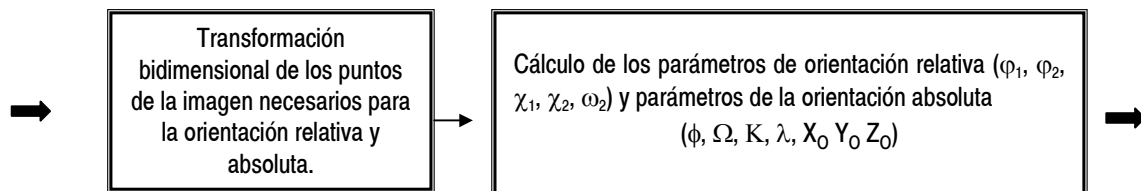
1. Como mínimo, la Fotogrametría Digital debe proporcionar al menos el nivel de rendimiento de la Fotogrametría Analógica y Analítica. Los estaciones de trabajo digitales deben tener al menos las prestaciones de los restituidores analíticos de imágenes digitales. Alcanzar estos mínimos no supone ninguna ventaja por parte de la Fotogrametría Digital con respecto a los anteriores métodos, debido a la inercia de los sistemas productivos, salvo que sean considerablemente más rápidos y más baratos.
2. La baza esencial de las nuevas tecnologías radica en la posibilidad de alcanzar mayor rendimiento y productos que las técnicas existentes. En la Fotogrametría Digital se centraría en la automatización de los procesos fotogramétricos. Los primeros ejemplos de tareas susceptibles de ser automatizados son la aerotriangulación digital, la generación de modelos digitales de terreno mediante la aplicación de técnicas de correlación de imágenes, la generación de ortofotos, sin olvidar diversas medidas y funciones de orientación. Esta automatización será la que supondrá el auge o no de la Fotogrametría Digital con respecto a la Fotogrametría Analítica. La calidad y economía de los productos obtenidos será decisiva para marcar la aceptación de las nuevas técnicas por los usuarios.
3. La cartografía digital y la extracción de objetos a partir de las imágenes: digitales necesitará la intervención humana durante algún tiempo. Por lo que en una primera aproximación no parece que presente ninguna ventaja particular con respecto a las técnicas analíticas, sin embargo, es necesario tener en cuenta que aunque los procesos no sean completamente automáticos si lo son muchas de las tareas que junto con las herramientas de procesamiento de la imagen y edición que son una gran ayuda contribuyen a acelerar el proceso.
4. Otra ventaja importante en favor de los sistemas digitales es su concepción como sistemas totales, lo que permite el tratamiento de imágenes de muy diversa procedencia en un sólo equipo, desde imágenes de rango cercano (*cámaras digitales*) hasta imágenes aisladas en plataformas espaciales (*imágenes satélite*).
5. Como se ha indicado en el punto 2, la aceptación de la Fotogrametría Digital pasa por el rendimiento técnico y cualitativo de los productos que de ella se derivan. No obstante, existe un factor que es de gran importancia, siendo un valor añadido, los sistemas digitales pueden integrar, fusionar y comparar conjunto de datos de diferentes procedencias, dando lugar a un abanico muy amplio de operaciones dentro y fuera del contexto cartográfico. Así el sistema fotogramétrico se puede considerar como un elemento básico en los sistemas de información geográfico tridimensionales.

A continuación se muestra el esquema básico del proceso de fotogrametría digital.

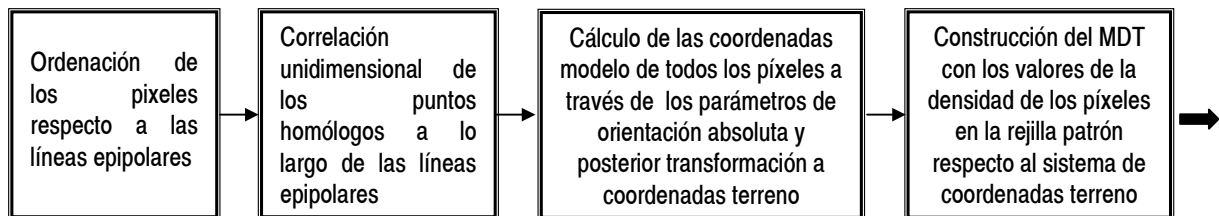
1. Fase de preparación.



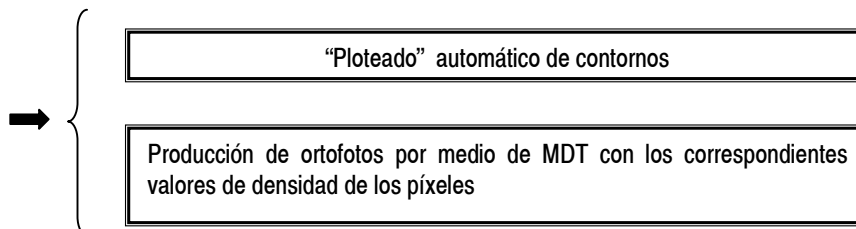
2. Cálculo de los parámetros de orientación.



3. Obtención de las alturas de los modelos digitales.



4. Ploteado de contornos y producción de ortofotografías.



6.3. La imagen digital.

Una imagen digital es una función $F(x, y)$, donde x e y representan unas coordenadas y el valor $F(x, y)$, es proporcional a la transmitancia o reflectividad de la luz, que se reconoce visualmente por el nivel de color o gris de la misma en el punto considerado (x, y) .

Al proceso de obtención de imágenes digitales se le denomina digitalización y consiste en la descomposición de la imagen real en una matriz discreta de puntos de un determinado tamaño, donde cada uno tiene un valor proporcional a su nivel de color.

Por tanto puede decirse que una imagen digital se puede asimilar a una matriz de n filas y m columnas. A cada celda de la matriz se le denomina pixel (*picture x element*) y esta representa una superficie que es función de su tamaño $(\Delta x, \Delta y)$. A cada pixel le corresponde uno o más valores digitales (*número digital o valor digital "Nd"*) (Fig 1 y 2).

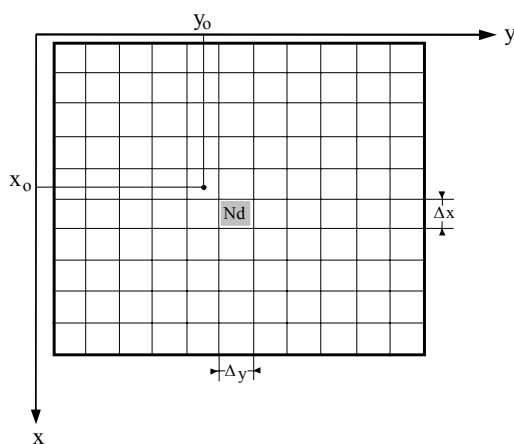


Figura 1. Definición de una imagen digital.

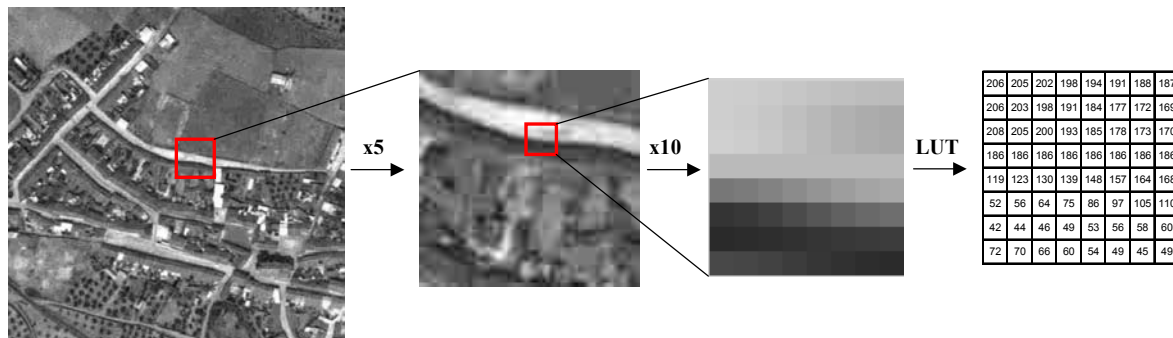


Figura 2. Imagen digital. Representación visual y representación numérica.

El número digital puede representar información de diversa naturaleza, así puede ser proporcional a las características físicas del área (radiancia, reflectividad, transmisividad, emisividad) o bien representar los valores resultantes de la manipulación de la información original mediante técnicas de análisis de imágenes.

La matriz definida por los números digitales tiene carácter multidimensional en función de las capas de información almacenadas (bandas o canales). Entre las imágenes más frecuentemente empleadas se encuentran las imágenes monocanal: imágenes binarias (blanco/negro) y las imágenes pancromáticas o monocromáticas; las imágenes de tres canales como las imágenes en color (un canal para cada color básico -rojo, verde, azul-) (Fig 3) y las imágenes en falso color; y, por último, las imágenes multicanal como las imágenes multispectrales representadas por más de tres pseudocolores.

Las imágenes más frecuentemente empleadas en Fotogrametría son las imágenes monocanal (pancromáticas) y las imágenes en color.

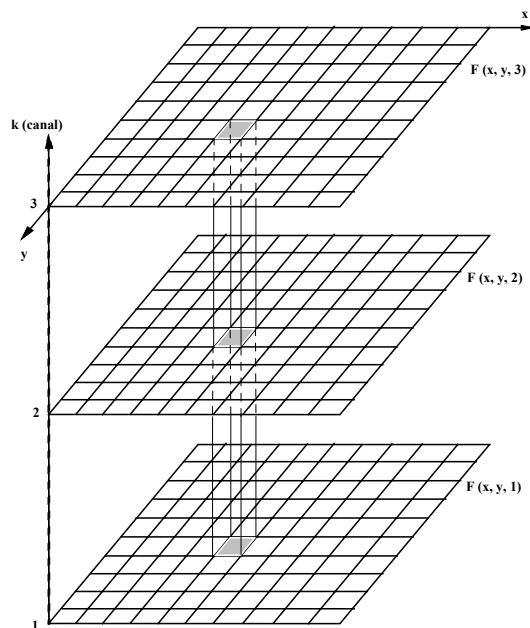


Figura 3. Representación de una imagen digital de tres canales.

En las imágenes pancromáticas el tono de la señal está representado, habitualmente, por 8 bits (1 byte). Con esta dimensión se tiene la posibilidad de codificar 2^8 tonos de gris = 256 tonos (0 a 255). Esta cifra que en principio puede parecer escasa, es suficiente para todas las aplicaciones teniendo en cuenta que el ojo humano sólo puede distinguir aproximadamente 200 tonos. Generalmente la correspondencia que se aplica entre el valor digital y el tono (*tabla de consulta o look up table -LUT-*) es negro (0) y blanco (255). En las imágenes en color el esquema de almacenamiento es similar utilizando cada píxel tres números enteros de 8 bits para su codificación (uno para cada canal), por lo que se requiere tres veces más espacio para su almacenamiento.

La calidad de una imagen digital depende de la finura del retículo es decir del tamaño de píxel (*resolución espacial*) empleada para la codificación: elementos de gran tamaño producen pérdida de información y elementos demasiado pequeños requieren disponer de un gran espacio de almacenamiento. Es importante tener en cuenta que la calidad de la imagen va a depender del sistema disponible, tanto en lo referente a posibilidades gráficas (número de colores que es capaz de presentar), como del almacenamiento disponible por lo que se puede considerar un problema de tipo económico.

Si una imagen equivale a una matriz de n filas por m columnas, el tamaño de ésta tendrá una relación casi directa entre el formato de la imagen y la superficie de cada una de esas celdas.

Así pues, un fichero que contenga una imagen digitalizada tendrá ocupada el 98 ó 99% de éste por los valores que definen la matriz, el resto (1 ó 2 %) corresponden a datos que permiten localizar la matriz (imagen) en el fichero (cabecera). Luego si cuantificamos estos valores, seremos capaces de conocer a priori el tamaño de los ficheros que vamos a manejar.

El primer dato a tener en cuenta es la equivalencia entre puntos por pulgadas (*ppp o dpi*), y migras, ya que son las micras la unidad que nos interesa para evaluar el tamaño de píxel. Así p.e. si se dispone de una fotografía aérea cuyo formato estándar es de 230x230mm. y se quiere digitalizar a 1200 ppp, ¿cuál sería el tamaño del píxel y cuánto ocuparía dicha imagen?

Si se ha digitalizado a 1200ppp, indicará que 25.4 mm. (1 pulgada) se ha dividido en 1200 partes iguales (tamaño del pixel), por tanto este será de:

$$\frac{1 \text{ pulgada}}{\text{Resolución digitalización(ppp)}} = \frac{25.4 \text{ mm.}}{1200} \approx 21.2 \mu\text{m.}$$

Para ver cuanto ocuparía el fichero digitalizado de dicha imagen,

$$\frac{1200 \text{ ppp}}{2.54\text{cm.}} = 472 \text{ puntos por cm.} \Rightarrow 472 \text{ puntos por cm} \times 23\text{cm} = 10856 \text{ puntos (pixels)}$$

$$10856 \times 10856 = 117852736 \text{ puntos (pixels)}$$

$$\text{Tamaño de la imagen (B/N)} \approx 118 \text{ Mb}$$

$$\text{Tamaño de la imagen (color)} \approx 354 \text{ Mb}$$

Conocida la resolución o tamaño de pixel de una imagen, se pueden asignar coordenadas (x, y) al centro de cada celda. Por tanto, la precisión de las coordenadas obtenidas de un objeto imagen dependen del tamaño del pixel, en cuanto que el objeto sufre una generalización importante que influye en su correcta definición geométrica.

6.4. Ventajas e inconvenientes de las imágenes digitales

La utilización en Fotogrametría de las imágenes digitales lleva consigo una serie de ventajas e inconvenientes que están íntimamente ligados a las ventajas e inconvenientes de la Fotogrametría Digital frente a las técnicas clásicas de tipo analógico.

Entre las ventajas más importantes se pueden destacar:

- Las imágenes digitales, por su soporte de almacenamiento, carecen de los problemas derivado de la estabilidad dimensional que afecta a las imágenes analógicas cuando se modifican las condiciones medioambientales de su almacenamiento.
- Las imágenes digitales no requieren manipulación directa a la hora de ser utilizadas por lo que se eliminan los problemas ligados al deterioro que dicha manipulación conlleva las imágenes digitales pueden ser modificadas para mejorar su visualización (ajuste de niveles de brillo y contraste) mediante la aplicación de técnicas de análisis de imágenes, por otro lado, también es posible modificar la imagen para poner de manifiesto algún elemento de interés en la misma (por ejemplo, mediante la aplicación de un filtro de detección de bordes).
- Las imágenes digitales pueden ser transmitidas de una forma sencilla, rápida y segura a través de las redes informáticas, además es posible que distintos operadores trabajen de una forma simultánea o secuencial sobre el mismo fotograma lo que facilita sensiblemente los procesos de edición y revisión.
- Los productos derivados del tratamiento de las imágenes digitales son obtenidos directamente en formato digital por lo que son directamente integrables en sistemas tipo CAD o SIG.

El inconveniente más importante está relacionado con la necesidad de disponer de un elevado volumen de almacenamiento debido a la gran cantidad de información con la que se trabaja, además el sistema debe estar adaptado al dicho volumen. Es necesario tener en cuenta que una fotografía convencional de formato 23x23 cm, digitalizada con un tamaño de pixel de 15 μm ocupa un espacio

aproximadamente de 223 Mb (en tonos de gris) y 669 Mb (en color), y un proyecto fotogramétrico suele estar compuesto por numerosas imágenes.

6.5. Almacenamiento de imágenes digitales.

La Fotogrametría Digital se basa en las medidas efectuadas sobre las imágenes digitales, imágenes obtenidas mediante la digitalización de fotografías convencionales o bien directamente mediante la utilización de sensores. Este hecho supone importantes ventajas, apoyadas en las posibilidades de automatización del proceso, pero a la vez plantea ciertos problemas, debido a la cantidad de información que es necesario manipular y almacenar. Así, por ejemplo, para el almacenamiento de una fotografía aérea de formato 23x23cm digitalizada a una resolución de 10 μm se requiere un espacio de 473 Mb (B/N). Esta cifra se elevaría a 1.5 Gb si la fotografía se almacena en formato de color (24 bits), además es necesario tener en cuenta que en un proyecto fotogramétrico se utilizan cientos de modelos, por lo que las cantidades requeridas podrían saturar en la práctica cualquier sistema.

Por lo anteriormente expuesto, se puede indicar que la previsión del almacenamiento de la información digital es una de las principales preocupaciones a la hora de trabajar con imágenes digitales.

Entre los sistemas de almacenamientos de imágenes digitales pueden citarse:

Discos magnéticos

En estos discos, la grabación de datos se realiza al pasar la superficie del medio cerca de una cabeza que puede variar la posición del campo magnético. Los discos magnéticos son dispositivos tipo *RAD* (*read access direct*). Dentro de este tipo de sistemas se pueden distinguir básicamente dos tipos: discos duros y discos flexibles (*diskettes*).

La capacidad de los discos duros ha evolucionado desde los primitivos 10 MB hasta las capacidades actuales de varios Gb, con velocidades de acceso muy rápidas (80ms¹). Uno de los factores determinantes de la velocidad de acceso es la velocidad de rotación, así por ejemplo, un disco moderno tipo SCSI de 4.2 Gb con acceso de 8ms debe tener una velocidad de giro de 7000 rpm permitiendo una transferencia de datos de 10 Mb/seg².

En el caso de que se requiera una elevada capacidad de almacenamiento se pueden utilizar baterías de discos duros que se conectan mediante un sistema SCSI (*Small Computer System Interface*) y que poseen posibilidades RAM (*Redundant Arrays of Inexpensive Disks*). De esta forma se pueden alcanzar capacidades de hasta 45 Gb.

La capacidad de los discos flexibles es sensiblemente más reducida entre 1.44 Mb y 270Mb, además son considerablemente más lentos que los discos duros y menos fiables, motivos por los que son escasamente utilizados para almacenamiento de datos.

Discos ópticos

Los discos ópticos son sistemas tipo “*RAD*” en los que la información es leída y escrita mediante un sistema luminoso (usualmente un láser).

Dentro de este tipo se pueden distinguir distintos tipos de tecnologías, la más conocida de las cuales es la *WORM* (*Write Once Read Many*), es decir, sistemas que permiten un sola escritura y múltiples lecturas. En los sistemas *WORM*, un haz de rayo láser codifica la información y realiza perforaciones en la superficie del medio (hendiduras realizadas sobre la capa de material reflectante del CD) en forma

¹ ms= milésimas de segundo (tiempo de búsqueda)

² MB/sg velocidad de transferencia de información (Megabytes por segundo)

espiral (*CD-R*) El CD tiene un diámetro estándar de 120 mm y en la actualidad constituye uno de los sistemas más populares de almacenamiento de datos, con una capacidad máxima de 650 Mb (en otros modelos hasta 705 Mb). Los discos óptico regrabables (*CD-RW*) funcionan de una forma similar que los sistemas magnéticos en el sentido que la información puede ser reescrita repetidas veces.

Los DVD cuyas características son parecidas a las del CD, tienen capacidades de almacenamiento previsible de hasta 17 Gb y la posibilidad de sobrescribir información. El funcionamiento de los DVD es prácticamente idéntico al del CD, las perforaciones o hendiduras (pits) que se realizan sobre la capa de material reflectante del DVD son más cortas y estrechas que en el CD, además tienen dos caras y dos caras sobre las cuales se puede almacenar información. (*Fig 4*).



Figura 4. Diferencias entre DVD y CD en los pits.

La ventaja principal de este tipo de discos es su robustez y fiabilidad con una velocidad de acceso aceptable (20-90 ms).

Sistemas de cinta.

Las cintas son otro tipo de almacenamiento magnético de datos que presenta la ventaja de permitir el transporte de la información. Las unidades lectoras de cinta son más económicas que los sistemas ópticos pero son considerablemente más lentas, valga como referencia el hecho de que mientras que la velocidad de acceso a un disco duro o a una unidad óptica se mide en *mseg* para la unidad de cintas se mide en decenas de minutos. Este es el motivo por el cual estos sistemas son utilizados como sistemas de backup, (salvavarda de datos) y no permitiendo en la mayor parte de los casos el acceso directo a los mismos.

Almacenamiento holográfico.

En 1991, un grupo de científicos de Stanford publicó el desarrollo de un sistema de almacenamiento mediante técnicas holográficas. En este sistema los datos son convertidos en patrones de luz, las ondas de luz entran en un medio fotorrefractivo, produciendo una modificación a nivel microscópico de la carga eléctrica que afecta finalmente al índice local de refracción Para la lectura de los datos, se emplea un sistema láser y un elemento CCD, Los resultados expuestos fueron modestos, con un almacenamiento de 163 Mb y 6.3 Mb/seg. de transferencia.

6.6. Formatos gráficos de almacenamientos de imágenes digitales.

Formato PCX.

Es el formato original de los programas Paintbrush. Puede tener hasta 24 bits de profundidad de color, aunque también hay versiones de 8 y 4 bits.

Formato BMP.

Este el formato que utiliza Windows para su fondo de pantalla. Puede usar un máximo de 24 bits de

profundidad de color. Su cabecera describe las dimensiones y los colores, y el resto del fichero contiene los bytes que definen propiamente la imagen. Acabada esta cabecera comienza la tabla de definición de colores. Estos colores se definen por medio de intensidades relativas de cada uno de los colores fundamentales (RGB), utilizando un byte para cada uno de ellos y otro que queda reservado.

Formato GIF.

GIF (Graphic Interchange Format) es el formato propuesto por Compuserve para el intercambio y transmisión de información gráfica. Tras la cabecera comienza la tabla global de colores, que es donde se almacenan los valores de los colores que se usarán en la imagen, cada uno de los cuales vendrá definido por una combinación *RGB* de 3 bytes. A continuación viene la descripción de la imagen, que a su vez contiene la propia descripción, una tabla de color global (opcional) y los datos propiamente dichos.

Formato TIF.

El formato TIF (*Tag Image File Format*) nació como una mejora de los PCX ya existentes, y se caracteriza principalmente por estar orientado al intercambio de ficheros entre diferentes entornos. Es un fichero bitmap (raster). La lectura general de un fichero TIF se puede dividir en tres partes bien diferenciadas:

- ☞ La cabecera.
- ☞ La IFD (*Image File Directory*).
- ☞ La imagen propiamente dicha.

Es uno de los formatos gráficos más usuales en fotogrametría debido a su carácter compacto y al mismo tiempo abierto para añadir información.

Formato TGA.

Este es el formato de los ficheros Targa de TrueVision permitiendo el almacenamiento de imágenes monocromáticas o en color de 24 o 32 bits de profundidad.

6.7. Compresión de imágenes digitales.

La compresión de las imágenes digitales es una necesidad para la mayoría de las aplicaciones, en las que un número considerable de imágenes de gran tamaño deben de ser almacenadas en un espacio limitado o bien cuando éstas deben de ser transmitidas desde un sistema a otro. La idea básica de la compresión es la eliminación de la redundancia de la imagen original. Esto se realiza mediante la transformación de la imagen en una serie de coeficientes que serán posteriormente codificados.

En la actualidad los métodos más utilizados para la compresión de imágenes están basados en una transformación de coseno discreto, en la cuantización del vector y en el uso de pirámides de imágenes.

El objetivo final de la compresión es la reducción del número de bits requeridos para representar una imagen, eliminando las redundancias existentes en la misma. La *tasa de compresión* (o ratio de compresión) se define como la relación entre el número de bits de la imagen original dividido por el número de bits de la imagen comprimida.

En las imágenes digitales nos podemos encontrar con tres tipos básicos de redundancias:

- Redundancia espacial, debida a la correlación entre el nivel de gris de un píxel y el correspondiente de los vecinos próximos.

- Redundancia espectral, debida a la correlación entre el nivel digital correspondientes a las diferentes bandas (imágenes multispectrales).
- Redundancia temporal, debida a la correlación entre imágenes tomadas en distintos momentos (imágenes de vídeo).

Existen varios métodos de compresión, siendo la de los formatos TIFF y el uso de ficheros JPEG los más utilizados. Actualmente ha aparecido otro tipo de formato el MrSID.

Formato TIFF.

Se basa en cambiar la definición de cada uno de los valores de la celda por una suma de valores iguales.

Ejemplo. Supongamos la siguiente matriz:

```
2 2 2 1 1
1 1 1 1 2
2 2 2 4 5
6 7 2 2 2
```

Sin compresión: 2, 2, 2, 1, 1, 2, 2, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 4, 6, 5, 3, 2, 2, 6

Con compresión: 3, 2, 6, 1, 4, 2, 1, 4, 5, 6, 7, 3, 2

El inconveniente de esta compresión es que llega a un máximo de 1/3 de tamaño original (tasa de compresión máxima 3:1). La ventaja reside en la nula pérdida de información.

Formato JPEG.

Es el formato de compresión más extendido y debido a la cada vez mayor necesidad de comprimir las imágenes puede convertirse en otro estándar, junto con el TIFF, dentro de Fotogrametría. Se basa en dividir la imagen en bloques de 8×8 (pixel) donde toman un valor mediante una transformación bidimensional discreta de cosenos (*DCT*) produciendo 64 coeficientes de salida. La media de los valores se registra y los otros 63 se expresan relativamente respecto al valor base. Esto hace reducir la magnitud de los valores e incrementan el número de ceros en los coeficientes. Los datos son entonces compactados usando la codificación Huffman la cual genera códigos más cortos para símbolos más frecuentes (la descompresión es al revés).

Con este tipo de se puede llegar a una reducción de entre 10 y 15 veces (tasa de compresión 1:10, 1:15) sin causar significantes cambios en la geometría de la imagen.

La compresión se regula por un parámetro Q función de la calidad de la compresión y que establece el usuario.

La compresión no afecta solo al tamaño de los ficheros, sino a los tiempos invertidos en las operaciones, no de los ficheros en la memoria del ordenador que son los mismos, sino de lectura y grabación de las fotografías.

El estándar JPEG define 3 diferentes sistemas de codificación:

- 1.Sistema de codificación de base de pérdida, el cual se basa en una transformación discreta de cosenos (DCT) adecuada a la mayor parte de las aplicaciones.
- 2.Sistema de codificación extendida para aplicaciones de mayor compresión, mayor precisión o

reconstrucción progresiva.

3. Sistema de codificación independiente de pérdidas para definir la reversibilidad de la compresión.

El sistema de codificación de base de pérdidas frecuentemente llamado, sistema secuencial de base, tiene el límite de 8 bits tanto en la entrada como en la salida de los datos. La compresión se realiza en 3 pasos:

- a) Cálculo de la DCT.
- b) Medición.
- c) Asignación de variables longitud a los códigos.

Una vez dividida la imagen en bloques procesados de izquierda a derecha y de arriba abajo, se aplica la transformación bidimensional discreta de cosenos y reordenando la matriz solución de forma que mediante un patrón zigzag se forma una secuencia unidimensional de coeficientes.

Compresión jerárquica predictiva (HPC).

Este sistema de comprensión de imágenes surge como un sistema de comprensión para imágenes de vídeo. El algoritmo comienza con la creación de una representación a escala a distintos niveles de la imagen original (pirámides de imágenes). Por ejemplo, una imagen de un tamaño de, 1024×1024 píxeles se descompone en cinco imágenes correspondientes a cinco niveles de escala: 512×512 , 256×256 , 128×128 y 64×64 . La pirámide se crea mediante la convolución de las imágenes de mayor resolución mediante la aplicación de un operador gaussiano y la aumento del tamaño del pixel al doble.

Se calculan las imágenes diferencia entre los diferentes niveles. Estas diferencias representan los componentes de alta frecuencia del nivel previo de la pirámide. La imagen original puede ser reconstruida a partir de su representación en el nivel de menor resolución (64×64 píxeles) y de las imágenes diferencia. Los valores de pixel de las imágenes diferencia son normalmente pequeños y pueden ser codificados y almacenados en un número reducido de bits, de forma que se alcanza una compresión sin pérdida de información, no obstante para obtener mayor tasa de compresión se utiliza la cuantización, que produce degradación de la imagen y una compresión más eficaz pero con pérdida de calidad.

El algoritmo de la HPC consta de los siguientes pasos (*Fig. 5*).

- Se crea una, pirámide de imágenes mediante un operador gaussiano de tamaño 3×3 . De este forma, por ejemplo, una imagen de tamaño 1024×1024 , da lugar a una sucesión de imágenes 512×512 , 256×256 , 128×128 y 64×64 .
- Se calculan las imágenes diferencia de todos los niveles, obteniendo en el ejemplo anterior 4 imágenes diferencia ($1024-512$), ($512-256$), ($256-128$) y ($128-64$).

La clave del método consiste en el modo de almacenamiento de las imágenes:

- Los valores de la imagen del nivel más alto (64×64) y la primera imagen diferencia (128×128) es almacenada como enteros de 8bits.
- Los valores de la imagen diferencia $256/128$ son almacenados como enteros de 5 bits.
- Los valores de la imagen diferencia de $512/256$ son almacenados como enteros de 3 bits.
- Los valores de la imagen diferencia $1024/512$ son almacenados como enteros de 1 bits.

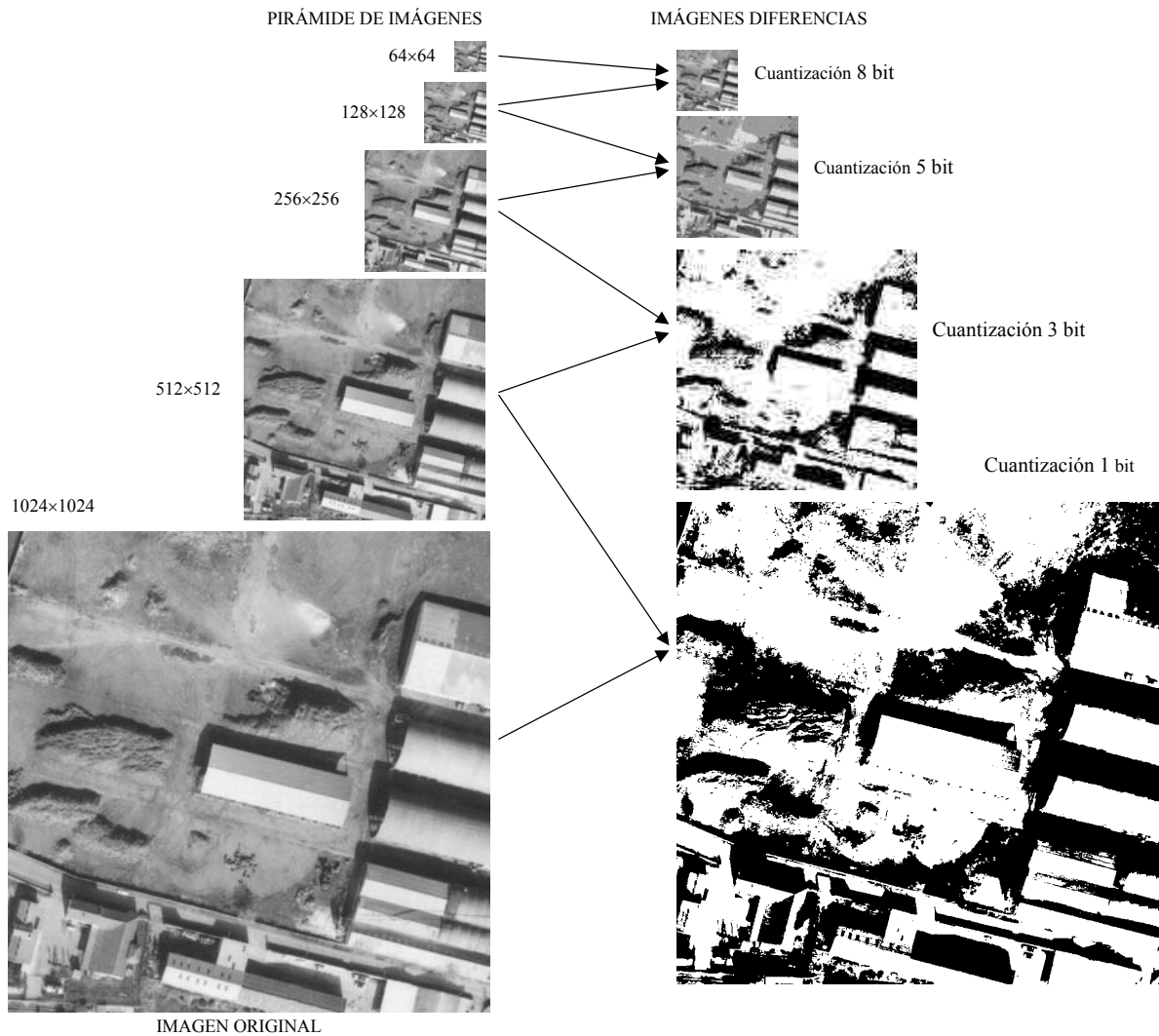


Figura 5. Esquema de compresión HPC.

Mediante este sistema (HPC-8.5.3.1) se alcanza una tasa de compresión de 3.6. Para obtener tasas más elevadas las imágenes diferencia deben, ser almacenados en un número más pequeño de bits. Sin embargo, esto supone una mayor degradación de la imagen así con un esquema (8.3.3.1) se alcanza una tasa de compresión de 4.5.

Puede decirse que la compresión es más eficientes que las imágenes piramidales en cuanto a reducción de tamaño se refiere. En compresión se pueden reducir más el tamaño de las imágenes, sin embargo las imágenes piramidales tienen un potencial mayor en el análisis de las mismas y en su cálculo.

Entre las ventajas de este tipo de imágenes cabe destacar:

- Los niveles se pueden incrementar, ya que estas imágenes se forman a partir de la imagen original.
- Existen unos valores iniciales para niveles piramidales bajos que nos pueden orientar sobre los valores de las imágenes.
- La velocidad de cálculo puede ser mejorada dependiendo del nivel piramidal.
- Se pueden encontrar cálculos erróneos con valores promediados.
- La ventaja más clara es la disminución de tamaño y consiguiente velocidad.

Una ventaja adicional del sistema HPC es la posibilidad de disponer de un conjunto de imágenes a diferentes resoluciones que permite la resolución del problema fotogramétrico, partiendo de una imagen

generalizada (de escaso volumen pero que refleja los elementos más relevantes de la imagen) y refinando los resultados al descender de nivel utilizando los resultados de nivel superior como valores de partida. (Fig. 6)

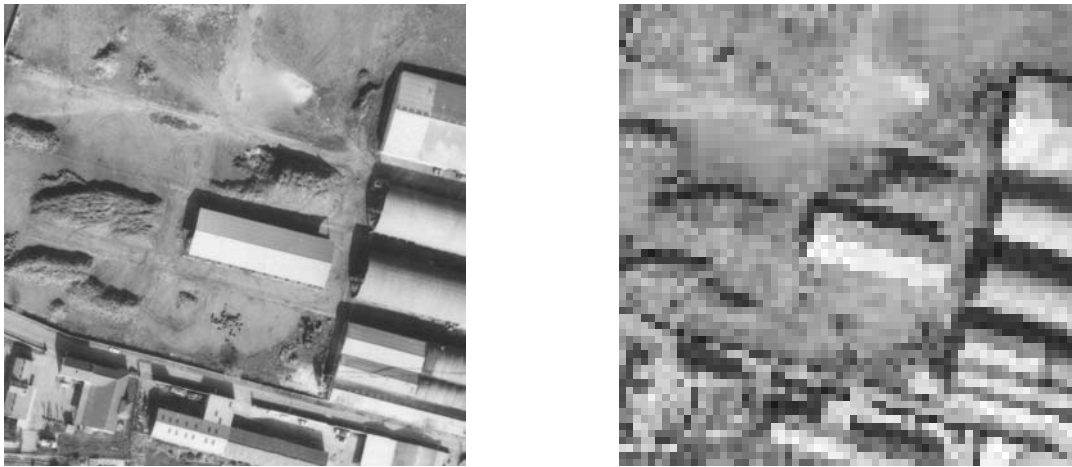


Imagen Original (Nivel 0) (1024x1024)

Imagen Nivel 4 (64x64). Ampliada 16 veces

Figura 6. Imagen original e imagen del nivel superior obtenida mediante HPC

Formato MrSID.

Este tipo de compresión se basa en la utilización de una transformación local, basándose en la transformada de wavelet discretizada, de manera que tiene una resolución uniforme y una calidad superior en toda la imagen. Otra ventaja de este tipo de formato es que lleva a cabo una transformación multiresolución³. Esta característica hace que la visualización sea mucho mejor a todas las escalas de trabajo, especialmente las pequeñas y medianas así como favorece una velocidad de transmisión de datos superior. La descompresión que realiza es selectiva, es decir, únicamente descomprime la porción de la imagen visualizada, cosa que, junto con la multiresolución, permite visualizar y trabajar con imágenes de gran tamaño con gran agilidad.

Este tipo de formato mantiene una perfecta calidad de la imagen hasta tasas de compresión de 20:1 para imágenes a color (RGB) y de 12:1 para escala de grises (B/N).

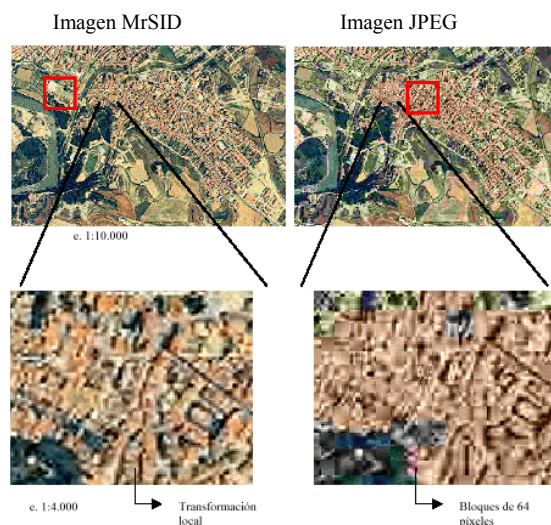


Figura 7. Comparación MrSID y JPEG.

³ Multiresolución: genera múltiples resoluciones en un archivo, de forma que cuando se realiza un zoom, la imagen aumenta en calidad.

6.8. Calidad de la imagen

Para evaluar la calidad de la imagen es preciso considerar la geometría y la radiometría del pixel.

6.8.1. Geometría

Para asegurar que no se pierde información, la resolución del pixel debe adaptarse a la resolución de la fotografía. Si expresamos la resolución fotográfica por R expresada en líneas dobles por milímetro (*lp/mm*) y aceptando la fórmula empírica:

$$\Delta D(mm) < \frac{0.7}{2R}$$

Siendo ΔD el intervalo de barrido (digitizing interval). Si aplicamos tal criterio a fotografías aéreas de bajo poder de resolución, por ejemplo de 50 *lp/mm*:

$$\Delta D = 7 \mu m$$

Umbral que hoy se acepta como tamaño ideal del pixel en fotogrametría digital.

6.8.2. Radiometría

Un parámetro de gran importancia para evaluar la calidad radiométrica de una imagen digital es el "bit number". El bit (dígito binario) es la unidad básica de información digital y se expresa por:

$$bit = \log_2 I$$

El número de niveles de grises G se expresa:

$$G = 2^m \quad (m = bit \ number)$$

Los parámetros poder de resolución y número de niveles de grises son los que definen con mayor entidad la calidad de una imagen digital.

6.8.3. Ruido

La mayoría de las señales están sujetas a ruido, el cual viene causado por diversas fuentes, entre las más importantes:

- Procesos eléctricos, debido a defectos en la correcta medición de la señal.
- Ruido oscuro actual o cuantificado, ocasionado por el intervalo a tener en cuenta en la medición de la señal y su equivalente a un valor concreto.

El aspecto más importante en la señal es la razón entre el valor efectivo de entrada de la señal (s) y el nivel de ruido (N) o también razón señal / ruido (S/N). Con ella calculamos la calidad de la medición de la señal y en un sensor de imágenes, se determina el máximo contraste posible en una imagen.

El ruido se puede expresar en decibelios mediante:

$$S/N = 10 \log \left(\frac{\text{señal eléctrica}}{\text{ruido eléctrico}} \right)$$

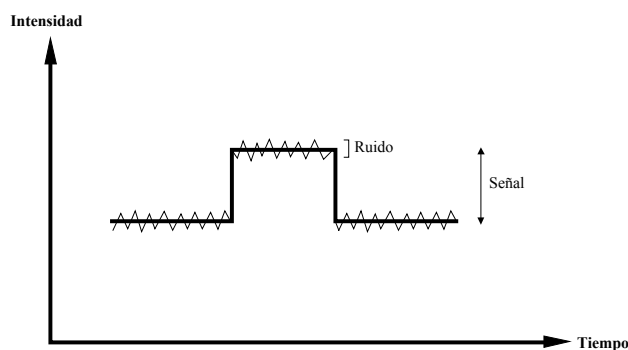


Fig 6. Efecto del ruido en la señal.

La figura 6 muestra un cambio de intensidad en la señal con un ruido superpuesto. El ruido reduce la significación de la señal y si se incrementa el ruido, pudiendo distorsionar el valor de la señal y por supuesto la señal. En una imagen digital, la medición del nivel de gris (Nd) gris ser mucho mayor que el ruido, de lo contrario los datos estarán enmascarados por el ruido.

