

Téma 8

Pohyblivé zatížení

- **Příčinkové čáry na prostém nosníku, konzole a spojitém nosníku s vloženými klouby**
- **Pohyblivé vozidlo na prostém nosníku**
- **Nepřímé pohyblivé zatížení**

Pohyblivé zatížení

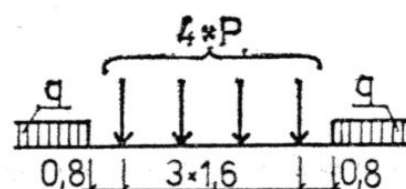
Vzniká po jížděním vozidel (vlaky, automobily, jeřáby) po stavební konstrukci (mosty, jeřábové dráhy, nájezdové rampy, podlahy garáží).

Tlak kola – bodové síly.

Nápravový tlak.

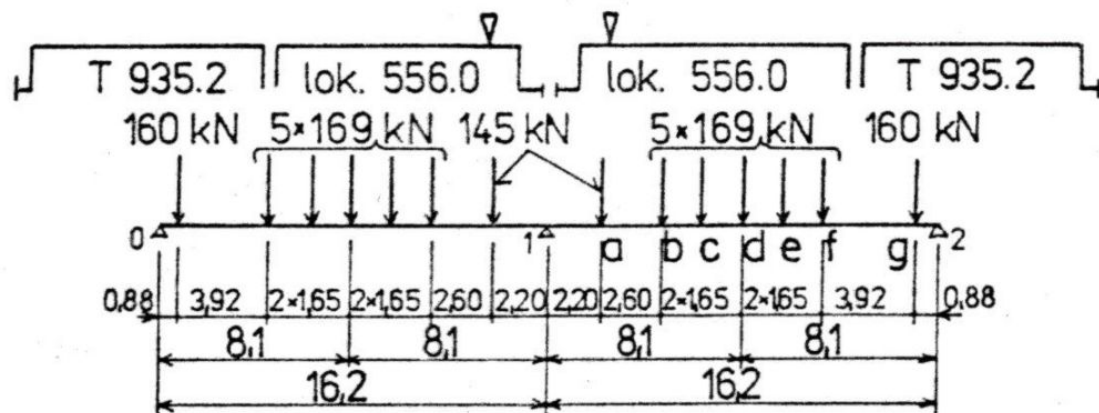
Ideální vlaky (vozidla).

Dynamické účinky zatížení (rázy, otřesy, rozkmitání konstrukce), zjednodušení výpočtu s využitím tzv. **dynamického součinitele**, po zvětšení pohyblivého zatížení vynásobením lze zkoumat pouze jeho **statické účinky**.



	P	q
ideální zatěžovací vlak	kN	kNm ⁻¹
UIC-71	250	80
ČSN-Z	280	90
ČSN-T	350	112

Obr. 2.1 Ideální zatěžovací vlaky UIC a ČSN [5]



Průběh zatěžovací zkoušky



Průběh zatěžovací zkoušky



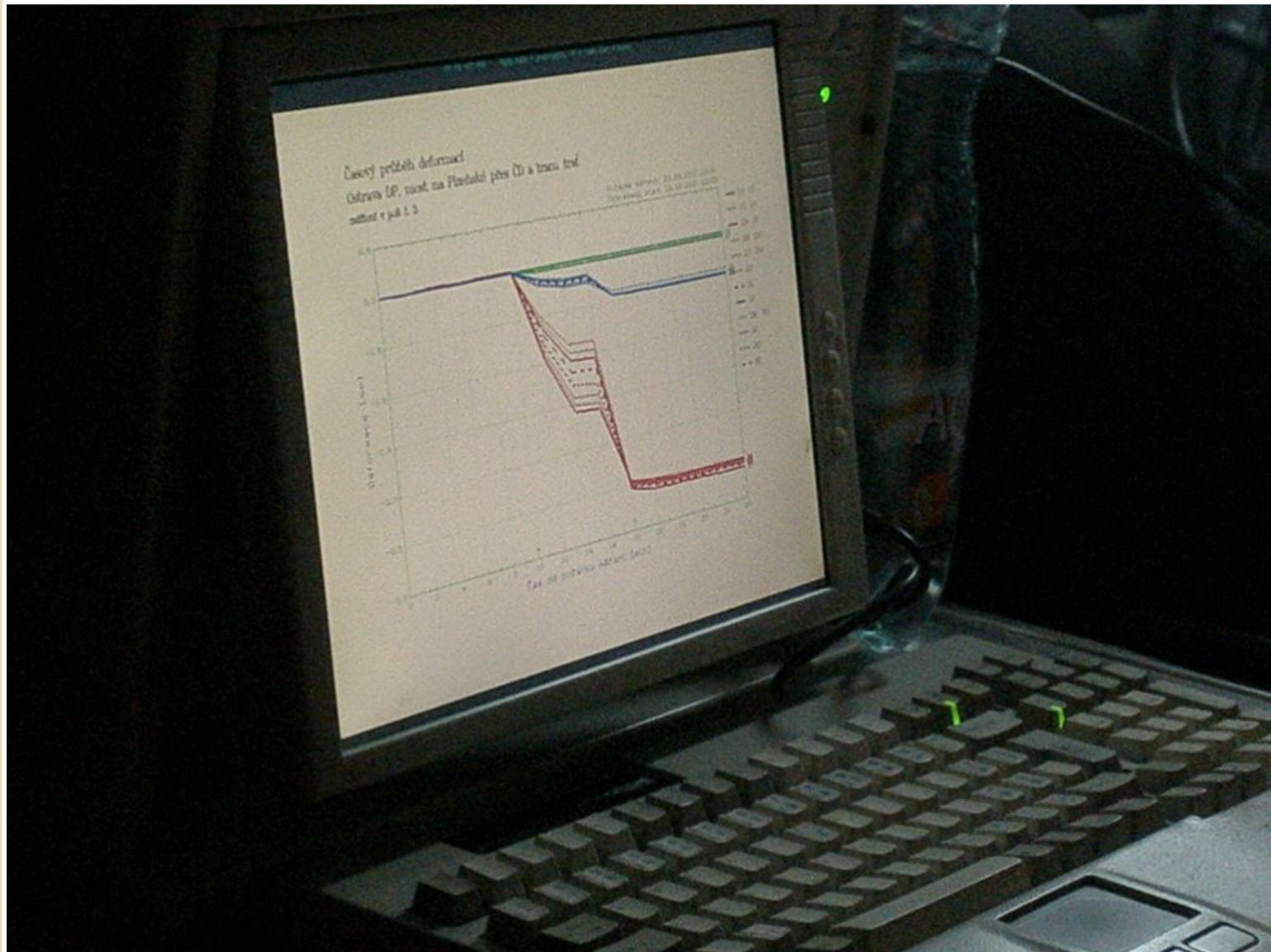
Průběh zatěžovací zkoušky



Průběh zatěžovací zkoušky

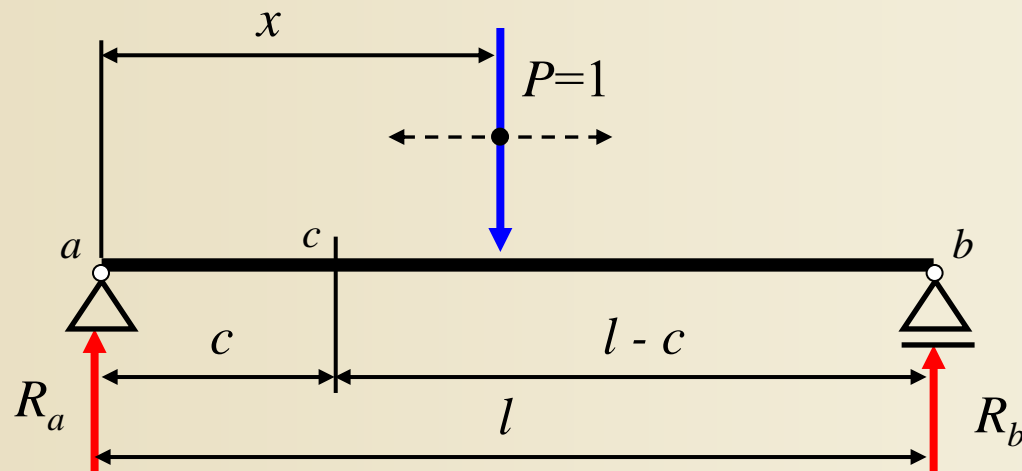


Průběh zatěžovací zkoušky



Příčinkové čáry na prostém nosníku bez převislých konců

Řešení s využitím příčinkových čar, které se sestrojí pro jednoduché vozidlo v podobě jediné bezrozměrné jednotkové svislé bodové síly.



$$x \in \langle 0, l \rangle$$

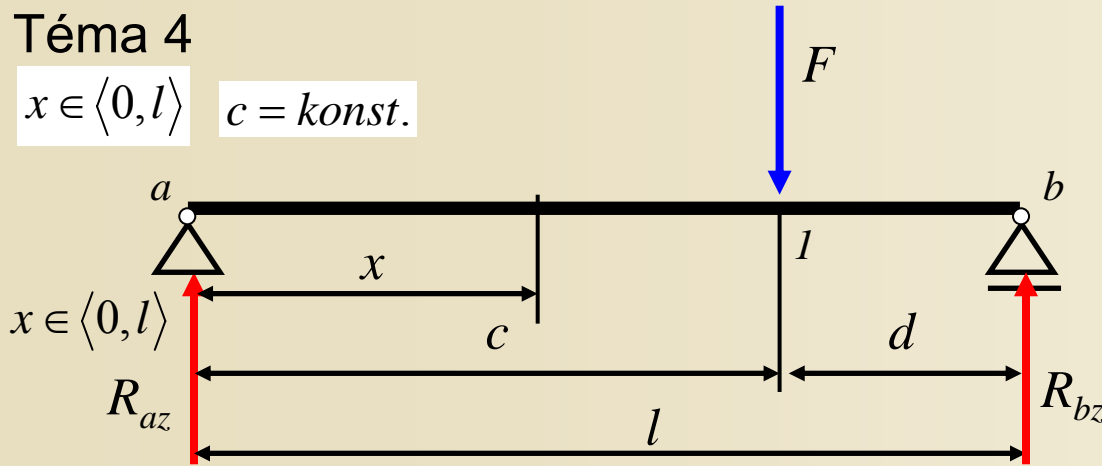
$$c = \textit{konst.}$$

Pro odvození příčinkových čar různých sledovaných veličin – statická a kinematická metoda.