La relación señal/ruido (SNR) para un sensor se expresa en decibelios

$$SNR_{de} = 2 \log \left(\frac{s}{\sigma_s} \right)$$

Siendo “ s ” la señal y “ σ_s ” es la desviación estándar de la señal. El ruido del golpe del fotón es igual a la raíz cuadrada de la señal.

$$SNR = \sqrt{s}$$

El máximo de SNR ocurre para el máximo valor de la señal. Valores para sensores CCD son aproximadamente de 60 db que corresponde a una capacidad de 106 electrones en un sensor típico de carga.

6.9. Análisis de imágenes.

Otro tipo de procedimientos frecuentemente aplicados en la fase de preprocesamiento de la imagen, son los que persiguen mejorar la calidad visual de la misma. Los procedimientos más aplicados son:

- Mejora de la calidad visual de la imagen aplicando las técnicas de realce del histograma de los niveles digitales.
- Reducción de ruido del sensor, mediante la aplicación de técnicas de filtrado de paso bajo.
- Facilitar el trabajo de restitución, automática o manual, de los elementos cartografiados de la imagen, mediante la aplicación de filtros de realce de bordes, clasificaciones, etc.
- Por último, también pueden ser aplicadas técnicas más complejas como las relativas a segmentación, seguimiento de líneas, etc., dentro de la fase de restitución.

6.9.1. Técnicas de realce de la imagen

Una imagen digital queda definida estadísticamente en cuanto a la respuesta espectral por su histograma. El histograma representa la probabilidad de aparición de un determinado nivel digital en la imagen. Una imagen tiene un único histograma que pone de manifiesto su contraste y la homogeneidad de la misma.

Cuando se trabaja con una imagen digital es frecuente que el contraste de la misma no sea el deseado, así se puede observar como el rasgo de niveles digitales que aparecen en la imagen, no cubre el abanico de posibilidades del sistema utilizado para la visualización (usualmente, 256 niveles de gris) (Fig.7).

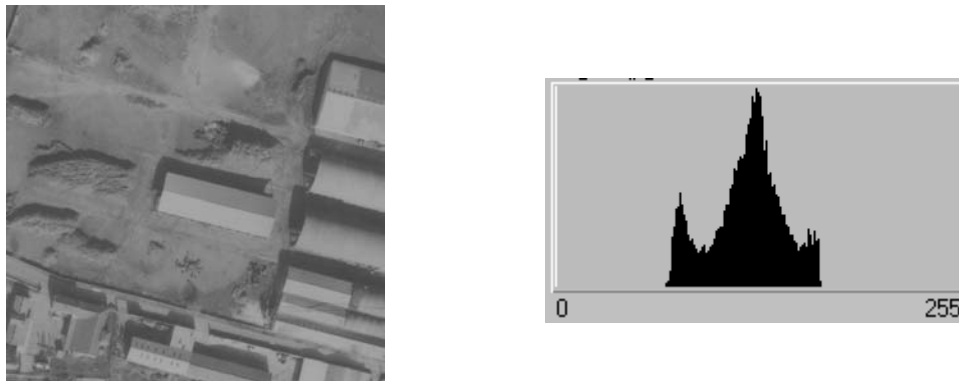


Fig.7. Imagen digital con bajo contraste e histograma correspondiente

Para conseguir el ajuste entre ambos intervalos, el de la imagen y el del sistema de visualización se aplican las técnicas conocidas bajo el nombre de técnicas de realce de imagen que no consisten sino en la transformación de los niveles digitales de la imagen, mediante una función de transformación que cumplan las condiciones de que sea reversible y además le asigne a todos los píxeles con un mismo nivel en la imagen original el mismo valor en la imagen realzada.

Existen diversas técnicas de realce de la imagen, que serán seleccionadas en función del histograma de la imagen original y del producto que se desee obtener. Las más frecuentemente aplicadas son:

- Realce lineal.
- Realce lineal con saturación.
- Realce logarítmico o exponencial.

Realce lineal. Consiste en la aplicación de una función del tipo $y = f(x) = ax + b$, siendo x el valor digital de la imagen original e y el valor de la imagen realzada. El histograma de la imagen realzada viene dado por la expresión:

$$h_r(y) = \frac{1}{a} h_o \left(\frac{y-b}{a} \right)$$

siendo h_r , el histograma de la imagen realzada; h_o , el histograma de la imagen original; y , el valor de la imagen realzada y a y b , las constantes que definen el tipo de realce lineal aplicado.

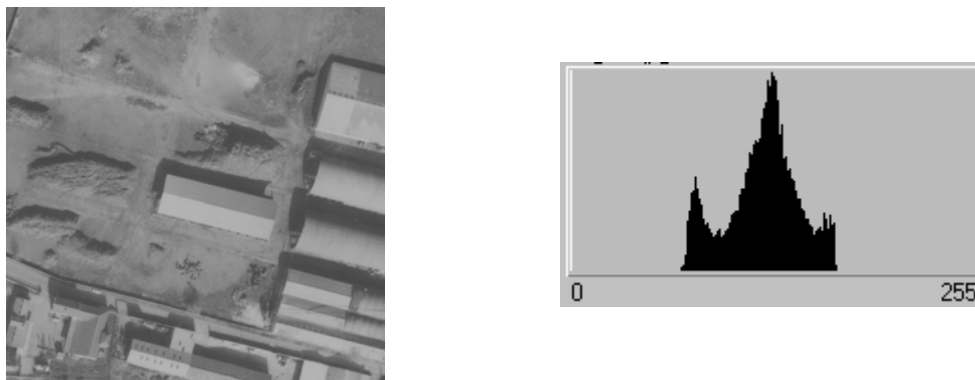


Figura 8-a. Imagen original con histograma

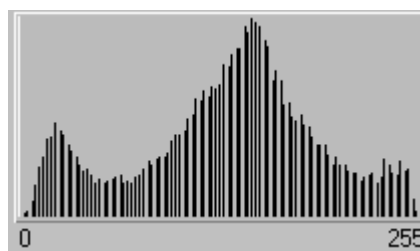


Figura 8-b. Imagen resultante de aplicar a la imagen original (Fig. 8-a) un realce lineal

Realce lineal con saturación. Comúnmente, obtiene una mejor calidad visual si se introduce un cierto rango de saturación en los extremos del histograma (blanco y negro). La función aplicada es similar a la aplicada en la técnica lineal con la única diferencia de establecer dos valores: B_{\min} y B_{\max} que marcan los límites del histograma. Estos valores suelen tomarse en función de la media y la desviación típica del histograma de la imagen a corregir, así B_{\min} será la media menos tres veces la desviación típica mientras que B_{\max} será la media más tres veces la desviación típica, este sistema es implementado en numerosos sistemas de tratamiento de imágenes y es conocido como realce automático. En la figura 9 se muestra el resultado de la aplicación a la imagen mostrada en la figura 8-a de un realce lineal con una saturación del 50 %.

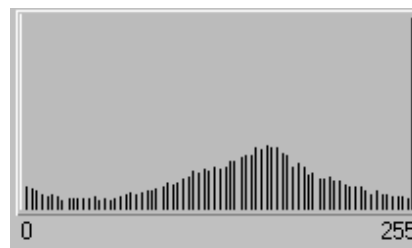


Figura 9. Imagen resultante de aplicar a la imagen original (Fig. 8-a) un realce lineal con saturación

Realce de contraste logarítmico y exponencial. Este tipo de realces son utilizados para la resaltar elementos oscuros y claros, respectivamente. Las funciones son del tipo $y = b \log(ax) + c$ e $y = b e^{ax} + c$, en las que los valores a , b y c son seleccionados en función de los niveles digitales a resaltar. Es importante tener en cuenta que estas funciones deben ser tales que los valores resultantes estén comprendidas dentro del rango de valores del sistema de visualización y de almacenamiento.

Realce piecewise. Consiste en la aplicación de, una función flexible definida por el usuario. Esta función está caracterizada por los puntos de ruptura y se puede considerar como la aplicación de la técnica de realce lineal entre las parejas de puntos de ruptura definidos.

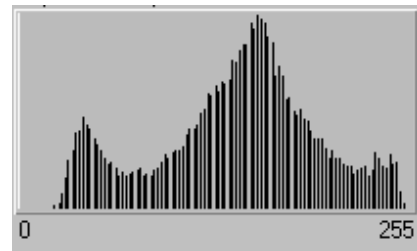


Figura 10. Imagen resultante de aplicar a la imagen original (Fig. 8-a) un realce piecewise

6.9.2. Ecuación del histograma

Anteriormente se han vistos técnicas de expansión (o contracción) del histograma de una imagen. En numerosas ocasiones, es deseable, sin embargo, modificar la forma del histograma según un patrón determinado. Uno de los patrones más empleados es el de la ecualización del histograma.

La ecualización del histograma es una operación orientada a repartir de manera uniforme los niveles de gris entre los píxeles de la imagen. Este procedimiento asigna mayor rango de nivel digital de la imagen de salida a los niveles digitales más frecuentes en la imagen de entrada. En consecuencia, en la imagen realzada quedan mejor contrastados los niveles de gris ocupados por más celdillas en la imagen primitiva. En general se consigue un histograma mejor distribuido, con mejor separación entre los "Nd" más frecuentes de la imagen.

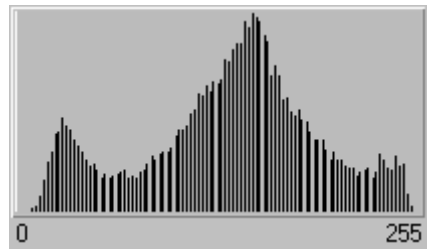


Figura 11. Imagen resultante de aplicar a la imagen original (Fig. 8-a) la técnica de ecualización del histograma

6.9.3. Filtros

Un filtro es un proceso matemático que consiste en aislar componente de interés, reforzando o suavizando los contrastes espaciales del nivel de gris que integran una imagen. Es decir, se trata de transformar los niveles de gris originales de cada pixel, de tal forma que se asemejen o diferencien más a sus correspondientes vecinos. En función de si el objetivo es que se aumente el parecido o la diferencia se distinguen filtros de paso bajo o filtros de paso alto.

Normalmente, el filtro consiste en una matriz deslizante que puede expresarse en forma discreta como:

$$F'(x, y) = \sum_{i=-g}^g \sum_{j=-h}^h w(i, j) f(x+i, y+j)$$

siendo x y y respectivamente, las columnas y filas de la matriz imagen resultante. Los elementos w constitutivos de la matriz son denominados coeficientes de peso, y el entorno $[-g, g] \times [-h, h]$, ventana de filtro. Normalmente $g=h$, es decir, la ventana de filtrado es cuadrada. Según sea el valor de g y h , la influencia del entorno de las celdillas en el valor digital asignado a la celdilla resultante será progresivamente mayor, modificándose en consecuencia la apariencia de la imagen filtrada. Los filtros más comúnmente utilizados son de 3×3 elementos. (Fig. 12).

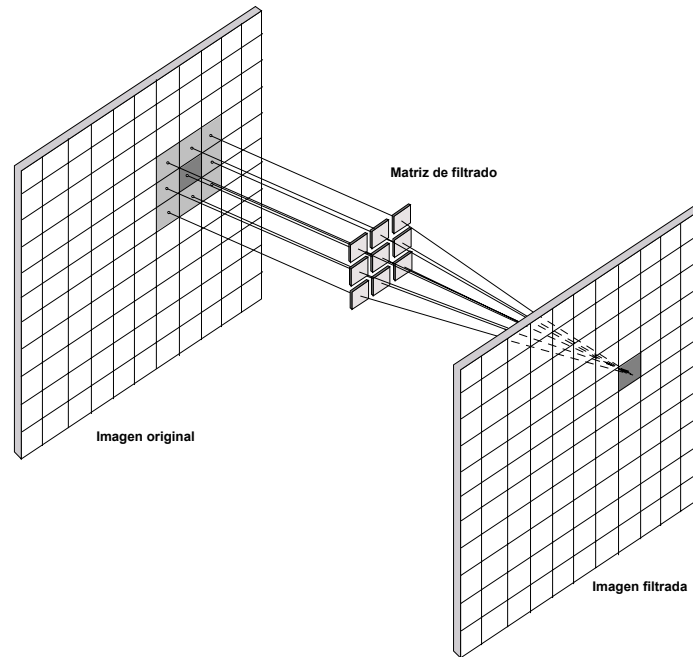


Figura 12. Matriz deslizante en el filtrado de imágenes.

Realizando el filtrado de una imagen mediante la matriz:

$$\begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & w_{13} \\ w_{21} & w_{22} & w_{23} \\ w_{31} & w_{31} & w_{32} \end{bmatrix}$$

Darían lugar a una imagen de la forma:

$$\begin{aligned} F'(x, y) = & w_{11} F(x-1, y-1) + w_{12} F(x, y-1) + w_{13} F(x+1, y-1) + \\ & + w_{21} F(x-1, y) + w_{22} F(x, y) + w_{23} F(x+1, y) + \\ & + w_{31} F(x-1, y+1) + w_{32} F(x, y+1) + w_{33} F(x+1, y+1) \end{aligned}$$

Es conveniente que la matriz de filtrado sea normalizada, es decir, que la suma de todos sus elementos sea igual a la unidad. El filtro puede ser definido por el usuario de acuerdo a sus necesidades. De acuerdo con el efecto que produzca sobre las imágenes, los filtros se clasifican en diversos tipos: filtros de paso bajo, de paso alto, de mediana, direccionales, etc.

Filtros de paso bajo. El objeto de la aplicación de un filtro de paso bajo es el suavizado de la imagen mediante la uniformización de sus Nd. La denominación de paso bajo se refiere a que deja pasar los

componentes de baja frecuencia, reteniendo los de alta, de tal forma que en la imagen de salida quedan amortiguados los cambios bruscos. Es decir, se trata de asemejar el nivel de gris de cada elemento, al de los adyacentes consiguiendo un suavizado de los ruidos de fondo, así como de las estructuras mínimas (de corto alcance). La aplicación de este tipo de filtros la determinación del nivel de fondo *-background-* de la imagen así como la eliminación de errores aleatorios (ruidos).

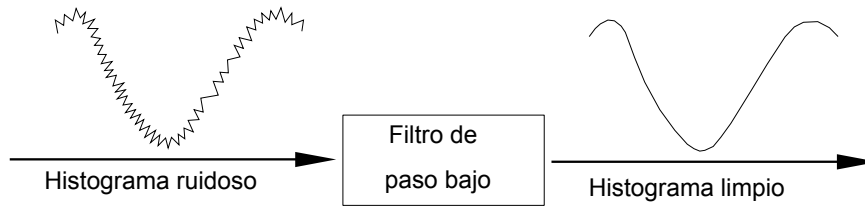


Figura 13. Efecto de un filtro de paso bajo sobre histograma.

Los filtros más frecuentemente aplicados en el tratamiento de imágenes digitales fotogramétricas son el filtro de la media (primero de los representados en tres matrices de filtrado) y el filtro de la mediana (Fig. 14). El primero consiste en asignar al pixel a filtrar la media de los valores integrados en el área delimitada por la ventana de filtrado. El filtro de la mediana, ideado por Tukey es de tipo no lineal y consiste en asignar al pixel a filtrar el valor correspondiente a la mediana de los pixeles integrados en el área delimitada por la matriz de búsqueda.

$$\frac{1}{9} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$



Imagen original

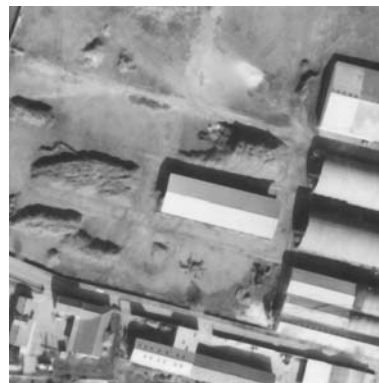


Imagen resultante

Figura 14. Aplicación de un filtro de paso bajo (mediana)

Filtros de paso alto. Los filtros de paso alto son aquellos que refuerzan los componentes de alta frecuencia en la imagen sin eliminar los de baja. El objeto de la aplicación de este tipo de filtros es la detección de zonas de contraste elevado, consiguiendo remarcar los contrastes del pixels adyacentes, enfatizando rasgos lineales presentes en la imagen.

Existen dos formas de obtener u refuerzo en las zonas de alta variabilidad:

1. Consiste en sumar a la imagen original la diferencia entre ella misma y la producida por un filtro de paso bajo.

$$F'(x,y) = F(x,y) + [F(x,y) - F_{fpb}(x,y)]$$

siendo:

- $F'(x,y)$, valores de la imagen filtrada.
- $F(x,y)$, valores de la imagen original.
- $F_{fpb}(x,y)$, valores de la imagen resultados de un filtro de paso bajo.

2.Aplicación de matrices (ventanas de filtrados).

Uno de los más aplicados son los conocidos como filtros de realce de contornos. Su objetivo es conseguir una imagen más definida y por tanto, más fácilmente interpretable. Para conseguir este objetivo, la matriz a emplear debe de ser tal que se aumente las diferencias entre los píxeles vecinos, es decir, que se refuercen las frecuencias altas.

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 9 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 5 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

También son muy empleados los filtros que realizan el realce de bordes de una dirección preferentemente, estos filtros denominados direccionales suelen incorporar matrices del tipo:

$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$
NO	N	NE
$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$
O		E
$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$
SO	S	SE

Otros filtros frecuentemente utilizados son el filtro Roberts y el filtro Sobel.

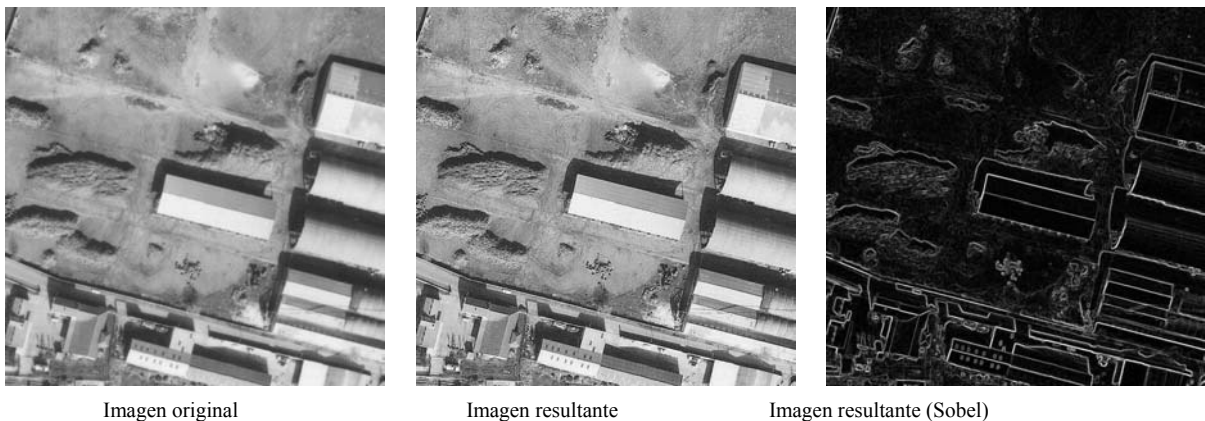


Figura 15. Aplicación de filtros de paso alto.

6.9.4. Segmentación de la imagen

Dentro del tratamiento digital de imágenes uno de los procesos más importantes es el de segmentación, ya que consiste en la transformación, mediante umbralización de una imagen digital, en una nueva binaria, sobre la que vamos a realizar la identificación y cuantificación de las diferentes fases.

Segmentar una imagen digital significa dividirla en zonas disjuntas e individualizadas. En cierta manera, equivale a su reconocimiento, puesto que como consecuencia de la segmentación los diferentes objetos (entendidos como realizaciones físicas de clases o patrones abstractos) se encuentran perfectamente ubicados dentro de la imagen digital.

De manera gráfica, en la figura 16 se ha representado el proceso de la segmentación de una imagen simple. Se aprecia en dicha figura que en virtud de la segmentación se ha pasado de una imagen digital bruta, con toda su información realizada en forma de los niveles de intensidad luminosa de sus $m \times n$ píxeles, a una nueva imagen mucho más simplificada, en la que están nítidamente distinguidos entre sí los diferentes objetos existentes. En este sentido general y abstracto, la segmentación podría verse como una operación de mapeo entre la imagen $F(x,y)$; $x = 0, 1 \dots, m-1$ e $y = 0, 1, \dots, n-1$ bajo estudio y una nueva imagen abstracta formada por los objetos presentes, etiquetados individualmente y con sus coordenadas perfectamente delimitadas.

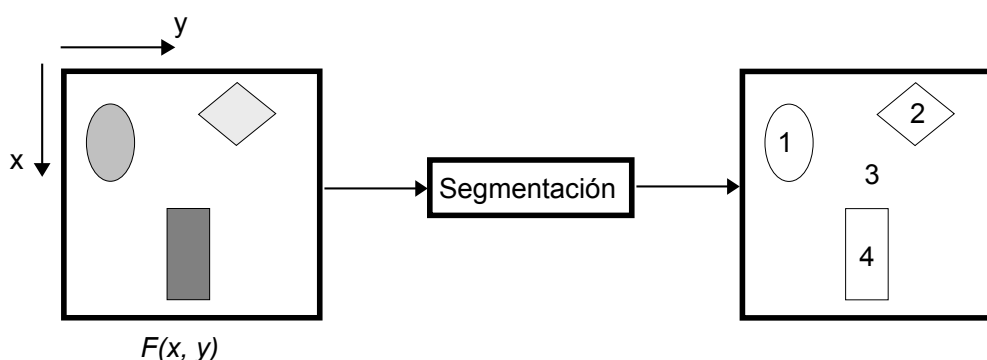


Figura 16. Esquema simbólico del proceso de segmentación.

Dicho en otras palabras, la segmentación produce una imagen en la que, junto a las coordenadas que definen una posición dentro del plano de la imagen, cada píxel posee una etiqueta distintiva.

Una vez segmentada la imagen se puede formar una lista de objetos sin más que agrupar todos los píxeles que posean la misma etiqueta y, al mismo tiempo, que estén conectados espacialmente.

A partir de esta lista de objetos o regiones etiquetados, el siguiente paso es su clasificación o reconocimiento automático, para lo cual se extraerán rasgos o características discriminantes, aplicando las técnicas estudiadas en la primera parte de este libro. El cálculo de las características discriminantes se tratará en el siguiente capítulo, limitándonos en éste al estudio de algunos procedimientos para segmentar imágenes digitales.

La segmentación obtiene, o bien una imagen binaria, o una imagen clasificada, dependiendo del número de fases que discriminemos.

Para conseguir una buena segmentación debemos generar una imagen digital con uniformidad de niveles de gris, dentro de cada rango de fases. a estimar, de modo que ninguna pueda solaparse con la adyacente. Existen diversas técnicas de segmentación, así se puede realizar una primera clasificación según criterios globales, locales y umbrales dinámicos; bien establecerla en función de los niveles de gris o combinar ambos métodos.

Básicamente, una clasificación, requiere tomar uno o más umbrales, consiguiendo, en el primer caso, una imagen binaria y, en el segundo, una imagen clasificada.

Para entender esta idea vamos a apoyarnos en la figura 17, donde aparece una imagen muy sencilla, formada por un objeto (en este caso, oscuro) sobre un fondo claro. En esta figura también se ha representado su correspondiente histograma.

Este histograma es claramente bimodal (es decir, presenta dos máximos y un único mínimo), ya que los píxeles de la imagen se distribuyen en dos clases o regiones: el objeto y el fondo. En este caso es relativamente sencillo calcular un valor umbral que discrimine de manera óptima las dos clases existentes.

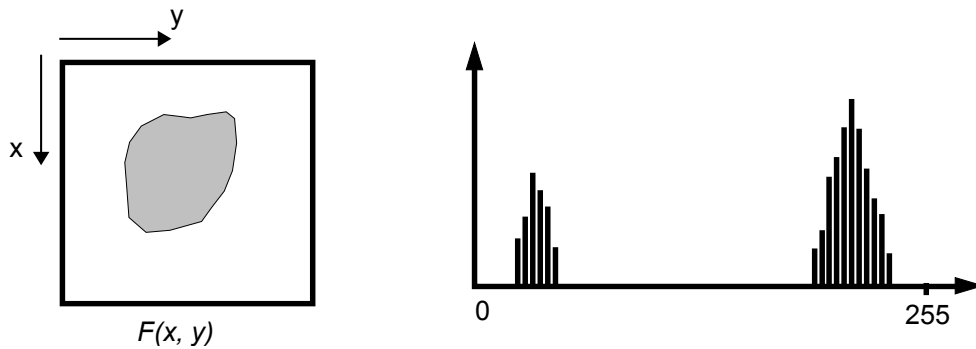


Figura 17. Imagen digital de un objeto oscuro sobre un fondo claro y su correspondiente histograma.

Esta umbralización basada exclusivamente en los niveles de luminosidad se llama global.

Matemáticamente, podemos considerar una imagen $F(x, y)$ original, y U el umbral. El valor de la imagen resultante $F'(x, y)$ vendrá condicionado por:

$$\begin{aligned} F'(x, y) &= 0 & \text{si} & & F(x, y) \leq U \\ F'(x, y) &= 1 & \text{si} & & F(x, y) > U \end{aligned}$$

Esto nos distingue n clases, a partir de n-1 umbrales.

Si se desea clasificar, por ejemplo, una señal en cinco, niveles, debemos establecer cuatro umbrales. Si se tiene en cuenta el planteamiento anterior, el proceso será:

$$\begin{aligned} F'(x, y) &= c_1 & \text{si} & & F(x, y) \leq U_1 \\ F'(x, y) &= c_2 & \text{si} & & U_1 < F(x, y) \leq U_2 \\ F'(x, y) &= c_3 & \text{si} & & U_2 < F(x, y) \leq U_3 \\ F'(x, y) &= c_4 & \text{si} & & U_3 < F(x, y) \leq U_4 \\ F'(x, y) &= c_5 & \text{si} & & U_4 < F(x, y) \leq U_5 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la elección de un umbral o umbrales, de segmentación es una decisión muy importante para una, buena clasificación. Si el umbral escogido es demasiado alto, se pierde información, ya que la, misma queda asimilada al fondo, o bien a una clase inferior, por el contrario, si es demasiado bajo, se está incorporando a la clase información que no le pertenece. Debido a esto es importante, realizar la segmentación posteriormente a las técnicas de mejora de la imagen, como por ejemplo (Fig. 18), filtrado (eliminación del ruido y realce de contornos) y realce del histograma de la imagen (amplitud del histograma).

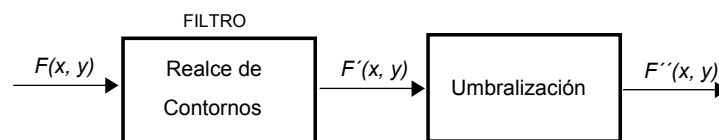


Figura 18. Ejemplo de esquema de segmentación.

Bibliografía

- Ackermann, F., Digital Photogrammetry: Challenge and Potential. Photogrammetric Engineering & Remote Sensing (Junio 1996), p. 679.
- Delgado, J., Apuntes de Fotogrametría Digital, Universidad Politécnica de Jaén, 1997.
- Fritsch, D. et al. Photogrammetric Image Processig. The 44th Photogrammetric Week. Stuttgart (1993) Wichmann, ISBN 3-87907-255-8.
- Lammi, J. y Sarjakoski, Image Compression by the JPEG Algrithm, Photogrammetric Engineering & Remote Sensing (1995), 61(10), 1261-1266.
- Maravall, D., Reconocimiento de formas y visión artificial, Ra-ma, Madrid (1993), ISBN 84-7897-109-2.
- Ormeño, S., Elementos físicos de Teledetección, Universidad Politécnica de Madrid, (E.U.I.T.T.), Madrid (1993).
- Pinilla, C, Elementos de Teledetección, Ra-ma, Madrid (1995), ISBN 84-7897-202-1.
- Schowengert, R.A., Techniques for Image Processing and Clasification in Remote Sensisng. Academic Press, New York (1983).

TEMA 7

SISTEMAS DE ADQUISICIÓN DE IMÁGENES DIGITALES

7.1. Introducción

7.2. Escáner

7.2.1. Tipo de escáner

7.2.2. Problemática del escáner

7.2.3. Test de calibración

7.2.4. Problemática radiométrica de las imágenes obtenidas con escáners

7.2.5. Características generales de los escáners

7.3. Cámaras digitales

7.3.1. Requisitos

7.3.2. Sensores digitales aerotransportados. *(ADS)*

7.3.3. Sensores lineales

7.3.4. Sensores matriciales

Bibliografía

7.1. Introducción

La característica fundamental de la fotogrametría digital es la utilización de imágenes en formato digital. Para realizar la adquisición de imágenes digitales fotogramétricas son empleados dos procedimientos básicos:

- Utilización de sensores digitales, o bien sensores analógicos dotados de un convertor analógico-digital.
- Digitalización de imágenes analógicas adquiridas con cámaras fotográficas convencionales.

La captura de imágenes mediante técnicas fotográficas es un proceso que ha alcanzado en los últimos años unos niveles de calidad muy elevados, tanto en rendimiento como en producción. Así, en el período de 1960 a 1994 se ha reducido la distorsión radial de las cámaras en más de 3 veces, pasando de valores en torno a 10 micras a cifras inferiores a 3 micras, mientras que la resolución espacial ponderada en función del área (*AWAR*) casi se ha duplicado, pasando de 63 a valores superiores a 94 lp/mm.

En la actualidad, las cámaras métricas analógicas utilizadas suelen tener una distancia local de 152 mm y un formato de 230 x 230 mm, registrándose la imagen de forma instantánea en la película

fotográfica. La película fotográfica puede ser considerada como una matriz prácticamente infinita de elementos sensibles a la luz, motivo por el cual se puede considerar que son los elementos de captación de imágenes remotas con mayor resolución. Sin embargo, la resolución efectiva de una cámara es función de la calidad de la lente, la definición de la película, los desplazamientos en la imagen debido al desplazamiento del avión, el desplazamiento angular y la calidad de la película empleada para la copia, junto con otros factores independientes del diseño de la cámara como, por ejemplo, el estado de la atmósfera en el momento de la toma y el nivel de contraste del terreno a fotografiar, que reducen la calidad del fotograma real a una cifra en torno a 40 lp/mm.

Este nivel de resolución práctica de 40 lp/mm implica unas necesidades de almacenamiento en vuelo difícilmente alcanzables con la tecnología actual. Así, una imagen de 23 x 23 cm tendría un tamaño de 23.000 x 23.000 pixels, lo que resultaría un tamaño de fichero de la imagen digital de 500 Mb (en 256 tonos de gris) o 1.500 Mb (en color real, 16,7 millones de colores). Este volumen de datos debe ser capturado, transferido y almacenado en el escaso tiempo disponible entre tomas, que suele ser inferior a 10 segundos.

Todo lo anterior ha determinado que, en la actualidad, el procedimiento básico para la obtención de imágenes fotogramétricas en formato digital sea la captura mediante una cámara métrica analógica convencional y la posterior digitalización mediante un escáner fotogramétrico, con el objeto de garantizar la calidad geométrica de las imágenes. Así, la utilización de imágenes obtenidas en formato digital se ha limitado a las imágenes de satélite que incorporan posibilidades estereoscópicas (p.e., *SPOT*) o algunos trabajos experimentales realizados en fotogrametría aérea (*King et al., 1994; Maas y Kersten, 1997*).

No obstante, la tendencia actual viene marcada por la aparición de nuevos sensores y sistemas que permiten la captura de imágenes de alta resolución espacial (hasta 1 m de tamaño de pixel sobre el terreno como, por ejemplo, el *IKONOS* de *SpaceImaging*) y espectral (multiespectrales e hiperespectrales), que han vuelto a revitalizar la posibilidad de la captura directa de las imágenes en formato digital. Por otro lado, la aparición de los sistemas fotogramétricos digitales ha permitido la "democratización" de la fotogrametría, acercándola a usuarios que hasta hace poco estaban alejados de ella, bien por motivos económicos (el coste de los sistemas fotogramétricos para la generación de *MDE* y ortofotografía se ha reducido de 50.000 Euros en 1990 a 5.000 Euros en la actualidad, con importantes mejoras de rendimiento), por motivos de los bajos rendimientos de los sistemas anteriores o por el complicado manejo de éstos. En consecuencia, la demanda del sector fotogramétrico está sufriendo un importante incremento. Esta apertura a otros sectores origina demandas de productos no convencionales que, a menudo, se basan en la utilización de imágenes de tipo multiespectral, que sólo pueden ser suministradas con facilidad por sensores de tipo digital.

A finales de la década de los ochenta Hartl (1989) planteó que las cámaras digitales sustituirán progresivamente la adquisición de la imagen por métodos fotográficos convencionales, aunque indicaba que este cambio sería complejo. La situación actual viene marcada por un gran esfuerzo de investigación por parte de las dos marcas líderes en el mercado (*LH Systems* y *ZI Imaging*) que están inmersas en el desarrollo de sensores digitales para su aplicación en trabajos de tipo fotogramétrico. En la actualidad existe acuerdo en considerar que los sensores digitales no reemplazarán a las cámaras clásicas, sino que cubrirán las necesidades de los usuarios que demandan imágenes con tamaños de pixel entre los que proporcionan los sensores espaciales de alta resolución (resoluciones máximas de 1m) y los que pueden ser obtenidos del proceso de captura fotográfica y posterior digitalización, utilizando una cámara convencional y un escáner fotogramétrico (resoluciones centimétricas a decimétricas).

7.2. Escáner

El sistema más empleado para la captación de imágenes digitales en fotogrametría digital es la digitalización de las imágenes obtenidas mediante una cámara analógica convencional ya que se

requiere que el intervalo de digitalización (tamaño del pixel) sea igual a la resolución de la fotografía, con objeto de evitar pérdidas de información y que además se conserve la precisión.

La configuración de un escáner depende del tipo de fotodetector¹ utilizado. Los tipos de fotodetectores empleados son fotomultiplicador y CCD (*Charge Couple Devices*). Los primeros solo pueden utilizarse como elemento simple (lineal) mientras que los CCD se agrupan formando matrices lineales o rectangulares.

Los *escáners de tambor* (*drum scanners*) (*Fig. 1*) se basan en el principio de los fotomultiplicadores, son utilizados en artes gráficas. La película se monta sobre el tambor giratorio, el fotomultiplicador está montado fuera del tambor y la imagen es barrida punto a punto siguiendo una línea. Cuando se utilizan diapositivas la imagen es barrida desde el interior del tambor con una iluminación directa tipo láser, de un gran margen de rango dinámico² (D). Estos escáners ofrecen un nivel extraordinariamente alto de trabajo en cuanto a la resolución y rango dinámico de densidad. En cambio, presentan la desventaja de montar la película sobre el tambor, lo cual no garantiza la estabilidad geométrica, por ello, la mayoría de los escáners utilizados son planos.

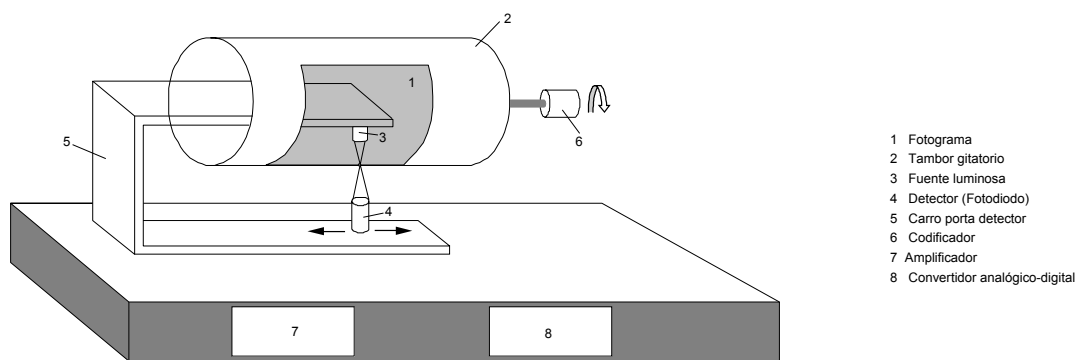


Figura 1. Escáner de tambor.

En los *escáners planos* (*flat bed scanners*) la película se coloca entre dos cristales asegurando el mantenimiento de la planeidad de la misma y una mejor protección. La película se coloca en una plataforma móvil movida por motores, desplazándose con respecto al sensor y la iluminación o bien sobre una plataforma fija, desplazándose en este caso el sistema de iluminación y captación. Los sensores utilizados en este tipo de escáners planos son CCD, los cuales pueden ser lineales o matriciales.

Sistema de Iluminación, es un elemento de gran importancia, pudiéndose distinguir dos sistemas: luz directa o difusa.

En la luz directa (*Fig. 2*) se utiliza un condensador para ampliar más o menos la fuente de luz antes de que incida en la lente de proyección. Una ventaja de este tipo de iluminación es que es bastante económica, no obstante, una limitación a tener en cuenta de un uso tan económico de la fuente de luz es que produce una difusión de calor bastante importante, pudiéndose producir deformaciones en el

¹ El fotodetector mide un valor proporcional a la transparencia o a la reflectancia de la fotografía. La señal electrónica es posteriormente convertida a un valor numérico por un circuito electrónico, que generalmente proporciona una señal de 8 bits. Por tanto, la transparencia de una diapositiva se mide en 256 tonos de gris, cifra que puede parecer muy fina, aunque el problema es que el ojo humano no es sensible a la transparencia sino a la densidad ($D = \log 1/T$).

² Rango dinámico: este rango es el que permite poner de manifiesto el contraste.

original. Para reducir este efecto se utilizan frecuentemente fibras ópticas para transmitir la luz desde una lámpara lejana. La fuente de luz directa genera un haz de luz con una apertura muy pequeña, de esta manera se obtiene una gran profundidad de campo, lo cual hace que este sistema sea poco sensible a los problemas de desenfoque.

La luz difusa (Fig. 2) se obtiene utilizando placas de vidrio difusoras, utilizando una luz fluorescente, la cual tiene un efecto difusor, o bien, utilizando un canal de luz y una esfera de vidrio vacía y recubierta en su exterior por dióxido de magnesio.

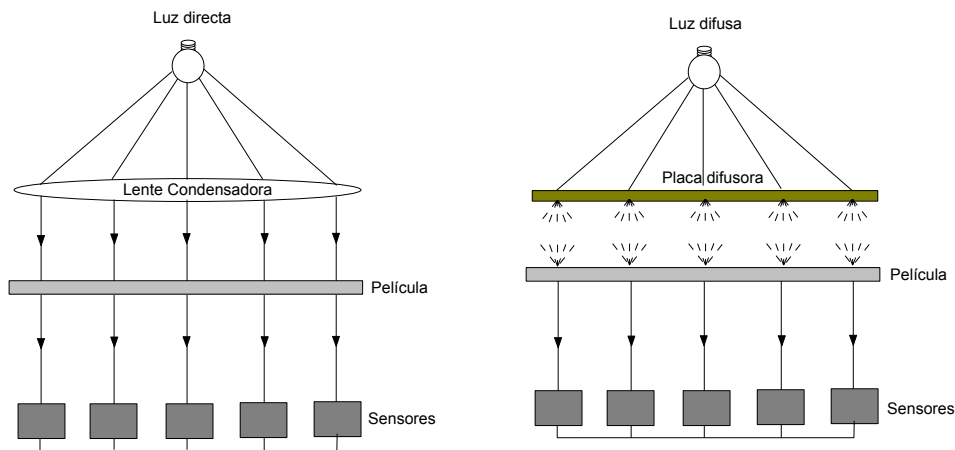


Figura 2. Sistemas de Iluminación.

7.2.1. Tipo de escáner

Los escáneres actualmente en el mercado responden a los siguientes tipos, según las características del trabajo y de la calidad y precisión requerida:

- *Sensor simple*. Barre una línea recorriéndola mediante un mecanismo de rotación.
- *Sensores de banda (lineal)*. Barren la fotografía en bandas paralelas.
- *Sensores de matriz cuadrada*. Digitaliza zonas del fotograma y posteriormente las une numéricamente, para ello tiene un cánevas de cruces de coordenadas conocidas. (Fig. 3).

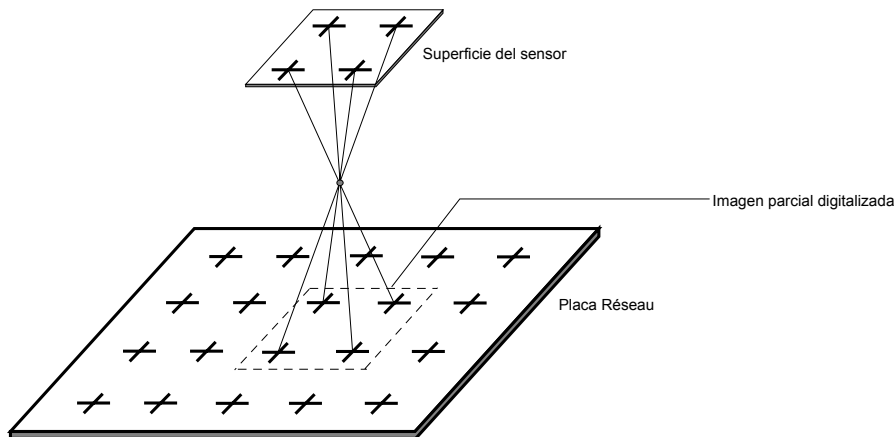


Figura 3. Principio de los sensores de matriz cuadrada.