Nejjednodušší zatěžovací stavy prostých nosníků

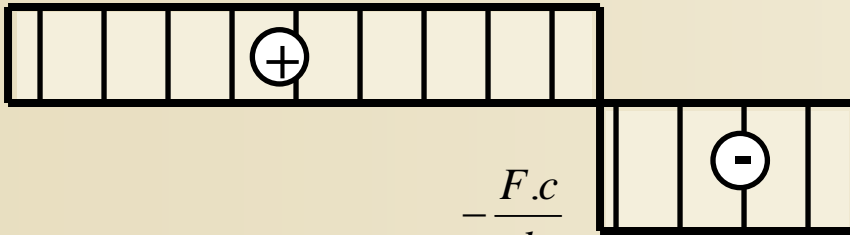
Téma 4

$$x \in \langle 0, l \rangle \quad c = \text{konst.}$$

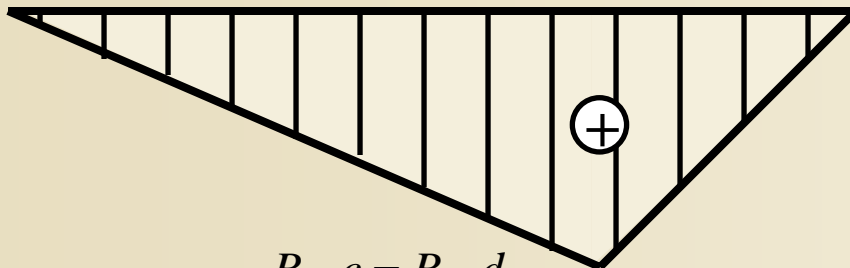


$$\frac{F \cdot d}{l}$$

V



M



$$R_{az} \cdot c = R_{bz} \cdot d$$

Výpočet reakcí

$$R_{az} = \frac{F \cdot d}{l} (\uparrow) \quad R_{bz} = \frac{F \cdot c}{l} (\uparrow)$$

Posouvající síla

$$x \in \langle 0, c \rangle \quad V_{(x)}^L = R_{az} \quad V_{(a)} = V_{(x=0)} = R_{az}$$

$$x \in \langle c, l \rangle \quad V_{(x)}^L = R_{az} - F$$

$$V_{(b)} = V_{(x=l)} = R_{az} - F = -R_{bz}$$

Ohybový moment

$$x \in \langle 0, c \rangle \quad M_{(x)}^L = R_{az} \cdot x \quad M_{(a)} = M_{(x=0)} = 0$$

$$M_{(1)} = M_{(x=c)} = R_{az} \cdot c$$

$$x \in \langle c, l \rangle \quad M_{(x)}^L = R_{az} \cdot x - F \cdot (x - c)$$

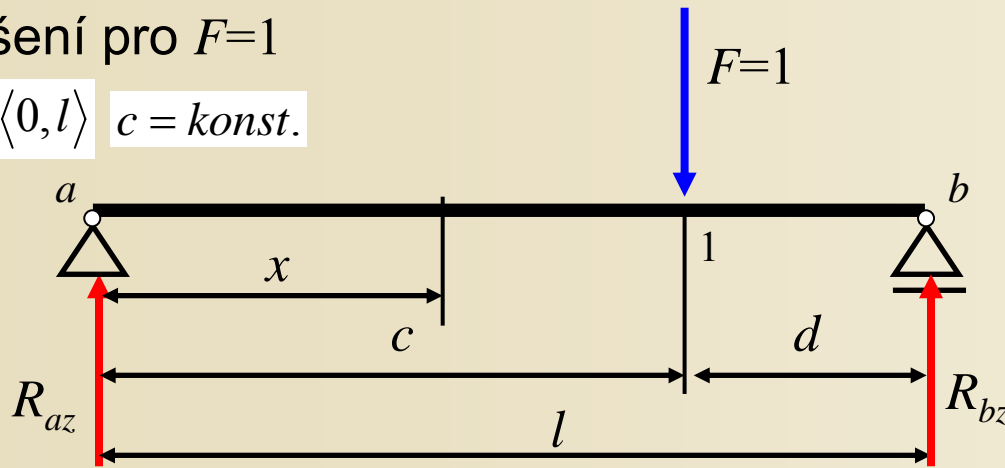
$$M_{(b)} = M_{(x=l)} = 0 \quad M_{(1)} = M_{(x=c)} = R_{bz} \cdot d$$

$$M_{(x)}^P = R_{bz} \cdot (l - x)$$

Nejjednodušší zatěžovací stavy prostých nosníků

Řešení pro $F=1$

$x \in \langle 0, l \rangle$ $c = \text{konst.}$



Výpočet reakcí

$$R_{az} = \frac{d}{l} (\uparrow) \quad R_{bz} = \frac{c}{l} (\uparrow)$$

Posouvající síla

$$x \in \langle 0, c \rangle \quad V_{(x)}^L = R_{az} \quad V_{(a)} = V_{(x=0)} = R_{az}$$

$$x \in \langle c, l \rangle \quad V_{(x)}^L = R_{az} - 1$$

$$V_{(b)} = V_{(x=l)} = R_{az} - 1 = -R_{bz}$$

Ohybový moment

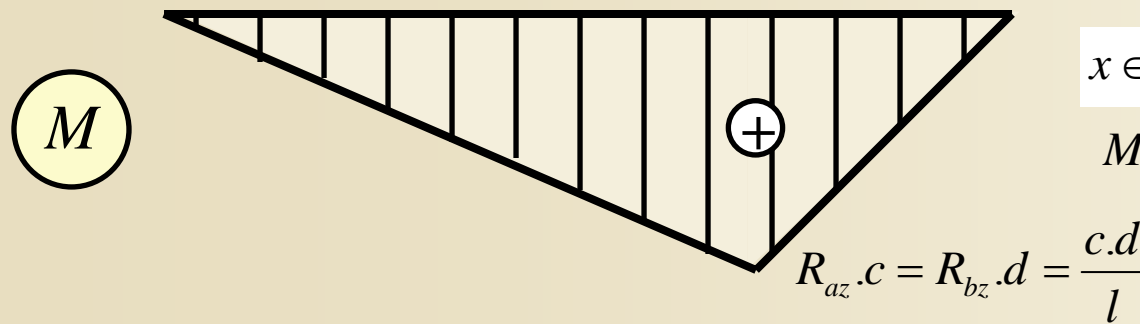
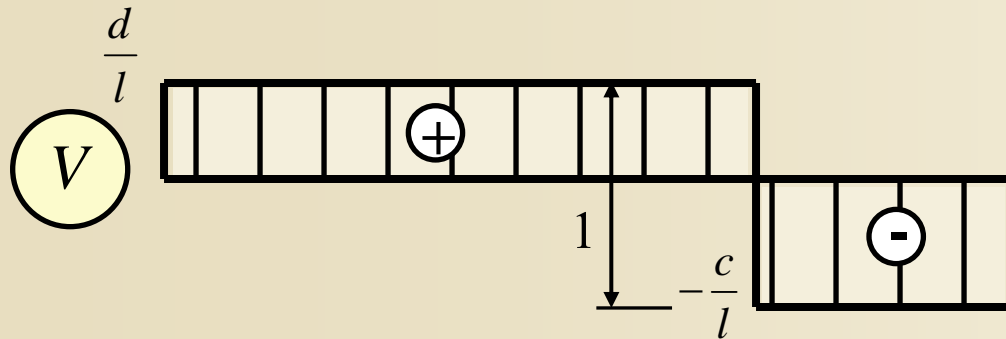
$$x \in \langle 0, c \rangle \quad M_{(x)}^L = R_{az} \cdot x \quad M_{(a)} = M_{(x=0)} = 0$$

$$M_{(1)} = M_{(x=c)} = R_{az} \cdot c$$

$$x \in \langle c, l \rangle \quad M_{(x)}^L = R_{az} \cdot x - (x - c)$$

$$M_{(b)} = M_{(x=l)} = 0 \quad M_{(1)} = M_{(x=c)} = R_{bz} \cdot d$$

$$M_{(x)}^P = R_{bz} \cdot (l - x)$$



$$R_{az} \cdot c = R_{bz} \cdot d = \frac{c \cdot d}{l}$$

Příčinkové čáry na prostém nosníku, odvození

Reakce R_a a R_b

Jednotkové břemeno $P = 1$

P mění polohu – různé x

Příčinková čára sleduje proměnlivost statické veličiny S_x , např. R_a nebo R_b která se váže k jedinému průřezu c , např. a nebo b