7.2.2. Problemática de escáner

Los principales problemas para conseguir imágenes con la calidad geométrica y radiométrica que exige el desarrollo de la Fotogrametría digital son:

- *Iluminación:* uniformidad, estabilidad y estricto requerimiento en generar luz blanca. Control M calentamiento en partes sensibles. Todo el sistema está diseñado para que la iluminación sea la mínima posible, fundamentalmente en transparencias.
- *Resolución radiométrica:* aumento de la escala de grises en la captura y posterior reducción mediante software apropiado a la escala estándar de 256 valores. Esta mejora de la resolución radiométrica se realiza ampliando el número de bits a 10 - 12 (1024-4096) y posteriormente mediante tratamiento reduciéndose a 8 bits (256). La finalidad de aumentar la resolución radiométrica es ampliar el rango dinámico a intervalos: 0,1 - 2,5 D (B y N) y 0,2 - 3,5 D (Color).
- *Velocidad:* la velocidad definida por el usuario según la calidad y requerimientos de la imagen debe presentar alta sensibilidad. Polvo, defectos de engrase, mal funcionamiento mecánico,...etc. Deben ser controlados por test periódicos. Dentro de este apartado tienen gran importancia las vibraciones.

Captura para formación de imágenes color: La formación del color se consigue definiendo tres niveles mediante el correspondiente filtraje: CYR (Cyan - Yellow - Red). Un problema importante, soslayado en muchos escáners de la última generación, es la triple pasada, es decir, repetir el proceso de barrido con distintos filtros. En ese tipo de escáner es imprescindible la eliminación por calibraciones periódicas de los errores sistemáticos que se producen en el barrido. Los modernos realizan una pasada única captando la información y dividiéndola en las tres bandas en la misma pasada.

- *Calibración:* Procedimientos de calibración tanto para la mejora de la calidad geométrica como radiométrica de la imagen son imprescindibles con el fin de conseguir que estas calibraciones se incorporen a la unidad de barrido.

7.2.3. Test de calibración

Los test de calibración se realizan mediante placas cuadrículadas (*grid plate*). Generalmente se miden dos placas, según muestra la figura 4. La figura 4-a contiene dos columnas en los bordes de la placa y se aplica a todos los fotogramas, su calibración permite controlar los errores debidos a la variación de frecuencias (posición mecánica). La figura 4-b se utiliza de forma independiente, es decir, sin fotograma incorporado y se utiliza para calibrar el sistema y con sus resultados ajustar las imágenes obtenidas. Estas placas, en su versión más difundida, presentan una cuadrícula de 25 x 25 cm, con un espaciamiento de 1 cm, mientras que la precisión exigida a la definición de su malla es del orden de 2-3 μm .

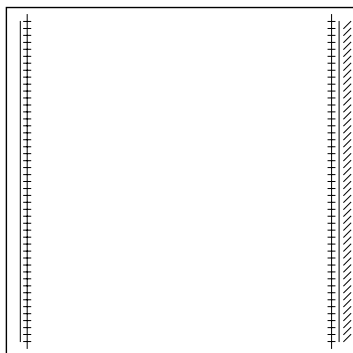


Figura 4-a

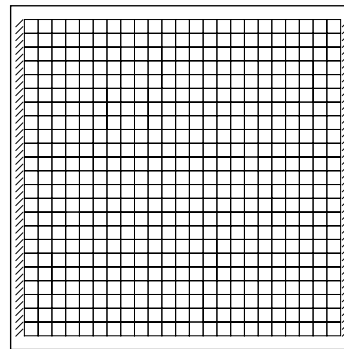


Figura 4-b

Figura 4. Placas cuadrículadas para test y calibración.

7.2.4. Problemática radiométrica de las imágenes obtenidas con escáners

Ya en fotogrametría no digital resulta complicada la diferenciación de zonas oscuras, minas, arbolado,... etc. Incluso zonas de pocos contrastes. Estos problemas tienen dentro de la fotogrametría digital mayor importancia si cabe porque, aunque la medición radiométrica sea correcta, esta unida a la geométrica en tareas como la detección de objetos, puede alterar la precisión de las mediciones. Si a esto se añade la automatización, se hacen todavía más complicados algunos procesos de detección automática o medición automática de puntos.

La calidad radiométrica dentro de los procesos fotogramétricos en técnicas digitales tiene una importancia vital, ya que cualquier operación automática necesita de la información que contienen los píxeles. Podemos agrupar dichas técnicas en tres mediante los errores que generan:

- Técnicas de medición individualizadas: zonas oscuras e incluso homogéneas dentro de la fotografía llevarán a una mala determinación de puntos en objetos. Por tanto, una mayor diversidad radiométrica en la imagen logrará mejores resultados. Algunos procesos influidos de esta forma son: correlación, triangulación aérea, modelos digitales del terreno,... etc.
- Técnicas de medición por grupos: algunas fases se realizan mediante técnicas de agrupamiento de zonas o píxeles. En casos donde estas zonas no lleguen a contrastes importantes, no será posible realizar mediciones. Ejemplos son los procesos de segmentación y las técnicas de imágenes piramidales.
- Procesos con imágenes derivadas: se pretende poner de manifiesto que fotografías con una amplitud de contrastes escasa o con zonas oscuras homogéneas llevarán, dejando a parte la medición, a la obtención de imágenes derivadas con los mismos defectos. En estos casos, las imágenes finales se podrán tratar con el fin de mejorarlas mediante técnicas de tratamiento radiométrico de imágenes. Casos prácticos son los problemas de imágenes normalizadas o las ortofotos.

Estos defectos o errores vienen inducidos por la radiometría en el escáner. La medición radiométrica es un punto clave en el tratamiento de estos errores y el contar con un escáner que posea un rango de densidades alto disminuirá estos errores.

7.2.5. Características generales de los escáners

Fotogramétricos:

Tamaño de pixel = 10 micras (mínimo).
Rango dinámico: 0.1 - 2.5 (B/N) y 0.1 - 3.5 (Color).
Ruido de imagen: 0.02 - 0.03 D.
Precisión geométrica: 3 micras mínimo.
Resolución radiométrica (sensibilidad): 8 bits (B/N) y 24 bits color.
Superficie mínima de escaneo: 23 x 23 centímetros.
Correcta calidad en la formación del color.

Artes gráficas:

Tamaño de pixel de hasta 12.5 micras.
Rango dinámico: 0.1 - 2.5 D (B/N) y 0.2 - 3.5 D (Color).
Permiten mayor ruido que los fotogramétricos.
Alta resolución radiométrica.
Baja precisión geométrica.

7.3. Cámara digital.

La cámara digital difiere de la de fotografía convencional en que ésta sustituye el plano focal de la película, por un CCD.

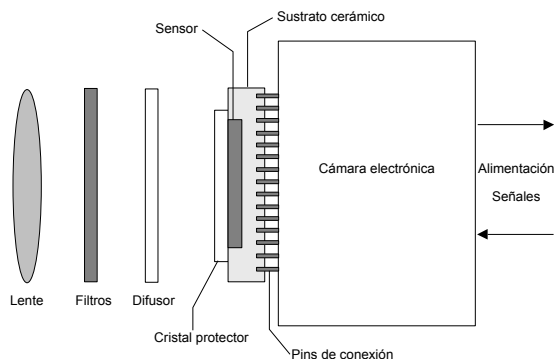


Figura 5. Elementos de una cámara digital

En un futuro inmediato las cámaras aéreas seguirán siendo indispensables en todos aquellos campos en los que se requieran resoluciones de 1 metro o menos. Sin embargo ya se perfila que el desarrollo de las cámaras digitales es el eslabón que falta en la cadena de producción digital desde la toma de imágenes hasta la elaboración de los productos finales, tales como impresiones o filmaciones. La ventaja más destacable de este tipo de cámaras es la rapidez en la disponibilidad de los datos, pudiendo estos analizarse incluso durante el vuelo. En aplicaciones tales como tareas de reconocimiento en trabajos militares es fundamental, en el campo civil su importancia no es tan inmediata, pero sí muy destacable en análisis de desastres naturales tales como inundaciones, erupciones volcánicas, terremotos,...etc.

En aplicaciones industriales se puede monitorizar el desarrollo en la construcción de una vía de comunicación, un movimiento de tierras, unas excavaciones,... comparando las imágenes que se van adquiriendo en el momento con material ya almacenado y analizando los cambios más recientes. Un campo nuevo que se abre con este tipo de cámaras es el estudio de la vegetación, daños, enfermedades, variaciones y clasificaciones de la agricultura dado que este tipo de cámaras de nueva generación llevan CCD con sensibilidad espectral de forma que alcanzan hasta el infrarrojo cercano. La mayor sensibilidad de los sensores CCD y sus ventajas radiométricas sobre la película permiten marcar mayores contrastes dentro de las imágenes. En zonas urbanas es muy útil para las zonas más oscuras de las edificaciones dado que en estas áreas la película cubre un campo de 6 bits y los chips CCD llegan hasta 10 y 12 bits.

Desde sus inicios los sensores digitales el mercado se ha centrado en dos configuraciones diferentes:

- Sensores lineales
- Sensores matriciales

7.3.1. Requisitos

La primera dificultad a la cual se tiene que enfrentar una cámara digital es a que tiene que conseguir como mínimo los mismos tiempos e intervalos de exposición de una cámara convencional. Por hacer un esbozo en cifras esto significa que para obtener una resolución de 10 cm en el terreno a una velocidad de avión típica de 50 m/sg, el tiempo de exposición máximo es de 2 mseg para cada CCD. Si el tiempo de exposición aumenta este se ve reflejado en una peor resolución en la calidad de la imagen. También hay que tener en cuenta que en este tipo de cámaras influye enormemente la sensibilidad de los chips CCD, que suele ir de 100 a 1000 ASA, lo cual requiere en la mayoría de los casos aplicar una

compensación en el movimiento de la imagen, sobre todo si las condiciones de iluminación son muy pobres.

7.3.2. Sensores digitales aerotransportados. (ADS).

El diseño de los sensores digitales aerotransportados debe tener en cuenta las necesidades de los usuarios que los demandan, para tener oportunidades con respecto a las cámaras convencionales de película. Las características fundamentales demandadas a dichos sensores aerotransportados son:

- *Gran ángulo de campo y anchura de barrido*, para economizar al máximo el número de pasadas necesarias para cubrir un área.
- *Alta resolución y precisión*, tanto de carácter geométrico como radiométrico, con el objeto de satisfacer al mayor número posible de usuarios que requieran dichas resoluciones y precisiones.
- *Capacidad de proporcionar imágenes multispectrales*, cada día más utilizadas, con aplicación en la elaboración de cartografía ambiental y de recursos naturales
- *Capacidad de proporcionar imágenes estereoscópicas*, que encuentren su adecuado tratamiento en los sistemas fotogramétricos digitales actualmente existentes, facilitando su carácter estereoscópico la extracción de información de las mismas.

La primera característica está fuertemente condicionada por la disponibilidad en el mercado de matrices CCD capaces de realizar adquisiciones de imágenes de precisión en un período de tiempo reducido. En la actualidad, la mayoría de las matrices disponibles tienen tamaños en torno a 4.000×4.000 pixels en el caso de matrices cuadradas y en torno a 12.000 pixels en el caso de matrices lineales. La elección entre estos tipos es un hecho determinante que condiciona todo el diseño posterior del sensor, así como sus características tanto geométricas como radiométricas (*Fig. 6*).

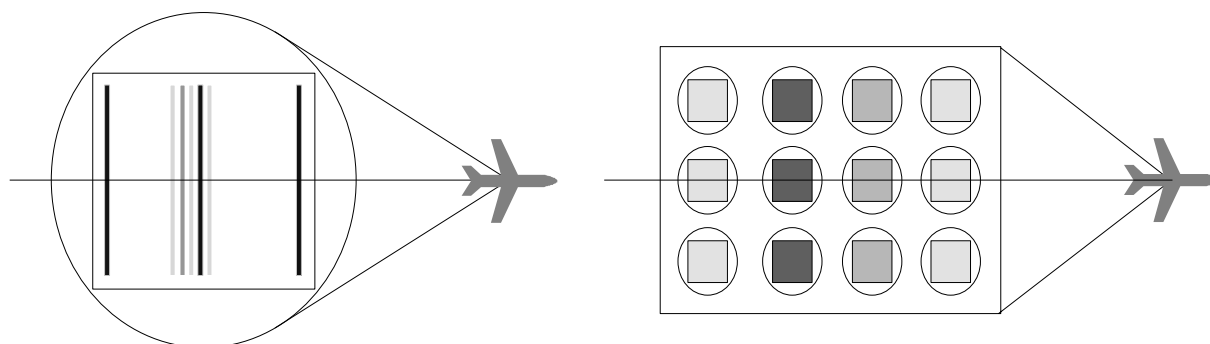


Figura 6. Izquierda: sensor CCD lineal compuesto por tres líneas pancromáticas y de 3 a n líneas multispectrales ; Derecha: matrices cuadradas múltiples RGB-IR para la mejora del ángulo de campo.

7.3.3. Sensores lineales

El planteamiento teórico de los sensores lineales es bastante simple. El método consiste en la captura, de forma simultánea, de tres líneas del terreno transversales a la dirección del vuelo, utilizando para ello tres sensores de tipo lineal con diferentes inclinaciones (frontal, nadiral y trasero), de forma que, en realidad, tras la realización de una pasada lo que se obtiene son 3 bandas de imágenes, compuestas por cada una de las líneas capturadas por los sensores (*Fig. 7*). La estereoscopia en este tipo de sensores se consigue combinando las imágenes proporcionadas por cada uno de los sensores (frontal-nadiral, trasero-nadiral, frontal-trasero) presentando tres importantes características, que van a condicionar el tratamiento necesario para la extracción de la información de la misma mediante la aplicación del método fotogramétrico.

Dichas características son:

- Todos los puntos del terreno aparecen en las tres imágenes
- Para cada una de las bandas existen tantos centros de proyección como líneas componen la banda
- En cada una de las líneas nadirales existe un pixel (pixel central) en el cual el desplazamiento debido al relieve es nulo.

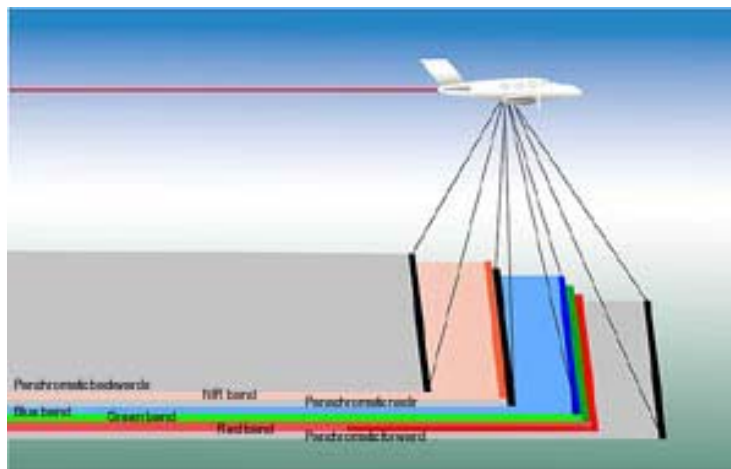
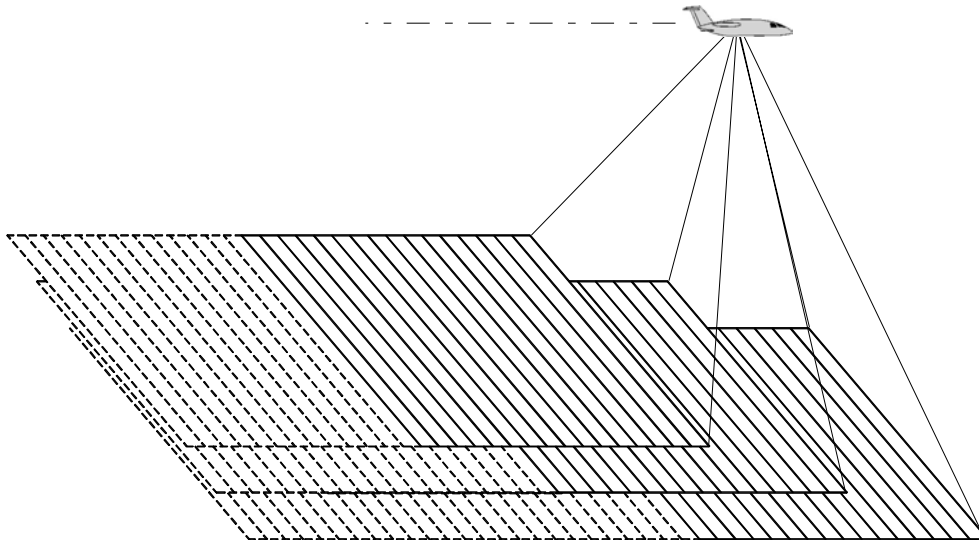


Figura 7. Captura de imagen mediante sensor lineal. Obtiene de forma simultánea las tres bandas (frontal, nadiral y trasera) apareciendo todos los elementos del terreno en las tres imágenes.



Figura 8. Sensor digital ADS40 de LH Systems.

La aparición de todos los puntos del terreno en las tres bandas de imágenes (frontal-nadiral-trasera) representa una importante ventaja, al proporcionar una mayor robustez a los resultados obtenidos de la correlación cuando se utiliza el método de identificación automática de puntos homólogos en múltiples imágenes (*multiple image matching*). Por el contrario, la utilización de las imágenes fotográficas clásicas limita la zona de puntos triples a tan sólo el 60% de la superficie total del fotograma, en el caso de emplear valores de solape longitudinal habituales.

La segunda característica, que en principio puede parecer que representa un inconveniente al necesitar el cálculo de un mayor número de incógnitas en los sistemas de ecuaciones de la orientación, se resuelve con la información complementaria al proceso de orientación, dado que la cámara posee sistemas de posicionamiento GPS/INS. Esto permite contar con unas aproximaciones de alta calidad en el proceso de resolución de los sistemas planteados, con valores de aproximación en navegación mediante técnicas diferenciales cinemáticas de código de 1 a 10 m y en posicionamiento mediante técnicas diferenciales de fase de 1 a 10 cm. En este tipo de sensores se introduce el sistema de compensación TDI³ (Time Delayed Integration)

Por último, la presencia del pixel central nadiral con desplazamiento nulo debido al relieve en la banda de imágenes captada con el sensor en posición nadiral, permite una aplicación en la elaboración de ortofotografías de una forma sencilla (*Fig. 9*).

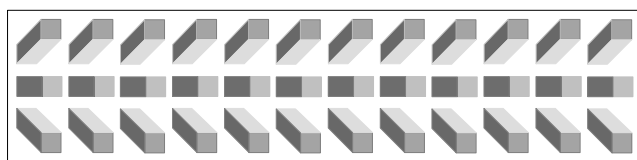


Figura 9-a.

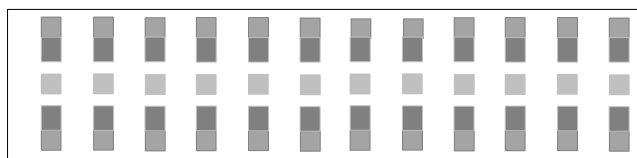


Figura 9-b.

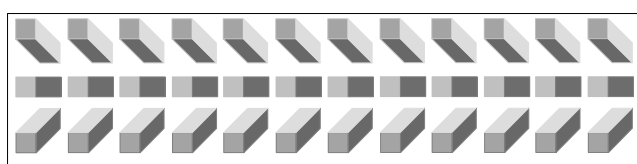


Figura 9-c.

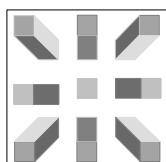


Figura 9-d.

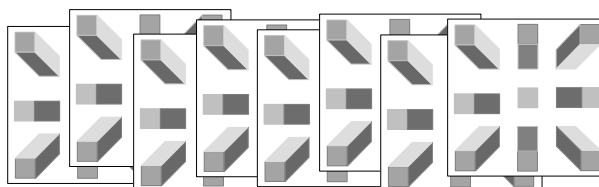


Figura 9-e.

Figura 9. Características geométricas de las imágenes. 9-a. Imagen frontal del sensor lineal. 9-b. Imagen nadiral del sensor lineal. 9-c. Imagen trasera del sensor lineal. 9-d. Imagen fotográfica convencional. 9-e. Pasada de fotografías convencionales.

³ TDI, compensación electrónica en cada fila de píxeles, al movimiento del avión.

7.3.4. Sensores matriciales

La técnica que utiliza este tipo de sensores es la misma que la de las cámaras aéreas convencionales basadas en película para eliminar los errores geométricos se utiliza un pulsador central. Se utilizan diferentes cámaras compactas que toman la fotografía simultáneamente con unos pequeños ángulos de inclinación, cubriendo un mayor campo.

El funcionamiento de una Cámara Digital Modular, basada en una tecnología matricial consiste en un conjunto de módulos CCD que actúan en paralelo. La mayor resolución de la cámara CCD es debida a que se compone de 4 módulos pancromáticos y cuatro multispectrales. Las imágenes, ligeramente divergentes que cada una de ellas captura se componen en un postproceso, que se lleva a cabo en el mismo avión y que genera de cuatro imágenes una única imagen virtual con un centro de proyección.

A este tipo de sensores también se les aplican sistema de posicionamiento GPS e INS, pero que no son imprescindibles como en el caso anterior. La sensibilidad es de 1000 ASA, lo cual es muy superior a las películas convencionales. El movimiento en el momento de la toma de la imagen se compensa como en el caso anterior con técnicas TDI. Cuando se utilizan lentes de captura muy rápida y las condiciones ambientales de iluminación son muy buenas, a veces se puede prescindir de este tipo de correcciones si la calidad que se pierde es aceptable.

Sin embargo en los sensores en color la sensibilidad de la película disminuye dado que lo que se aplican son filtros a los elementos del CCD. La luz capturada por la lente se distribuye a los CCD por diferentes canales ópticos, cada uno de ellos precedido por un filtro de color(cámaras multichip), o se aplica una matriz de diferentes pixels de color a cada CCD. Ambos diseños conllevan una pérdida de la iluminación, lo que hace que se incremente el tiempo de exposición y esto dé lugar a diferentes correcciones.

Una cámara matricial aporta las siguientes ventajas:

- Geometría estable y bien definida.
- FMC (*Forward Motion Compensation*), para compensar el movimiento en la toma de la imagen.
- Punto de Perspectiva central.
- Tratamiento on-line.
- Tratamiento similar a las cámaras convencionales.

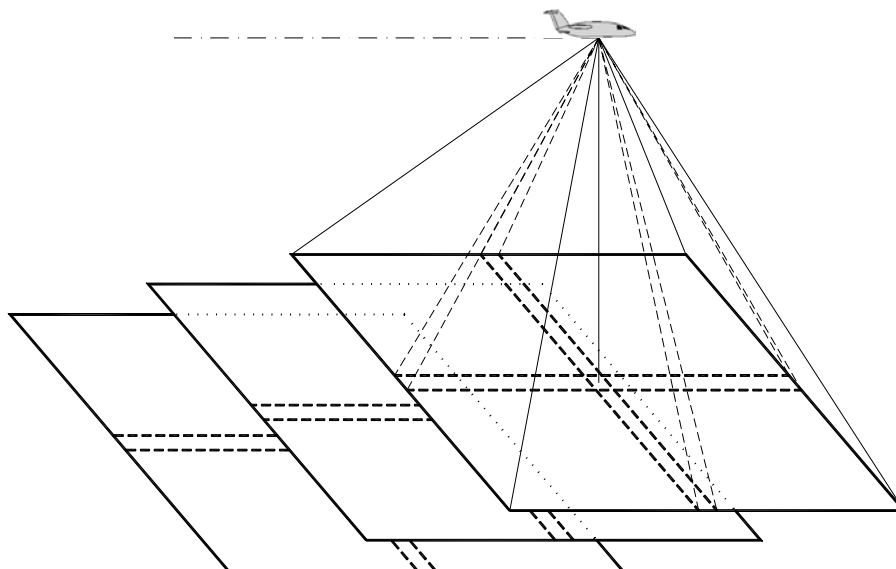


Figura 10. Captura de imagen mediante sensor matricial.

Este tipo de dispositivos permiten capturar las imágenes en una única dimensión a muy alta resolución. Durante el vuelo se captura la segunda dimensión como resultado del propio movimiento del avión. Sin embargo no existe una orientación relativa fija para cada foto, debido precisamente a este movimiento. Para unir estas pasadas individuales se necesita un sofisticado y preciso sistema de posicionamiento que se aplica en postprocesos a estas imágenes. Estos sistemas suelen ser sistemas GPS y Sistemas de Navegación Inercial (*INS*) que aportan no sólo gran precisión sino también gran rapidez en el cálculo del ángulo y la posición espacial de la cámara en el momento de la toma de la escena.

El mayor problema de este sistema radica en las precisiones radiométricas en cada foto a lo largo y ancho de la pasada. Muchas aplicaciones de reconocimiento no necesitan llegar a este tipo de resoluciones, pero otras sí. En estas segundas tendríamos que introducir un concepto nuevo, ya incluido en el diseño matricial multilínea, que es la compensación TDI, una compensación electrónica en cada fila de pixels, al movimiento del avión.

La capacidad para capturar imágenes en color es simple. Es una extensión a las cámaras lineales en las cuales se añaden diferentes líneas en las lentes a diferentes longitudes de onda para capturar imágenes multispectrales y en color.

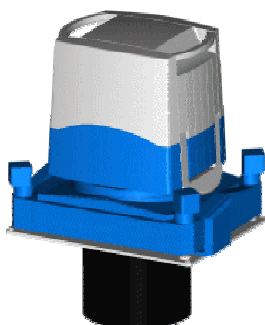


Figura 11. DMC (*Digital Modular Camera*) de Z/I Imaging.

Bibliografía

- Delgado, J., Apuntes de Fotogrametría Digital, Universidad Politécnica de Jaén, 1997
- King, D.; Walsh, P. y Ciuffreda, F. (1994). Airbone Digital Frame Camera Imaging for Elevation Determination, PE&RS, 60(11), 1321-1326.
- Fritsch, D. et al. Photogrammetric Image Processig. The 44th Photogrammetric Week. Stuttgart (1993) Wichmann, ISBN 3-87907-255-8.
- Fricker, P. Et al. Sensores Aerotransportados Digitales (ADS): Situación actual y perspectivas futuras. VII Congreso Nacional de Topografía y Cartografía, Octubre 2000, pp 398-408.
- Fricker, P.; Sandau, R. y Walker, A.S. (1999). LH Systems' . Airbone Sensor – a new forward-looking approach. ISPRS Workshop Comm. III Direct Versus Indirect Methods of Sensor Orientation. Barcelona, 25-26 Noviembre, 1999.
- Hinz, A. (1999): The Z/I Digital Aerial Camera System. En: Fritsch, D. y Spiller, R. (eds). Photogrammetric Week'99. Wichmann, Heidelberg.
- López-Cuervo Medina, Serafín. Apuntes de Fotogrametría Digital. Universidad Politécnica de Madrid,(I.G.C.).
- Verdejo, B. Las cámaras digitales. Conceptos diseño y aplicaciones. VII Congreso Nacional de Topografía y Cartografía, Octubre 2000, pp 374-377.
- Otto Kölbl. Scanning and State-of-The-Art.
- Integraph (España) S.A. Z/I Imaging (www.intergraph.com/spain, www.ziimaging.com).
- Leica Geosystems, S.I. (LH Systems - www.lh-systems.com).

TEMA 8

CORRELACIÓN Y ORIENTACIONES

8.1. Introducción

8.2. Principio de la correlación de imágenes

8.2.1. Correlación de imágenes en una dimensión

8.2.2. Correlación de imágenes en dos dimensiones

8.3. Métodos de correlación

8.4. Geometría epipolar

8.5. Correlación y segmentación

8.6. Técnicas manuales, semiautomáticas y automáticas de orientación

8.7. Orientación automática

8.7.1. Orientación interna

8.7.2. Orientación Relativa

8.7.3 Orientación Absoluta

8.8. Técnicas automáticas y semiautomáticas de transferencia de puntos

Bibliografía

8.1. Introducción

En este capítulo se van tratar las técnicas de correlación (*matching*) de imágenes digitales que consisten el establecimiento automático de correspondencias entre elementos extraídos de dos o más imágenes digitales con un recubrimiento común. El término *matching* se ha impuesto en la literatura especializada como la expresión más adecuada para expresar correlación entre imágenes digitales en fotogrametría.

En Fotogrametría y Teledetección el término *matching* puede ser traducido como el establecimiento de correspondencia entre diversos conjuntos de datos. Dichos datos pueden ser imágenes, mapas, objetos o elementos de un SIG. En Fotogrametría existen diversos procesos que pueden ser considerarse como un *matching*, así por ejemplo, la orientación interna es un proceso de *matching* en el que la imagen de una marca fiducial se correlaciona con un modelo bidimensional teórico de la fiducial; la orientación relativa y la transferencia de puntos en aerotriangulación, consistente en la identificación de puntos homólogos en los fotogramas que forman el modelo; la orientación absoluta,

que pretende la identificación de los puntos de apoyo en el modelo; la generación de modelos digitales de elevaciones, mediante identificación de puntos homólogos una vez orientado el par, pretende la obtención de la información tridimensional derivada del modelo estereoscópico; el reconocimiento de formas y objetos.

Como puede desprenderse de esta breve introducción la correlación (*matching*) cubre prácticamente todos los procesos relacionados con la metodología fotogramétrica, siendo en la actualidad una de las líneas de investigación de mayor importancia e interés.

8.2. Principio de la correlación de imágenes

La correlación de imágenes tiene como objeto la localización de forma automática de un punto objeto en una imagen. La correlación también llamada "*matching*" explica el proceso de identificación automática de los puntos homólogos en imágenes digitales. Con objeto de simplificar el problema, supongamos que partimos de que se conoce de forma aproximada la ubicación del objeto en la imagen y por tanto es factible hacer una preselección del área de búsqueda. Esta área preseleccionada se conoce como matriz de búsqueda o área de búsqueda (*search target o search area*) y dentro de ella vamos a localizar unas determinadas formas que definan un objeto concreto a las cuales llamaremos matriz patrón (*target matrix o target area*); en otros casos suele llamarse como ventana de búsqueda. Un ejemplo que aclare lo dicho anteriormente es el que se muestra en la figura 1 y 2 (*se ha tomado un objeto fácilmente identificable como es el caso de una marca fiducial*).

Cuando el área de búsqueda es demasiado grande en las dos direcciones (*x e y*), se utiliza lo que se denomina correlación bidimensional. En cualquier método de correlación que se utilice, el primer paso es comparar dentro del área de búsqueda los componentes que tengan un tamaño similar procurando buscar fuera de esta área los puntos que se corresponden con los que hay dentro del área que se representa.

Puesto que una imagen fotográfica está grabada en dos dimensiones, la correlación de imágenes es esencialmente un trabajo en dos dimensiones. Sin embargo, la correlación de la imagen estéreo se puede reducir a una sola dirección, a la de la línea epipolar, y así el trabajo se reduce de forma considerable. A partir de aquí se realizan dos pasos:

1. Se eligen un número considerable de puntos bien distribuidos en la zona de recubrimiento de dos fotografías, para determinar el paralaje vertical, por medio de correlación bidimensional y luego se determinan los elementos de la orientación relativa.
2. Calcular las relaciones geométricas de las líneas epipolares entre los planos de la imagen (*apartado 8.5*). El punto suele determinarse mediante la correlación dentro de los límites correspondientes a las líneas epipolares conjugadas, reduciendo así el procedimiento de correlación a una sola dimensión.

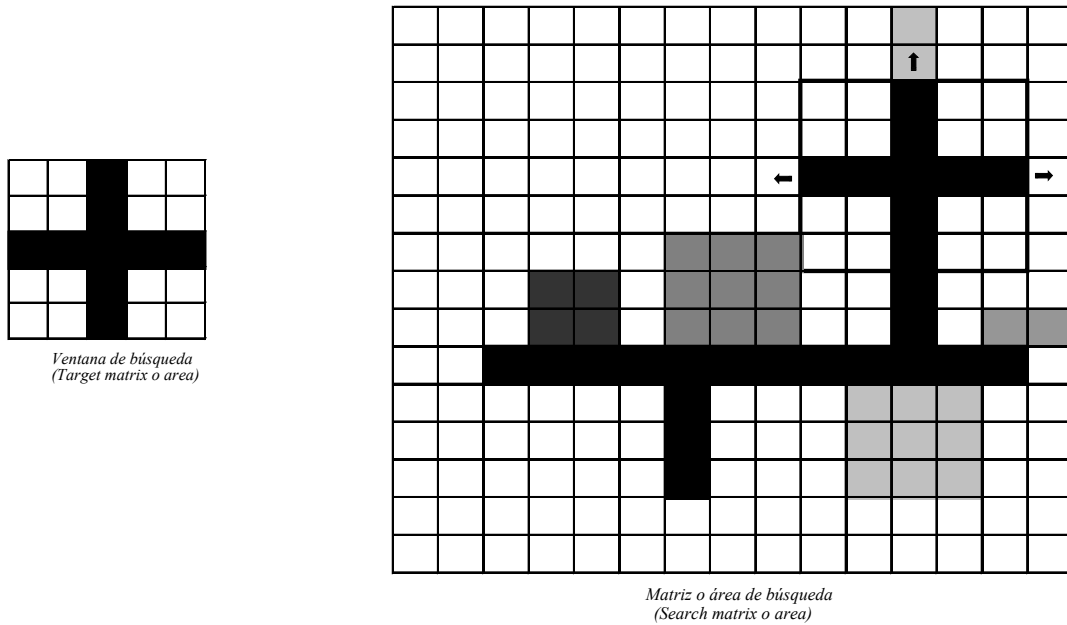


Figura 1. Matrices o áreas de búsqueda y patrón.

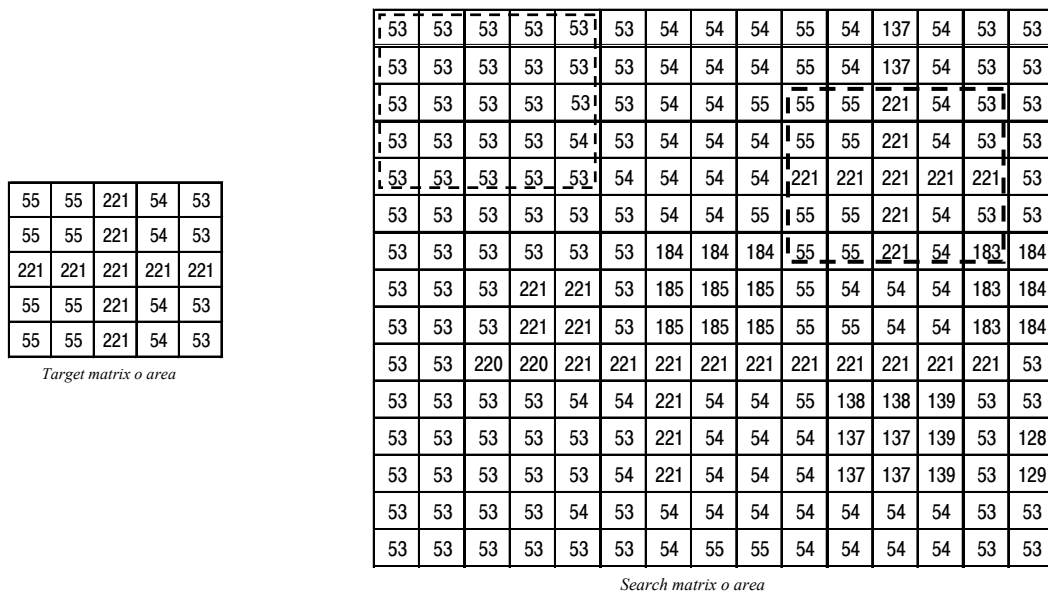


Figura 2. Matrices o áreas de búsqueda y patrón anteriores con sus respectivos niveles digitales.

8.2.1. Correlación de imágenes en una dimensión

La correlación de imagen unidimensional se puede hacer a lo largo de las líneas epipolares conjugadas de la imagen digital derecha e izquierda (*en el apartado 8.5 se estudiará con más detalla estos conceptos*). En el ejemplo que se muestra en la figura 3 la matriz patrón (*target matrix*), objeto del estudio (*un segmento — línea epipolar patrón —*), viene definida por una fila de cinco valores de grises (*Nd*), con la imagen del punto central identificada por la fila 6507 y columna 5873 en la imagen izquierda.

El área de búsqueda está compuesta por los valores digitales de los píxeles sobre las líneas escaneadas más cercanas del centro de búsqueda estimado sobre la línea epipolar de búsqueda

conjugada (imagen derecha).

Después de encontrar los puntos conjugados por medio de algoritmos de correlación, el patrón se traslada a otra columna, y el área de búsqueda es también trasladado sobre la columna de acuerdo con el punto conjugado encontrado. Entonces comienza el proceso de búsqueda de un nuevo punto.

En la practica siempre es aconsejable realizar el remuestreo¹ de los píxeles a lo largo de las líneas epipolares de la fotografía izquierda y derecha antes de llevar a cabo la correlación unidimensional de la imagen.

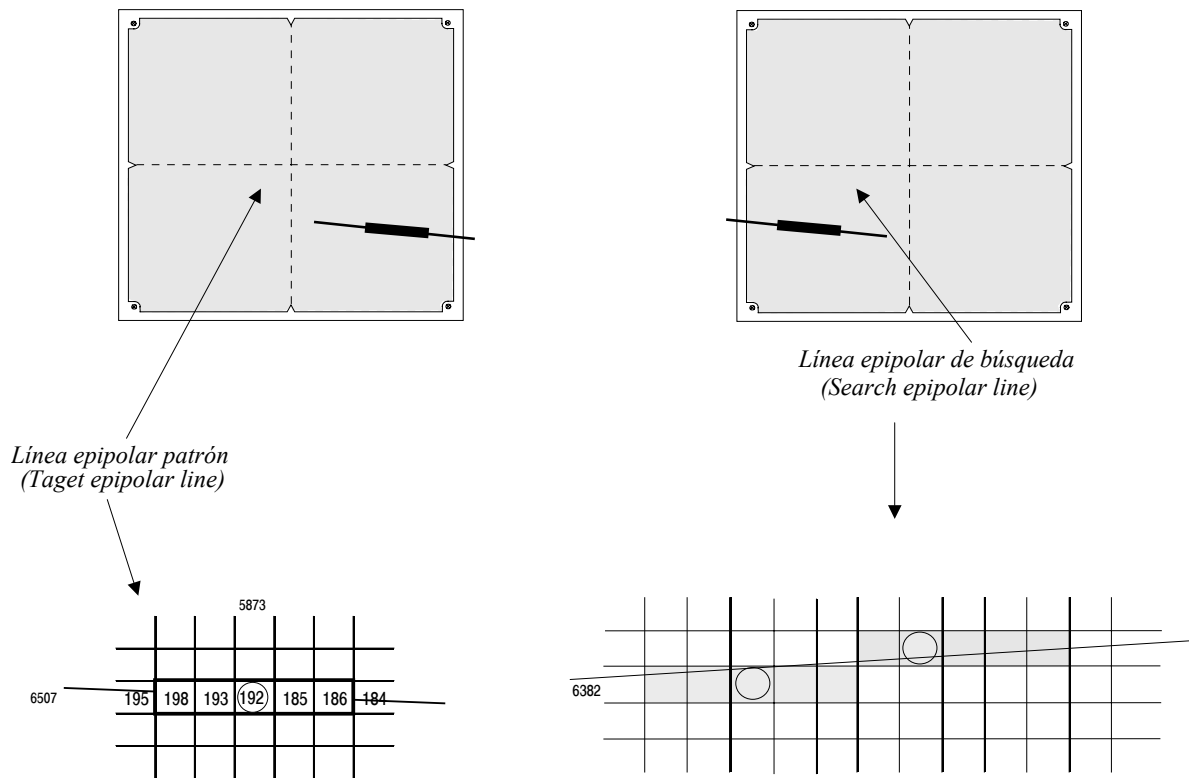


Figura 3. Correlación unidimensional a lo largo de líneas epipolares.

8.2.2. Correlación de imágenes en dos dimensiones

La figura 4 muestra un ejemplo de búsqueda bidimensional, donde se ha elegido un punto de orientación (fila 4028, columna 3872), cerca del punto principal de la foto izquierda con una ventana de búsqueda compuesta por de 5 filas por 5 columnas de píxeles (tanto para la imagen izquierda y como para la derecha, la posición de un píxel sobre la imagen toma como origen la esquina superior izquierda de la zona de recubrimiento). La esquina superior izquierda del área de búsqueda estimada se está localizada en la posición identificada por la fila 4243 y columna 725. Se supone que el punto buscado está dentro de esta área.

En este ejemplo, el área buscada tiene 15×15 píxeles (15 filas y 15 columnas), pero pueden ser de 50 x 50 incluso de 100 x 100 elementos. Esta área no tiene por qué ser cuadrada.

¹ Se llama remuestreo (*resampling*) a la operación de transformar una imagen en otra derivada mediante la reordenación de sus píxeles dentro de una malla rectangular.

La ventana patrón y el área de búsqueda contienen números que indican los niveles digitales de cada uno de los píxel que rodean a sus respectivos centros de la imagen. Para cada cambio de posición del patrón sobre el área de búsqueda se utiliza un algoritmo de correlación digital (*apartado 8.3*) para compararla distribución de los niveles digitales de los píxel. La posición que muestre la similitud más fuerte respecto a los niveles de grises se tomará entonces como punto homólogo obtenido por correlación (*match point*).

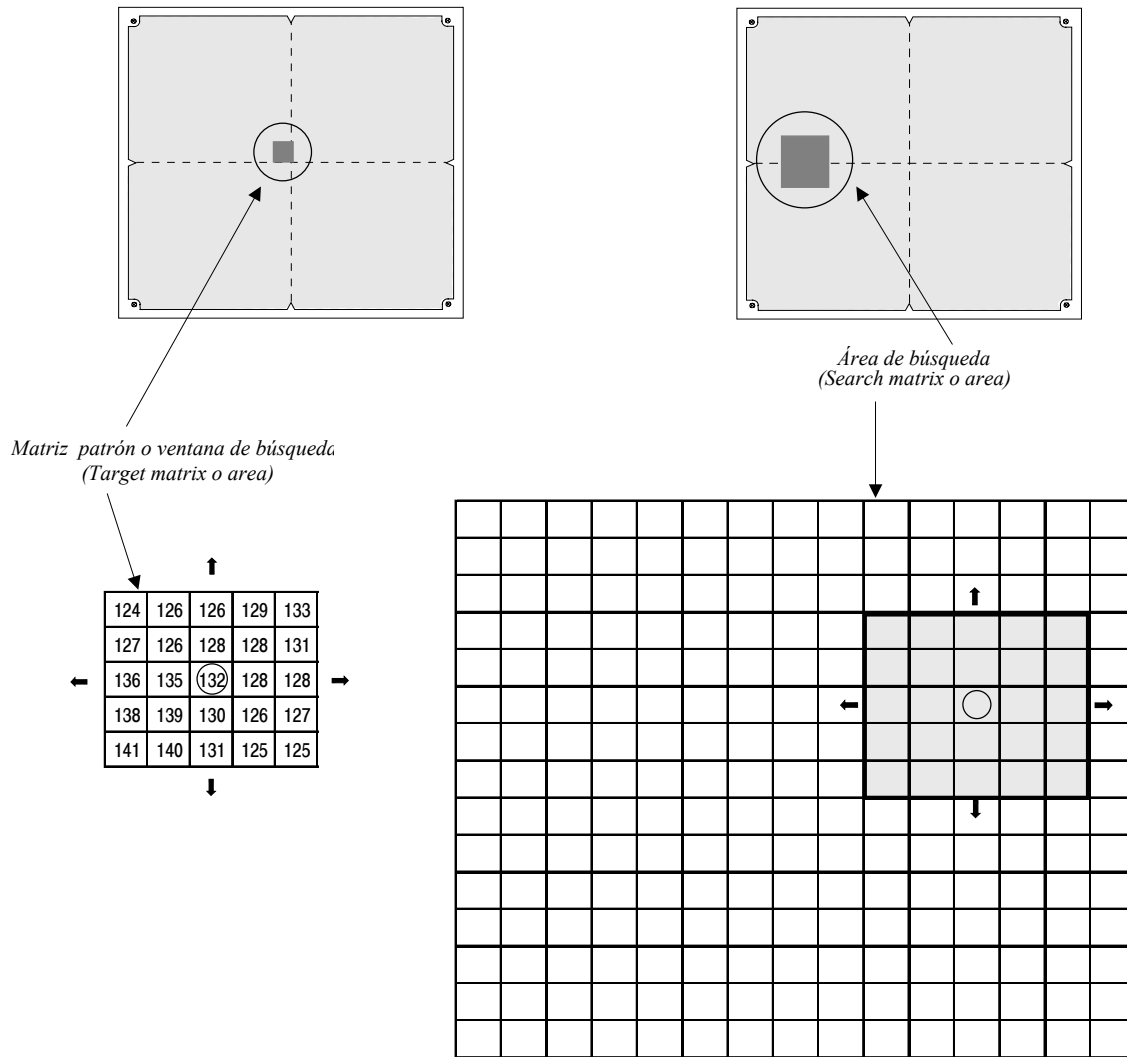


Figura 4. Correlación en dos dimensiones.

8.3. Métodos de correlación

La correlación digital compara la información digital de dos imágenes (*ventana patrón y área de búsqueda*) de forma sucesiva de acuerdo a determinados grupos de puntos. A continuación se describirán varios métodos típicos de cálculo computacional directos. Además, también hay métodos indirectos, tales como los métodos en los que la transformada de Fourier o la transformada de Hadamard se llevan a cabo sobre dos grupos de datos que son comparados en correlación; después de esto, el procesamiento es realizado en el dominio de las frecuencias, y luego se lleva a cabo la correspondiente transformación inversa para volver al espacio dominio y producir la función de correlación. Cuando hay un gran número de datos, más de 200, los métodos de calculo de forma indirecta son una ventaja. Sin embargo en correlación digital aplicada a fotogrametría, con un número pequeño de valores de datos cercanos al pico.

Debido a que cada método de computación en correlación digital tiene sus imperfecciones en teoría se utilizan de forma simultánea dos o más métodos con el propósito de comparar resultados y reducir errores en la definición de los puntos homólogos.

Método de la función de covarianza

En este método, se calculan los valores de la función de covarianza de dos grupos de datos, y la covarianza mayor obtenida se toma como la posición de la correlación buscada.

Suponiendo que x_i representa el nivel digital de un punto i en el primer grupo de datos, e y_i representa el nivel digital correspondiente al segundo grupo de datos, las medias \bar{x} e \bar{y} de los niveles digitales de los grupos de datos son respectivamente:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$$

La varianza σ_{xx} , σ_{yy} de dos grupos de datos son respectivamente:

$$\sigma_{xx} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

$$\sigma_{yy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2$$

Las expresiones anteriores pueden venir dadas por las formas:

$$\sigma_{xx} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i^2 - 2\bar{x}x_i + \bar{x}^2) = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n (x_i^2) \right) - 2\bar{x} \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n (x_i) \right) + \bar{x}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i^2 - \bar{x}^2)$$

es decir:

$$\sigma_{xx} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i^2 - \bar{x}^2); \quad \sigma_{yy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i^2 - \bar{y}^2)$$

La covarianza σ_{xy} de los dos grupos de datos sería:

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

También se expresa de la forma:

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i y_i - \bar{x}\bar{y})$$

Así pues, la relación de correlación entre la imágenes se puede expresar por las anteriores ecuaciones de covarianza.

Método del coeficiente de correlación

La relación de correlación se puede también representar por medio de un coeficiente ρ o por medio de su cuadrado c^2 .

El coeficiente de correlación puede definirse como:

$$c = \frac{\sigma_{xy}}{\sqrt{\sigma_{xx} \sigma_{yy}}}$$

En el caso de dos dimensiones, las ecuaciones de correlación vienen a ser respectivamente:

$$\bar{x} = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_{ij} ; \bar{y} = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n y_{ij}$$

$$\sigma_{xx} = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (x_{ij} - \bar{x})^2 ; \sigma_{yy} = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (y_{ij} - \bar{y})^2$$

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (x_{ij} - \bar{x})(y_{ij} - \bar{y}) ; \sigma_{yx} = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (y_{ij} - \bar{y})(x_{ij} - \bar{x})$$

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (x_{ij} - \bar{x})(y_{ij} - \bar{y}) ; \sigma_{yx} = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (x_{ij} y_{ij} - \bar{x} \bar{y})$$

En este caso el coeficiente quedará de la forma:

$$c = \frac{\sigma_{xy}}{\sqrt{\sigma_{xx} \sigma_{yy}}} = \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (x_{ij} - \bar{x})(y_{ij} - \bar{y})}{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (x_{ij} - \bar{x})^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (y_{ij} - \bar{y})^2 \right)}}$$

El coeficiente de correlación c es una función de covarianza normalizada. Una función de covarianza proporciona un criterio relativo de comparación. Puesto que esta sujeta a interferencias de cambio de varianza de una imagen, sería más razonable hacer el coeficiente de correlación a través de una normalización.

El valor del coeficiente de correlación es invariable entre $+1$ y -1 . El valor 1 indica la correlación más fuerte entre dos señales, es decir, el más similar. Lo que significa que corresponden a objetos homólogos con una gran certeza. Unos coeficientes cerca de 0 indican que no hay correspondencia es decir no existe correlación entre ambos valores. Debido al ruido de las imágenes la correlación perfecta 1 es muy rara. Por lo general se elige un valor como por ejemplo 0.7 y si el coeficiente de correlación excede dicho valor existe correspondencia entre los objetos analizados.

Ejemplo. A partir de los datos de la figura 2 correspondientes a la ventana patrón y el área de búsqueda determinar por correlación la posición de la marca fiducial (ventana - target-) en la imagen de búsqueda.

Llamando x a los valores correspondientes a la ventana patrón e y a los del área de búsqueda, los valores medios de los niveles digitales de ambas imágenes serán respectivamente en la primera serie de búsqueda correspondería a la posición 1,1

$$\bar{x} = \frac{55 + 55 + 221 + \dots + 53}{25} = 114.28$$

$$\bar{y} = \frac{53 + 53 + 53 + \dots + 53}{25} = 53.04$$

El coeficiente de correlación para esta primera posición será:

$$c_{11} = \frac{-61.28}{\sqrt{0.96 \times 160171.04}} = -0.16$$

Efectuando idénticas operaciones para determinar el coeficiente de correlación sobre el resto de posiciones de la ventana patrón sobre el área de búsqueda, resultan estos:

-0.16	-0.22	-0.10	-0.23	0.23	-0.15	-0.22	-0.03	-0.10	0.21	-0.10
0.08	0.22	0.31	0.21	0.56	0.09	-0.09	0.31	-0.18	0.19	-0.30
0.09	-0.08	-0.04	-0.18	-0.01	-0.03	0.10	0.31	-0.08	0.75	-0.04
-0.15	0.05	0.02	-0.36	-0.06	-0.03	-0.12	-0.13	-0.16	0.22	-0.30
-0.21	0.09	0.06	-0.37	0.06	0.28	0.19	0.01	0.02	0.13	-0.13
0.06	0.22	0.13	-0.07	0.16	0.11	0.11	-0.17	-0.27	0.10	-0.29
0.06	0.22	0.13	-0.14	0.28	0.03	0.03	-0.21	-0.20	-0.03	-0.25
0.06	0.39	0.46	-0.11	0.57	0.25	0.25	0.15	0.41	0.45	0.35
-0.05	0.00	-0.08	-0.32	0.17	-0.16	-0.18	-0.28	-0.03	0.02	-0.04
0.05	-0.05	-0.12	-0.14	0.22	-0.14	-0.15	-0.15	0.04	0.03	0.04
-0.02	-0.19	-0.02	-0.05	0.47	-0.04	-0.05	-0.06	0.26	0.25	0.25

Seleccionando el coeficiente de correlación máximo (0.75), el cual corresponde a la fila 3 columna 10 de la matriz correlación. Este valor se calculó cuando la esquina superior izquierda de la ventana patrón sobre el área de búsqueda estaba en esta posición (fila 3, columna 10). Como el centro del cruce en la ventana patrón es de 2 filas y 2 columnas contados a partir de la esquina superior izquierda, la posición correcta sobre el área de búsqueda del punto conjugado es fila 5, columna 12 ($x=12$; $y=5$).

En el caso de resolver este ejemplo utilizando el método de la función covarianza, los resultados que se obtendrían serían:

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (x_{ij} - \bar{x})(y_{ij} - \bar{y})$$

-2.45	-4.86	-3.68	-9.01	9.96	-405.32	-808.90	-179.29	-575.20	1245.43	-548.08
1.29	4.73	11.25	8.41	26.15	224.97	-316.60	1774.91	-1065.02	1169.40	-1803.85
1.38	-1.78	-80.40	-506.40	-23.28	-113.36	468.65	1924.78	-522.47	4808.25	-244.25
-534.74	179.61	88.71	-1765.49	-276.98	-142.66	-608.74	-797.75	-991.15	1380.24	-1848.42
-1015.96	420.17	309.63	-2118.48	347.33	1473.16	1028.55	47.54	90.42	816.39	-781.26
362.33	1361.04	851.14	-427.73	927.81	616.72	626.48	-1027.88	-1686.62	588.17	-1743.80
362.10	1358.18	815.58	-865.93	1598.76	183.79	171.09	-1218.73	-1148.41	-180.08	-1393.14
355.42	2467.06	3031.87	-700.71	3475.54	1499.21	1457.48	840.99	2182.27	2394.99	1775.68
-280.65	4.73	-556.45	-2109.06	1094.78	-1006.26	-1059.93	-1492.87	-142.46	122.21	-180.73
198.61	-242.26	-774.47	-873.28	1358.15	-858.37	-914.69	-821.70	182.40	142.91	179.83
-0.44	-5.71	-102.54	-208.30	2033.79	-181.06	-246.57	-160.22	846.47	809.79	812.15

El valor mayor de la función covarianza corresponde a la fila 2, columna 10 (120206.29), que sería la posición de la correlación buscada, la cual coincide con el ejemplo visto anteriormente.

Método de valores absolutos de diferencias de niveles de grises.

Este método de buscar los valores absolutos de los diferentes Nd no es un proyecto de correlación, pero si nos sirve para sustituir los métodos de comparación de dos imágenes para ver el grado de similitud entre ellos. El método consiste en eliminar primero los valores de los Nd medios (\bar{x}, \bar{y}) de los valores (x_i, y_i) de los elementos respectivos de cada uno de los dos grupos de datos, y después, computar las diferencias de los valores de Nd entre los elementos correspondientes y sumar sus valores respectivos, es decir:

$$d_1 = \sum_{i=1}^n |(x_i - \bar{x}) - (y_i - \bar{y})|$$

Luego, después de trasladar un grupo de datos en relación al otro, se repite la operación hasta el lugar encontrado donde la suma es mínima. Este sería la posición donde se obtiene el máximo de correlación. La cantidad de trabajo de cálculo que conlleva este método es relativamente pequeño y fácil de obtener los resultados.

Aplicando este método al ejemplo anteriormente propuesto, los valores de aplicar la ecuación anteriormente dan como resultado que la suma mínima corresponde a la posición fila 3, columna 10, coincidente con la posición $x=12, y =5$ sobre el área de búsqueda, coincidente con los métodos anteriores.

1921.68	1922.40	1922.00	1923.60	1917.92	2039.92	2160.48	2046.56	2144.08	1588.40	2146.24
1919.68	1920.40	1922.00	1921.60	1918.64	2042.64	2159.92	2096.72	2192.24	1468.00	2193.84
1921.68	1920.40	2013.60	2110.80	1955.28	1807.12	1641.12	1963.36	1649.60	249.60	1807.20
2163.60	1923.84	2090.08	2541.36	2080.64	2081.68	2202.96	2362.00	2289.36	1809.84	2573.84
2404.80	1870.96	1831.28	2451.20	1724.40	1584.64	1715.44	1978.80	2011.20	1827.60	2195.92
1844.16	1604.00	1978.56	2427.20	2114.24	2050.80	2042.32	2678.80	2480.32	1827.60	2506.16
1844.64	1604.80	2176.48	2550.80	1993.28	2222.16	2263.20	2645.36	2420.88	2100.40	2416.40
1844.64	962.88	1585.60	2370.40	1342.56	1492.96	1645.84	1590.40	1150.96	1145.84	1667.12
2242.48	2055.12	2418.16	2856.40	1976.40	2377.92	2474.00	2447.60	2113.76	2109.36	2194.40
2030.08	2138.88	2244.40	2245.20	1604.00	2243.68	2284.80	2228.56	1958.24	1952.80	1772.88

Método de las diferencias de los niveles de grises cuadradas

El procedimiento es el mismo que el apartado anterior exceptuando que se añade los cuadrados de los niveles de grises, es decir;

$$d_1 = \sum_{i=1}^n ((x_i - \bar{x}) - (y_i - \bar{y}))^2$$

Se busca en el lugar donde el valor es mínimo.

Uso de las diferencias de los valores de los niveles de grises de los píxeles colindantes

En este método, el tratamiento de la diferencia de los valores de los Nd se lleva a cabo primero sobre la serie original de la imagen digital, así por ejemplo, tendremos:

la primera diferencia: $\Delta x_i = x_i - x_{i+1}$

la segunda diferencia: $\Delta^2 x_i = \Delta x_i - \Delta x_{i+1}$

Así, sustituyendo estas diferencias (cualquiera de las dos, la primera o la segunda) por los valores originales de los Nd , se puede obtener la solución de un valor máximo de la función de correlación, es decir:

$$R_{\Delta x \Delta y} = \sum_{i=1}^{n-1} (\Delta x_i \Delta x_i) = \text{máx}$$

O bien para el valor mínimo de la suma de los valores absolutos de las diferencias de los niveles de grises (en este caso las diferencias de las diferencias), es decir:

$$R_{\Delta x \Delta y} = \sum_{i=1}^{n-1} |\Delta x_i - \Delta x_i| = \text{mím}$$

A continuación se citan otros métodos que no se estudiarán en esta asignatura.

- Método de línea vertical “Locus” (VLL).***
- Método por medio de programación dinámica.***
- Método de mínimos cuadrados.***

8.4. Geometría epipolar

La mayor parte de los algoritmos de visión computerizada y fotogrametría digital parten de la premisa de que el par de imágenes estéreo se ha tomado según una geometría epipolar. Es decir, que las líneas de barrido del par son líneas epipolares. Esta condición se cumple cuando los dos ejes de la cámara de un sistema estereoscópico son paralelos entre sí y perpendiculares a la base (caso ideal de toma fotográfica).

Supongamos dos imágenes con un recubrimiento común tomadas desde O_1 y O_2 ; la base $\overline{O_1 O_2}$ se llama *eje epipolar*. El plano que pasa por los centros de proyección izquierda (O_1) y derecha (O_2) y el punto arbitrario P , es llamado *plano epipolar* que pasa por el punto P (Fig. 5). El plano epipolar que pasa por el punto principal es llamado *plano epipolar principal*. En un modelo fotogramétrico cada una de las imágenes izquierda y derecha tienen sus respectivos planos epipolares principales. La línea de intersección de un plano epipolar y el plano de la fotografía se denomina *rayo o línea epipolar*. Todos los rayos epipolares de una misma fotografía intersectan en un punto llamado punto epipolar K , que es la intersección de la recta que pasa a través de los dos centros de proyección (*eje epipolar*) con el plano de la fotografía.

Si elegimos un punto imagen p' en la fotografía izquierda, este punto y el punto epipolar K_1 definen el rayo epipolar $\overline{p' K_1}$ el cual corta en un punto D a la recta intersección de los planos prolongados de las imágenes izquierda y derecha. Uniendo este punto D con el punto epipolar de la imagen derecha K_2 , la recta $\overline{D K_2}$ será el rayo epipolar de la imagen derecha y dará el lugar geométrico del punto imagen p .

Se denomina imagen normalizada (Fig. 6) a aquella imagen construida con geometría epipolar en el espacio objeto, frente al concepto de imagen real que será aquella tomada en el momento de la exposición. La imagen que es paralela al plano XY del espacio objeto recibe el nombre de imagen verdaderamente vertical (imagen ideal). En una imagen normalizada las líneas epipolares son paralelas y los puntos epipolares se encuentran en el infinito.

Muchos algoritmos de correlación utilizan imágenes normalizadas o epipolares. En el caso de usarse

imágenes normalizadas el problema de la correlación se reduce al caso de una sola dimensión, estrategia que reduce considerablemente la complejidad de los algoritmos. En un modelo de imágenes normalizadas solamente existen paralajes horizontales, las paralajes verticales se han eliminado durante el proceso de orientación y por tanto la correlación es unidimensional, al tener todos los puntos homólogos igual valor para la ordenada.

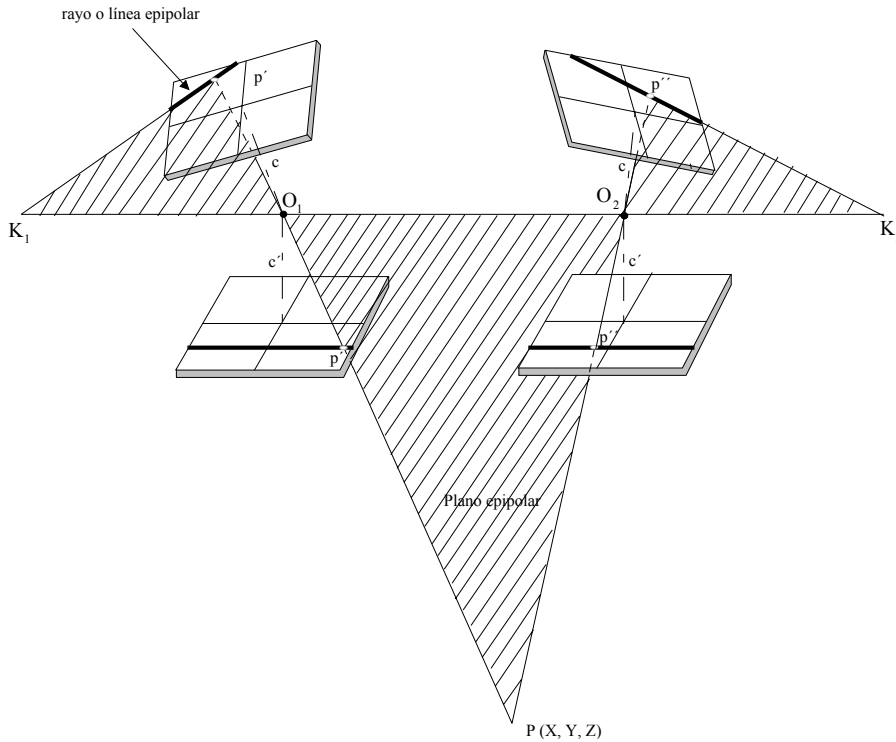


Figura 5. Geometría epipolar.

En la mayoría de los casos, los dos ejes de toma de las fotografías no son paralelos ni perpendiculares a la base aérea (O_1O_2), entonces es necesario la transformación de las imágenes a una posición en las que las líneas epipolares homólogas sean paralelas al eje abscisas del sistema de coordenadas imagen, es decir, que tengan la misma coordenada y . Las imágenes normalizadas deben ser paralelas a la base aérea y deben tener la misma distancia principal.

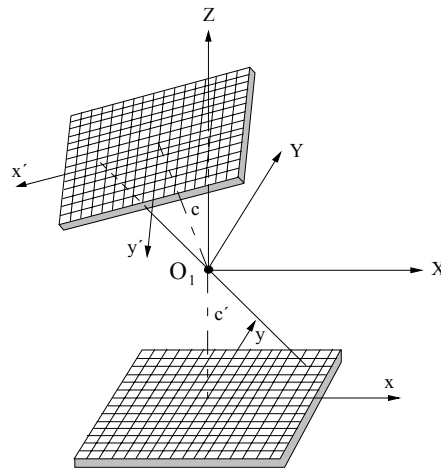


Figura 6. Imagen original e imagen normalizada.

En la figura 7 se presenta un par estereoscópico con geometría epipolar siendo O_1 y O_2 sus centros de proyección. El plano epipolar es definido por los dos centros de proyección y el punto objeto P . Las líneas epipolares e' y e'' se definen de la intersección del plano epipolar y los planos de las imágenes.

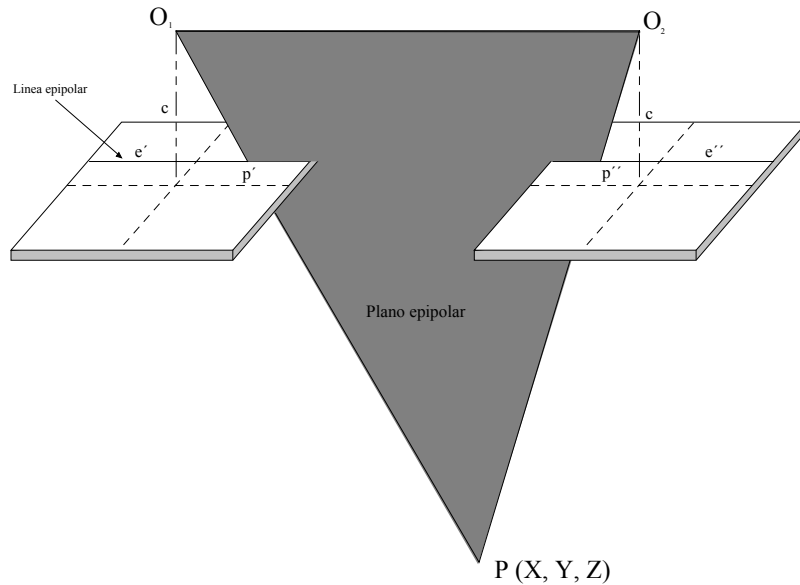


Figura 7. Geometría epipolar (Imagen Normalizada).

Generación de imágenes normalizadas

Para generar una imagen normalizada a partir de una original se va a partir del hecho de que se ha llevado a cabo una orientación relativa por rotaciones (Fig. 5), donde (x', y') (x'', y'') son las coordenadas de las imágenes originales (u', v') (u'', v'') las coordenadas de las imágenes normalizadas. La distancia principal en las imágenes normalizadas es c' . El origen de coordenadas local esta en el centro de proyección izquierdo (O_1) y el eje de las X pasa a través del centro de proyección (O_2). El eje Z es perpendicular a la primera imagen normalizada. El eje Y es perpendicular al plano XZ .

La relación matemática entre las coordenadas imagen (x', y') de una de las imágenes originales y las coordenadas de la imagen normalizada (u', v') pueden expresarse por las ecuaciones de colinealidad, de la forma siguiente:

$$x' = -c' \frac{m_{11}u' + m_{12}v' - m_{13}c'}{m_{31}u' + m_{32}v' - m_{33}c'}$$

$$y' = -c' \frac{m_{21}u' + m_{22}v' - m_{23}c'}{m_{31}u' + m_{32}v' - m_{33}c'}$$

La expresión que relaciona las coordenadas de la imagen normalizada con la original viene dada por:

$$u' = -c' \frac{m_{11}x' + m_{12}y' - m_{13}c'}{m_{31}x' + m_{32}y' - m_{33}c'}$$

$$v' = -c' \frac{m_{21}x' + m_{22}y' - m_{23}c'}{m_{31}x' + m_{32}y' - m_{33}c'}$$

También pueden utilizarse las ecuaciones de la transformación bidimensional proyectiva para poder pasar de imagen original a imagen normalizada y viceversa.

Se ha introducido en la imagen normalizada una distancia principal c' mayor que la distancia principal c de la imagen original para que no existan pérdidas de ningún píxel de la imagen original. Se asume que el tamaño del píxel es el mismo en ambas imágenes (original y normalizada). Una vez que se han obtenido las coordenadas (u', v') en la imagen normalizada, pueden aplicarse las ecuaciones anteriormente vistas para encontrar la correspondiente posición en la imagen original.

Una vez aplicada la transformación geométrica, hay que determinar el nivel de gris que le corresponde a cada píxel, debido a que la posición proyectada no debe coincidir con la posición original del mismo ni con su valor entero. Al realizar la transformación espacial se tiene que los valores de las coordenadas de la imagen normalizadas están en el sistema imagen, es decir, son valores reales y no valores enteros como corresponden a la posición de en una imagen digital (fila y columna), de forma que habrá puntos que no quedarán definidos por sus niveles digitales (fig. 8). Por tanto, es necesario interpolar el valor de gris; a esta operación se le conoce con el nombre de remuestreo (*resampling*).

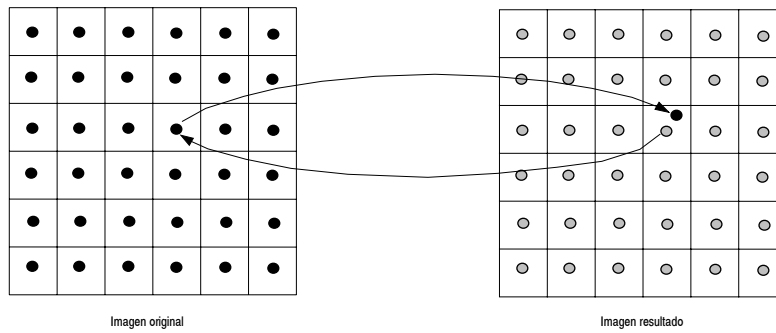


Figura 8. Remuestreo de imágenes.

Por medio de este método (remuestreo) hacemos varios muestreos sobre la imagen inicial. Cada vez que se efectúan cambios geométricos en la imagen digital, surgen varios errores de forma inevitable.

Los tres métodos de remuestreo más frecuentemente usados son:

- Vecino mas próximo
- Interpolación bilineal
- Convolución bicúbica

Método del vecino o píxel más cercano

Este método se llama así por situar en cada cuadrado de la malla de la imagen el valor de gris del píxel más cercano en la imagen original. Esta es la solución mas rápida y su principal inconveniente está en la distorsión que introduce en rasgos lineales de la imagen como carreteras, caminos,etc.

Siendo P el punto más cercano, entonces las coordenadas son:

$$x_p = \text{Int} (x + 0.5)$$

$$y_p = \text{Int} (y + 0.5)$$

siendo *Int* la expresión reducida de *Integer*, significa un número entero.

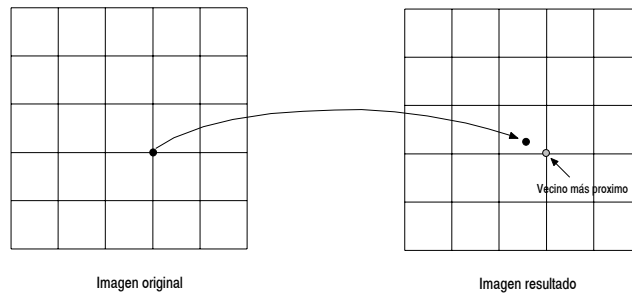


Figura 8. Remuestreo por medio del vecino más próximo.

Método de Interpolación bilineal

Este método supone promediar los niveles de gris de los cuatro píxeles más próximos de la imagen original. Este promedio se pondera según la distancia del píxel original al corregido; teniendo mayor influencia los píxeles más cercanos de la imagen original. Reduce el efecto de distorsión en los rasgos lineales, pero tiende a difuminar un tanto los contrastes espaciales de la imagen original.

Método de convolución bicúbica

Considera los niveles de gris de los 16 píxeles más próximos. El efecto visual es más correcto que los anteriores pero supone un volumen de cálculo mucho mayor.

De los tres métodos de remuestreo mencionados, el método del vecino más próximo es el más simple. Se distingue por su rápida ejecución en cuanto a cálculo se refiere, pero geométricamente hablando es el menos adecuado, con una precisión de ± 0.5 píxel. Los otros dos métodos restantes tienen una mayor precisión geométrica pero se requiere mayor trabajo en el cálculo. El método de convolución cúbica es el que absorbe mayor tiempo. En casos generales, el más utilizado es el método de interpolación bilineal. La elección del método más idóneo dependerá de la finalidad del proceso y de los recursos disponibles. El más preciso de todos es el método de la convolución que tiene un 0,3 % de error de interpolación. La interpolación bilineal tiene un valor de error del 3,7 % y el procedimiento del vecino más próximo del 15,7 % .

8.5. Correlación y segmentación

Se ha visto en apartados anteriores la importancia de la correlación en fotogrametría. Esta nos permitirá detectar automáticamente puntos en fotografías. Desde la simple localización de una marca fiducial hasta extraer las coordenadas tridimensionales de un punto en estereoscopia. Sin embargo, se ha comprobado como debido al ruido, a zonas con bajo contraste,etc., esta determinación no era perfecta o como los valores obtenidos en correlación, aún subpíxel, no daban resultados exactos.

En segmentación se vio como se pueden detectar bordes o como definir umbrales y de esta forma encontrar objetos o zonas con valores de grises uniformes y por tanto homogéneos. Comprobamos como, debido a la complejidad de la radiometría, no existe un único método o técnica y como suele ser una combinación de éstos la mejor solución.

En fotogrametría digital, la correlación se puede mejorar y en algunos casos de forma importante realizando a las imágenes técnicas de segmentación (una umbralización previa a la detección de una marca fiducial convertirá los niveles de grises en negro o blanco, quedando la marca fiducial completamente nítida para ser localizada por el patrón, el cual también responde a dos niveles de grises). Estas permiten eliminar ruidos o resaltar formas y con ello la correlación puede llegar a obtener valores muy altos. Si además tenemos en cuenta que estos procesos automáticos pueden recoger mayor

número de puntos o datos (en el caso de la orientación relativa se llega a 160 puntos en lugar de los 6 de Von Grubber), y siempre se podrán eliminar los peores sin problema de acabar teniendo escasez de puntos.

El punto menos claro de estas combinaciones *segmentación-correlación* es decidir que proceso es el más correcto y como ocurre con los diversos tipos de detección de bordes, dentro de los más correctos siempre hay alguno que destaca en un tipo de operaciones y no en todas. Esto nos lleva a tener que desarrollar una serie de estrategias donde, de acuerdo a pruebas iniciales hagamos a los procesos capaces de tomar decisiones y elegir métodos según las tareas o cálculos a desarrollar.

Así pues, será necesario definir toda la lógica de operación capaz de seleccionar los datos correctos y obtener con ellos los mejores resultados. Teniendo en cuenta que una de nuestras necesidades es obtener la mayor precisión y el menor error posible para sacar el mejor partido a un vuelo o fotografías, estas técnicas serán esenciales para llegar a ese fin.

Retornando a la anterior explicación de técnicas mixtas *segmentación-correlación* y habiendo visto la geometría epipolar, es necesario ampliar estas técnicas, implantando a las ecuaciones condiciones geométricas de geometría epipolar u otras. Así aunque se detecte mediante segmentación y correlación un punto, podremos utilizar estas condiciones para dar peso, aceptar o incluso eliminar dicha detección si no cumple las ecuaciones.

Estas condiciones permiten ampliar la precisión e incluso nos ayudarán a tomar las decisiones que vamos a necesitar desde el punto de vista informático al enriquecer las ecuaciones y también nos permitirán emplear el cálculo de mínimos cuadrados para mejorar los resultados.

Por tanto, serán necesarios tener en cuenta aquellos factores que intervienen tanto en la definición de la imagen como en la formación del modelo tridimensional, y a modo de ejemplo se apuntan aquellos que tienen una mayor incidencia:

- *Textura*: fotografías aéreas de texturas muy uniformes, exigen en la gran mayoría de los casos, una preseñalización de los puntos de apoyo o un marcado por transferidores estereoscópicos de estos puntos sobre los fotogramas y previo a las operaciones de escáner. Dentro de ciertos límites, la textura puede alcanzar una mayor entidad según la sensibilidad de la película. Emulsiones infrarrojas blanco y negro darán una mejor definición en los bordes de la red de drenaje, diferenciación de especies de arbóreas, etc. Emulsiones en color permiten un resalte y mayor facilidad de interpretar características del terreno. La ventaja del color en fotogrametría digital, además de las características enunciadas, estriba en la posibilidad de aplicar algoritmos simples de segmentación muy usados en el análisis multiespectral de sensores remotos. Una desventaja del color es el problema de la calibración dado que las imágenes se obtienen por digitalización en escáner así como el almacenamiento de las estas.
- Modelo estereoscópico: el modelo estereoscópico permite la interpretación bajo dos puntos de vistas diferentes y mediante la información tridimensional dar una correcta solución al problema.

8.6. Técnicas manuales, semiautomáticas y automáticas de orientación

La fotogrametría digital busca la automatización de los procesos fotogramétricos y las orientaciones como primera operación dentro de la fotogrametría y por la obligatoriedad de realizarlas siempre es uno de los procesos que más se beneficiaría de esta automatización.

Sin embargo, se incluyen dentro de los sistemas fotogramétricos, equipos que no contemplan ningún proceso automático. Su desarrollo se realiza igual que en fotogrametría analítica, pero cambiando el restituidor por el ordenador. Desde este punto de vista las orientaciones en estos sistemas son completamente manuales. Existen ayudas en la posición dentro de las imágenes, pero no automatismo.

Los otros sistemas cuentan con la correlación como procedimiento de cálculo. Pero hay que distinguir claramente dos posibilidades dentro de estos sistemas mirando solo los procesos de orientación. Cuando la correlación es un apoyo o cuando la correlación supone la automatización del proceso. La diferencia es muy importante, la segunda posibilidad consigue que, por decirlo fácilmente, la orientación se realice sola, mientras que la primera posibilidad hace que sea el operador el que realice las orientaciones y que solamente en la materialización del punto sobre el terreno se considere la correlación, la eliminación de la paralaje en cada punto es automática. Podemos hablar de procesos semiautomáticos.

Dentro de los casos de procesos automáticos, se verá en el próximo apartado que no se puede hablar de automatización completa, ya que la orientación absoluta no es totalmente automática. Sin embargo, la orientación interna es completamente automática hasta, el punto que existen sistemas de escáner que realizan la orientación interna a la vez que escanean las fotografías, por lo cual el operador se olvida completamente de la orientación interna. Respecto a la orientación relativa se puede hablar también de ella como un proceso automático, exige un tiempo de cálculo dependiendo de la resolución de las fotografías y de la capacidad de proceso del ordenador que puede llegar a ser importante y que en ordenadores bastante potentes queda reducido a 1 ó 2 minutos por par estereoscópico. Un aspecto importante y causante de este tiempo es el elevado número de puntos conjugados que es necesario utilizar para llegar a orientar el modelo como se verá en el proceso explicado más adelante.

8.7. Orientación automática

A continuación se estudiarán cada una de las fases del proceso de orientación (interna y externa) desde un punto de vista de la automatización de cada una de ellas.

8.7.1. Orientación Interna

Existen en una fotografía métrica aérea ocho posibilidades dentro de las zonas donde se encuentran las marcas fiduciales. Las cámaras convencionales tienen cuatro marcas fiduciales diametralmente dispuestas, aunque existen cámaras que disponen de las ocho marcas. Nuestro planteamiento se basa en la localización de estas marcas, en su medición y en el conocimiento de la focal de la cámara.

Por la disposición de las marcas fiduciales también existirá una rotación de 90° en el caso de que existiera una mala posición de la fotografía en el momento del escaneo, teniendo en cuenta que dentro de la misma pasada, las fotografías están dispuestas en la misma dirección. Por tanto existe la posibilidad de necesitar una rotación previa a la orientación interna para corregir este error (*Fig. 7*).

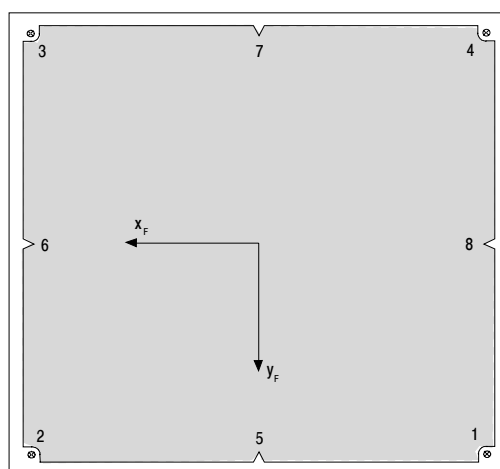


Figura 7. Fotografía métrica con ocho marcas fiduciales.

Como las marcas fiduciales son objetos bidimensionales con una geometría y radiometría particular y que no difieren en rotación más de 10° . La correlación es la opción más válida para la medición de las marcas. Si tenemos en cuenta la homogeneidad tanto en la forma como en la radiometría de estas marcas, la correlación presenta en esta detección una aceptación máxima en la medición. Si a este aspecto añadimos técnicas de segmentación por binarización se consigue una correlación muy eficiente.



Figura 8. Aspecto de diversas marcas fiduciales según tipos de cámaras.

El proceso de cálculo tiene las siguientes etapas:

- Reconocimiento del patrón, mediante la identificación del tipo de marca fiducial que contenga la fotografía.
- Tratamiento de imágenes piramidales. El uso de imágenes piramidales, ayudará a una rápida localización de la zona en que se encuentra la marca fiducial.
- Localización robusta marcas. Esta etapa incluye el reconocimiento de positivo/negativo de la fotografía digital mediante el cálculo de la media de los niveles de grises de la imagen. El proceso de localización comprende:
 - Definición del espacio de búsqueda. Utilizando las imágenes piramidales para una localización más rápida de las marcas fiduciales
 - Binarización. Este paso comprende la segmentación de la imagen de búsqueda.
 - Correlación binaria. La correlación es en niveles de grises, las imágenes difieren en geometría por una traslación $T(u,v)$ y en radiometría por una transformación lineal en brillo y contraste. Además de funcionar sólo con imágenes binarias, también habrá que tener en cuenta la única posibilidad de medir blanco o negro. Usando una correlación binaria para localizar una marca fiducial, el patrón se traslada por $T(u,v)$.
 - Test de consistencia. El resultado de las localizaciones individuales en cada nivel piramidal es chequeada usando un criterio para detectar afloramientos. Se hará una búsqueda de la mejor solución que se define por una transformación tomando los errores remanentes más pequeños.
 - Autodiagnóstico. Es necesario para un sistema automático poderse autodiagnosticar. Será necesario realizar este tipo de operaciones para detectar errores ocultos o sistemáticos. Analizando la precisión y sensibilidad de las mediciones se podrán realizar métodos de autodiagnóstico.
- Estimación de los parámetros de transformación 2-D afín. Una vez realizadas las mediciones de las marcas fiduciales se realizarán los cálculos de la transformación y después se obtendrán los parámetros que permiten pasar al sistema de coordenadas imagen.
- Autodiagnóstico. Otro autodiagnóstico llevará a poder realizar comprobaciones finales de precisión y sensibilidad de los resultados.