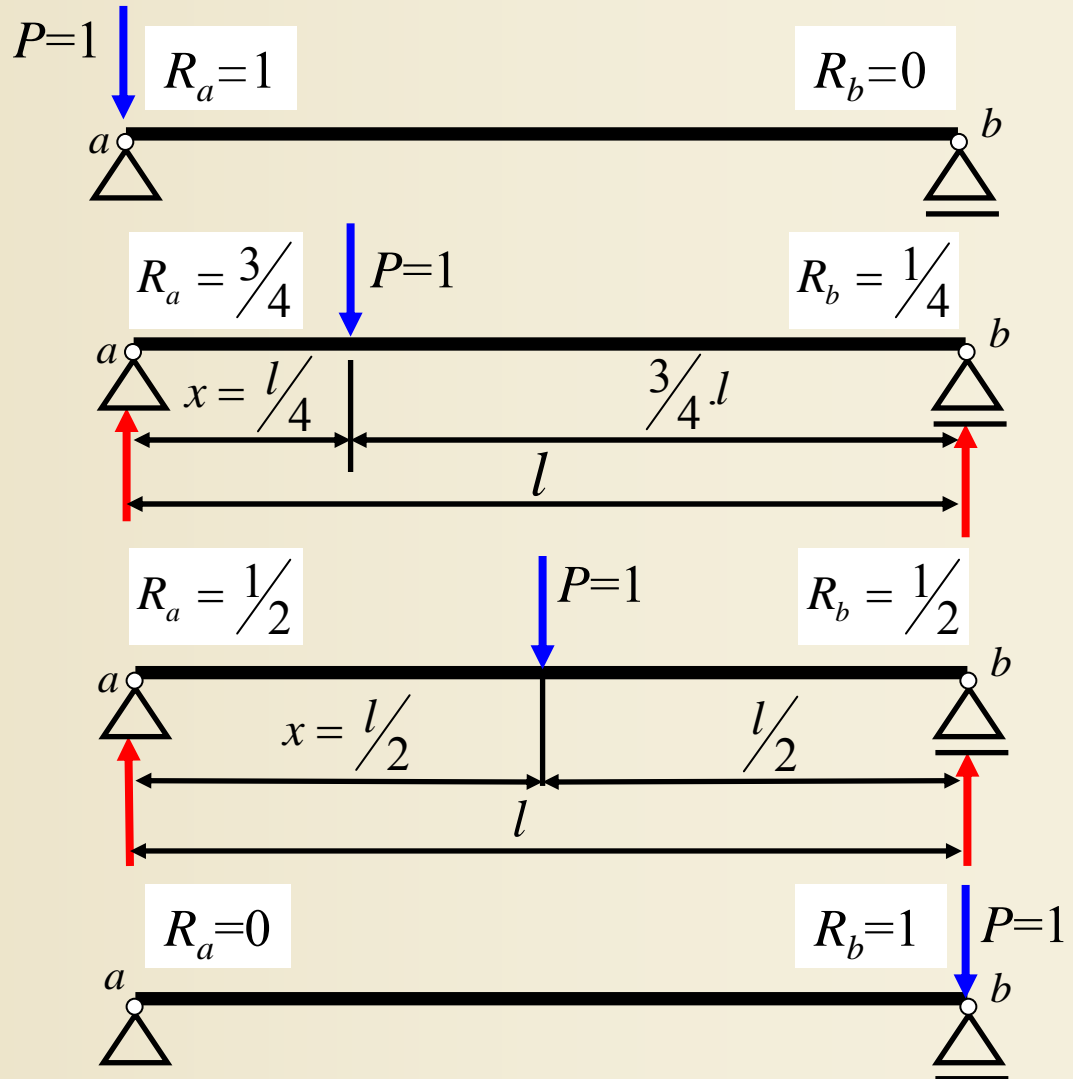
Dle podmínek rovnováhy platí:

$$\sum_{c=0} M_{ib} = 0$$

$$R_a = \frac{1 \cdot (l-x)}{l} = 1 - \frac{x}{l}$$

$$\sum_{c=l} M_{ia} = 0$$

$$R_b = \frac{1 \cdot x}{l} = \frac{x}{l}$$



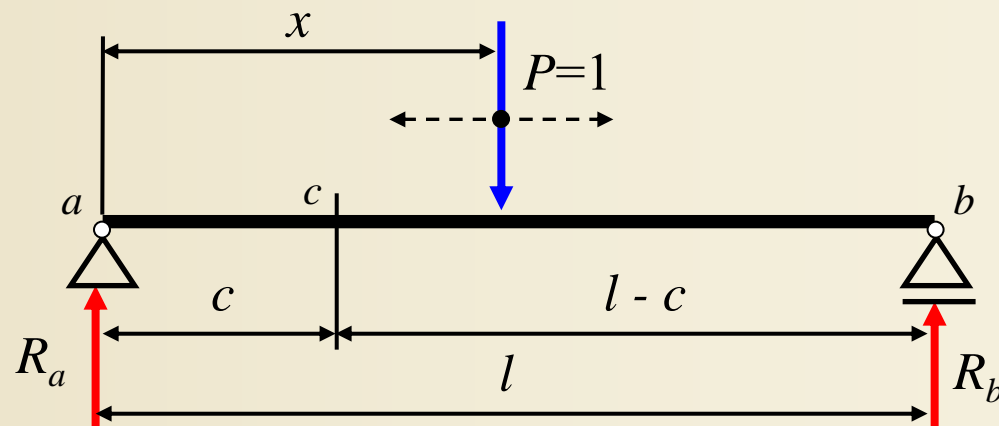
Příčinkové čáry reakcí na prostém nosníku