8.7.2. Orientación relativa

Para la realización de esta fase de orientación es necesario disponer de los siguientes datos:

- Los parámetros de orientación interna de la cámara.
- Las relaciones entre los sistemas de coordenadas de imagen y píxel.
- El orden de las imágenes.

Las operaciones se inician en el nivel piramidal mayor y con el tamaño de imagen y resolución más baja. El proceso se subdivide en dos partes, la primera corre desde el nivel piramidal mayor hasta el llamado intermedio. La segunda llamada rastreador de puntos corre a través de los niveles remanentes. Al criterio para definir el nivel intermedio se llega por la óptima combinación del uso de la cantidad posible de información y del tipo de cálculo.

Durante el enfrentamiento de puntos, se determinan puntos conjugados. Para cada nivel, las características del punto son extraídas y separadas en cada imagen usando un operador de interés. Ellos son entonces enfrentados de acuerdo a un criterio de geometría y radiometría, resultando una lista de candidatos a puntos conjugados. Esas parejas de puntos se introducen en un robusto procedimiento de ajuste de rayos con el que se determina tanto los parámetros de orientación relativa como las coordenadas modelo tridimensionales de los puntos conjugados. El enfrentamiento de puntos para en un nivel intermedio y allí es donde se calculan los parámetros de la relativa y de las coordenadas tridimensionales de los puntos.

El segundo paso o rastreador de puntos es una medición fina de las coordenadas de la imagen de los puntos conjugados en el nivel intermedio por mínimos cuadrados a través de los niveles piramidales. Con una ventana de búsqueda se calculan los seis parámetros afines y dos radiométricos entre las dos ventanas y por métodos iterativos. Para cada punto enfrentado, el coeficiente de correlación cruzada se calcula entre dos ventanas. Si el coeficiente es mayor que el permitido, el enfrentamiento se declara correcto. El operador de interés se usa otra vez en la ventana de referencia para encontrar un punto para transferir el siguiente nivel piramidal más bajo. Este punto es entonces transformado a la ventana de búsqueda para encontrar los parámetros y definir el punto. Esos dos puntos son marcados en el siguiente nivel y se repite el cálculo de mínimos cuadrados. Al final del enfrentamiento de puntos, los puntos conjugados correctamente enfrentados a las imágenes originales entran en un ajuste robusto para el cálculo final de los parámetros de la orientación relativa y sus coordenadas.

El enfrentamiento de puntos tiene la ventaja de la velocidad y de no tener pérdida de precisión. Asegura que los puntos conjugados son hechos en zonas bien definidas y en los que se puede esperar buenas características.

8.7.3. Orientación absoluta.

En el caso de un apoyo preseñalizado, si es posible realizar la absoluta automáticamente. El caso queda inscrito en la búsqueda de un patrón en otra imagen. En casos de urbana sería más fácil, y existe algún trabajo al efecto, definir un patrón y ayudarse del conocimiento de su posición para lograr una orientación absoluta automática.

El desarrollo del G.P.S. y su aplicación, en la determinación junto con el INS (*Sistema Inercial de Navegación*) en la determinación de las coordenadas de los centros de perspectiva ha llevado a mejorar y reducir la necesidad del control de campo, pero no a eliminarlo.

Sin embargo si se han desarrollado sistemas con una orientación absoluta semiautomática consistente en definir sobre una imagen al punto de apoyo y que sea el ordenador el encargado de localizar en el resto de las imágenes el mismo punto con el subsiguiente ahorro de tiempo.

Se dice que la orientación es semiautomática cuando interna y relativa son automáticas y la absoluta es semiautomática o manual. También y como es lógico existen multitud de particularidades ya que hay sistemas con procesos semiautomáticos en todas las orientaciones.

Existe por último la posibilidad de confirmar la correlación en cada punto encontrado.

Hasta aquí se ha visto orientación relativa y a continuación absoluta, es decir, la orientación en clásica en dos pasos. En el caso de realizarse la orientación externa simultáneamente por medio de la condición de colinealidad, orientación en un paso, ocurren los mismos problemas que en la orientación absoluta al identificar los puntos de apoyo y al utilizar los mismos puntos para corregir paralaje, escala y giros, sino se llega a realizar automáticamente la identificación de los puntos no hemos orientado ninguna de las dos, mientras que de la forma tradicional estarían realizadas la orientación interna y la relativa a falta de la absoluta.

8.8. Técnicas automáticas y semiautomáticas de transferencia de puntos

El caso concreto de la transferencia de puntos y proceder a marcarlos en una imagen podría considerarse análogo a las técnicas empleadas en orientación relativa, en estos casos se definirían de forma automática las regiones dentro de la imagen donde se quieren calcular puntos de transferencia y mediante cálculos de correlación se obtendrían los puntos homólogos del modelo.

Aspecto de importancia en estos casos serán las técnicas de segmentación, sobre todo en detección de bordes y el apoyo de condiciones geométricas ya que estos puntos una vez transferidos se utilizarán para medirse monoscópicamente y un error en la materialización de los puntos sobre el terreno se arrastrará posteriormente.

Bibliografía

- Ackermann, F., Digital image correlation: Performance and potential application in Photogrammetry, Photogrammetric Record, 11(645), pp. 429-439, 1984.
- Delgado, J., Apuntes de Fotogrametría Digital, Universidad Politécnica de Jaén, 1997
- Downman, I.J., Problems and some solutions in digital correlation for Photogrammetric profiling. Photogrammetria, 39, pp. 155-167, 1984.
- Krauss, K., Photogrammetry, Dümmler/Bonn (1993), ISBN 3-427-78684-6.
- López-Cuervo Medina, Serafín. Apuntes de Fotogrametría Digital. Universidad Politécnica de Madrid,(I.G.C.).
- Integrgraph (España) S.A. Z/I Imaging (www.intergraph.com/spain, www.ziimaging.com).
- Wolf, P.R. y Dewitt, B.A., Elements of Photogrammetry with Applications in GIS, McGraw-Hill, EEUU, 3ª edición (2000), ISBN 0-07-292454-3.
- Zhizhuo, W., Principles of Photogrammetry, Beijing, China (1990), ISBN 7-81030-00-8.

TEMA 9

INSTRUMENTOS ANALÍTICOS

9.1. Introducción

9.2. Instrumentos para aplicaciones analíticas

9.3. Comparadores

9.3.1. Componentes básicos de un comparador

9.3.2. Sistema de observación

9.3.3. Sistema de medición

9.3.4. Sistema de lectura y registro

9.3.5. Monocomparadores

9.3.6. Transferidores y marcadores de puntos

9.3.7. Estereocomparadores

9.3.8. Errores que afectan a las coordenadas imagen

9.4. Instrumentos analíticos

9.4.1. Principios básicos

9.5. Configuración básica

9.6. Bucles de trabajo en un restituidor analítico

9.7. Componentes físicos y periféricos de un restituidor analítico

9.7.1. Estereocomparador (unidad óptica-mecánica)

9.7.2. El Ordenador

9.7.2.1. Arquitectura basada en un tratamiento centralizado

9.7.2.2. Arquitectura basada en un tratamiento distribuido

9.7.2.3. Procesador en Tiempo Real

9.7.3. Sistema de inyección de imágenes

9.7.4. Dispositivo de correlación

9.7.5. Sistemas de adquisición de datos

9.7.6. Periféricos de salida de datos

9.7.7. Otros componentes

9.8. Componentes lógicos (software)

9.9. Clasificación de los instrumentos analíticos

9.9.1. Restituidores analíticos con coordenadas imagen

9.9.2. Restituidores analíticos con coordenadas objeto

9.9.3. Restituidores analítico equipados con correladores

Bibliografía

9.1 Introducción

Un instrumento de restitución es un aparato que permite determinar la posición de las intersecciones de los rayos homólogos de dos haces perspectivas, reconstruidos a partir de dos fotografías que forman un par fotogramétrico.

Dependiendo de la solución adoptada para la reconstrucción, puede establecerse una primera clasificación en tres grupos:

- *Analógicos.*
- *Analíticos.*
- *Digitales.*

En este curso de vana a estudiar los dos últimos ya que los instrumentos analógicos se trataron en Fotogrametría I.

9.2. Instrumentos para aplicaciones analíticas

En fotogrametría analítica la función del instrumento es la de capturar los datos de entrada (coordenadas fotográficas x e y de los puntos imagen). Esta captura puede hacerse de dos formas:

- Monocularmente.
- Estereoscópicamente.

El procesado de los datos se hace de forma matemática por medio de un ordenador. Este puede estar conectado directamente al instrumento de captura (sistema on-line) o no existir conexión directa entre ellos (sistema off-line).

Por todo lo cual, la fase de captura se puede realizar en los siguiente tipos de instrumentos

- *Comparadores:*
 - Monocomparadores: para la medida de coordenadas foto a foto.
 - Estereocomparadores: Para la medida de coordenadas en las dos fotos del par simultáneamente.
- *Restituidores analógicos:*
 - Trabajando como comparadores (mono o estéreo) en aplicaciones en diferido off-line.
 - Reconvertido en analítico para aplicaciones on-line.
- *Restituidores analíticos:* diseñados concretamente para este tipo de aplicaciones.

9.3. Comparadores

Son instrumentos destinados principalmente a la medición de fotocoordenadas, constituido por un doble carro que permite dar al fotograma traslaciones cualquiera en su plano, pudiendo estos desplazamientos ser medidos por un dispositivo apropiado.

Los comparadores pueden ser:

- Monocomparadores: permiten medir las coordenadas sobre fotogramas aislados, por punterías monoculares (o binoculares).

- Estereocomparadores: permiten medir simultáneamente las coordenadas de las imágenes homólogas de un mismo punto, mediante punterías estereoscópicas.

El monocomparador al ser más sencillo, será más preciso, pero tiene la desventaja de no beneficiarse de las ventajas del examen estereoscópico, para la identificación de los puntos homólogos, lo cual obliga a limitar el uso de estos para puntos muy bien definidos, como los señalados en el terreno antes de la toma fotográfica, detalles naturales muy precisos o puntos artificiales marcados sobre el fotograma, antes de la observación en instrumentos especiales (marcadores y transferidores estereoscópicos de puntos).

9.3.1. Componentes básicos de un comparador

Como todo instrumento de restitución se compone de:

- Un sistema de observación.
- Un sistema de medida.
- Un sistema de lectura y registro.

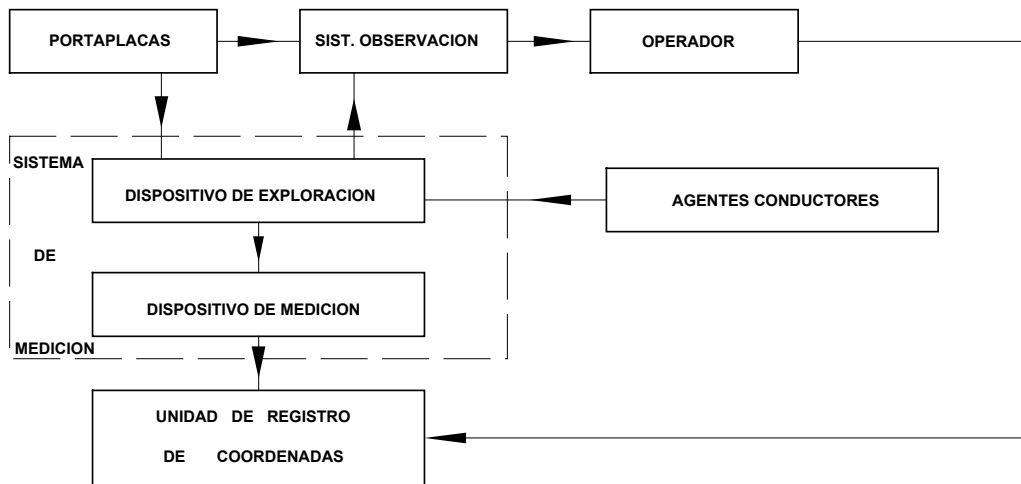


Figura 1. Iteraciones entre los diferentes componentes de un comparador.

- Portaplaquetas: soporte de las diapositivas, una o dos (mono, estéreo). Rotación χ
- Sistema de Observación: uno o dos caminos ópticos (mono o estéreo). Prismas, zoom, lentes, índices (pantalla).
- Dispositivo de Exploración: desplaza el índice respecto a la diapositiva. Husillos, railes, electrónicos.
- Agentes conductores: generan los movimientos de exploración (rápidos y lentos). manivela, joystics, bolas.
- Sistema de medición: expresan los desplazamientos lineales de los carros en forma de unidades de longitud.

9.3.2. Sistema de observación

Su misión consiste en poner el índice de medición en coincidencia con la imagen (fotograma) y llevar el conjunto a los ojos del observador con los aumentos adecuados para tener una visión lo más clara y parecida posible. Pueden presentarse bajo diversos aspectos:

- ☞ **Monocular:** es el más simple de todos los sistemas, utiliza un objetivo (para enfocar correctamente la diapositiva iluminada) y un ocular para examinar el conjunto (o una combinación de oculares para presentar las imágenes bajo diferentes aumentos). También pueden disponer de prismas que inclinen los tubos porta-oculares para tener una visión más cómoda.
- ☞ **Binoculares:** en los monocomparadores ambos oculares ven la misma imagen, haciendo el instrumento más confortable. Sin embargo en los instrumentos de doble imagen, cada ojo ve una imagen, de tal modo que se adquiere la sensación de estereoscopia.
- ☞ **Por Proyección sobre una pantalla de la imagen (o imágenes) y del índice de medición.** En este caso el operador no necesita ningún accesorio especial para la observación, salvo que tenga algún sistema de filtros para la visión estereoscópica.

9.3.3. Sistema de medición

Su misión es obtener los datos relevantes de las fotografías (coordenadas de los puntos imagen). Entre los sistemas existentes podemos citar los siguientes:

- *Husillos o “tornillos sin fin”.*

Es el dispositivo de medición más común. Se combina con un tambor micrométrico para apreciar las unidades de lectura más pequeñas. El paso de rosca suele ser de 1 mm. y el tambor suele estar dividido en 1000 partes para poder apreciar 1 micra en la lectura de la distancia (coordenada). Para la apreciación del milímetro dispone de un contador de vueltas (del husillo). Las vueltas incompletas se leen en el tambor.

Los husillos se pueden mover con manivelas o por medio de motores eléctricos accionados por palancas (joystics) u otros dispositivos en dirección x e y.

Los portaplacas pueden ser giratorios con objeto de poner las líneas fiduciales de la fotografía paralelas a los ejes de medición del sistema.

En los comparadores con husillos pueden aparecer errores debidos a la falta de rectitud y ortogonalidad de los tornillos, variaciones en el paso de la rosca, holguras y contracciones o dilataciones producidas por variación de la temperatura ambiente.

- *Escalas o Regletas combinadas con Micrómetros.*

Los movimientos del portaplacas respecto al sistema de observación (índice) pueden referenciarse por medio de escalas (de vidrio o de metal) situadas paralelamente a los ejes de medición. Cuando el índice de referencia se encuentra entre dos divisiones de la escala, se actúa con el micrómetro midiendo la traslación necesaria para llevar el índice a la división más próxima. La suma de las divisiones completas de la escala y la lectura del micrómetro, nos daría el valor de la coordenada.

- *Placas de vidrio reticuladas combinadas con Micrómetros.*

El sistema consiste en una placa de vidrio, en la cual se han grabado con gran precisión series de cruces equidistantes y separadas una distancia fija (0,5 ó 1 cm) formándose una especie de retícula que se superpone a la diapositiva a medir. La retícula ha de estar precalibrada, es decir se conocen las coordenadas de las cruces con gran precisión. Los micrómetros miden la distancia (en x e y) desde la imagen del punto en la diapositiva que queremos medir, hasta la cruz o línea más cercana de la retícula, con lo que se reduce el recorrido del micrómetro a la separación que exista entre las cruces.

- *Sistemas electro-ópticos (Codificadores lineales y rotatorios –Fig. 2 y 3-).*

Se basan en el recuento de franjas de difracción (Moiré) que se producen al deslizar (bajo un determinado ángulo) una rejilla rayada de vidrio sobre otra. La rejilla rayada, de la dimensión del eje a medir, va unida al carro móvil (portaplacas) y la otra más pequeña está fija y va superpuesta a una batería de fotodiodos que son los que se encargan del recuento. Cuando una se desliza sobre la otra, el patrón de franjas de Moiré generado (de distribución aproximadamente sinusoidal) se mueve en dirección perpendicular al rayado de las rejillas a razón de un ciclo (de franjas) por paso de rayado.

Los codificadores se basan en este principio para la captura de coordenadas. Pueden ser lineales o rotatorios y básicamente son generadores de señales eléctricas que convenientemente tratadas, componen la base de la captación de movimiento para los equipos de medida. Las señales de luz se forman en los cortes de luz que provocan las franjas de difracción formadas por las dos placas de vidrio graduadas. Frente a los emisores de luz se colocan varios fototransistores y fotodiodos, en los que incide la luz emitida por ellos, siendo convertidos en señales eléctricas, que decodificada van al contador.

Este sistema de medición tiene la gran ventaja de estar libre de fricción, desgastes y errores producidos por polvo, rayones,... etc., no provocando efectos apreciables en la medición. El paso del rayado de las rejillas para obtener unidades del orden de la micra está en 250 líneas por mm.

Este sistema se aplica en prácticamente todos los instrumentos de medición modernos y se están incorporando a los instrumentos analógicos, para darles mayor versatilidad en sus aplicaciones.

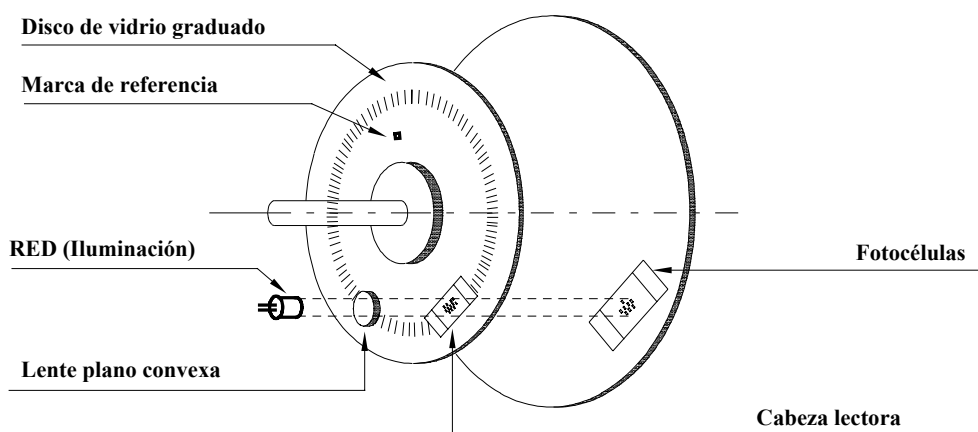


Figura 2. Esquema de un codificador rotatorio.

9.3.4. Sistema de lectura y registro

Su objeto es registrar de modo permanente las coordenadas medidas por el aparato.

- *Manual.* Implica una lectura y posterior registro de forma manual por parte del operador. Su única ventaja es la sencillez, pero tienen los inconvenientes del tiempo que se pierde y el estar sujeto a errores y equivocaciones propias de la toma manual.
- *Automáticos.* Sobre formatos magnéticos en formatos capaces de ser leídos directamente por un ordenador o plotter. Tiene la ventaja de su rapidez, de estar libre de errores y equivocaciones humanas y de presentar los datos de forma compatible al ordenador, que va a ser el encargado de su posterior proceso.

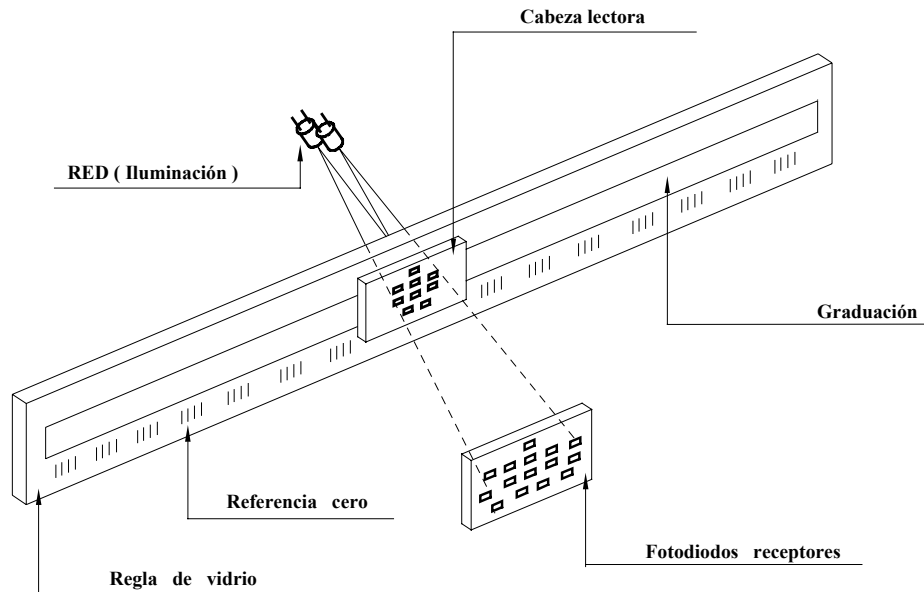


Figura 3. Esquema de un codificador lineal.

9.3.5. Monocomparadores

Realizan las medidas (coordenadas x e y) de los puntos foto a foto, lo cual implica, que tendremos que tener señalizados los puntos que van a ser objeto de medida en todas las fotos que aparezcan.

Con respecto a la señalización podemos distinguir tres categorías de puntos:

- Puntos señalizados en el terreno antes de la toma fotográfica.
- Puntos naturales, fácilmente identificables en las fotos (matas, intersecciones de caminos, esquinas,..... etc.).
- Puntos artificiales, que se marcan en las diapositivas con instrumentos diseñados para este cometido (marcadores y transferidores de puntos).

9.3.6. Transferidores y marcadores de puntos

Los transferidores y marcadores permiten realizar el marcaje de puntos en la diapositiva y transferir su posición correcta a fotogramas adyacentes, según su recubrimiento longitudinal y transversal.

Según el procedimiento físico con el que realiza su materialización, se pueden clasificar en:

- Instrumentos de percusión.
- Instrumentos por ignición con fuente de rayo láser.
- Instrumentos provistos de un rotor que levante la emulsión (PUG).

Además de la preparación de los puntos para su tratamiento en fotogrametría analítica, su campo de aplicación se ha diversificado en otros usos fotogramétricos, caso de las transferencias del apoyo fotogramétrico de un vuelo antiguo a otro reciente.

- *Instrumentos de percusión(Doulgemanns ITC-Delft de ZEISS)*, disponen de un punzador el cual va provisto de un pequeño martillo accionado por un resorte, el cual dispara una bola contra la capa de la emulsión de la diapositiva. El diámetro de la bola es de 0.2mm y origina una marca

circular de 0.1mm de diámetro sobre la emulsión.

- *Instrumentos tipo láser*, contiene un dispositivo marcador láser para realizar la transmisión estereoscópica y marcaje artificial de puntos. Define puntos de gran nitidez, originando una marca de $\varnothing = 0.045\text{mm}$.
- *Instrumentos provistos de rotor (PUG de WILD)*, el marcaje se realiza mediante una aguja que por un efecto de rotación, levanta la emulsión de la fotografía produciendo unas marcas de $\varnothing = 0.06\text{mm}$.

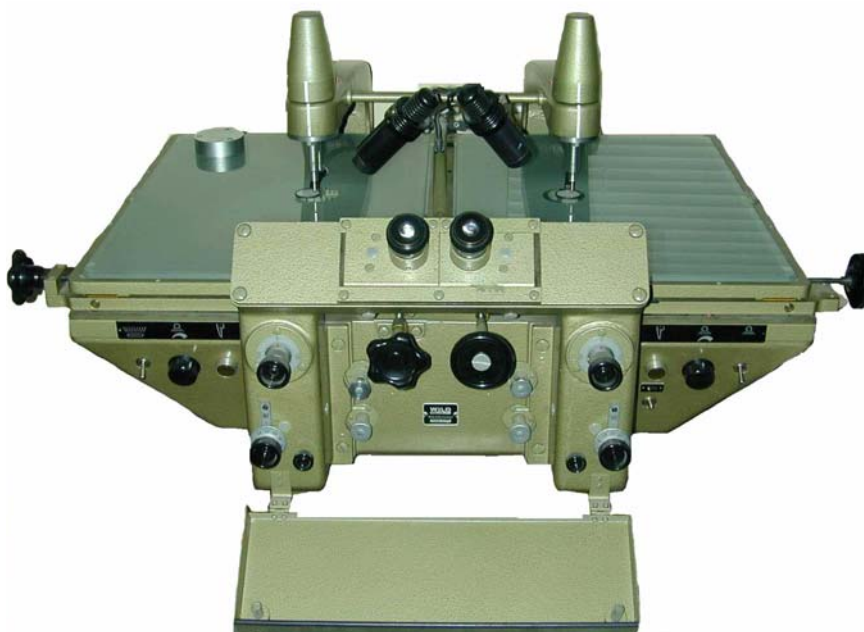


Figura 4. Transferidor y marcador de puntos Wild PUG-4.

9.3.7. Estereocomparadores

Son utilizados para medir, simultáneamente, las fotocoordenadas de puntos correspondientes de un par estereoscópico de fotografías. Los sistemas de observación, medición y registros son similares a los de un monocomparador, salvo que están duplicados, de esta manera cada portaplacas podría utilizarse como monocomparador independiente, pero han de poder moverse también ambos al mismo tiempo, al objeto de poder hacer la exploración estereoscópica del modelo.

El modelo clásico (*Fig. 5*) se compone de una plataforma que soporta el conjunto formado por el portaplacas izquierdo y el soporte y portaplacas derecho, la inferior está dotada de los movimientos generales (x e y) y aloja al portaplacas izquierdo y la plataforma superior (soporta el fotograma derecho). Esta última tiene movimientos particulares (P_x y P_y) respecto de la inferior. Estos movimientos (generales y particulares) se pueden distribuir también entre los soportes y el sistema de observación. Un dispositivo de observación doble permite la visión estereoscópica del par de fotografías.

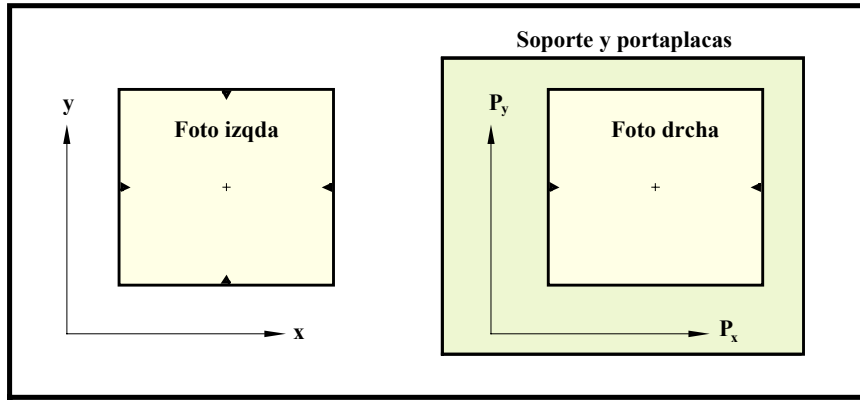


Figura 5. Esquema del estereocomparador. (x_1, y_1) movimiento que afecta por igual a ambas placas. (P_x, P_y) traslada sólo la placa derecha.

El fundamento del estereocomparador es el siguiente:

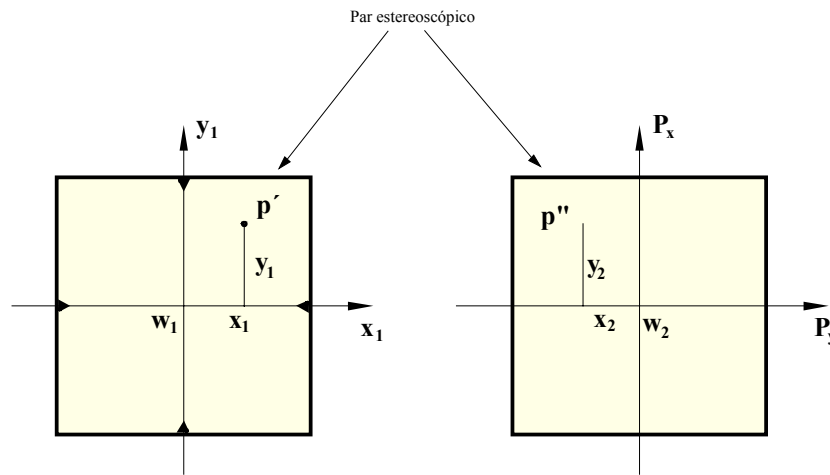


Figura 6. Procedimiento de medida con estereocomparador.

Superposición de los fotogramas:

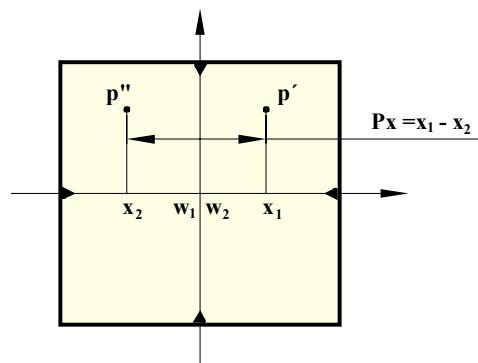


Figura 7. Procedimiento de medida con estereocomparador.

Procedimiento de medida:

1. Se coloca el índice izquierdo sobre el punto principal del fotograma izquierdo con el movimiento general (x e y).
2. Hacemos lo mismo con el índice derecho en el fotograma derecho y los movimientos particulares (Px y Py).
3. Con el movimiento general llevamos el índice izquierdo en coincidencia con el punto a medir del fotograma izquierdo y leemos sus fotocoordenadas (x_1, y_1).
4. Con el movimiento particular del portaplacas derecho, llevamos el índice derecho en coincidencia con la imagen del punto a medir en el fotograma derecho, leyendo su posición (Px y Py).

En estos momentos el índice izquierdo está situado en coincidencia con la imagen del punto en el fotograma izquierdo y el índice derecho en coincidencia con la correspondiente al mismo punto en la foto derecha.

Podemos calcular las fotocoordenadas de x_2 e y_2 del punto en la foto derecha:

$$x_2 = Px - x_1 \qquad y_2 = Py - y_1$$

9.3.8. Errores que afectan a las coordenadas imagen

El resultado de la transformación de las mediciones realizadas en los comparadores permiten obtener coordenadas imagen (fotocoordenadas); sin embargo es necesario analizar en detalle la naturaleza y características de estas coordenadas. En principio debe decidirse que el modelo ideal de una fotografía se corresponde con aquella que ha sido tomada con una cámara perfectamente ajustada, integrada por una lente libre de distorsiones, sobre un negativo dimensionalmente estable.

Esta fotografía ideal nunca se consigue, debido a una serie de errores sistemáticos presentes en la misma, alejándola de nuestro caso idealizado.

Los errores sistemáticos presentes en la fotografía son:

- Deformación de la película.
- Desplazamiento del punto principal de la imagen.
- Distorsión de la lente.
- Refracción atmosférica.
- Esfericidad terrestre.

A los anteriores errores deben añadirse nuevos errores no sistemáticos, producidos en el proceso de medida, siendo estos:

- Errores de identificación.
- Errores de observación.
- Errores de grabación de datos.
- Errores en las componentes del comparador y en su estabilidad de medición:
 - Errores del sistema instrumental:
 - ♦ Ortogonalidad de los ejes.
 - ♦ Diferencia de escala entre los ejes.
 - ♦ Afinidad (diferencias en las graduaciones X e Y).
 - ♦ Rectilinearidad de los ejes.

- Errores de holguras y movimientos.
- Errores dinámicos (inercia de los servomotores que siguen los movimientos de exploración)
- Errores de automatización del sistema.

Las fotocoordenadas obtenidas están afectadas por los errores sistemáticos y no sistemáticos, siendo necesario corregirlas para eliminar los errores (refinamiento de coordenadas).

9.4. Instrumentos analíticos

Estos instrumentos capaces de resolver una gran cantidad de problemas fotogramétricos (convencionales o no) fueron inventados por U. V. Helava mientras trabajaba para el National Research Council de Canadá, anunciando el concepto en un artículo publicado en 1957. Posteriormente (Enero de 1964) le fue concedida una patente por el gobierno de los EEUU.

A pesar de haber una cierta indiferencia inicial por parte de la comunidad fotogramétrica, el proyecto se convierte en realidad gracias a una serie de factores favorables entre los que cabe destacar el acuerdo al que llegan el N.R.C. y la casa OTTICO MECCANICA ITALIANA (O.M.I. de H. Nistri). Esta última al no tener experiencia en el campo de los microordenadores ha de establecer relaciones con BENDIX COORPATION que asume la tarea de diseñar y construir el ordenador, los intercomunicadores electrónicos y los programas de control del estereocomparador y el coordinatógrafo que iban a ser diseñados y fabricados por la O.M.I. Los aspectos financieros del proyecto se vieron en buena parte aliviados, cuando una agencia de las Fuerzas Aéreas de los EEUU les firma un contrato de compra de las primeras unidades fabricadas, que llevaría el nombre de AP/1 (1961). Posteriormente aparece el AP/2 al cual se le añaden algunas novedades. A estos instrumentos de uso exclusivamente militar pronto siguen otros de aplicaciones civiles como el AP/C. El monopolio virtual que había establecido el tandem OMI-BENDIX se termina en 1976 cuando BENDIX fabrica su propia versión que llama US1 y OMI saca al mercado su APC/4, aunque siguen colaborando en desarrollos de aparatos de estricta aplicación militar. Ambos instrumentos ya trabajan con ordenadores disponibles en el mercado.

Pero no va a ser hasta 1980, con ocasión del Congreso de Hamburgo, cuando estos instrumentos irrumpen de manera imparable en el mercado. Allí se presentarán prácticamente todos los modelos que hoy conocemos: APC/4 de OMI, Aviolit de Wild, DSR de Kern, Planicom de Zeiss, Digicar de Galileo y Traster de Matra en Europa ; y los modelos: DSR de Keukkel&Esser, APPS-IV de Autometric Inc., US-2 de Helava Associates Inc., Autoplot de Systemhouse Ltd de fabricación Norteamericana entre otros.

9.4.1. Principios básicos

Un sistema analítico es un sistema fotogramétrico que resuelve matemáticamente la relación entre coordenadas imagen (fotográficas) medidas en un sistema de referencia bidimensional y las coordenadas terreno del objeto, referidas a un espacio tridimensional, en contra de los restituidores analógicos, que establecen esta relación utilizando principios mecánicos y ópticos.

Una de las principales ventajas de los instrumentos analíticos sobre los analógicos es la precisión (*analíticos desde 1 μ m - 5 μ m*). Esta precisión se debe:

- Los puntos del modelo no se forman por intersección de rayos ópticos o mecánicos, por lo que son eliminados los errores procedentes de este tipo de construcción.
- Se corrigen matemáticamente todo tipo de errores matemáticos debido a distorsiones del objetivo de la cámara, deformaciones de la película, refracción atmosférica y curvatura terrestre. El ordenador de control del instrumento calcula todas las correcciones necesarias y las aplica en

tiempo real.

- Se pueden hacer observaciones redundantes y utilizar el método de mínimos cuadrados en la solución de las ecuaciones.
- Los instrumentos analíticos al no tener limitación óptica ni mecánica en la formación del modelo matemático, tiene gran versatilidad. Pueden manejar cualquier tipo de fotografías, utilizar cualquier distancia focal inclusive formar modelo con dos fotos de distinta distancia principal.
- Estos instrumentos están especialmente diseñados para una explotación digital del modelo. Su configuración básica permiten al operador leer, registrar y almacenar coordenadas (de importancia en la captura de datos para Aerotriangulaciones y MDT).
- En el caso de MDT el operador puede imponer al ordenador del sistema que el índice de medición siga un camino determinado en la exploración del modelo. El operador ya sea manual o de forma automática (técnicas de correlación) ha de mantener el índice en contacto con la superficie del modelo para que vayan registrándose las coordenadas de sus posiciones sucesivas, ya sean en función del tiempo transcurrido o en función del espacio recorrido desde el último registro o de un sistema mixto.
- Por medio del ordenador se puede recuperar los datos almacenados durante una determinada operación, así una vez que el modelo ha sido aceptablemente ajustado, los datos relativos a sus constantes se almacenan y a posteriori se puede reproducir el mismo modelo en ese u otro instrumento, lo cual representa una ventaja de cara al control y revisión de las restituciones (control de calidad) realizadas por otras personas.

9.5. Configuración básica

La configuración básica podemos dividirla en tres componentes:

- Estereocomparador (unidad óptico-mecánica)
- Ordenador de control
- Conjunto de Periféricos (teclado, pantalla gráfica, tableta digitalizadora,.....etc.).

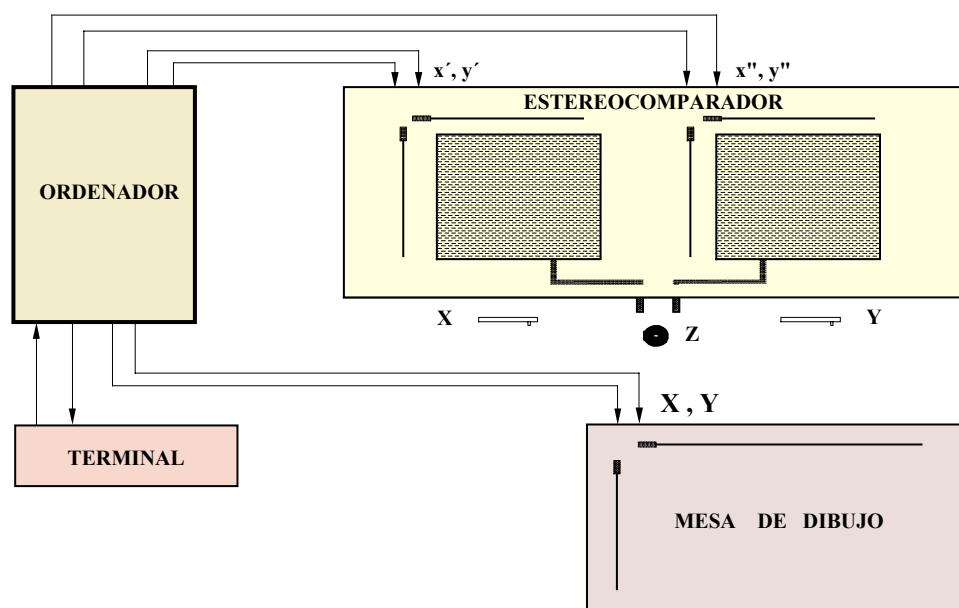


Figura 8. Esquema de un instrumento analítico.

Podría añadirse un cuarto componente que sería la mesa trazadora (plotter) o coordinatógrafo, que trabajaría conectada en modo directo (on-line) con el restituidor o bien en modo diferido (off-line), dando de este modo servicio a varios restituidores conectados en red a ella. Otras veces llevan una pantalla gráfica o estación de trabajo para el seguimiento y edición del dibujo.

9.6. Bucles de trabajo en un restituidor analítico

Los tres componentes del restituidor se relacionan entre sí por medio de los bucles cerrados (Fig. 9) que a continuación se muestran.

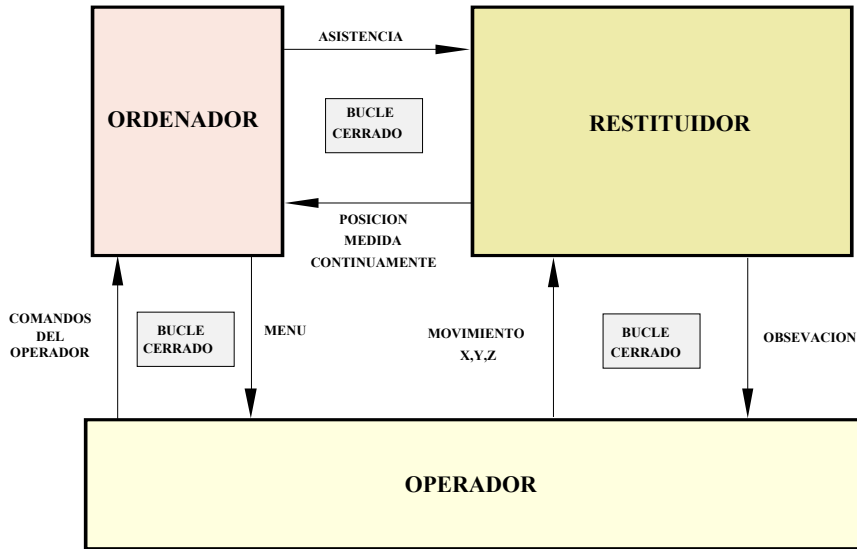


Figura 9. Bucles de trabajo en un restituidor analítico.

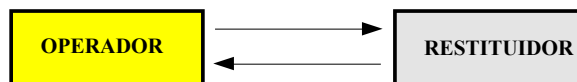
- *Bucle 1: Operador – Ordenador.*
 - El operador introduce los comandos de instrucciones en el ordenador.
 - El ordenador muestra al operador el menú de opciones.

- *Bucle 2: Operador – Restituidor.*
 - El ordenador produce los movimientos (X,Y,Z) al restituidor.
 - El ordenador proporciona la observación del modelo al operador.

- *Bucle 3: Ordenador – Restituidor.*
 - El ordenador transmite la asistencia necesaria (servomotores,... etc) al restituidor.
 - El restituidor devuelve en tiempo real la posición medida.

Este esquema de trabajo constituye la diferencia fundamental frente a los equipos tradicionales.

En un restituidor analógico solamente se ejecuta el bucle 2 (operador - restituidor).



En el caso de usar un ordenador como registrador de coordenadas, éste no forma un bucle cerrado con el restituidor.



9.7. Componentes físicos y periféricos de un restituidor analítico

Pueden citarse como componentes físicos de un instrumento analítico y periféricos:

- Estereocomparador (unidad óptica-mecánica).
- El Ordenador.
- Sistema de inyección de imágenes.
- Dispositivo de correlación.
- Sistemas de adquisición de datos.
- Periféricos de salida de datos.
- Otros componentes.

9.7.1. Estereocomparador (unidad óptica-mecánica)

Se compone de:

- Dispositivo óptico de observación
- Portaplacas que alojan a las diapositivas que forman el par estereoscópico
- Sistema de asistencia a los portaplacas (sistemas de movimientos)

El sistema de observación ha de ser de gran resolución óptica, tener zoom diversos (algunos llegan hasta los 25x), prismas dove en cada camino óptico (derecho e izquierdo), permitir regular el enfoque, la iluminación y la rotación de la imagen, la corrección de estrabismo, la iluminación y el tamaño del índice. También es conveniente un dispositivo intercambiadores de imágenes que permita la observación inversa de fotogramas (pseudoscopía).

Algunos equipos presentan la opción de introducir en el camino óptico los sistemas opcionales de inyección de imágenes mono o estereoscópica y de correlación automática.

El sistema de movimientos puede estar implementado a nivel de los portaplacas, a nivel de la óptica o de una combinación de ambos. Presentan más precisión a nivel de portaplacas generando una óptica más sencilla, pero dando lugar a mayores dimensiones en los equipos.

El desplazamiento de los portaplacas y/o el sistema óptico de observación generalmente se realiza por medio de husillos y tuercas, cinta de fleje de acero movida por ruedas dentadas o por rodillos de fricción. Los movimientos los aplican servomotores que reciben ordenes del intercomunicador del sistema comparador-ordenador.

Las posiciones de los portaplacas y/o objetivos de observación vienen determinadas por los codificadores acoplados a los elementos de control como manivelas, empuñaduras,... etc. Suele utilizarse codificadores rotatorios en los husillos y manivelas y lineales en los casos de empuñadura y rodillos de fricción.

9.7.2. El Ordenador

Es el encargado de gestionar toda la información que procede de los codificadores del restituidor y de la interacción a través de la pantalla, con el operador. Normalmente es una estación gráfica. También coordina el trabajo de todos los subsistemas basados en los microprocesadores.

Del análisis del trabajo realizado por el ordenador, se deduce que este puede descomponerse en un cierto número de tareas específicas de carácter modular y jerárquico, lo que permite su descentralización en subsistemas.

Por esta razón las primeras arquitectura de restituidores analíticos de proceso centralizado han dado paso a la arquitectura basada en un tratamiento distribuido. Con ellos la conservación del modelo estereoscópico (asistencia a los portaplacas) se confía a un procesador en tiempo real. Otros sistemas opcionales como la inyección de imágenes o la correlación automática y otros dispositivos de interacción con el restituidor, son gestionados por sus propios microprocesadores.

9.7.2.1. Arquitectura basada en un tratamiento centralizado

Los primeros restituidores analíticos estaban dotados de un ordenador de tipo *mini* o *micro* con un sistema de explotación en tiempo real y multitarea, dotado de un sólo procesador que estaba encargado de:

- *Ciclos en tiempo real* (movimientos de las manivelas y portaplacas)
- *Iteración con el operador* (terminal, teclado, pedales, indicadores de posición)
- *Gestión de datos recogidos* (ficheros disco)

El ciclo en tiempo real está incorporado al *procesador principal o central* (tratamiento centralizado) y tiene por misión la tarea de mayor prioridad: los registros generados por los movimientos manivelas-pedal (x, y, z modelo) son leídos por el ordenador (50 a 75 Hz), calculando de manera continua las coordenadas terreno (3D), las fotocoordenadas (2x2D) (teóricas, deformadas, comparador y servomotores). Estos últimos valores se encargan de situar los portaplacas en la posición correspondiente al punto modelo registrado con ayuda de los codificadores. Los bucles formados serán cerrados (posicionamiento de las placas, posición actual, reposicionamiento,... etc.) y se realizan a una frecuencia más elevada (centenares de Hz).

Los inconvenientes de esta arquitectura son:

- Complejidad del software (programación multitarea)
- Software de difícil mantenimiento y evolución en el tiempo.
- Elevada dependencia del software con relación al material y sistemas de exploración.
- Mala supervivencia del software en las sucesivas generaciones del ordenador.
- Los ciclos en tiempo real suponen una gran carga de trabajo para la unidad central.

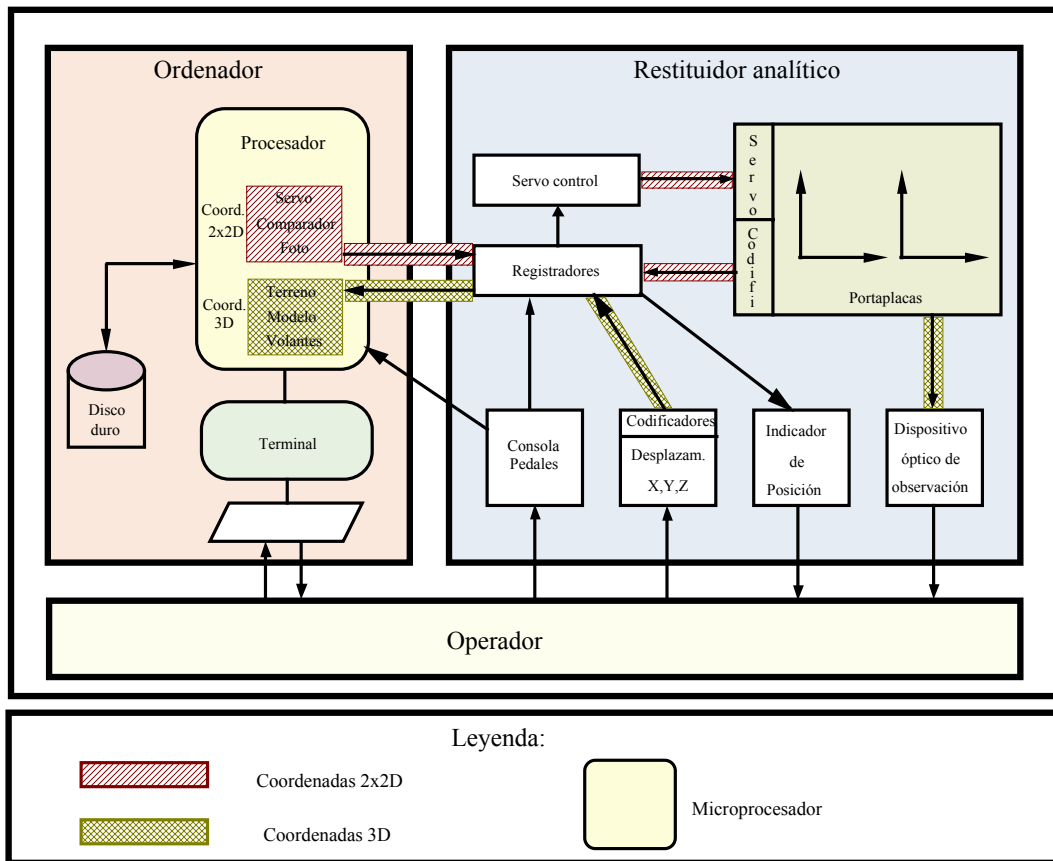


Figura 10. Arquitectura basada en tratamiento centralizado.

9.7.2.2. Arquitectura basada en un tratamiento distribuido

Las nuevas arquitecturas se basan en un tratamiento distribuido (Fig. 11), asignando a distintos microprocesadores las diferentes tareas a realizar. El grado de descentralización del proceso es variable. El procesador en tiempo real descarga al procesador principal de la asistencia a los portaplacas y a los sistemas de inyección del dibujo y correlación automática si hubiera. Otro procesador especial controla las comunicaciones con el operador. Cada procesador puede tratar o procesar información libremente y tomar decisiones locales.

En los sistemas más recientes, la mesa de dibujo automática se ha sustituido por una pantalla gráfica que ofrece la posibilidad de edición y facilita la integración de los instrumentos analíticos en los Sistemas de Información Geográficos (SIG).

Se tiende a sustituir los ordenadores de tipo mini y micro por los de tipo personal (PC) que se pueden considerar como pantallas gráficas de *bajo nivel*. Para aplicaciones complejas y más especializadas se utilizan los sistemas operativos estandarizados VMS y UNIX.

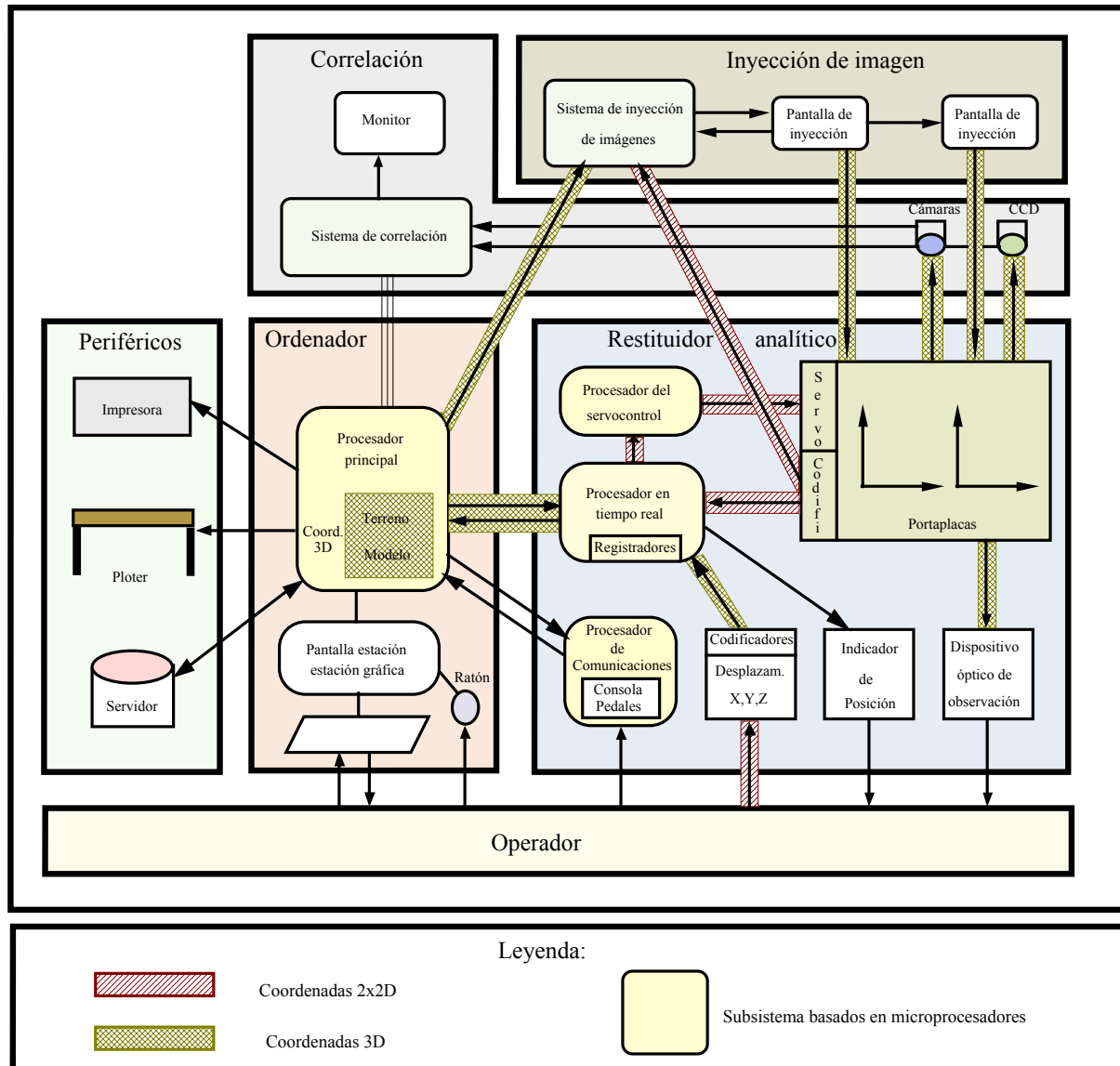


Figura 11. Arquitectura basada en tratamiento distribuido.

9.7.2.3. Procesador en Tiempo Real

Su función principal es mantener continuamente orientado el modelo. Del procesador principal recibe los parámetros de orientación del modelo, convierte en tiempo real los movimientos (X,Y,Z) realizados por el operador (manivelas y pedal), en desplazamientos (x,y) de los portaplacas gobernados por los servomotores, mediante sucesivas transformaciones de coordenadas. Al conocer constantemente la posición de los puntos, podemos leer sus coordenadas en los diferentes sistemas a través del indicador del instrumento.

El procesador en tiempo real está basado en un microprocesador de 16 a 32 bits, al que se le asocia un coprocesador matemático (de coma flotante), dado el carácter esencialmente numérico de la tarea.

Los procesadores en tiempo real no poseen disco, únicamente memoria interna (ROM para la lógica de encendido) y memoria externa (RAM para almacenamiento de su propio software)

La siguiente tabla describe las distintas transformaciones de coordenadas que se efectúan dentro del ciclo de tiempo real.

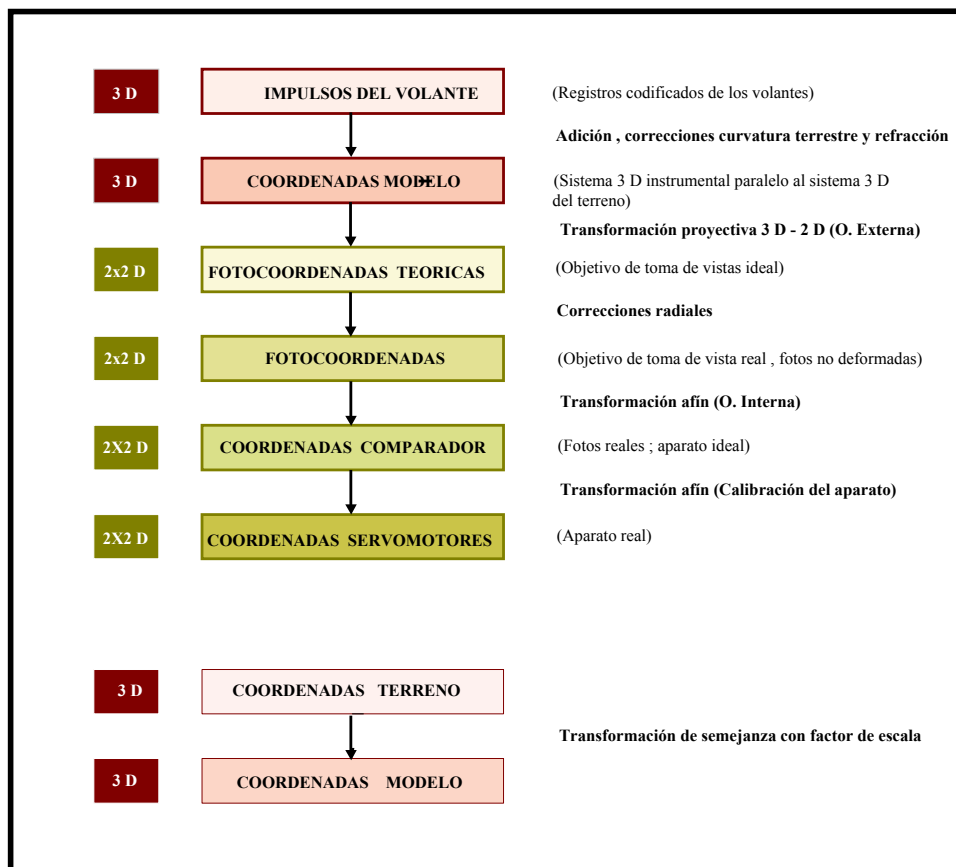


Figura 12. Transformaciones efectuadas en los ciclos en tiempo real.

9.7.3. Sistema de inyección de imágenes

Es un periférico desarrollado en los últimos años que permite controlar a través del dispositivo de observación, mediante superposición a la imagen fotográfica, la calidad y tonalidad de los datos gráfico en tiempo real.

Proporciona una ayuda eficaz en el proceso cartográfico de puesta al día de nuevas fotografías. El operador detecta con un golpe de vista las diferencias existentes y tiene la posibilidad directa de interacción mediante funciones del tipo borrar, registrar, cerrar,... etc.

Desde un punto de vista óptico, la inyección puede realizarse desde dos niveles distintos:

- En las proximidades de los oculares (entre estos y la óptica del zoom).
- Al nivel de los portaplacas.

La inyección puede ser mono (una sola pantalla sobre uno de los caminos óptico) o estereoscópica (imagen de dos pantallas, una por cada camino óptico).

Para resultar eficaz, un sistema de inyección de imagen ha de cumplir las siguientes exigencias:

- La resolución de la imagen inyectada debe ser suficiente en relación con la resolución de la emulsión fotográfica.
- El comportamiento de los sistemas de desplazamiento a lo largo del modelo ha de ser excelente para no perturbar al operador. La aparición de la imagen en la pantalla ha de ser rápida e independiente de la cantidad de datos. La restauración no debe durar más de un segundo, cuando se va de un extremo a otro del modelo.
- La inyección estereoscópica permite controlar la exactitud altimétrica y fatiga menos al operador. Las exigencias de resolución son más estrictas que en el caso de inyección monoscópica.

9.7.4. Dispositivo de correlación

Es un dispositivo que permite la restitución semiautomática al suplir en sus papel de identificar sin ambigüedad los puntos homólogos en las dos fotografías.

El correlador de imágenes permite realizar una identificación automática basándose en la comparación de luminosidades en zonas homólogas de dos imágenes fotográficas, utilizando como datos las diferencias de paralaje apreciadas y medidas por medios electrónicos.

La correlación tiene dos fases:

1. *Fase de barrido*, en ella se transforma la información analógica contenida en cada pixel de las imágenes fotográficas en información digital.
2. *Fase de correlación*, determina el grado de semejanza entre las dos señales digitales procedentes de ambas imágenes mediante un algoritmo de correlación. Suele ser habitual someter previamente a las dos señales a un proceso de filtrado, usando para ello una transformación matemática.

La correlación resulta muy interesante a la hora de automatizar el proceso de captura de datos en un modelo digital del terreno (perfiles, cuadrículas,... etc.). No obstante es necesario que progrese el software en este campo.

Un dispositivo de correlación ha de tener:

- Cámaras CCD, introducidas en el dispositivo óptico del restituidor, con resoluciones de 500x500 pixeles.
- Procesador para el tratamiento de señal analógica/digital, que permite la conversión de señales emitidas por las cámaras.
- Marco-buffers o memoria gráfica de varios planos (habitualmente 8, con 256 niveles de gris) encargados del almacenamiento de las imágenes numéricas y su tratamiento.
- Monitor de vídeo.

El dispositivo de correlación produce un alto consumo de recursos del ordenador y necesita de una comunicación rápida tipo BUS con el procesador principal.

9.7.5. Sistemas de adquisición de datos

Entre ellos se cuentan:

- Los volantes y pedales tradicionales.
- Guías manos libres ergonómica y multifunción: tipo ratón, tableta cursor,... etc.
- Consolas especiales: consolas clásicas, pantalla sensible al tacto.
- Dispositivo de adquisición vocal de datos.

9.7.6. Periféricos de salida de datos

Hay un gran número en uso de periféricos. Entre ellos mencionamos:

- Indicador numérico de posición. Presenta continuamente las coordenadas en los distintos sistemas.
- Pantallas luminosas indicadoras de posición, en las que una marca luminosa se desliza por detrás de una fotografía.
- Impresoras gráficas tipo raster en blanco-negro o color (sistema hardcopy de pantalla)
- Plotters de rodillo o mesas trazadoras planas.
- Unidad de almacenamiento de datos en forma de disquetes, cintas magnéticas, disco óptico,... etc.

9.7.7. Otros componentes

En el caso de disponer de más de un restituidor o que el equipo fotogramétrico esté integrado en un sistema más amplio, se hace necesario establecer una red de comunicaciones que permita la transmisión de datos entre los distintos elementos y un mejor aprovechamiento de los recursos del ordenador principal.

9.8. Componentes lógicos (software)

Son los paquetes netamente fotogramétricos encaminados a resolver las necesidades y requerimiento de producción. Dentro de los paquetes disponibles en el mercado hay algunos completamente imprescindibles en la labor del restituidor analítico, sin los cuales este no podría funcionar y otros opcionales que responden a necesidades más específicas del usuario para hacer frente a otros tipos de trabajos fotogramétricos.

- *Definición del proyecto* (área de trabajo, operador, fichero de puntos de apoyo)
- *Orientación.*
 - Interna.
 - Externa.
- *Capturas de datos y edición:* conjunto de programas que permite la adquisición, almacenamiento y posterior tratamiento de los datos del modelo, con salida de tipo digital o gráfica.
- *Representación o trazado.*
- *Perfiles y modelos digitales del terreno.*
- *Aerotriangulación.*
- *Cálculo de áreas y volúmenes.*
- *Otros programas (ortofotos digitales, fotogrametría de objeto cercano,...etc.).*

9.9. Clasificación de los instrumentos analíticos

Desde un punto de vista instrumental se pueden dividir los instrumentos analíticos en tres grandes grupos:

- 1.El uso de un comparador como instrumento de medición y posteriormente y en modo diferido (off-line) aplicar la solución analítica por medio de un ordenador. Se miden las coordenadas placas x,y de cada foto, bien en un monocomparador o en un estereocomparador, se digitalizan por medio de codificadores y se registran en cintas magnéticas.

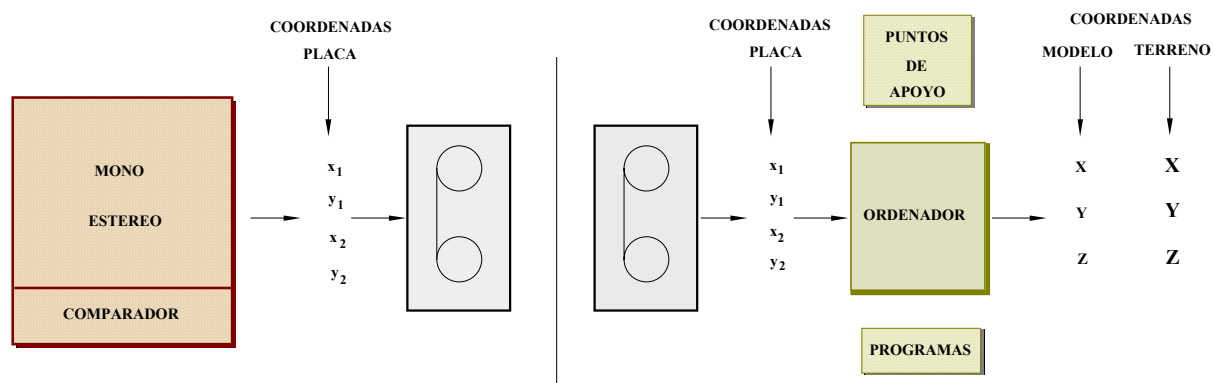


Figura 13. Aplicación de la solución analítica en modo diferido (off-line).

- 2.El uso de un comparador y la aplicación en modo directo por medio de un ordenador de la solución analítica. En este tipo de instrumentos no existe retroalimentación (comunicación ordenador - restituidor), sólo flujo de información en un sentido (Image Space Plotter).

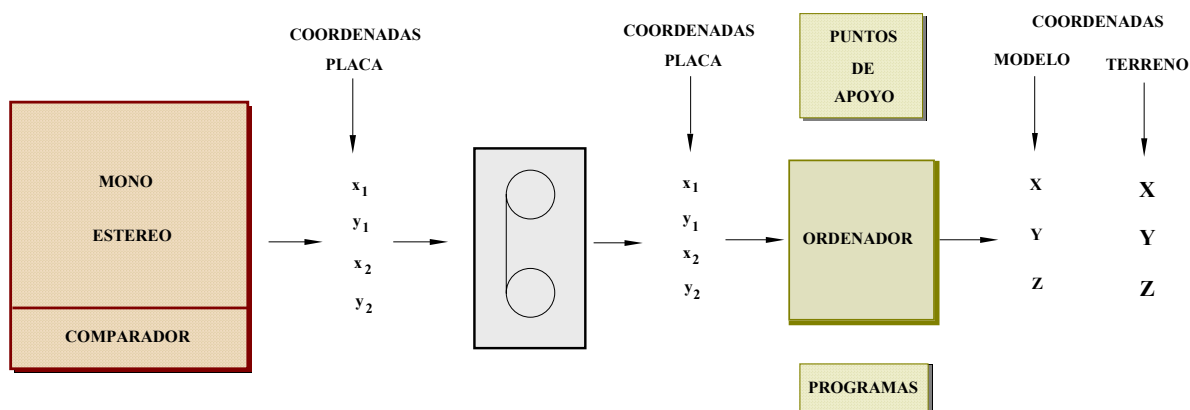


Figura 14. Aplicación de la solución analítica en modo directo (on-line).

- 3.Aquellos instrumentos en los que el ordenador está totalmente integrado en el diseño del instrumento y la solución siempre se ejecuta en modo directo (on-line), resultando un modelo orientado continuamente. El ordenador está siempre unido en línea a los elementos de medición del instrumento, que en un principio, será similar a un estereocomparador y provee una solución en tiempo real de las ecuaciones fotogramétricas analíticas y controla las señales a los

servomotores y manivelas que mueven las placas, para llevarlas a las posiciones requeridas en tiempo real. El resultado es tal, que siempre tendremos un modelo orientado y por tanto el operador puede medir los detalles planimétricos y altimétricos de igual modo como se realiza en un instrumento analógico.

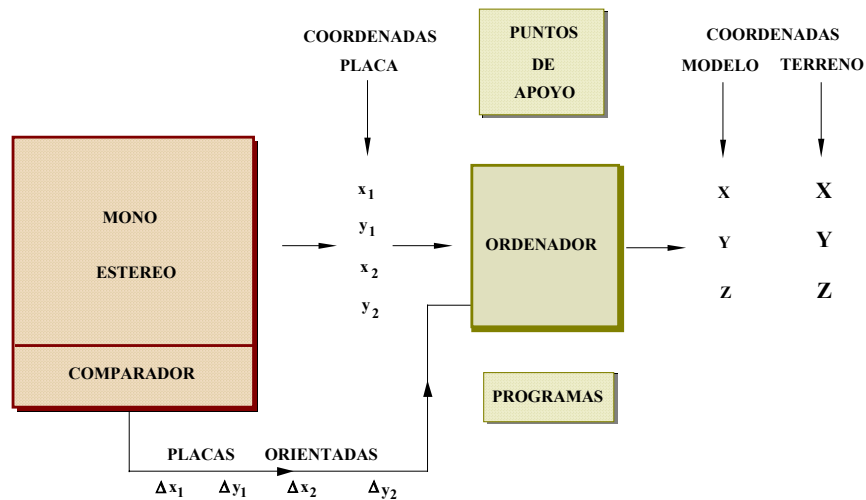


Figura 15. Integración del ordenador en el instrumento.

En los instrumentos del grupo 1 y 2 las mediciones se efectúan punto por punto y el proceso se efectúa en modo directo o diferido. Son instrumentos que no producen un modelo orientado.

En los instrumentos del grupo 3 podemos distinguir tres grandes grupos de restituidores analíticos:

9.9.1. Restituidores analíticos con coordenadas imagen

Se basan en la solución de coordenadas imagen y mantienen un modelo libre de paralajes y continuamente orientado (Fig. 16).

Las dos manivelas manejadas por el operador mueven físicamente la placa de la izquierda proporcionando x_1, y_1 . El pedal o disco de pie manejado también por el operador proporciona el valor requerido de la Z . Desplazando la placa derecha en dirección x obtenemos el valor de Px_2 . El valor final Py_2 se introduce por el operador que lo ha obtenido durante la fase de orientación.

Estos cuatro valores son enviados al ordenador en forma digital por medio de los codificadores. Una vez que la fase de orientación ha sido completada, las pequeñas correcciones adicionales Px_2, Py_2 necesarias para obtener un modelo orientado correctamente se obtienen continuamente y en tiempo real por el ordenador para cada posición que disponga el operador. Los movimientos de la placa derecha correspondientes a estas correcciones se llevan a cabo por medio de los servomotores. Al mismo tiempo el ordenador está calculando continuamente las coordenadas modelo (X, Y, Z) y las terreno (X, Y, Z) de cada punto medido, pudiéndose registrar en una cinta o disco. Además las posiciones (X, Y) del dibujo se calculan y dibujan continuamente. Ejemplos de estos instrumentos son: Stereocartógrafo Digital de Galileo, Digidart 20 de Galileo, APPS IV de Autometrics.

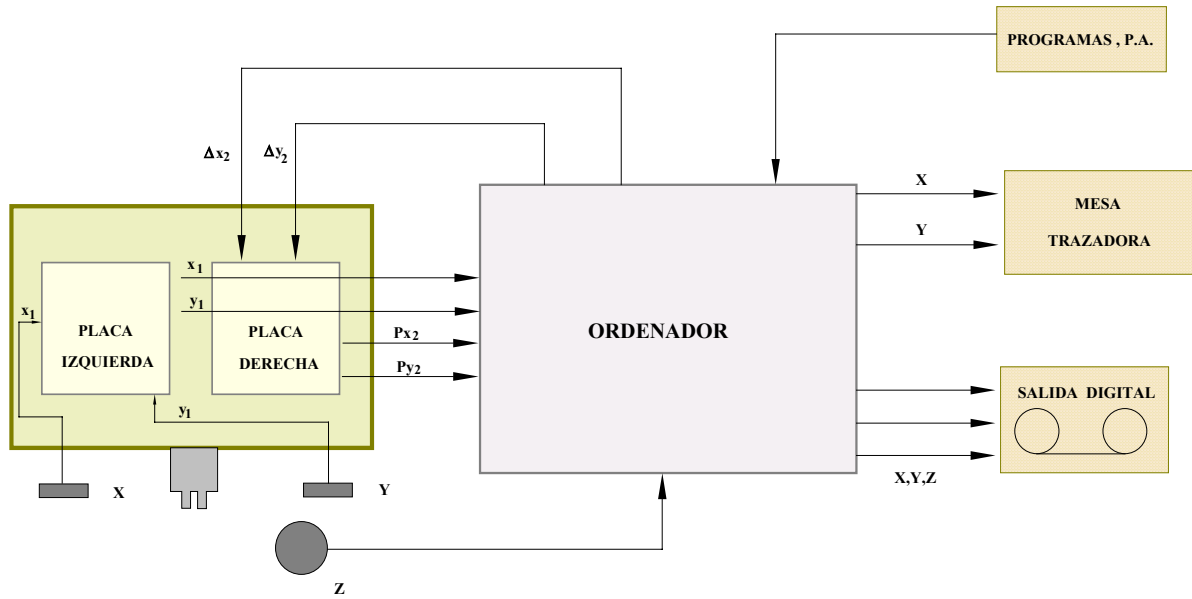


Figura 16. Restituidor analítico con coordenadas imagen.

9.9.2. Restituidores analíticos con coordenadas objeto

Estos instrumentos siguen la solución de Helava. Un esquema general es el siguiente:

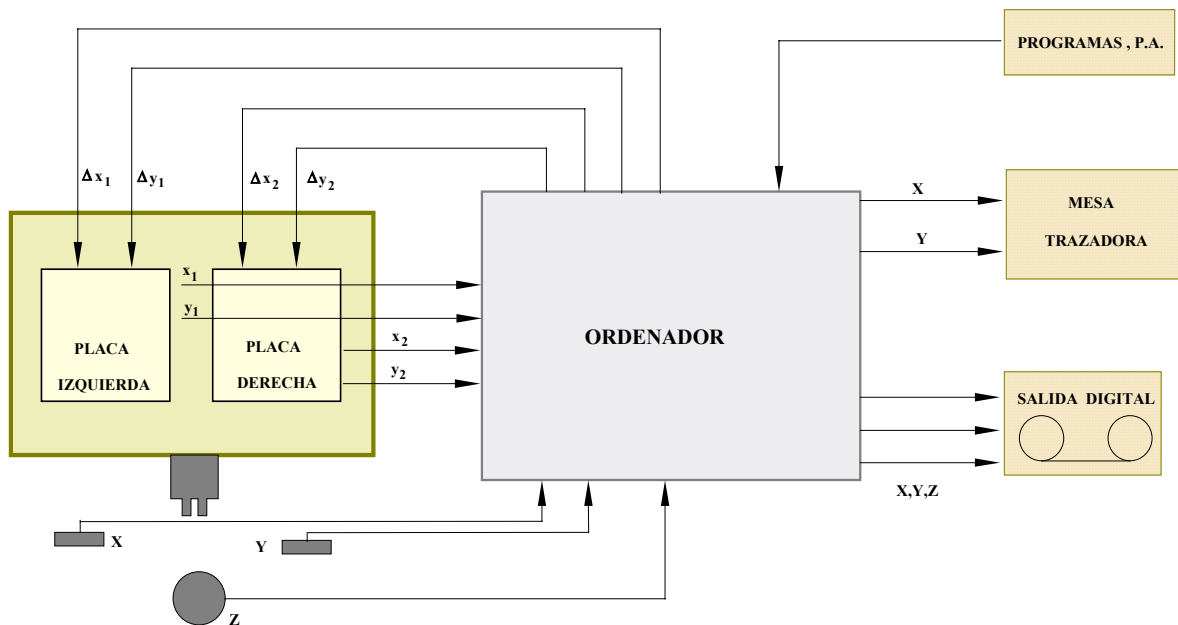


Figura 17. Restituidor analítico con coordenadas objeto.

Los movimientos de las manivelas (X , Y) y del pedal (Z) hechos por el operador pasan a través de los codificadores y van directamente al control del ordenador. De este modo los datos de entrada serán las coordenadas objeto (X , Y , Z). En este tipo de instrumentos las coordenadas de salida son, en primer lugar las cuatro coordenadas placa (x_1 , y_1) placa izquierda y (x_2 , y_2) para la derecha. Estos valores son

aplicados continuamente a los servomotores de cada placa, asegurando de esta forma las posiciones correctas correspondientes a los datos de las coordenadas de entrada medidas por el operador, obteniendo a la vez un modelo libre de paralaje y continuamente orientado. Además el ordenador calcula y envía en tiempo real a la mesa trazadora las coordenadas (X,Y) para el correspondiente dibujo. A su vez se pueden registrar y almacenar las coordenadas modelo o terreno en soporte magnético. Ejemplo de estos instrumentos citaremos: Avilolyt AC-1, BC-1 y BC-2 de Wild, Planicomp C100,110,120 y 130 de Zeiss,.... etc.

9.9.3. Restituidores analítico equipados con correladores

Pueden distinguirse dos grupos, aquellos que emplean correladores por superficie y los que utilizan líneas epipolares.

Los primeros funcionan sobre una base de una correlación sistemática cuadrado por cuadrado del modelo en lugar de por perfiles paralelos. El coste es demasiado elevado, aunque recientemente se han introducido pequeñas cámaras CCD equipadas con retículas para visualizar los cuadrados correspondientes de la imagen, la salida son valores digitales de la matriz.

Los segundos establecen en primer lugar las posiciones de los conjuntos correspondientes de líneas epipolares de cada fotografía del modelo. El barrido de las imágenes a lo largo de las mismas se efectúa con cámaras CCD. De esta forma se simplifica el proceso actuando sobre líneas y no sobre superficies.

Bibliografía

- American Society of Photogrammetry. Manual of Photogrammetry, ASPRS, Cuarta Edición (1980). ISBN 0-937294-01-2.
- Bonneval, H., 1972. Photogramétrie Générale. Eyrolle, París. Tomo I, II, III y IV.
- Domingo, L., Apuntes de Fotogrametría, Universidad Politécnica de Madrid, EUITT.
- Gómez, A., Fotogrametría Analítica, Universidad Politécnica de Madrid, ETSIA.
- Heras, A.E., Apuntes de Fotogrametría II. Universidad Politécnica de Madrid, EUITT.
- International Conference and Workshop on Analytical Instrumentation. ISPRS (1987). Phoenix. Arizona (USA). ISBN 0-944426-09-3.
- Moffitt, F.H. y Mikhail, E.M., Photogrammetry, Harper & Row Publishers., New York (1980), 3ª edición. ISBN 0-216-91996-7.
- Photogrammetry and land information systems. Seminario impartido en la Escuela Politécnica Federal de Lausanne(1989). Lausanne, Suiza. ISBN 2-88074-179-3.

TEMA 10

INSTRUMENTOS DIGITALES

10.1. Introducción

10.2. Sistemas Fotogramétricos Digitales

10.3. Características de las estaciones de trabajo

10.4. Componentes de un Sistema Fotogramétrico Digital

10.4.1. Sistema físico (*Hardware*)

10.4.1.1. Sistema de visión estereoscópica

10.4.1.2. Dispositivo interactivo de medición estereoscópica (3D)

10.4.1.3. Funciones del procesador de imágenes

10.4.2. Sistema lógico (*Software*)

10.4.2.1. Automatización de las estaciones de trabajo

10.4.2.2. Modo de trabajo

Bibliografía

10.1. Introducción

La fotogrametría digital es una técnica que se utiliza para extraer información geométrica, radiométrica y semántica de objetos del mundo tridimensional a partir de imágenes digitales bidimensionales de esos objetos.

Entre las razones que acreditan el gran interés por esta tecnología, pueden citarse entre otras:

- La disponibilidad de imágenes digitales y el continuo progreso de la informática en el tratamiento de imágenes.
- Las posibilidades que tiene la fotogrametría digital para la automatización de buena parte de la cadena del proceso de datos.
- El abaratamiento de costes debido a la utilización de equipos más económicos y personal menos cualificado han jugado un papel importante en su desarrollo.
- El desarrollo de sistemas de visión artificial para generar descripciones de objetos a partir de imágenes "visuales" (sobre todo en el ámbito de la fotogrametría de objeto cercano).
- El progreso en el desarrollo de los escáners y en la rapidez y capacidad de proceso de los ordenadores.
- La utilización de imágenes digitales procedentes de satélites en aplicaciones topográficas.
- La creación de modelos digitales del terreno (MDT) y a partir de ellos la formación de ortofotografías y la extracción de información altimétrica del terreno (curvas de nivel).

10.2. Sistema fotogramétrico digital

La Asociación Internacional de Fotogrametría y Teledetección (ISPRS) define un Sistema Fotogramétrico Digital como “*el conjunto de hardware y software cuyo objetivo es la generación de productos fotogramétricos a partir de imágenes digitales mediante técnicas manuales y automatizadas*”. Estos productos pueden ser utilizados directamente o bien ser la fuente de información de entrada para un Sistema de Información Geográfica (SIG) o un Sistema de Diseño Asistido (CAD).

Un sistema fotogramétrico digital incluye todos los elementos necesarios tanto a nivel de software como de hardware, para obtener los productos fotogramétricos a partir de las imágenes digitales, incluyendo también sistemas de captura de imágenes (interfaces de conexión con cámaras digitales o sistemas digitalización de imágenes en formato analógico -escáner-). El elemento fundamental del sistema fotogramétrico digital es la estación fotogramétrica digital -*Digital Photogrammetric Workstation*- (conocido también como restituidor digital o estación fotogramétrica digital, si bien este nombre no es adecuado puesto que sólo hace referencia a una de las tareas de la estación, el proceso de restitución).