Reakce R_a a R_b

$c = \text{konst.}$

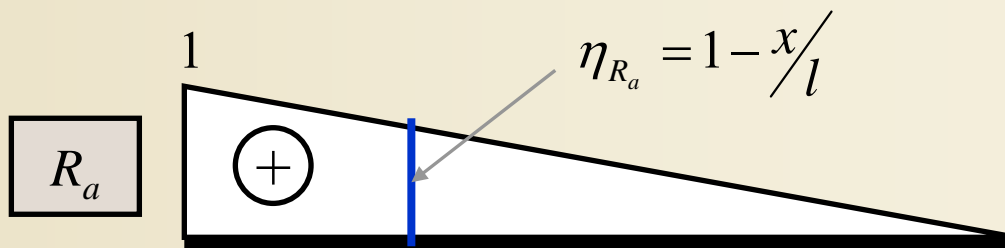
Proměnlivé
zatížení $P = 1$

$x \in \langle 0, l \rangle$



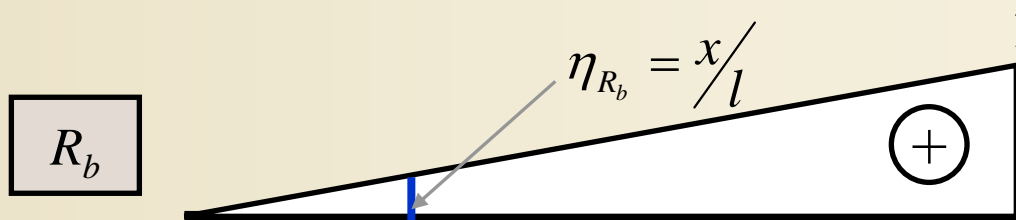
$c = 0$

Hodnota R_a v průřezu a
od P v průřezu x



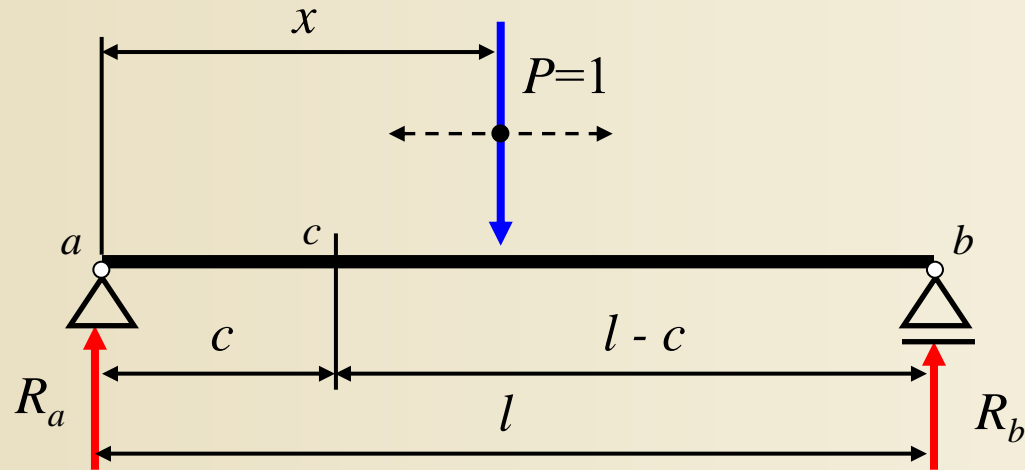
$c = l$

Hodnota R_b v průřezu b
od P v průřezu x



Pořadnice η příčinkové čáry jsou bezrozměrná čísla

Definice příčinkové čáry

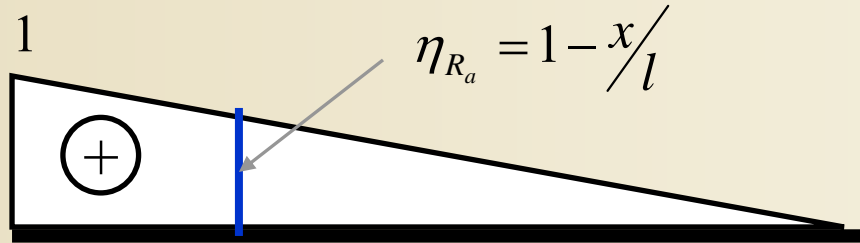


$$x \in \langle 0, l \rangle$$

$$c = \text{konst.}$$

$$c = 0$$

$$R_a$$



$$\eta_{R_a} = 1 - x/l$$

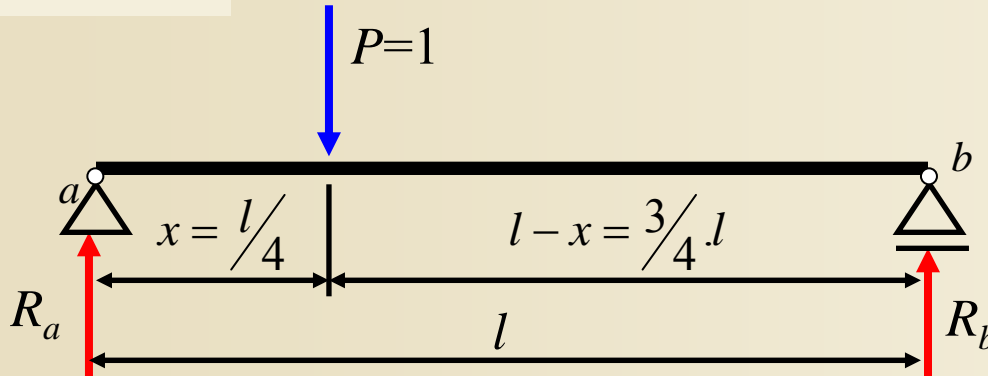
Příčinková čára je grafické znázornění funkce, která vyjadřuje závislost sledované veličiny (např. R_a) na proměnné poloze bezrozměrné jednotkové síly popsané nezávisle proměnnou vzdáleností x .

Příčinkové čáry reakcí na prostém nosníku, příklad

Reakce R_a a R_b ?

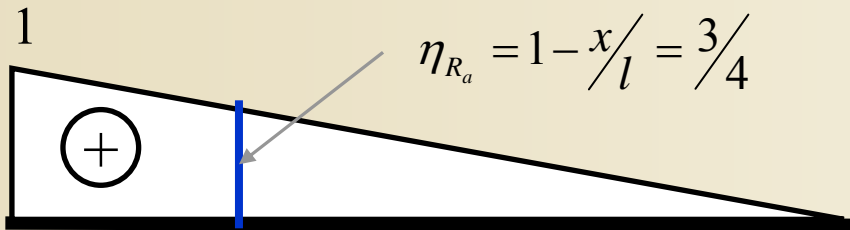
$$x = l/4$$

$c = konst.$



$c = 0$

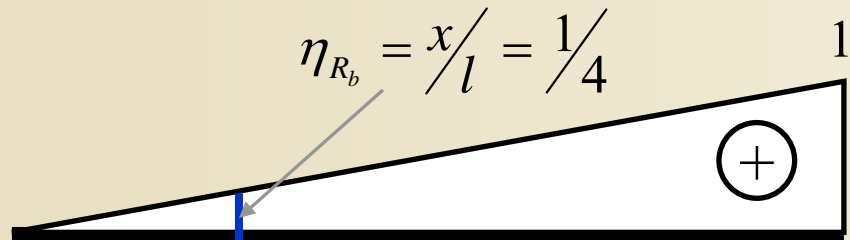
R_a



$$R_a = \eta_{R_a} = 3/4$$

$c = l$

R_b



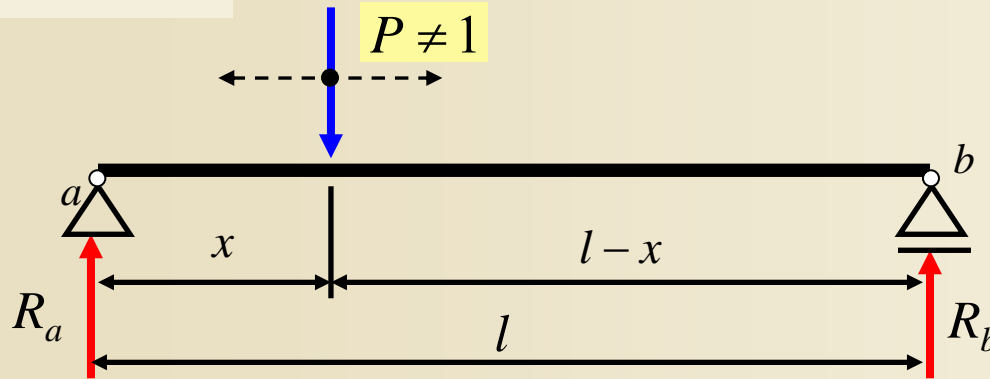
$$R_b = \eta_{R_b} = 1/4$$

Příčinkové čáry reakcí na prostém nosníku, vyhodnocení

Reakce R_a a R_b ?

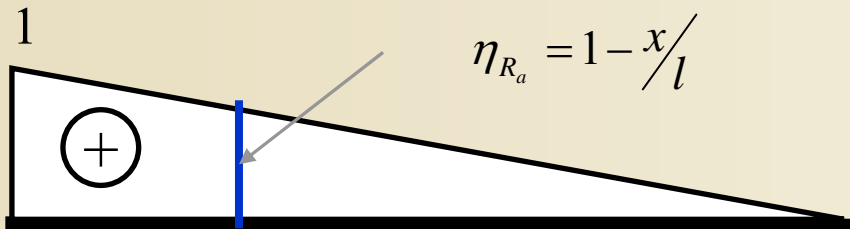
$x \in \langle 0, l \rangle$

$c = konst.$



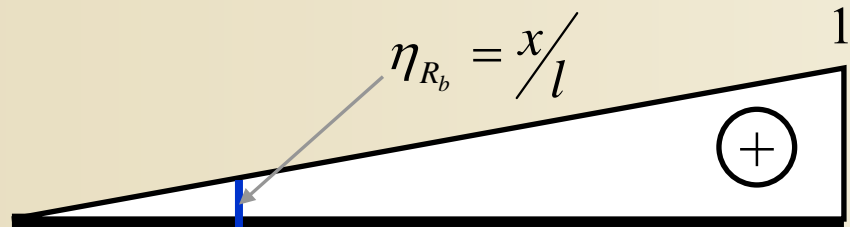
$c = 0$

R_a



$c = l$

R_b

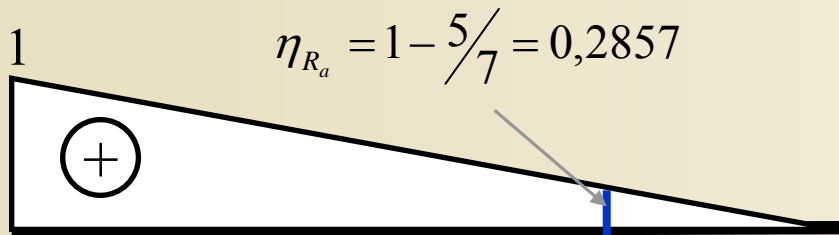
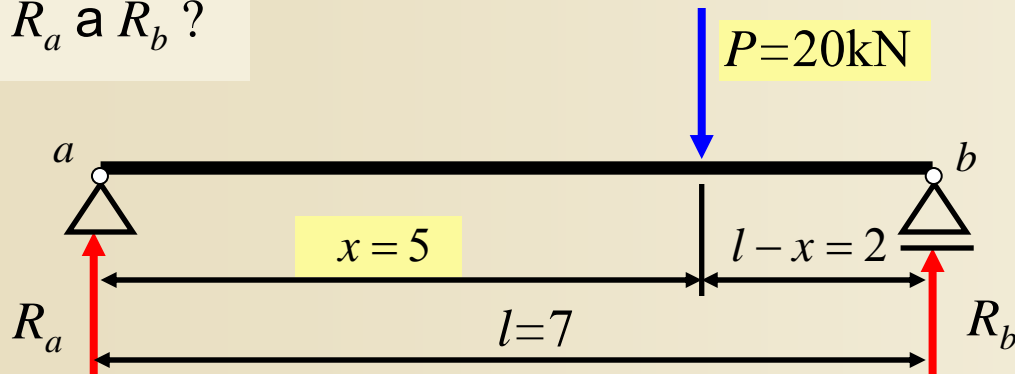


pro $P = 1 \rightarrow S_c = R_a = \eta$

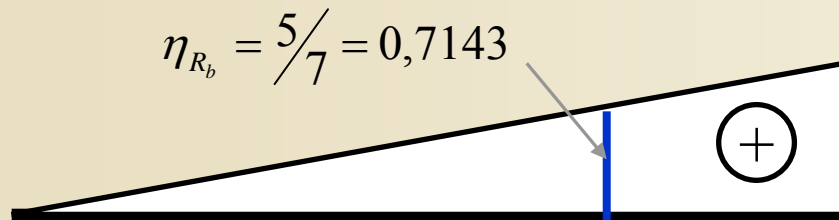
pro $P \neq 1 \rightarrow R_a = P \cdot \eta$

Příčinkové čáry reakcí na prostém nosníku, příklad

Reakce R_a a R_b ?



$$R_a = P \cdot \eta_{R_a} = 20 \cdot \frac{2}{7} = 5,7143\text{kN}$$



$$R_b = P \cdot \eta_{R_b} = 20 \cdot \frac{5}{7} = 14,2857\text{kN}$$

Využití příčinkových čar pro výpočet účinků nehybného zatížení

Působí-li na nosníku n sil P_i ($i=1, 2, \dots, n$)

$$S_c = \sum_{i=1}^n P_i \cdot \eta_i$$

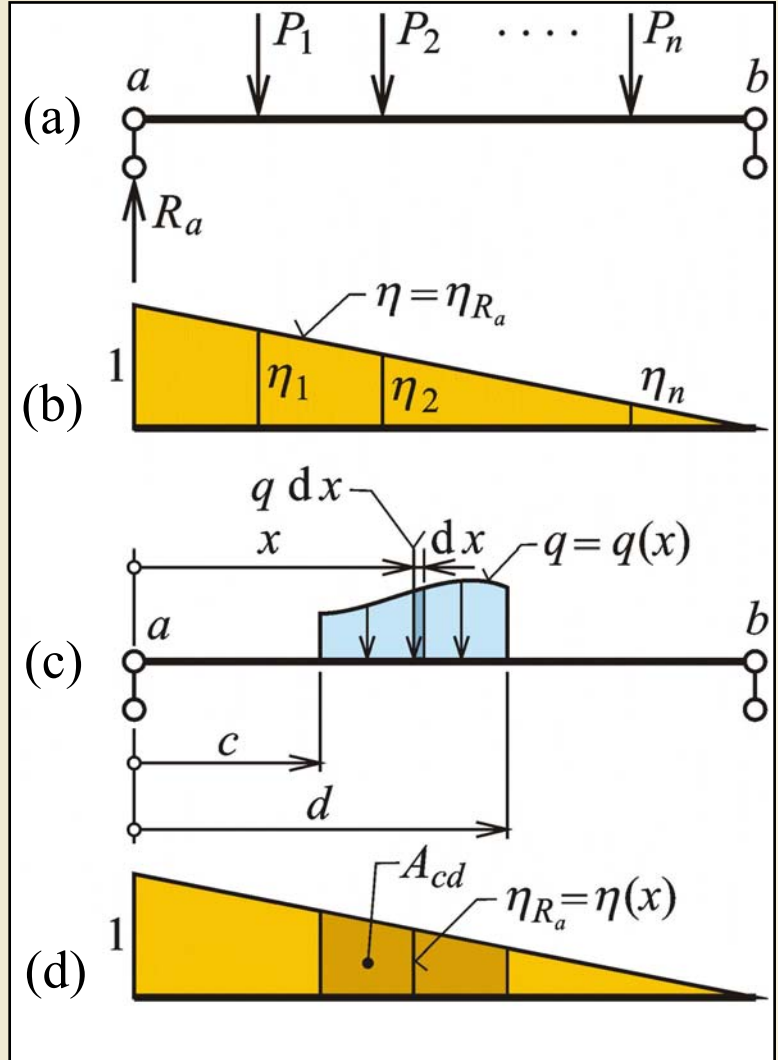
Součet příspěvků
(**příčinků**) jednotlivých sil

Působí-li na nosníku $q=q(x)$ v úseku $c \leq x \leq d$

$$R_a = \int_c^d q(x) \cdot \eta(x) dx$$

pro $q(x)=\text{konst.}$

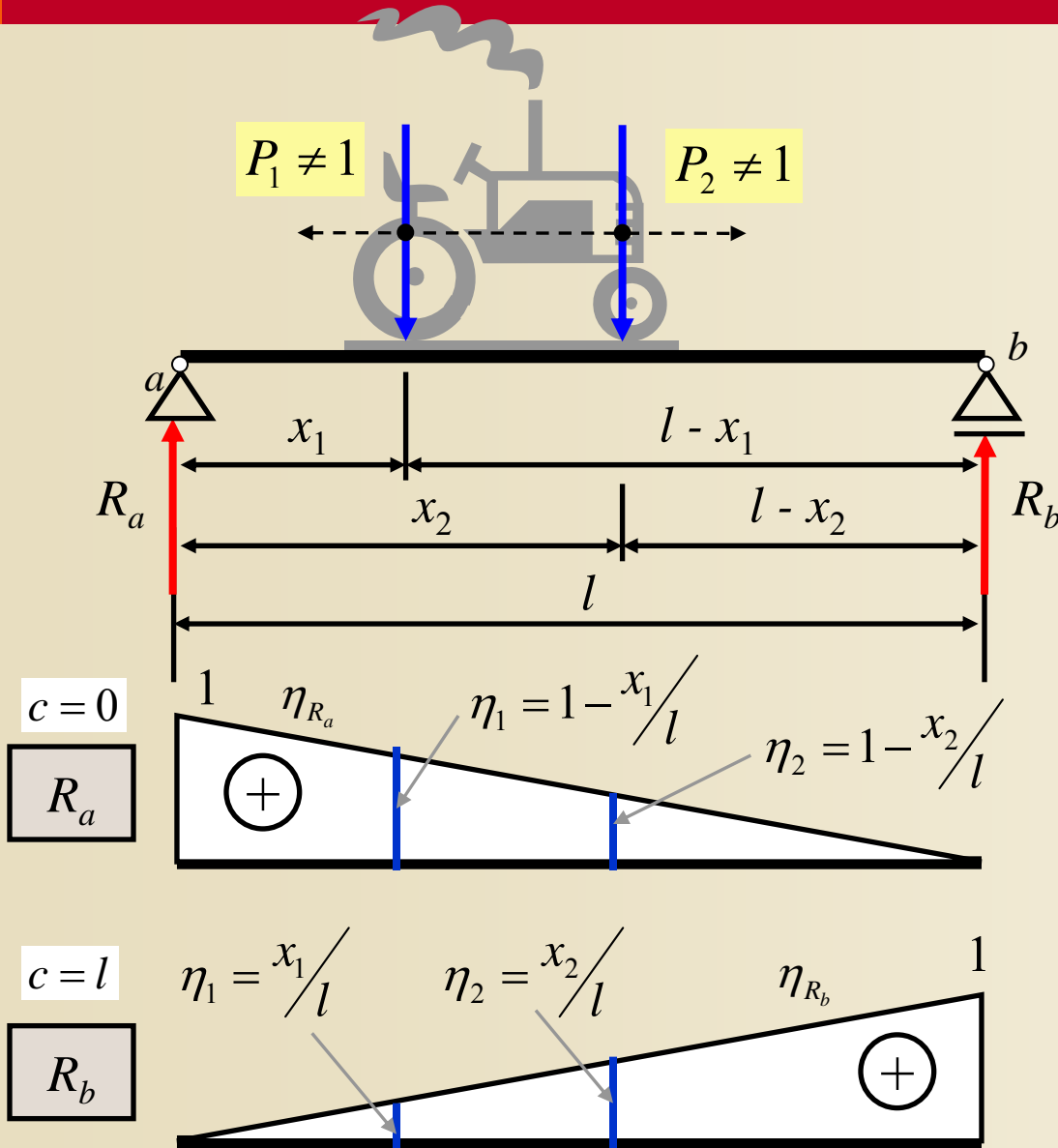
$$R_a = q \cdot \int_c^d \eta(x) dx = q \cdot A_{cd}$$



Výpočet účinků nehybného zatížení pomocí příčinkové čáry

Příčinkové čáry reakcí na prostém nosníku, vyhodnocení

Reakce R_a a R_b ?

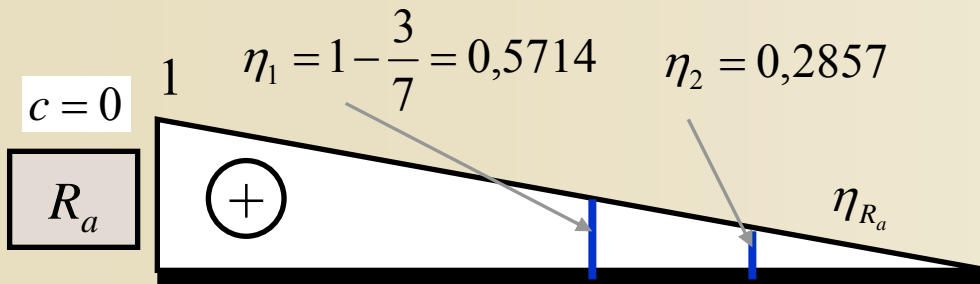
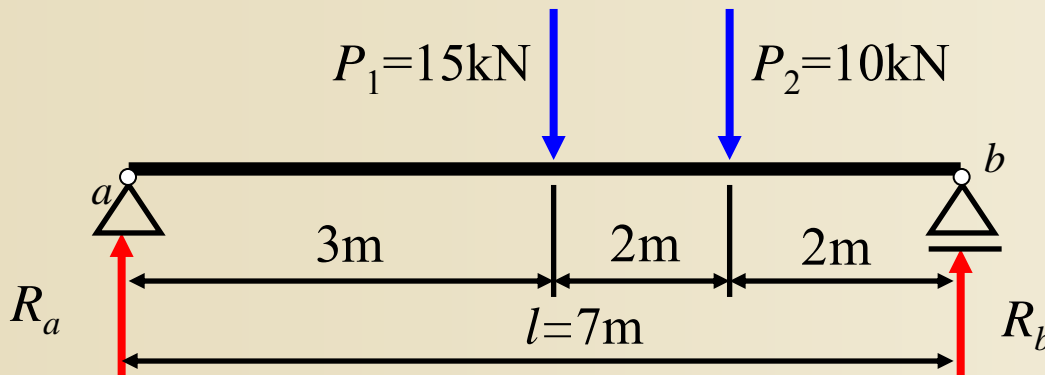