10.3. Características de las estaciones de trabajo

- La entrada de datos es siempre en forma digital con lo que la información es estable y siempre se puede editar.
- El entorno de trabajo es automático e interactivo.
- La base matemática es la misma que en los restituidores analíticos pero con la ventaja de que no existen problemas de desgaste, calibración, ajuste, ...etc., al carecer de elementos ópticos o mecánicos, siendo siempre el proceso de medida constante en cuanto a precisión y fiabilidad.
- La universalidad es total, pudiéndose utilizar todo tipo de escalas de imagen con independencia de fotos terrestres o aéreas.
- El empleo es más cómodo para el operador (mayor ergonomía) y al tener un elevado grado de automatización es más fácil su manejo, requiriéndose menor experiencia.
- Permiten desde el mismo entorno de trabajo la realización de distintas tareas fotogramétricas y cartográficas, lo que aumenta la producción y eficacia en los flujos de trabajo, que a veces sobrepasan los estrictamente fotogramétricos.
- Admite la posibilidad de que varios usuarios puedan acceder simultáneamente a la estereoscópica pudiendo contrastar criterios.
- El principio de superposición, más efectivo que en los restituidores analíticos, haciéndolos muy interesantes en los trabajos de actualización y control de calidad.

10.4. Componentes de un Sistema Fotogramétrico Digital

El objetivo fundamental de un sistema fotogramétrico, cualquiera que sea la metodología empleada para su construcción es la obtención de información espacial de objetos a partir de imágenes de los mismos, en el caso concreto de los Sistemas Fotogramétricos Digitales, a partir de imágenes en formato digital.

El primer aspecto a tener en cuenta es la gran variedad de datos de entrada, desde imágenes obtenidas con microscopios electrónicos de barrido (*SEM* -*Scanning Electron Microscope*-), a imágenes obtenidas mediante sensores remotos instalados en satélites, pasando por fotografías de rango cercano y fotografías aéreas convencionales. Además, es absolutamente necesario disponer de un sistema de importación de ficheros en formato vectorial, que se utiliza en los procesos de actualización y verificación de la información extraída, mediante superposición de los elementos gráficos. Por último, el sistema debe contar con periféricos adecuados para la impresión de los resultados en formato analógico, en función de las necesidades de los usuarios.

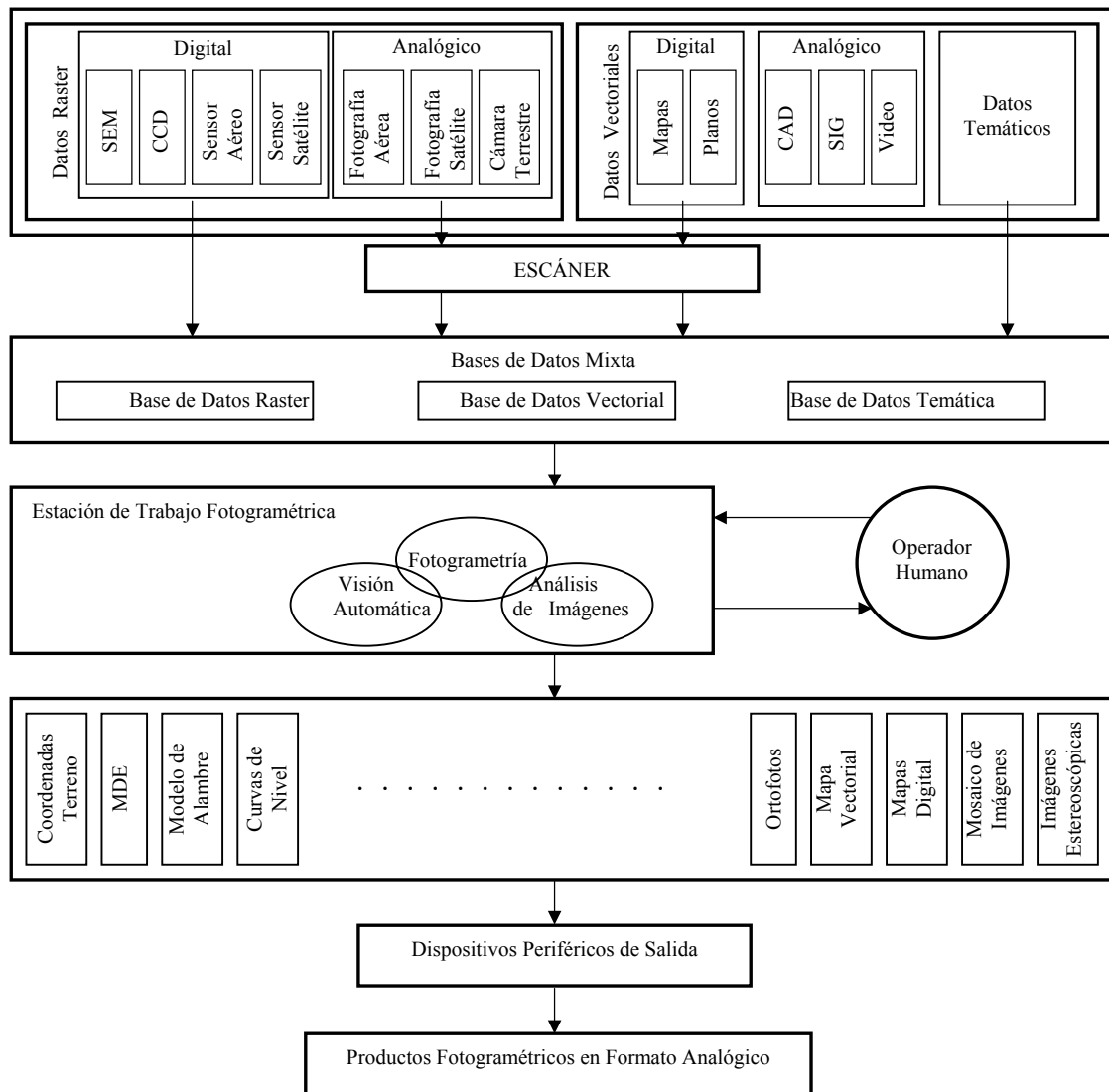


Figura 1. Diagrama de flujo de un Sistema Fotogramétrico Digital (Albertz et al., 1991)

10.4.1. Sistema físico (*Hardware*)

Teniendo en cuenta dichas necesidades, un sistema fotogramétrico digital debe cumplir los siguientes requerimientos en cuanto al sistemas físico:

- Un sistema de digitalización de imágenes analógicas (escáner).
- Una CPU rápida dotada de memoria suficiente y cuyo procesador en tiempo real ha de ejecutar dos tareas: el procesamiento de la imagen (zoom, movimientos de la imagen en pantalla,...etc. y correlación automática de las imágenes que formen el modelo estereoscópico).
- Posibilidad de entrada directa de datos en formato, digital (por ejemplo, desde una cámara digital) para la realización de aplicaciones fotogramétricas en tiempo real.
- Un sistema de control para la captura de datos, orientaciones y medida tridimensional de imágenes digitales de diferentes fuentes y geometría.
- Un subsistema gráfico que incluya:
- Memoria de imagen en verdadero color (24 bits) que permita la visualización de las imágenes estereoscópicas en color real.
- Una unidad rápida de procesamiento para cálculos (deslizamiento continuo a nivel de subpixel, zoom continuos) y que permita la manipulación y procesamiento de imágenes de gran tamaño en

- un tiempo razonable
- Un monitor estereoscópico en color de gran resolución.
- Obtención de ortofotografías digitales en un tiempo de proceso aceptable
- Canalizaciones (buses) rápidas para asegurar buenas prestaciones en las transmisiones de datos.
- Sistemas para el almacenamiento de información, acceso a red, teclados y otros periféricos.
- Interfaz con Sistemas de Información Geográfica con superimposición monoscópica y estereoscópica de elementos gráficos y con funciones de edición para la modificación de dichos elementos.
- Impresoras de imágenes y trazadores gráficos para la impresión analógica de los resultados.

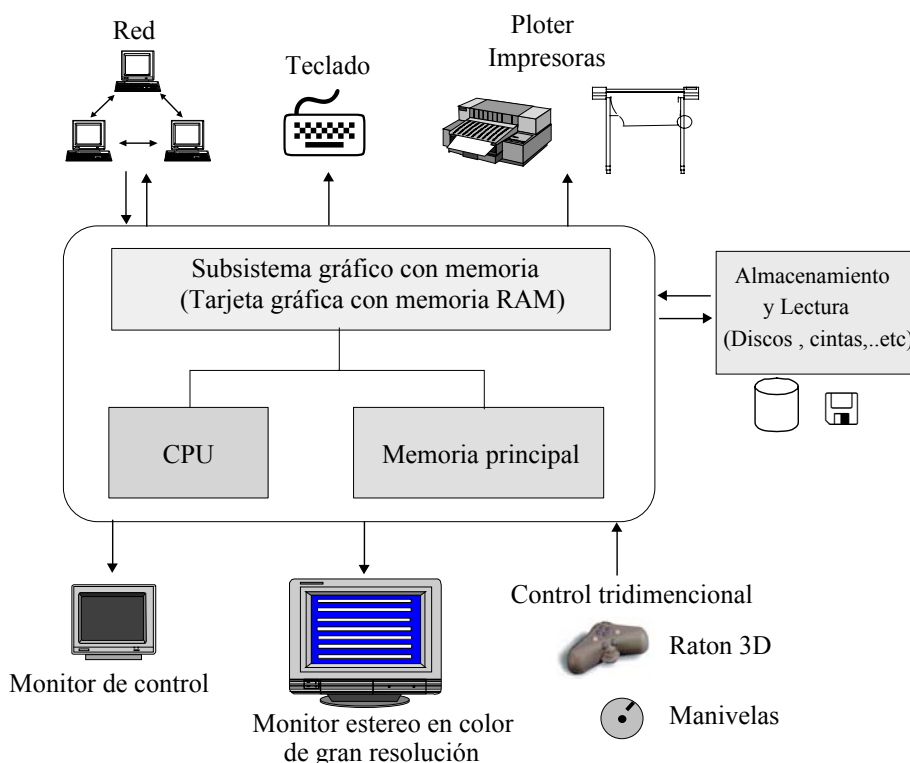


Figura 2. Componentes físicos de una estación de trabajo fotogramétrica

La tendencia actual de diseño de los sistemas fotogramétricos digitales es la utilización de una concepción modular ofreciendo grandes posibilidades para la expansión del sistema tanto a nivel de software como de hardware. Además, cada vez es más frecuente la utilización de hardware estándar, dentro de las posibilidades debido a las características particulares de este tipo de sistemas, para conseguir por un lado, la compatibilidad con otros sistemas, facilitar las tareas de mantenimiento y la reducción de costes de los equipos.

Las peculiaridades más importantes de un restituidor fotogramétrico se encuentran en la interfaz con el usuario: necesidad de visión estereoscópica, obtención de coordenadas en tiempo real, precisión del subpixel.

10.4.1.1. Sistema de visión estereoscópica

El sistema de visión estereoscópica es indispensable para la mayoría de los trabajos fotogramétricos, requiere la separación de las dos imágenes del par estereoscópico y dicha separación se puede realizar de varias forma:

- Separación temporal: se basa en la presentación alternativa de ambas imágenes.
- Separación radiométrica: utiliza la polarización (pasiva o activa), o el sistema de anaglifos.

- Separación espacial: consiste en partir la pantalla y utilizar un estereoscopio.

En algunos casos se utilizan varios métodos combinados, siendo los más frecuentes hoy en día la combinación de separación temporal con la polarización pasiva o activa.

☞ **Polarización con gafas pasivas (*passive flickler*)** (Fig. 3). En este tipo de polarización las imágenes se muestran de una forma alternativa en la pantalla. Consiste en superponer al monitor un modulador de cristal líquido que actúa como filtro de células polarizantes de manera que cada 1/120 de segundo cambia la polarización, proporcionando diferente polarización para la imagen izquierda que para la derecha. Unas gafas especiales (pasivas) decodifican las imágenes y proporcionan a la vista relativa al ojo correspondiente. De esta manera ve el operador alternativamente la imagen izquierda y derecha.

La polarización es circular y el refresco de la pantalla es de 60 Hz. La modulación del cristal líquido se sincroniza con el procesador gráfico, de manera que cambia la polarización con la misma frecuencia y al mismo tiempo que las imágenes son representadas en la pantalla. Las gafas están polarizadas en sentido vertical y horizontal.

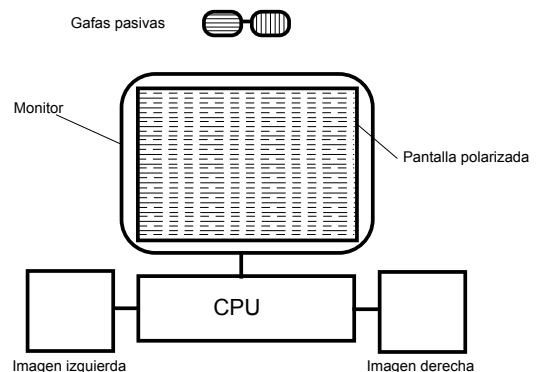


Figura 3. Sistemas de visualización con polarización gafas pasivas (LH Systems).

☞ **Polarización con gafas activas (*active flickler*)** (Fig. 4). En este caso las imágenes se editan en la pantalla de una manera alternativa y secuencialmente con una frecuencia de 120 Hz. Las gafas (activas) en este caso usan unos cristales con un obturador (LCS-Liquid crystal Shutter-) que separan las imágenes ofreciendo alternativamente al operador la imagen izquierda y derecha (incluyendo la marca flotante) a tal velocidad que se produce la fusión de imágenes y por tanto el efecto estereoscópico. La pantalla y el obturador están separados mediante un emisor de rayos infrarrojos que se suele colocar encima del monitor. Este sistema es comercializado por la *Stereo Corporation* bajo el nombre de *CrystalEyes*.



Figura 4. Sistemas de visualización con polarización de gafas activas (ImageStation ZIII, Intergraph)

Los dos métodos anteriores tienen las siguientes ventajas:

- Permiten la visión de imágenes en color.
- Permiten el principio de superposición.
- Permiten que varios operadores puedan ver el modelo simultáneamente.
- Permiten a los operadores la libertad en los movimientos de la cabeza.

En cuanto al principal inconveniente es que hay una reducción del brillo en comparación con un monitor normal debido a la doble frecuencia y a la absorción de la luz por la polarización de ña pantalla (caso de gafas pasivas) o por el obturador en el de gafas activas.

<i>Gafas pasivas</i>	
<i>Ventajas</i>	<i>Inconvenientes</i>
<ul style="list-style-type: none"> ☞ Bajo peso de las gafas (como cualquier gafa de corrección óptica) ☞ Bajo precio unitario de las gafas. ☞ Libertad de movimientos. 	<ul style="list-style-type: none"> ☞ Precio del sistema completo. ☞ Pérdida de luminosidad. ☞ Ghosting (separación incompleta entre imagen izquierda y derecha).
<i>Gafas activas</i>	
<i>Ventajas</i>	<i>Inconvenientes</i>
<ul style="list-style-type: none"> ☞ Precio del sistema completo. ☞ Mejor luminosidad. 	<ul style="list-style-type: none"> ☞ Elevado precio de las gafas. ☞ Sensibilidad a condiciones de iluminación (parpadeo producido por tubos fluorescentes). ☞ Aparatosidad de las gafas. ☞ Visión del monitor no estéreo con parpadeo..

☞ **Método espacial (-división de la pantalla-split)** (Fig. 5). El método consiste en montar un estereoscopio de espejo enfrente de la pantalla y editar cada imagen (izquierda y derecha) en media pantalla. Las dos imágenes que integra el modelo se visualizan de una forma simultánea en el monitor (o monitores).

Tiene el inconveniente de que al partir el monitor se reduce el área observable del modelo, pero en cambio tiene la ventaja de que se crea un entorno de trabajo muy similar al de los restituidores analíticos. Pueden utilizarse monitores y adaptadores gráficos más simples. Una solución a este método es la utilización de dos monitores, uno para cada imagen, incrementando de esta manera el área observable.

Es posible la edición de imágenes en color y aplicar la superposición, pero el modelo estereoscópico solamente puede ser observado por un operador y no por varios simultáneamente.



Figura 5. Sistemas de visualización por división en pantalla (DVP de Leica).

- ☞ **Anáglifo.** Es una técnica de coste muy reducido, pero que no se emplea debido a la gran fatiga del observador y a las dificultades para lograr el posado en el modelo.

10.4.1.2. Dispositivo interactivo de medición estereoscópica (3D)

El dispositivo interactivo de medición estereoscópica (3D) utilizado en los trabajos de producción ha de ser lo más estable posible (por razones de precisión) y fácil de utilizar. La ergonomía y facilidad del control afecta de una forma importante al rendimiento del sistema. La opción preferible por razones de precisión, estabilidad y facilidad de utilización es la combinación de un ratón 2D (para el movimiento en XY) y un sistema de bola (para el movimiento en Z). Algunos fabricantes están presentando como opción el esquema clásico de manivelas para el movimiento en XY y pedal de Z, a fin de facilitar a los operadores habituados la utilización de estos nuevos sistemas.

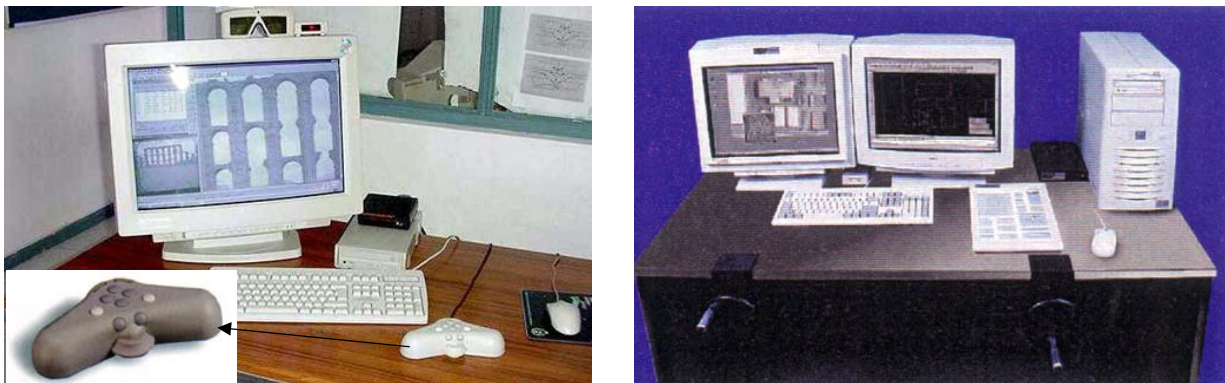


Figura 6. Izquierda: sistema fotogramétrico digital con cursor 3D para digitalización (X, Y, Z). Derecha: sistema dotado de manivelas.

Con lo que respecta al *desplazamiento del cursor* existen dos posibilidades:

- El cursor es móvil permaneciendo las imágenes fijas (*panning*).
 - ☞ Está es más sencilla y económica, empleándose en la mayoría de los equipos de nivel bajo, este sistema presenta el inconveniente de la pérdida de visión estereoscópica cuando se necesita cambiar la zona de trabajo debido a la necesidad de regeneración de las imágenes lo que produce un evidente pérdida de rendimiento del equipo.
- Que sean las imágenes las que se muevan estando el cursor fijo en el centro de la pantalla..
 - ☞ Esta opción es más interesante debido a que la forma de operar es similar a la que se sigue en un restituidor analógico o analítico, aunque para ser implementada requiere disponer de un equipo con un rendimiento gráfico suficiente (velocidades de vídeo en torno a 1 millón de vectores 3D/seg) para permitir que el desplazamiento de las imágenes se realice de una forma progresiva, continua y rápida.

Por último, una de las características más importantes de un Sistema Fotogramétrico Digital es la posibilidad de trabajar con *precisión del subpixel*. Esta precisión puede ser lograda durante el proceso de medida interactiva. Si las imágenes son fijas, la función de zoom aumenta el tamaño de los pixels que componen la imagen pero no el del cursor. El cursor entonces se desplazará de un pixel de la pantalla al otro, lo que supone un desplazamiento en la imagen a escala inferior al pixel. Si el cursor está fijo, las imágenes ampliadas se desplazarán con un intervalo de pixel de pantalla.

10.4.1.3. Funciones del procesador de imágenes

El procesador de imágenes está encargado de realizar las siguientes operaciones:

- Cargar las teselas de las imágenes derecha e izquierda desde el disco no solo en el despliegue inicial sino durante el movimiento o deslizamiento de las imágenes en la pantalla (panning).
- Controlar el obturador de cristal líquido para la presentación en pantalla de las imágenes izquierda y derecha alternativamente.
- Presentar en la pantalla el modelo estereoscópico.
- Mantener y deslizar la imagen estereoscópica por la pantalla a través del sistema de control (ratón 3D, empuñadura, manivelas y pedal ...etc.), mientras el índice permanece fijo en el centro de la pantalla.
- Mover el índice en dirección Z mediante el dispositivo adecuado (cilindro, ratón, pedal,...etc.).
- Refrescar el índice.
- Aplicar zoom a las imágenes estereoscópicas durante la carga desde el disco.
- Permitir la creación de una pantalla de gráficos y texto sensible al tacto para la selección del menú con varias funciones de proceso de imágenes (p.e. color del cursor, valor de zoom, cambio de contraste,.....etc.).
- Tener conectores de pedales para registro de coordenadas y tentativos y registrar las coordenadas de los puntos.
- Controlar la sobreimpresión en color de los datos vectoriales almacenados en el disco o en memoria y hacer que se mueva al mismo tiempo que la imagen estereoscópica.
- Establecer la correlación entre pixels durante el cálculo de los modelos digitales del terreno.
- Remuestreo de las imágenes en caso de rotación, anamorfismos, ortoimágenes y vistas perspectivas.

10.4.2. Sistema lógico (*Software*)

Como ya se comentó anteriormente las tendencias actuales de los fabricantes en cuanto a los **componentes lógicos (*software*)** es la concepción modular. Así, a grandes rasgos, podremos encontrarlos con los siguientes módulos aplicables a la fotogrametría digital:

- Módulo fotogramétrico básico. Generación de proyectos, cámaras, exportar e importar datos,..etc.
- Módulo de procesamiento de imágenes digitales.
- Módulo de orientación manual de imagen a imagen o modelo a modelo (interna -manual y/o automática- , externa, resección de imágenes).
- Módulo para la visualización estereoscópica de los modelos y manipulación.
- Módulo para la restitución y librerías de ayuda.
- Módulo para aerotriangulación de bloques. (Realiza la orientación relativa del bloque o de modelos independientes con una intervención mínima del usuario. De forma automatizada se realizará la labor de seleccionar y medir coordenadas imagen, mediante autocorrelación de los puntos de paso y enlace, con la posibilidad de interacción con el operador).
- Módulo para la generación automática e interactiva de MDT.
- Módulo para la generación de ortofotos digitales.
- Módulo para la creación de mosaicos de ortofotos digitales.
- Módulo para la composición y salida (*hardcopy*) de imagen raster combinada con información vectorial, márgenes, cajetines,..etc.
- Módulo para importación y exportación de imágenes de satélites (*SPO, LANDSAT, IRS*).

10.4.2.1. Automatización de las estaciones de trabajo

El corazón de una *ETFD* está en el software cargado en ella. Los instrumentos analíticos están equipados con un paquete de programas dedicados principalmente a situar el índice de medida en

posiciones dadas de la imagen o en el espacio objeto y a la captura de datos vectoriales a través de la interacción entre el instrumento y el operador. Sin embargo, el trabajo con imágenes digitales ofrece la posibilidad de automatizar partes sustanciales de la cadena de procesos fotogramétricos. Por ello podemos decir que en las estaciones de trabajo los resultados no están sesgados por el operador (humano), que el proceso es más rápido y que los equipos podrán ser más económicos en poco tiempo. Sin embargo, por ahora, no hay forma de obtener información cartográfica de manera totalmente automática.

Viendo las diferentes funciones de la cadena del proceso podemos estudiar dónde es posible esta automatización:

- Orientación de la imagen (interior, relativa y absoluta).
- Transferencia de puntos para la aerotriangulación.
- Generación de modelos digitales de terreno (DTM).
- Transformaciones geométricas de la imagen (cálculo de ortofotos, de imágenes epipolares, de vistas perspectivas,...etc.).
- Extracción de los detalles topográficos.
- Generación de ortofotomapas.

La automatización puede ser total (en proceso batch) o parcial (semiautomática) con proceso interactivo. Los procesos en batch son posibles para la orientación interna, la relativa, para la transferencia de puntos, generación de MDT y transformaciones geométricas de la imagen. En este caso, se aplica a cada pixel un juego de ecuaciones de proyección de una forma predeterminada. Para otras tareas juegan un papel esencial los algoritmos de identificación automática de imágenes homólogas (*image matching*) o algoritmos de correlación.

En la generación de DTM existen muchas probabilidades de que se produzcan serios errores, especialmente en zonas de baja (o repetitiva) textura. También se pueden presentar errores cuando se tratan imágenes de escalas grandes y se deben a las ocultaciones por la perspectiva y a las discontinuidades altimétricas en áreas muy edificadas o bosques, siendo conveniente hacer una comprobación después de un proceso de este tipo.

La retícula del MDT (o el curvado de él derivado) se puede superponer sobre las imágenes estereoscópicas originales.

Resulta obvio que hay que corregir las zonas de mala identificación en el MDT creado. Esta operación se ejecuta recurriendo a procesos semiautomáticos de la siguiente manera: una vez seleccionadas manualmente los puntos, perfiles o áreas a corregir, el operador se posa en el terreno a la cota correcta y el sistema genera el nuevo resultado que es a su vez visualizado, comprobado y si fuese necesario corregido de nuevo.

Otro ejemplo de procesos semiautomáticos lo tenemos en la medida de coordenadas imagen de un punto, dadas sus coordenadas en una de las imágenes (se aplica, en la triangulación aérea, al medir coordenadas de puntos de enlace o de puntos de apoyo). El operador se posa exactamente en el punto en una de las imágenes y el sistema busca automáticamente las fotocoordenadas de ese punto en la otra imagen (o imágenes) aplicando algoritmos de correlación.

Se han desarrollado también algoritmos de seguimiento automático de carreteras, para determinar contornos de edificios y otros detalles fácilmente reconocibles.

Estos procesos se pueden realizar de forma que el algoritmo sugiera automáticamente candidatos para el punto que va a ser medido (un punto de paso, por ejemplo), para un cierto detalle o para situar rótulos en el mapa. Estas sugerencias son verificadas y aplicadas por el operador.

10.4.2.2. Modo de trabajo

En las Estaciones de trabajo consiste en ejecutar una serie de operaciones de una manera más o menos sistemática. Las funciones más usuales son las siguientes:

1. Creación de los ficheros necesarios para el funcionamiento de las aplicaciones (para la adquisición y carga de las imágenes, puntos de apoyo, cámara, modelos, bloque...).
2. Para la observación correcta del modelo estereoscópico y la realización de los cálculos necesarios para las distintas aplicaciones, es necesario hacer:
 - Orientación Interna (automática) por correlación de las marcas fiduciales.
 - Orientación Relativa (automática) por correlación de puntos homólogos.
 - Aerotriangulación del bloque.
 - Orientación Absoluta.

Al final de este paso todos los modelos del bloque han sido calculados y almacenados en el disco.

3. Para la captura de datos el operador elegirá el modelo a restituir y el sistema presentará en pantalla de forma automática dicho modelo y cargará los ficheros relacionados con él.

Se pueden generar ahora, a partir de las imágenes tridimensionales, los ficheros de puntos o en conexión con un GIS, hacer una captura de datos vectorial en su base de datos gráfica. En paralelo, se pueden sobreimponer los datos vectoriales a la imagen tridimensional de la pantalla para controlar mejor la restitución.

4. La captura de datos altimétricos se hace a partir de un modelo digital de terreno generado automáticamente por correlación, este servirá para generar las curvas de nivel (también de forma automática) del modelo. El operador puede controlar su precisión de distintas maneras:
 - Situando el índice sobre el MDT superpuesto al modelo estereoscópico y comprobando que el valor de la Z es el correcto. Para cada valor de X e Y, el valor de Z se lee del fichero del MDT.
 - Generando las curvas de nivel; que al superponerlas al modelo estereoscópico se podrá comparar el cálculo con la realidad del terreno representada en el modelo estereoscópico.
 - Calculando las ortoimágenes izquierda y derecha, presentarlas en la pantalla en estereoscopia y verificar que no exista relieve (como comprobación).

Para la ejecución de estas operaciones, el software ha de ser capaz de:

- Manipular las imágenes (funciones de estereoscopia y estereocomparador).
- Mantener del ciclo en tiempo real. Función que conecta el movimiento del ratón 3D (modelo) con los dos cursores o índices del monitor estereoscópico

$$X_m, Y_m, Z_m \quad \Rightarrow \quad x'y', x''y''$$

- El procesamiento de coordenadas. Rutinas fotogramétricas de orientaciones (interna, relativa, absoluta, generación de valores aproximados, ajuste bloques).
- El uso de módulos de gráficos en la captura de datos para la digitalización de puntos, líneas, símbolos y superposición estereoscópica de vectores.
- La intercomunicación con sistemas de información geográficos o de tipo CAD
- La creación de MDT: captura, comprobación de errores, cuadrículas, curvado, visualización y edición.
- El manejo de módulos de automatización: para correlación de imágenes, seguimiento automático de líneas y texturas, clasificación de imágenes.

- La rectificación de imágenes: creación de puntos nodales a partir de DTM.
- El remuestreo de la imagen: creación de una ortoimagen a partir de las imágenes de entrada (sin refinar) y los puntos nodales.
- Las operaciones necesarias para mejorar la calidad de las imágenes y realizar determinados análisis.

Bibliografía.

- Apuntes de Fotogrametría II. Universidad Politécnica de Madrid. EUITT.
- Capani, G y Muciaccia, E. (1990). A digital monocomparator systems, IAPRS, 28(5/1), 448-455.
- Delgado, J., Apuntes de Fotogrametría Digital, Universidad Politécnica de Jaén, 1997.
- Dowman, I (1991). Desing of Digital Photogrammetric Systems. En: Ebner et al. Digital Photogrammetric Systems. Wichmann, Karsruhe, pp 28-38.
- Fritsch, D. et al. Photogrammetric Image Processig. The 44th Photogrammetric Week. Stuttgart (1993) Wichman,. ISBN 3-87907-255-8.
- Sistema de Fotogrametría digital. Integrgraph (España) S.A. Z/I Imaging (www.intergraph.com/spain, www.ziimaging.com).
- Sistema Fotogramétrico digital para Restitución, Generación de Mosaicos de Ortofotos y MDT. Leica Geosystems, s.l. (LH Systems - www.lh-systems.com).
- Cartografía, Geodesia y Fotogrametría. XIV Cursos de verano de Laredo. Julio 1998. Universidad de Cantabria.
- DPS [1991]. Digital Photogrammetric Systems. Tutorial Notes. Chair for Photogrammetry and Remote Sensig. Technical University Munich. Munich (1991).

TEMA 11

INTRODUCCIÓN A LA FOTOGRAMETRÍA POR SATÉLITE

11.1. Introducción

11.2. Programas espaciales

11.3. Categorías de la fotogrametría por satélite

11.3.1. Cartografía bidimensional

11.3.2. Cartografía tridimensional

11.4. Elementos de la fotogrametría por satélite

11.5. Modelo matemático en fotogrametría por satélite

Bibliografía

11.1 Introducción

La era espacial, nacida en el espíritu de la competición internacional de los años 50, ha madurado, resultando en numerosas contribuciones hechas para conocimiento del hombre de la tierra, la luna, los planetas y el sistema solar. Desde el principio de la era espacial, los fotogrametristas se han sorprendido con las tremendas posibilidades que se ofrecen por medio de la fotogrametría por satélite, y más específicamente, por la fotogrametría analítica. La fotogrametría por satélite, distinguiéndola de la fotogrametría convencional, consiste en la teoría y técnicas de fotogrametría donde el dispositivo de salida del sensor (normalmente en forma de imágenes) es utilizado por determinación de coordenadas de la luna o planetas que está siendo investigados.

La fotogrametría por satélite más significativa a destacar fue hecha usando imágenes de las naves espaciales la *N.A.S.A. Apolo 15, 16 y 17* durante el principio de los años 70. El seguimiento por medio de doppler produjo unas efemérides, una cámara estelar que proporcionaba la altitud, y un altímetro que media la distancia desde la aeronave hasta la superficie lunar. Los datos resultantes, combinados con los obtenidos por las cámaras captadoras de mapas, proporcionaban toda la información necesaria para la fotogrametría por satélite, sin requerir supervisión por el control terrestre. Y así los satélites que llevaran tipos similares de equipamientos son especialmente útiles para el seguimiento de lunas y planetas.

11.2. Programas espaciales

La era espacial comenzó su andadura en 1957 con el lanzamiento de *Sputnik 1* por la URSS.

El programa *Apolo* fue empezado por la NASA en 1960. Iba a ser uno de los programas más grande y complejo de los vuelos espaciales tripulados, con el aterrizaje de exploradores en la luna (y su vuelta a la tierra a salvo) como principal objetivo.

El primer satélite del programa Apolo fue lanzado el 11 de octubre de 1968. La principal fuente de obtención de fotografías era la cámara *Hasselblad 500EL*. La mayoría de las fotografías de la tierra fueron echas con sistemas de longitud focal de 80 milímetros y con la cámara montada sobre un soporte en una ventanilla de servicio del modulo principal. Las bandas superpuestas de fotografías casi verticales fueron tomadas con películas en color de alta resolución. La cámara también fue usada con un sistema de lentes de 250 milímetros y sostenida en mano para fotografiar una pocas escenas aisladas de especial interés. Las primeras cámaras de suficiente buena calidad para trabajo cartográfico no se llevaron hasta las misiones de los Apolo 15,16 y 17.

El 3 de Marzo de 1969, con el lanzamiento del *Apolo 9* se tomaron fotografías en color y blanco y negro de la tierra. Cuatro cámaras *Hasselblad* con sistema de lentes de 80 milímetros y películas de 70 milímetros se montaron en un soporte metálico en la ventanilla de servicio del modulo principal. Tres de las cámaras llevaban películas en blanco y negro con filtros apropiados para dar fotos verdes, rojas y casi infrarrojas. La cuarta cámara llevaba una película infrarroja de falso color. Dos fotografías cubrían aproximadamente el área del mapa a escala 1:250000 de USA. Estas fotografías fueron ampliadas 10 veces y rectificadas usando puntos identificables del mapa y de las fotografías. Después se imprimió el mosaico para servir como una base para la línea estándar del mapa. Se intentaron un número de diferentes de escenas de color y se produjeron versiones con y sin contornos. Hace 30 años había poca esperanza de que las fotografías tomadas desde una altura de 200 kilómetros o más pudieran revelar algo nuevo acerca de nuestra tierra. Incluso en fotografía aéreas tomadas a unos 20 kilómetros, había tal deterioro en el detalle que se creyó que fuera imposible producir fotografías satisfactorias desde alturas mayores. Como se descubrió las partículas atmosféricas no tenían un efecto tan detrimento en la resolución como se había temido.

El *Apolo 10* lanzado el 18 de Mayo 1969 llegó a unos 20 kilómetros de la superficie lunar. Esta misión fue el último escalón antes de la resolución final. La *Hasselblad 500EL* con sistema de lentes de 80 y 250 milímetros fueron usados nuevamente para la fotografía.

El *Apolo 11* aterrizó en la luna el 16 de Julio de 1969, y con las palabras: “*Este es un pequeño paso para el hombre, pero un paso gigante para la humanidad*”, Neil A. Armstrong llegó a ser el primer hombre en pisar un cuerpo celeste. De nuevo se usó la cámara *Hasselblad 500 EL*. En unas misiones previas del Apolo, las cámaras tomaron muy buenas fotografías, pero las cámaras no estaban designadas para aplicaciones geodésicas. Después de un aterrizaje histórico del Apolo 11 se confirmó que las siguientes exploraciones científicas requerirían un sistema de fotografía más especializado. Y así para las tres últimas misiones fue ensamblado un sistema fotográfico totalmente nuevo. Una sección del modulo del servicio en las misiones 15,16 y 17 contenía la cámara panorámica construida por Itek. Se incluían también una cámara estelar y un altímetro láser (*Fig. 1*).

Una serie de naves espaciales llamadas *Zond* fueron enviada por la URSS para la exploración planetaria y lunar, empezado en 1964. en Abril 1964, *Zond 1* paso por Venus a unos 100000 kilómetros. *Zond 2*, lanzado en Noviembre de 1964 fue enviado a Marte pero no transmitió datos. Durante el periodo de septiembre de 1968 a octubre de 1970, el *Zond 5,6,7 y 8* transmitieron películas fotografías a la tierra desde órbitas circunlunares. La cámara tenía una longitud focal de 400 milímetros y un formato de 130×180 milímetros. La resolución terrestre se estimaba que fuera al menos de 500 metros. Desde estas fotografías los rusos compusieron un mosaico a escalas 1:2000000 y también unos cuantos mapas a acuarelas a escalas 1:1000000 de lugares de un interés particular.

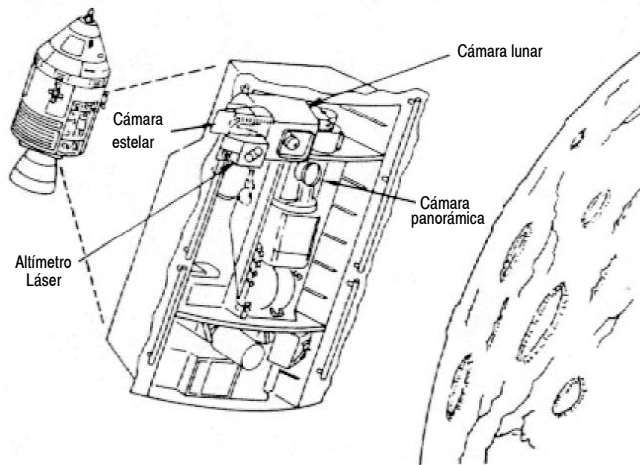


Figura 1. Montaje de instrumentación fotogramétrica en Apolo 11. (*Manual of Photogrammetry. A.S.P.*)

El *Skylab* fue la primera estación espacial puesta en órbita por los EEUU. Las altitudes eran nominalmente de 435 kilómetros y las inclinaciones de unos 50°. Los *Skylab* llevaban una variedad de instrumentos de detección y proyección de imágenes. Dentro de estos instrumentos estaban las cámaras para las regiones ópticas y cerca del infrarrojo y para espectrografía infrarroja, se transmitieron un total de 25407 fotografías.

	Tipo de imagen	Distancia principal	Zona cubierta	Rango espectral (μm)	Resolución sobre el terreno (m)
S-190A	Seis cámaras multiespectrales	15.24 cm	163×163 Km	0.4 a 0.9	38. a 79
S-190B	Cámara de reconocimiento	45.72 cm	109×109 Km	0.4 a .88	17 a 30
S-192	Escaner multiespectral		68.5 Km	0.4 a 12.5	80 m.

Tabla 1. Características de la instrumentación para captura de imágenes en el *Skylab*.

El escáner multiespectral (*S-192*) que cubría 13 bandas espectrales desde 400 a 1250 nm proporcionaban resultados cartográficos, pero el coste de la producción de estos resultados reducían significativamente su valor.

Los *Skylab* fueron empleado en órbitas repetitivas, órbitas en las que los seguimientos terrestres después de un cierto numero de revoluciones del satélite, se superponían. Y así fotografías de los mismo lugares se podían tomar una y otra vez. Pero también significaba que había amplios espacios entre los seguimientos terrestres en los que no existía documento fotográfico. Consecuentemente no se podrían cartografiar grandes zonas en planos de formato convencional. Por otra parte, las soberbias fotografías obtenidas con las cámaras a demostrado el valor de la fotografía de alta resolución en conjunción con la transmisión de imágenes del *Landsat*.

Aunque las observaciones de la superficie de la tierra fueron hechas desde las naves *espaciales Gemini, Apolo* y *Skylab*, el satélite que empezó como satélite tecnológico destinado al estudio de los recursos naturales (*ERTS-1 -Earth Resource Technollogy Satellite-*, más tarde llamado *Landsat a partir del segundo lanzamiento*) fue el caballo de batalla del programa de observación terrestre de la *NASA*. El éxito que consiguió el *Landsat* se atribuye más a su larga vida y su gran alcance en algunas

regiones más que a su habilidad de dar imágenes de alta resolución. Las imágenes conseguidas directamente desde los datos telemetizados están a una escala de 1:1000000; algunos usuarios los han ampliado hasta cuatro veces para el uso de la fotografía como mapa planimétrico. El *Landsat 1* fue lanzado el 23 de julio de 1972 y murió el 10 de enero de 1978; el *Landsat 2* fue lanzado el 22 de enero de 1975 y murió 5 de noviembre de 1979; el *Landsat 3* fue lanzado el 5 marzo de 1978. El programa ERTS y sus satélites fueron renombrado “*Landsat*” en 1975.

	Tipo de imagen	Distancia principal	Zona cubierta	Rango espectral (μm)	Resolución sobre el terreno (m)
S-190A	Seis cámaras multiespectrales	15.24 cm	163×163 Km	0.4 a 0.9	38. a 79
S-190B	Cámara de reconocimiento	45.72 cm	109×109 Km	0.4 a .88	17 a 30
S-192	Escaner multiespectral		68.5 Km	0.4 a 12.5	80 m.