pro P_1 a $P_2 \rightarrow R_a = P_1 \cdot \eta_1 + P_2 \cdot \eta_2$

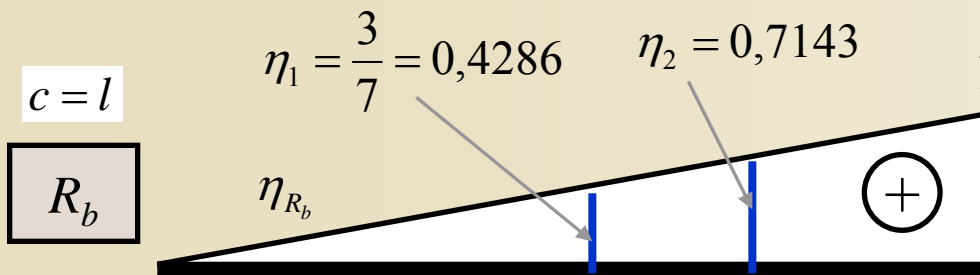
Obecně
$$R_a = \sum_{i=1}^n P_i \cdot \eta_i$$

Příčinkové čáry reakcí na prostém nosníku, příklad

Reakce R_a a R_b ?

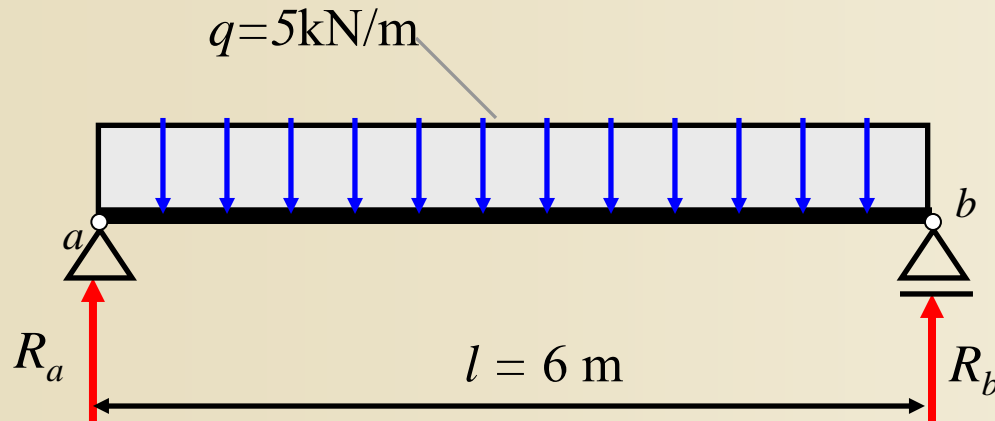


$$R_a = P_1 \cdot \eta_1 + P_2 \cdot \eta_2 = 15 \cdot 0,5714 + 10 \cdot 0,2857 = 11,4284 \text{ kN}$$



$$R_b = P_1 \cdot \eta_1 + P_2 \cdot \eta_2 = 15 \cdot 0,4286 + 10 \cdot 0,7143 = 13,5716 \text{ kN}$$

Příčinkové čáry reakcí na prostém nosníku



Reakce R_a a R_b ?

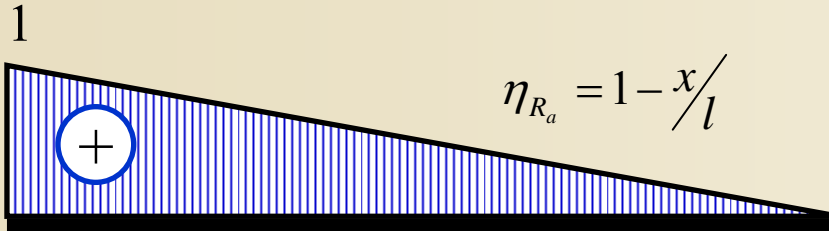
$$R_a = \int_0^l q(x) \cdot \eta(x) dx$$

pro $q(x) = \text{konst.}$

$$R_a = q \cdot \int_0^l \eta(x) dx = q \cdot A$$

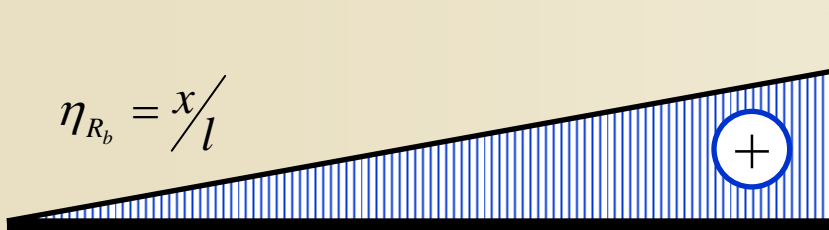
$c = 0$

R_a



$c = l$

R_b



$$R_a = \int_0^l \frac{q}{l} \cdot x \cdot dx = \left[\frac{q}{l} \cdot \frac{x^2}{2} \right]_0^l = \frac{q \cdot l}{2}$$

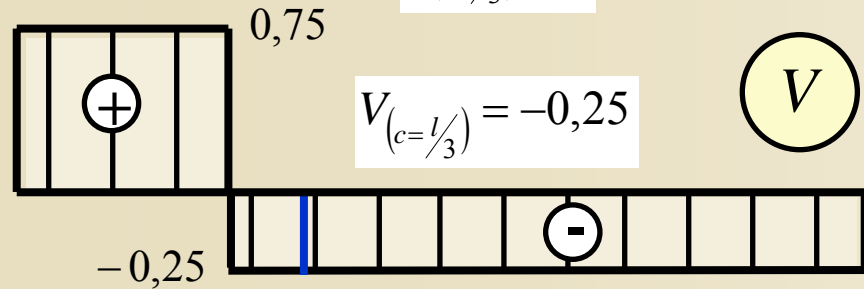
$$R_b = R_a = 15 \text{ kN}$$

Příčinkové čáry $V_{(c)}$ na prostém nosníku

Posouvající síla $V_{(c)}$

$$V_{(c=l/3)} = 0$$

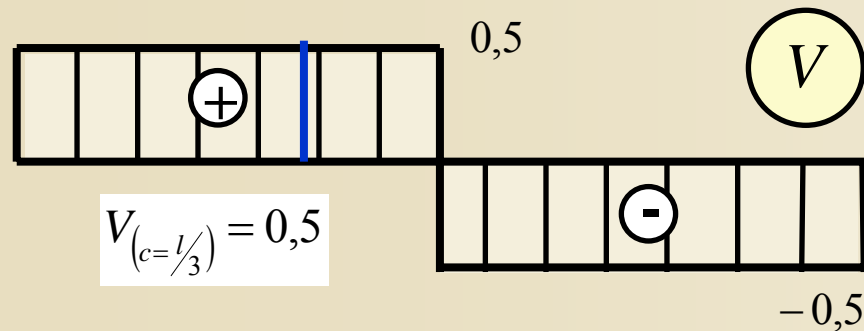
$$V_{(c=l/3)} = -0,25$$



V

$$0,5$$

$$V_{(c=l/3)} = 0,5$$

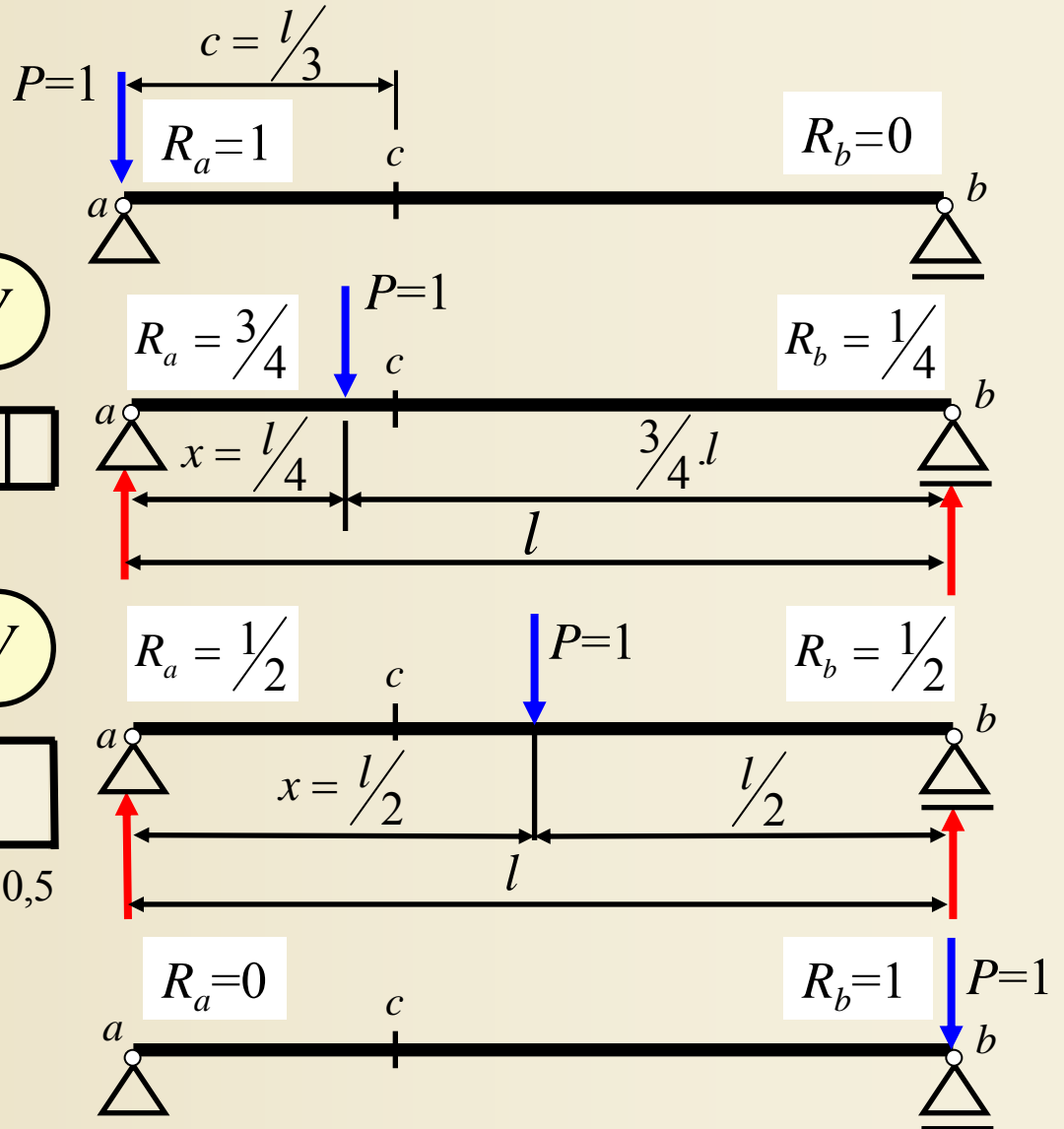


V

$$x \in \langle 0, l \rangle$$

$$V_{(c=l/3)} = 0$$

$c = konst.$

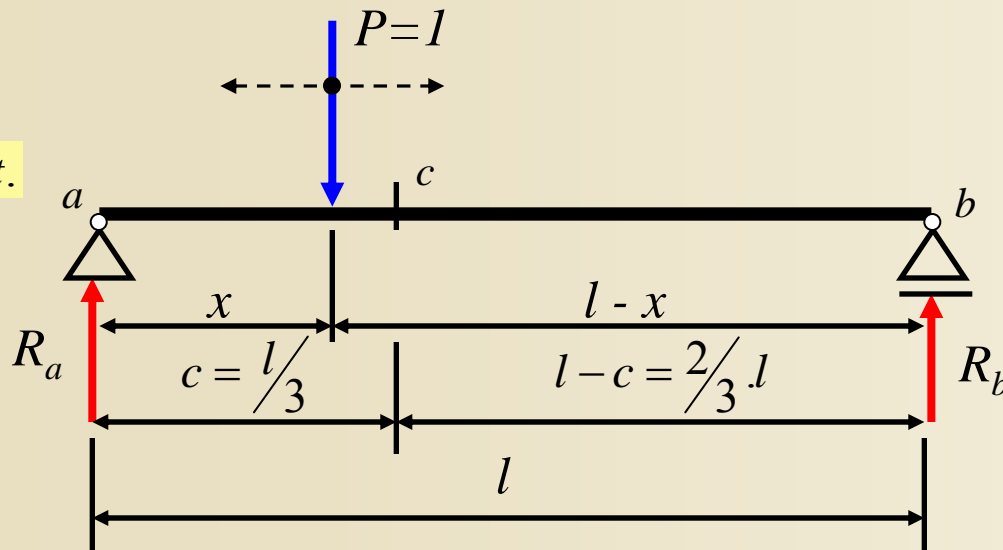


Příčinkové čáry $V_{(c)}$ na prostém nosníku

$$x \in \langle 0, l \rangle$$

$$c = \text{konst.}$$

$$c = l/3$$



levá větev

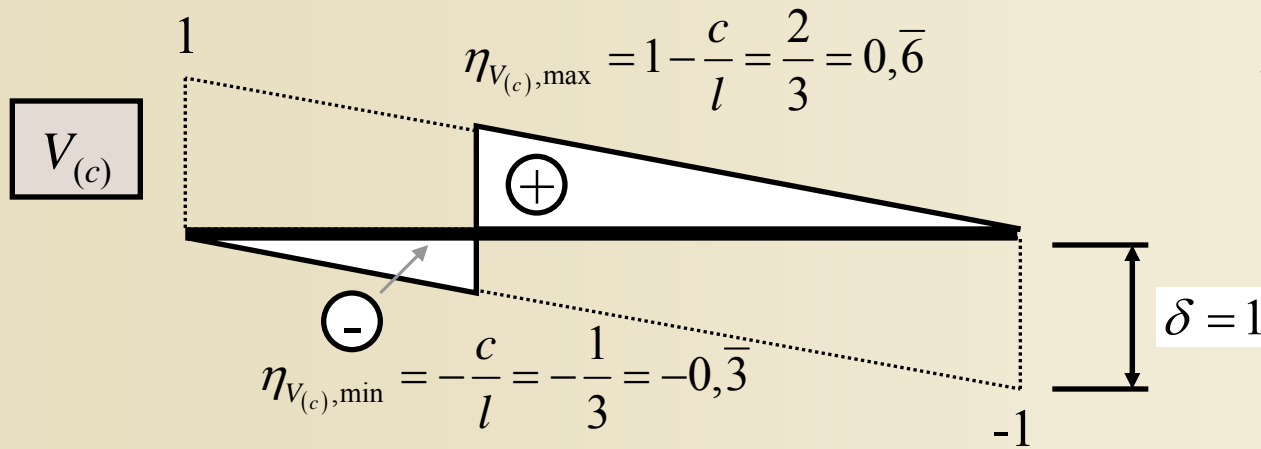
$$0 \leq x \leq c$$

$$V_{(c)} = \eta_{V_{(c)}} = -R_b = -\frac{x}{l}$$

pravá větev

$$c \leq x \leq l$$

$$V_{(c)} = \eta_{V_{(c)}} = R_a = 1 - \frac{x}{l}$$

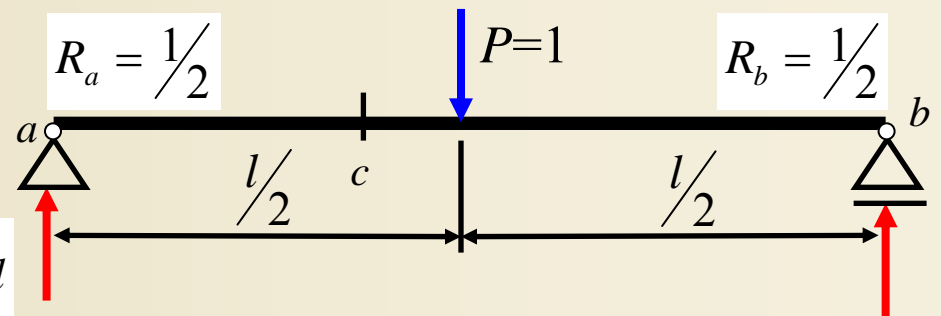
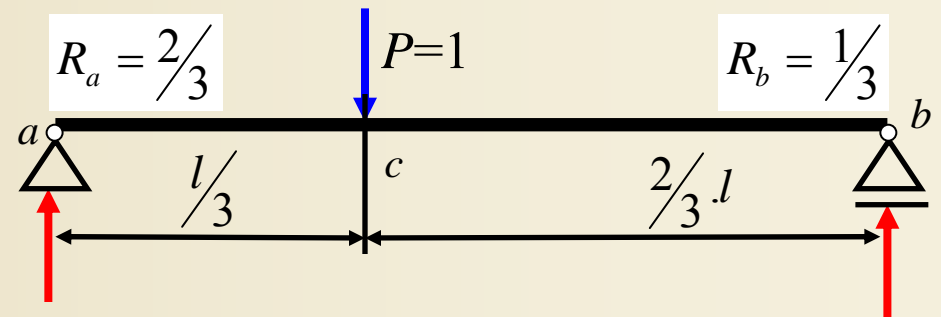
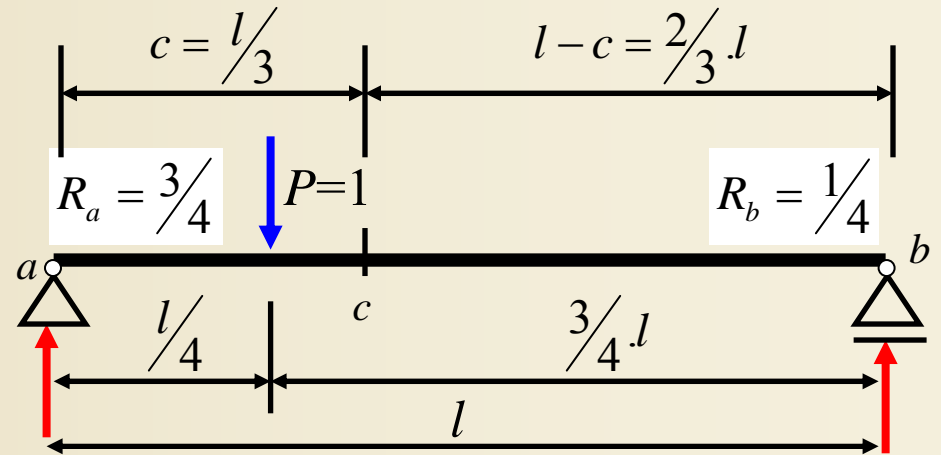
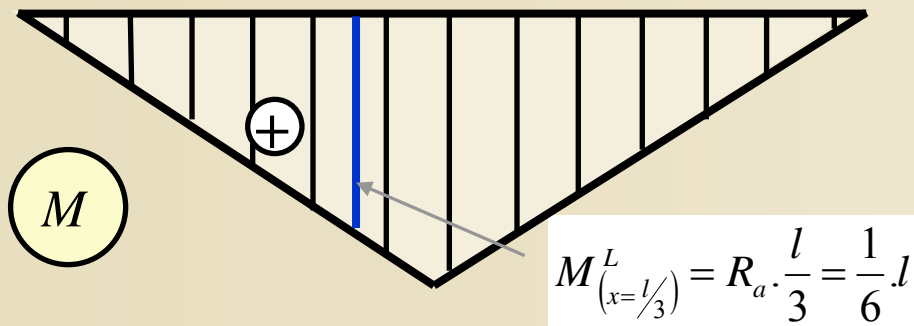
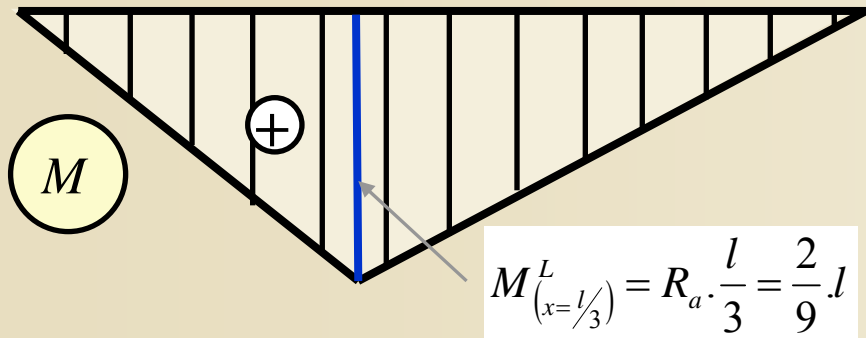
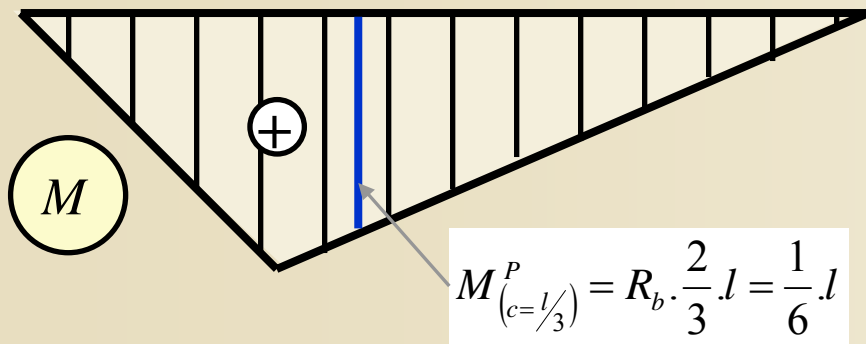


v průřezu c je jednotkový skok

Pořadnice η příčinkové čáry jsou bezrozměrná čísla

Příčinkové čáry $M_{(c)}$ na prostém nosníku

Ohybový moment $M_{(c)}$