Tabla 1. Características de la instrumentación para captura de imágenes en el *Skylab*.

El programa *Landsat* era experimental y fue pensado para establecer el valor de las fotografías de basta resolución (*un elemento es un cuadrado de 73 metros*) para el estudio de recursos minerales y de otros tipos. La *NASA* comenzó una serie de investigaciones de los siguientes temas (entre otros): producción de la agricultura, forestación, cartografiado.

Los instrumentos del *Landsat* que son de interés para fotogrametría es el “*Return Beam Vidicon*” (*RBV*), y el sensor (*MSS -Multi-spectral Scanner-*). En la figura siguiente se muestran estos instrumentos.

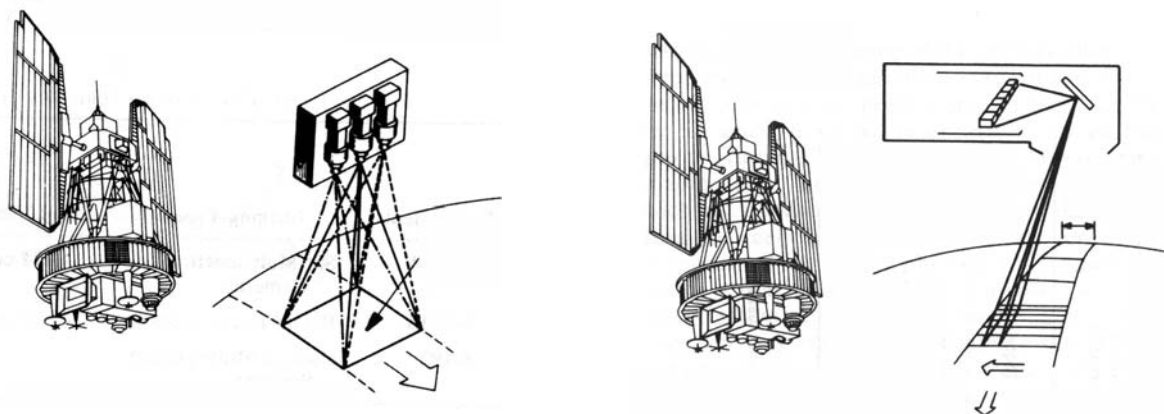


Figura 2. Instrumentación para captura de imágenes instalados en el *Landsat*. Figura de la izquierda *RBV*. A la derecha *MSS* (*Manual of Photogrammetry. A.S.P.*).

El sensor *MSS* fue el primero con el que fueron equipados los satélites de esta serie. La imagen proporcionada por el consta de 2340 líneas × 3240 columnas y sus resolución espacial corresponde a una celdilla de 80 m de lado. Detecta la escena en cuatro bandas con una resolución radiométrica de 256 niveles. La anchura de visión es de 185 km.

¹ Cámaras de vidición son dispositivos formadores de imágenes parecidas a las cámaras de TV. Su funcionamiento está basado en el mismo principio que los CCD.

Los *Landsat 1* y *2* portaban sistemas vidicon¹ (*RBV*) de 80 m. De resolución espacial entre bandas.

En el *Landsat 3* se sustituyó el sistema por otro de 40 m de resolución espacial y una sola banda como apoyo de las imágenes adquiridas con *MSS*.

El *Landsat 3* se diferencia del uno y del dos en los siguientes aspectos:

Los tres *RBV* de los anteriores *Landsat* fueron reemplazado por un *RBV* de banda simple (0.505 a 0.750 micrómetros) de doble longitud focal. Juntos podían cubrir dos veces más la amplitud en el suelo que los *MSS* y dos veces más la resolución. Los *MSS* es el mismo excepto que se filma una banda térmica de 10400 a 12600 nanómetros con una resolución tres veces más amplia que en las bandas visibles y cerca del infrarrojo.

Los *Landsat 4* (1984) con 30 metros de resolución y *Landsat 5* (1985) toma imágenes de 7 bandas con 30 metros de tamaño de píxel, excepto el canal térmico que tiene 120 metros. Estos fueron modificados sustancialmente de los anteriores, variándose la altura orbital y por tanto el periodo de cobertura.

El proceso de obtención de cartografía de imágenes procedentes del *Landsat* es básicamente más planimétrico que espacial.

De cualquier forma, el *Landsat* tiene dos limitaciones muy definidas:

- Su baja resolución imposibilita la filmación de las pequeñas características.
- No puede ser aplicado para la obtención de cartografía espacial (*X, Y, Z*).

En 1978 *USA* pone en órbita el *Seasat*, satélite que embarcaba un sensor de *SAR* (*Radar de Apertura Sintética –Synthetic Aperture Radar–*) de 25 metros de resolución. Revolucionario para su época, el satélite solo estuvo en órbita unos 100 días. Las causas de tan corta vida nunca se supieron muy bien, pero corrieron muchos rumores de que el satélite fue derribado intencionadamente debido a la gran cantidad de información que comenzó a revelar a ciertas personas e instituciones sin control.

La familia de satélites *Spot* (*Système Probatoire d'Observation de la Terra*) ha sido desarrollado por un consorcio francés, belga y sueco. La principal característica que los distingue de la serie *Landsat* es sus capacidad de mira lateral, que aumenta la resolución temporal, pudiendo observarse cualquier punto de la superficie terrestre con una periodicidad de entre uno y varios días. Es posible, además, con este procedimiento generar pares estereoscópicos para la zona observada. *Spot* está concebido para el estudio de los usos del suelo, evolución del medio ambiente,...., y trabajos cartográficos a escala media (1:100000) y actualizaciones topográficas a escala 1:50000.

El sensor montado en el satélite *Spot* lanzado en 1986, es un escáner provisto de elementos lineales CCD, denominados *HRV* (*Haute Resolution Visible*) dispuestos en una línea perpendicular a la dirección de la órbita. El detector está formado por una línea de 6000 elementos CCD con un tamaño de cada elemento de 13 x 13 μm . Hay cuatro detectores los cuales reciben respectivamente las bandas espectrales amarilla, roja, infrarroja y pancromática. El sensor está equipado con un espejo reflector capaz de girar dentro de un rango de $\pm 27^\circ$ para inclinaciones laterales. Comparado con el sensor vertical, el punto principal del sensor *SPOT* se desplaza alrededor de 400 Km sobre la tierra en dirección lateral (*Fig. 3*).

La longitud de la imagen en mira es de vertical es de 60 Km. Si los instrumentos *HRV* orientan sus ejes ópticos formando ángulos respectivos de $+1.8^\circ$ y -1.8° con la vertical, puede observarse una franja de terreno de 117 Km de anchura, con un recubrimiento de 3 Km entre las imágenes.

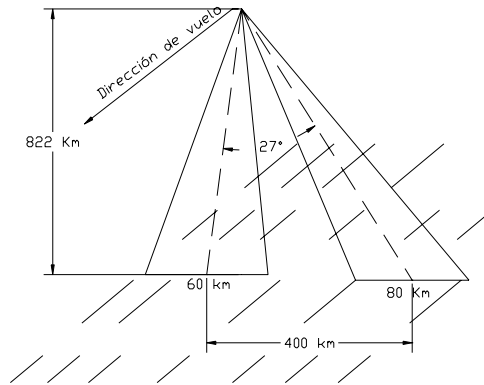


Figura 3. Rango de giro del sensor en *Spot*. (Zhizhuo, W.)

La capacidad de mira lateral del sensor *HRV* permite al satélite *Spot* adquirir pares de imágenes estereoscópicas variando la orientación de sus espejos en órbitas sucesivas, de modo que se observe la mismas escena desde posiciones diferentes.

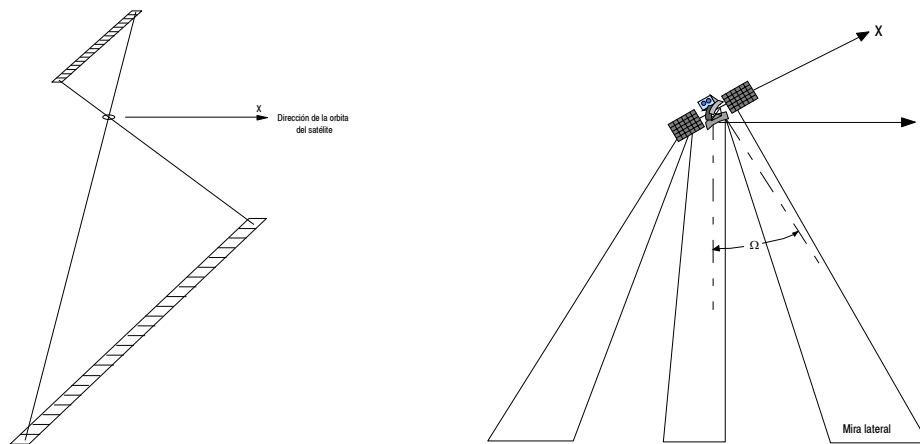


Figura 4. Sistema de mira lateral del *Spot*.

El número píxeles por línea es de 6000 en modo pancromático (3000 en modo multibanda). El origen de coordenadas de la imagen se toma en el píxel 3000 (Fig. 5) de la línea de barrido 3000.

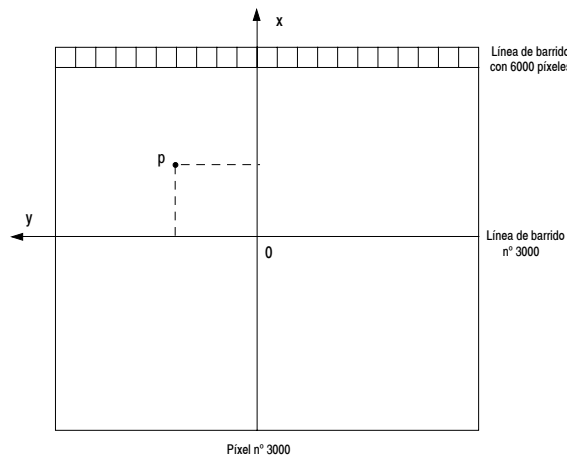


Figura 5. Sistema de coordenadas de una imagen *Spot*.

El *Spot* opera en bandas multispectrales y en la banda pancromática y su (m/píxel) es 20 m y 10 m respectivamente. Los valores espectrales (en μm) son: SPOT 1: 0.50 – 0.59; SPOT 2: 0.61 – 0.68; SPOT 3: 0.79 – 0.89. Tiene dos modos de funcionamiento:

- Modo pancromático (*HRVP*): recoge una sola banda en un intervalo amplio de longitudes de onda. La resolución espacial en este modo es de 10 metros.
- Modo multibanda (*HRVX*): en este modo la resolución es de 20 metros.

Los niveles de los productos SPOT siguen los niveles siguientes:

- Nivel 1A: datos en bruto, para los cuales solamente se hacen correcciones radiométricas.
- Nivel 1B: se hacen correcciones debido a la rotación de la tierra, curvatura terrestre, y por la rotación de los espejos.
- Nivel 2: se hace la corrección geométrica de 9 puntos de control sobre el mapa.
- Nivel 2S: remuestreo de las bases de 1B y 2.
- Nivel 3: producción de ortofotografías basados en los puntos de control y en los modelos digitales del terreno *MDT (DEM)*.
- Nivel 4: formación de los *MDT* y recopilación de mapas topográficos a escala 1:100.000

Entre 1980 y 1998 Rusia lanza varios satélites SPIN equipados con cámaras fotográficas que dan resoluciones equivalentes a 2 y 10 metros. Las imágenes son clasificadas.

En 1991 la *ESA (Agencia Espacial Europea)* lanza el *ERS-1*, satélite con sensor *SAR* que ha terminado su vida hacia el 2000 al dejar de funcionar el único giróscopo que le quedaba útil. Su hermano, el *ERS-2* fue lanzado en 1994 y aún continúa operativo.

Durante el año 1994 se decide el actual salto en lo que a resolución se refiere. Una directiva del gobierno de *USA* da el visto bueno a compañías privadas para construir sistemas satelitales comerciales capaces de adquirir imágenes de alta resolución. No obstante el gobierno de Estados Unidos se reserva el derecho de tomar el control de adquisición y distribución de datos "en periodos en que la seguridad nacional o las obligaciones internacionales y/o política exterior pudiera ser comprometida".

En 1995 Canadá pone en órbita *Radarsat 1*, el primer satélite con sensor *SAR* con una especial orientación comercial, permitiendo al usuario elegir ángulo de adquisición, cobertura y resolución. Los futuros sistemas *SAR* extenderán su flexibilidad con la posibilidad de elegir varias polarizaciones.

Un año después, en 1996, India lanza el *IRS IC* satélite con un sensor óptico de resolución de 5'8 metros en una banda pancromática, pero de muy pobre resolución radiométrica, con 6 bits por píxel, tan solo 64 niveles de gris. En el mismo año Francia lanza el *Spot 3* con idénticas capacidades de observación que el *Spot 1*.

En Diciembre de 1997 el satélite *Early Bird* de *Earth Watch Inc.* con un sensor de resolución de 3 metros lideró brevemente el sector de la teledetección civil de alta resolución. Pero sólo brevemente, porque la plataforma perdió comunicación con el control en tierra tan solo 4 días después de entrar en órbita.

En 1998 Rusia comienza a desclasificar los productos derivados de adquisiciones fotográficas de archivos procedentes de los *SPIN* e inicia su comercialización. Estos sitúan el tamaño de píxel en imágenes de uso civil entorno a los 2 metros.

Abril del 99 no es un buen mes en lo que a lanzamientos se refiere. El 27 Abril de 1999 el satélite *Ikonos 1* falla en la maniobra de separación de una parte de la lanzadera *Athena II* destinada a proteger la carga de la fricción aerodinámica en las primeras etapas de vuelo. El peso extra impide al satélite alcanzar velocidad de escape suficiente para entrar en órbita y se precipita en el océano.

Sin embargo, en Abril de 1999 el séptimo satélite de la saga *Landsat*, construido por *Lockheed Martin Missiles & Space*, es puesto en órbita por una lanzadera *Delta H*. El único instrumento a bordo, el *Enhanced Thematic Mapper Plus (ETMP+)* toma datos a 15 metros en modo pancromático y a 25 metros en 7 bandas espectrales (las mismas que su predecesor *Landsat 5*). Esta vez la banda térmica baja a 60 metros de tamaño de píxel.

El 24 Septiembre 1999 *Ikonos 2* es puesto en órbita. Esta vez todo marcha conforme a lo previsto y es el primer satélite comercial con precisión submétrica: 82 centímetros de tamaño nominal de píxel. Las primeras imágenes, capaces de llegar hasta 1:2.500, reciben elogios por su gran calidad hasta de los más escépticos, tanto geométrica como radiométricamente. Responsable en gran medida de esta calidad es *Kodak*, quien ha desarrollado el magnífico sensor.

En Diciembre de 1999 el satélite *Ikonos 2* adquiere imágenes de un complejo de armas químicas y supuestamente nucleares en Korea del Norte. Las imágenes son cedidas a la Federación de Científicos Americanos (*FAS - Federation of American Scientists*) y publicadas en páginas web de libre acceso.

La respuesta rusa no se hace esperar, el Ministerio de defensa Ruso anunció sus planes de lanzamiento de un satélite de observación de la tierra de alta resolución junto a *Rosvooruzhenie*, la compañía encargada de la exportación de armas soviéticas. El satélite ha entrado en los planes de lanzamiento soviéticos elaborados para el presente año 2000. El satélite se encuentra en un 80% de construcción y sería puesto en órbita por una lanzadera *Proton* desde el cosmódromo de *Baikonur*, en *Kazakhstan*. El sensor óptico habría sido desarrollado por LOMO (Leningrad Optical Mechanical Association) en St. Petesburg. Rosvooruzhenie espera obtener la autorización de Moscú para la distribución comercial de imágenes de; citado sistema, supuestamente creado para uso militar.

En Febrero del 2000, la NASA realiza un *DEM* de aproximadamente el 80% del globo con el *Endeavour*. Este sistema porta dos antenas SAR, separadas por un brazo de 60 metros, enfocadas a aplicaciones interfelométricas, básicamente a la extracción de un *DEM* de media resolución de casi todo el globo, 90 metros de tamaño de píxel y una precisión altimétrica similar a la horizontal. Resoluciones más altas, llegando hasta los 30 metros, serán archivadas para uso militar del departamento de defensa de los Estados Unidos.

A finales del año 2000, *West Indian Space Ltd.* Se produjo el lanzamiento de los satélites *Eros (Earth Remote Observation System)*. Se pondrá en órbita el primero de 8 satélites de observación de alta resolución que capturarán imágenes pancromáticas de 1.5 m de tamaño de píxel.

Aunque aún no hay fechas definidas, se puede calcular que hacia el 2003 o 2004 podrían llegar los primeros sistemas comerciales con resoluciones aproximadas de 50 centímetros. Siempre supeditadas al visto bueno y declasificación de las dos grandes superpotencias, Rusia y los EEUU, y más en concreto EEUU.

Está claro que hay un gran mercado que se hace más grande a medida que aumenta la resolución y las capacidades de los sensores. En palabras de Christian Bernard, director de estrategia de negocio en *Spot Image*: se estima que para el 2006 el 65 % del mercado global de observación de la tierra serán imágenes de igual o mayor resolución que 1 metro".

Como hemos mencionado anteriormente, en Septiembre del año 1999 se puso en órbita el satélite *Ikonos*. Este satélite, el primero con precisión submétrica (82 cm.); cuenta además con capacidad multiespectral: con tamaño de píxel de 4 metros es capaz de adquirir 4 bandas: rojo, verde, azul e infrarrojo próximo. Siendo la adquisición como es, simultánea en los modos pancromático y multiespectral, la fusión de ambos tipos de datos es prácticamente perfecta, resultando como productos de observación de la tierra imágenes de tamaño de píxel de 1 metro y color real (rojo, verde, azul), o bien falso color infrarrojo (4,3,2).

En cuanto a precisión geométrica los productos son también de gran calidad. Solo con los parámetros de apuntamiento del sensor, los productos más básicos, llegan al usuario con errores planimétricos de georreferenciación que oscilan entre los 10 y los 20 metros en media, aunque *Space Imaging* se cubre las espaldas especificándolos como 50 metros de error circular para el 90% de los píxeles. Productos más elaborados ofrecen, según especificaciones, ± 25 metros, ± 12 , ± 10 , ± 4 y hasta ± 2 metros de error. Todas estas precisiones van aumentando según las imágenes sean corregidas con puntos de control en el terreno, Modelo Digital del Terreno,.....etc.

En lo que a resolución radiométrica se refiere, Ikonos sorprende de nuevo, adquiriendo imágenes codificadas a 11 bits por píxel, es decir, nos permite trabajar con paletas de 2048 tonos reales de gris. A priori hay quien puede pensar que no es significativo ya que los sistemas de visualización sólo permiten mostrar 256 tonos, e incluso el ojo humano no es capaz de distinguir más. Sin embargo, esa información está ahí, y podemos jugar con ella, mostrarla o esconderla a conveniencia. En resumen, tenemos ocho veces más información que en imágenes tradicionales de 8 bits por píxel. Quizás para interpretación visual sólo sea una buena ayuda, pero en estudios temáticos se convierte en una ventaja fundamental.

11.3. Categorías de la fotogrametría por satélite

Las imágenes procedentes de los satélites se pueden clasificar en dos categorías básicas, de acuerdo con la aplicación requerida para cada misión. Estas categorías son:

- Teledetección.
- Fotogrametría por satélite.

La teledetección caracterizan por el hecho de dar la mayor importancia a la naturaleza del objeto del cual se toma la imagen, y la geometría es de menor importancia. La fotogrametría por satélite se caracteriza por lo opuesto: la geometría es el mayor y único interés y la naturaleza del objeto es de un interés mínimo. La fotogrametría por satélite puede ser dividida en dos subcategorías:

- Planimétrica (*bidimensional*) en la cual sólo la geometría horizontal del objeto es estudiada.
- Topográfica (*tridimensional*) en la cual se estudian las tres dimensiones.

11.3.1 Cartografía bidimensional

La fotogrametría convencional considera el trazado de mapas en dos o tres dimensiones basados en los análisis de una o más imágenes perspectivas de la misma escena filmada en dos dimensiones en fotografías. La ventaja de las imágenes procedentes de los sistemas espaciales es la oportunidad de hacer mapas de la superficie terrestre directamente ya sea en dos dimensiones (planimétrica) o tridimensional. Esta simplificación del problema de cartografiado es debido a la gran distancia desde la cual la tierra puede ser vista desde el espacio. Si un sensor de un campo de vista limitado mira verticalmente a la tierra desde el espacio, produce una proyección casi ortográfica y el resultado de la imagen puede ser adquirida. Así por ejemplo el *Landsat* adquiere la superficie de la tierra de una forma planimétrica aproximadamente correcto. Haciendo esto se elimina la capacidad para medir la tercera dimensión de altura y por lo tanto no tiene un valor directo para hacer mapas tridimensionales (topográficos.)

Un satélite que puede proporcionar una proyección casi ortográfica es de una importancia considerable porque reduce enormemente los problemas fotogramétricos para la obtención de planos planimétricos. El sistema de proyección de imágenes en un satélite como el *Landsat* almacena la energía producida desde una escena de una manera uniforme aunque la respuesta de una emulsión fotográfica aérea varíe la escena propia.

Si nos referimos al *Ikonos* evidentemente la resolución comparado con la del *Landsat* es mucho menor, siendo las imágenes tomadas por *Ikonos* ideales para levantamientos planimétricos a escala 1:5000.

11.3.2. Cartografía tridimensional

Los sistemas de imágenes de fotogrametría por satélite designados para geodesia fotogramétrica pueden ser caracterizado como sistema de imágenes estereoscópicas capaces de producir datos desde los cuales un fotogrametrista puede determinar coordenadas tridimensionales y relacionarlas con información topográfica.

Los requerimientos del usuario deben jugar un papel importante en el diseño de un sistema de mapa de la tierra, de la luna o planetario. Antes de intentar especificar un sistema que recogería datos que permitirían hacer mapas topográficos de la tierra o de cuerpos extraterrestre útiles desde el espacio, es necesario examinar algunos de los factores esenciales.

Un satélite fotogramétrico de sistemas de imágenes diseñado para hacer mapas debe ser capaz de proporcionarnos todos los datos necesarios para la correcta confección de un levantamiento topográfico (planimétrica y altimetría)

El contenido del mapa es determinado en parte por la resolución fotográfica y la escala, o más directamente desde una distancia definida en el suelo (resolución.) Es difícil establecer una relación lineal entre la escala del mapa y la resolución requerida porque algunas características como carreteras y vías de tren, deben ser mostrada en un mapa sin importarnos su escala. Por lo tanto estas características son casi independientes de la escala del mapa; y así la resolución requerida no es linealmente relativa a la escala.

El segundo tipo de información en el mapa es la localización horizontal en un sistema de coordenadas absolutas. Para hacer mapas de la tierra esto normalmente se consigue referenciando mediante los puntos de control en el suelo.

El tercer tipo de información de un mapa topográfico es el relieve del terreno representado por curvas de nivel, puntos de elevación y perfiles,etc.

Un sistema de imágenes diseñado para fotogrametría debe ser considerado con dos categorías básicas.

- La primera corresponden a las características métricas del sistema y de la nave espacial.
- La segunda categoría es la configuración geométrica del sensor. En este caso hay que tener en cuenta el alcance estereoscópico de la superficie, considerando el lado anterior y posterior de la imagen. También, el modo de operación ya sea vertical o convergente y su efecto total de precisión en la extracción de las medidas relativas de alturas desde los pares estereoscopios es importantes.

En La figura 6 se indican la posibilidades de configuración vertical y convergente. El radio base altura (B/H) y el ángulo convergente (Φ) contribuyen vitalmente en la reducción del error altimétrico y en la determinación de las alturas relativas desde pares estereoscopios. La figura 7 nos muestra que dicho error será mucho más grande cuando se usan fotografías n y $n+1$ que cuando se usan fotografías $n+1$ y $n+6$. Reduciéndose enormemente σ_h como una función de un radio B/H más grande

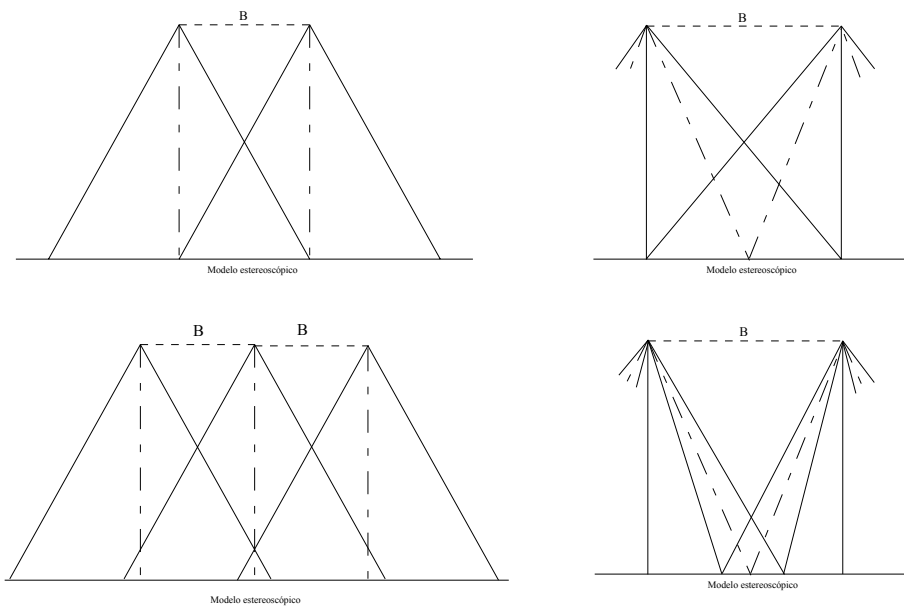


Figura 6. Posibilidades de configuración de toma vertical y convergente.

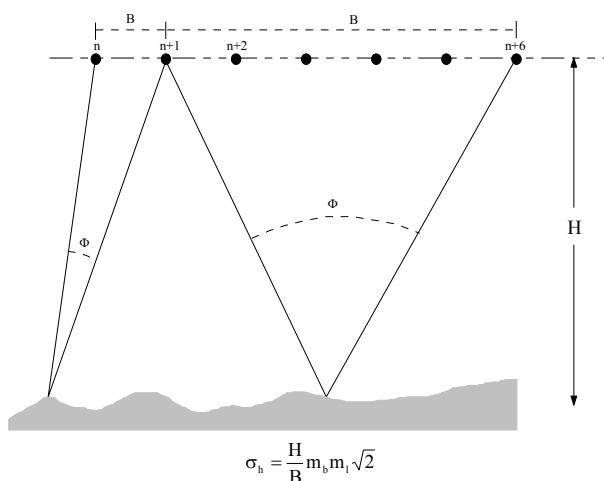


Figura 7. Precisión relativa referidas a los ángulo de convergencia o paralácticos.

Una relación media para B/H de entre 0.6 y 1.2 es el valor típico dependiendo de los requerimientos. La figura 8 muestra un sistema diseñado para fotogrametría por satélite.

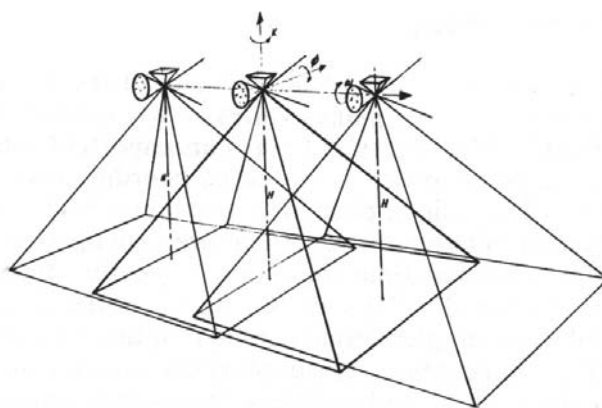


Figura 9. Sistema fotogramétrico satelital. (Manual of Photogrammetry. A.S.P.).

11.4. Elementos de la fotogrametría por satélite

En la fotogrametría por satélite, los centros de perspectivas de los sistemas de imágenes se asumen que estén en la órbita del satélite. Entonces, el satélite debe ser observado para determinar la posición del sistema de imagen en la órbita como una función de tiempo. Estas observaciones se realizan desde las estaciones de seguimiento distribuidas por todo el globo, donde se determinan a la órbita de los satélites.

Estas estaciones de seguimiento determinan la dirección, la distancia y/o la velocidad radial del objeto de seguimiento. Estos datos son convertidos, por medio de un proceso llamado determinación de órbita, contienen 6 parámetros (Fig. 10), denominados elementos orbitales, que especifican las órbitas. Los más comunes son los Eulerianos.

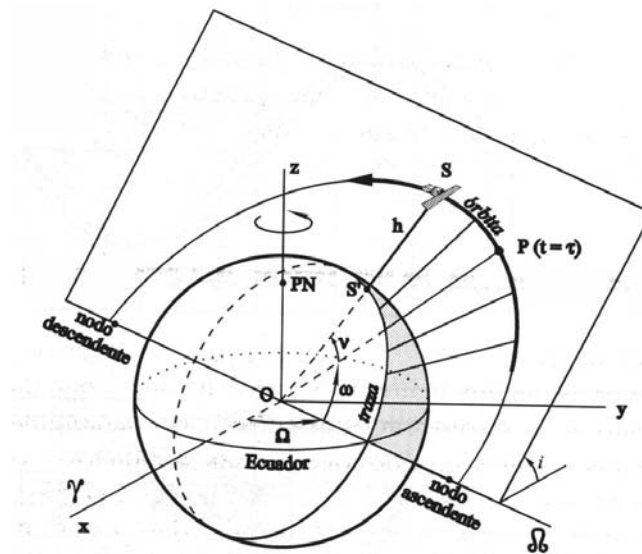


Figura 10. Parámetros orbitales de un satélite. (Elementos de Teledetección. Pinilla, C.)

La forma y posición de la órbita se determina por medio de los siguientes seis parámetros llamados elementos Eulerianos.

1. Ascensión correcta Ω del nodo ascendente. El nodo ascendente es el punto de intersección entre la órbita del satélite (cuando órbita de sur a norte) y el plano del ecuador terrestre. La ascensión correcta del nodo ascendente es una distancia constante entre el nodo ascendente del satélite y el equinoccio de verano
2. Distancia angular ϖ del perigeo. Se refiere a la distancia angular medida sobre la órbita del satélite entre el perigeo y el nodo ascendente.
3. Inclinación orbital i . Este es el ángulo entre el plano orbital del satélite y el plano ecuatorial. Se mide desde la órbita al lado del nodo ascendente hasta el plano ecuatorial.
4. Semieje mayor de la órbita.
5. Excentricidad de la órbita.
6. Tiempo T que pasó el satélite por el perigeo.

Cuando $i \approx 90^\circ$, el plano de la órbita está cerca del eje de rotación de la tierra. En este momento la órbita cercana polar. El tamaño del área de terreno que abarca la órbita depende de la inclinación i . Cuando $0^\circ < i < 90^\circ$ la dirección de la órbita del satélite es idéntica a la dirección de rotación de la tierra. En este caso el satélite se llama satélite de dirección positiva, puesto que para un satélite de dirección positiva la latitud máxima de la cobertura orbital es igual a la inclinación, la órbita cercana polar es ventajosa en el sentido de aumento de cobertura de la tierra por medio de satélites y se considera una condición importante para la generación de mapas por satélite.

En fotogrametría las coordenadas utilizadas son coordenadas cartesianas rectangulares. Así las coordenadas $(X^c, Y^c, Z^c)_i$ de los centros de perspectivas de la cámara a lo largo de un arco orbital no son cantidades independientes, pero sí son funciones de los 6 elementos orbitales y el tiempo. Una lista de coordenadas y tiempo correspondientes es llamada una efeméride.

Las otras cantidades importantes en la fotogrametría por satélite son los tres ángulos de orientación (altitud) de la cámara en el tiempo t_i de exposición. La altitud generalmente se obtiene fotografiando un campo estelar o por el seguimiento de una estrella en particular o un grupo de estrella. La cámara terrestre se calibra simultáneamente con la cámara estelar. Como resultado, la altitud de la cámara estelar puede ser determinada con respecto a las coordenadas estelares y transferidas a la cámara terrestre.

Al reducir los datos de la cámara estelar, primero debemos identificar las estrellas en las fotografías. Después ascensión recta de las estrellas y la declinación se calculan por el tiempo de exposición. Estos son convertidos a cosenos directores. Las coordenadas x, y de las imágenes de las estrellas identificadas son medidas en un comparador de precisión, y la matriz de los cosenos directores de los rayos de imagen son computada en el sistema de coordenadas de la cámara estelar.

Y así asumiendo que la matriz de orientación expresa la relación entre la cámara estelar y la cámara terrestre se conoce por calibración previa, la relación entre los dos sistema de coordenadas es entonces una simple matriz de rotación ortogonal de 3×3 .

Resumiendo, los datos de seguimiento son convertidos a una efeméride de coordenadas (X^c, Y^c, Z^c) como una función en el tiempo t_i . La cámara estelar proporciona tres ángulos de orientación basados en la posiciones de las estrellas. Estos son los seis elementos requeridos para resolver un programa fotogramétrico. Puede ser usados como primeras aproximaciones en los ajustes de bandas y bloques.

Para hacer fotogrametría por satélite debe ser conocida la localización de la cámara en cada instante en la que se formó la imagen. A causa de la gran altura de la cámara, normalmente no es posible localizar la cámara con exactitud por resección a puntos de localización conocida en el suelo. La localización de la cámara debe además estar basadas en métodos independientes de fotografías. Dos de estos métodos son:

- Medición a cada instante de exposición y desde punto de localización conocida, suficiente distancias o direcciones hacia el satélite cuya localización sea determinada geoméricamente.
- Medición a intervalos precisos de tiempo, distancias y /o direcciones y / o velocidades radiales del satélite desde un punto o puntos de localización conocida y usando las leyes de Newton de movimiento para terminar la órbita del satélite a partir de estas mediciones. La localización de la cámara puede determinarse en cualquier instante desde la ecuación de la órbita.

11.5. Modelo matemático en fotogrametría por satélite

Las ecuaciones que relacionan la posición de un punto en el terreno con su homologo en una imagen obtenida con una cámara convencional vienen dadas por las correspondientes ecuaciones de colinealidad:

$$x - x_0 = -c \frac{m_{11}(X - X_0) + m_{12}(Y - Y_0) + m_{13}(Z - Z_0)}{m_{31}(X - X_0) + m_{32}(Y - Y_0) + m_{33}(Z - Z_0)}$$

$$y - y_0 = -c \frac{m_{21}(X - X_0) + m_{22}(Y - Y_0) + m_{23}(Z - Z_0)}{m_{31}(X - X_0) + m_{32}(Y - Y_0) + m_{33}(Z - Z_0)}$$

Los sensores lineales capturan las imágenes según una línea de proyección, así como las cámaras tienen centro de proyección. Un sensor lineal está compuesto por una fila de elementos CCD perpendiculares a la dirección de la órbita del satélite. Cada línea de barrido del sensor tiene sus propios parámetros de orientación externa, así como su centro de proyección en el centro de la línea (Fig. 11).

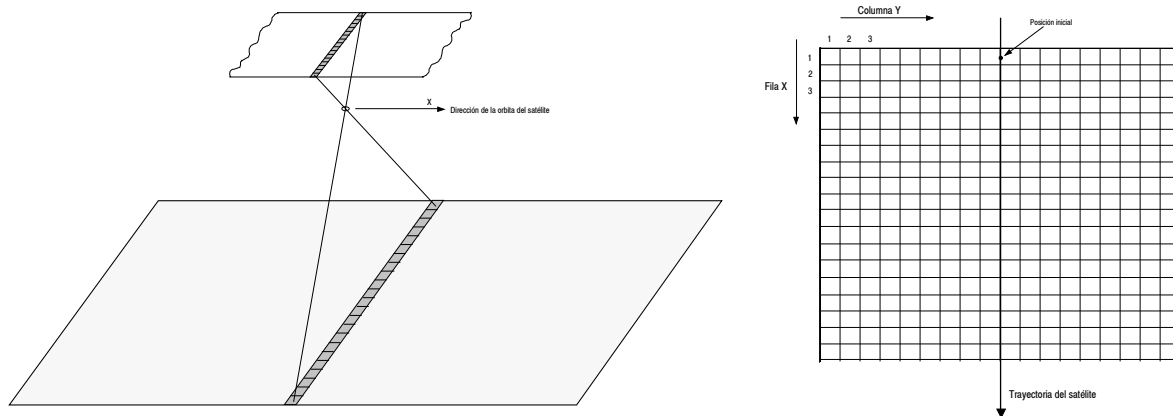


Figura 11. Imagen obtenida con un sensor lineal.

En la figura 11 puede observarse que el punto de partida es la proyección del centro de la fila 1 en el terreno. En este punto el sensor del satélite tiene un grupo particular de parámetros de orientación externa $\omega_0, \varphi_0, \kappa_0, X_{L0}, Y_{L0}$ y Z_{L0} . Estos parámetros pueden ser considerados para variar la función de la coordenada x . Varias relaciones funcionales se han aplicado para tratar estas variaciones sistemáticas, y se han obtenido los siguientes resultados satisfactoriamente:

$$\omega_x = \omega_0 + a_1 x$$

$$\varphi_x = \varphi_0 + a_2 x$$

$$\kappa_x = \kappa_0 + a_3 x$$

$$X_{Lx} = X_{L0} + a_4 x$$

$$Y_{Lx} = Y_{L0} + a_5 x$$

$$Z_{Lx} = Z_{L0} + a_6 x + a_7 x^2$$

En estas ecuaciones, x es el número de fila de las distintas posiciones de la imagen; $\omega_x, \varphi_x, \kappa_x, X_{L0}, Y_{L0}$ y Z_{L0} son los parámetros de orientación externa del sensor para cada valor de x ; $\omega_0, \varphi_0, \kappa_0, X_{L0}, Y_{L0}$ y Z_{L0} son los parámetros de orientación externa del sensor en la posición inicial; y a_1, a_2, \dots, a_7 son los coeficientes que describen las variaciones sistemáticas de los parámetros de orientación externa cuando las imágenes son escaneadas. Hay que tener en cuenta que la variación en Z_L es de segundo orden aunque las otras variaciones son lineales (de primer orden). Esto es debido a la trayectoria orbital del satélite y está basado en el supuesto de que usemos un sistema de coordenadas verticales locales. Dependiendo de la precisión que necesitemos y de la que tengamos en las mediciones, el

coeficiente del término de segundo orden a_7 normalmente se considera como 0.

Dada la variación de los parámetros de la orientación externa descrita anteriormente, las ecuaciones de colinealidad para un punto A son:

$$0 = -c \frac{m_{11x}(X - X_{Lx}) + m_{12x}(Y - Y_{Lx}) + m_{13x}(Z - Z_{Lx})}{m_{31x}(X - X_{Lx}) + m_{32x}(Y - Y_{Lx}) + m_{33x}(Z - Z_{Lx})}$$

$$y - y_0 = -c \frac{m_{21x}(X - X_{Lx}) + m_{22x}(Y - Y_{Lx}) + m_{23x}(Z - Z_{Lx})}{m_{31x}(X - X_{Lx}) + m_{32x}(Y - Y_{Lx}) + m_{33x}(Z - Z_{Lx})}$$

En estas ecuaciones y es la coordenada y (número de columna) del punto A ; y_0 es la coordenada y del punto principal de la fila que contiene la imagen; c es la distancia focal del sensor; $m_{11x}, m_{12x}, \dots, m_{33x}$ son los términos de la matriz de rotación para la posición del sensor cuando la fila x se escanea; X_A, Y_A y Z_A son las coordenadas del sistema del espacio objeto del punto A . Hay que tener en cuenta que los términos de la orientación externa y por tanto los términos de la matriz de rotación depende de la forma de las ecuaciones anteriores. Hay que observar también que las unidades de las coordenadas de la imagen y la longitud focal deben ser las mismas.

El uso de esto en aerotriangulación es más complicado que el uso con cámaras, siendo las dificultades grandes debido a la correlación entre los parámetros de orientación externa, así como de otros factores.

Bibliografía

- American Society of Photogrammetry. Manual of Photogrammetry, ASPRS, Cuarta Edición (1980). ISBN 0-937294-01-2.
- Gutierrez, J., Moreno, V., Pasado, presente y futuro de la teledetección de alta resolución. El satélite Ikonos, Mapping, nº 64, Septiembre, 2000.
- Krauss, K., Photogrammetry, Dümmler/Bonn (1993), ISBN 3-427-78684-6.
- Ormeño, S., Fundamentos Físicos de la Teledetección, Universidad Politécnica de Madrid, EUITT.
- Pinilla, C., Elementos de Teledetección, Rama, Madrid (1995), ISBN 84-7897-202-1.
- Wolf, P.R. y Dewitt, B.A., Elements of Photogrammetry with Applications in GIS, McGraw-Hill, EEUU, 3ª edición (2000), ISBN 0-07-292454-3.
- Zhizhuo, W., Principles of Photogrammetry, Beijing, China (1990), ISBN 7-81030-00-8.