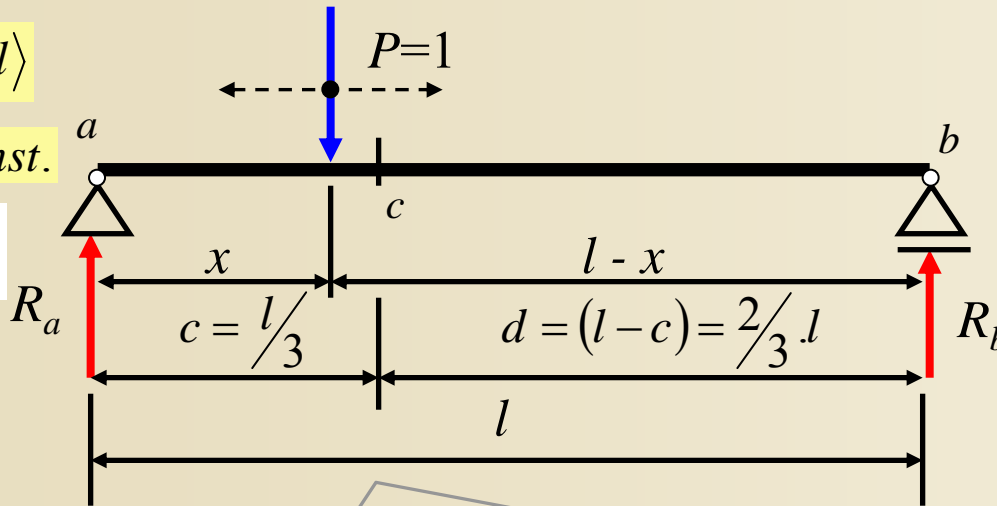


Příčinkové čáry $M_{(c)}$ na prostém nosníku

$$x \in \langle 0, l \rangle$$

$$c = \text{konst.}$$

$$c = l/3$$



levá větev

$$0 \leq x \leq c$$

$$M_{(c)} = \eta_{M_{(c)}} = R_b \cdot (l - c) = \frac{x \cdot (l - c)}{l}$$

pravá větev

$$c \leq x \leq l$$

$$M_{(c)} = \eta_{M_{(c)}} = R_a \cdot c = \frac{c \cdot (l - x)}{l}$$

$M_{(c)}$

$$\eta_1 = \frac{l \cdot 2 \cdot l}{4 \cdot 3 \cdot l} = \frac{1}{6} \cdot l$$

$$\eta_3 = \frac{l \cdot l}{3 \cdot 2 \cdot l} = \frac{1}{6} \cdot l$$

$$c = l/3$$

$$\eta_2 = \eta_{M_{(c)}, \max} = \frac{c \cdot (l - c)}{l} = \frac{l \cdot 2 \cdot l}{3 \cdot 3 \cdot l} = \frac{2}{9} \cdot l$$

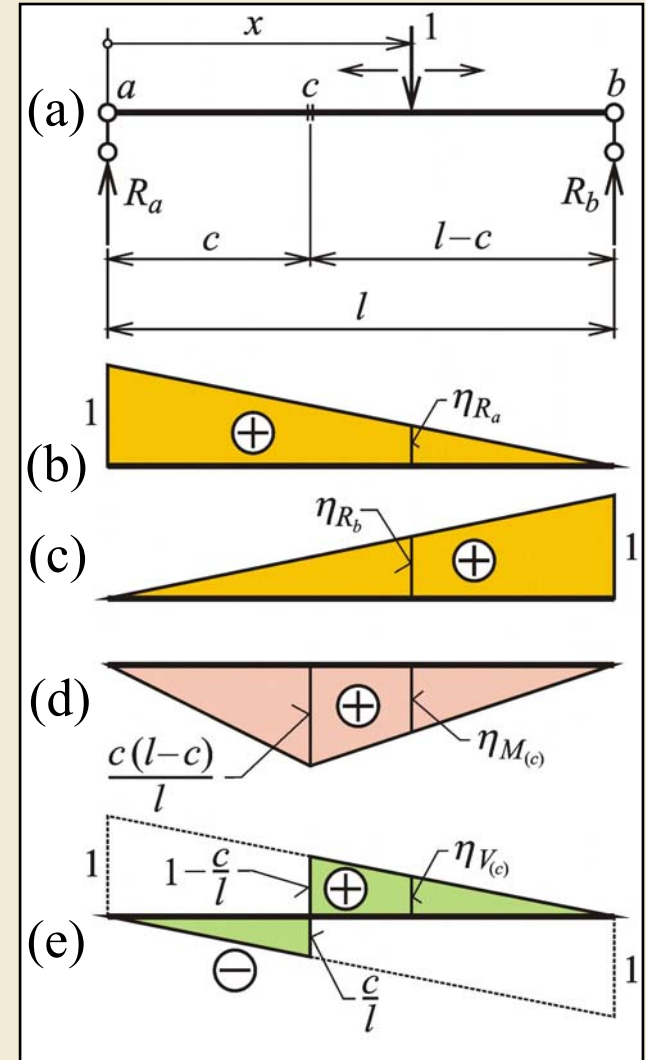
v průřezu c je jednotkové zalomení

$$l - c = \frac{2}{3} \cdot l$$

Rozměrem pořadnice η příčinkové čáry je délka

Příčinkové čáry na prostém nosníku bez převislých konců

- (b) Příčinková čára reakce R_a na prostém nosníku
- (c) Příčinková čára reakce R_b na prostém nosníku
- (d) Příčinková čára ohybového momentu $M_{(c)}$ na prostém nosníku
- (e) Příčinková čára posouvající síly $V_{(c)}$ na prostém nosníku



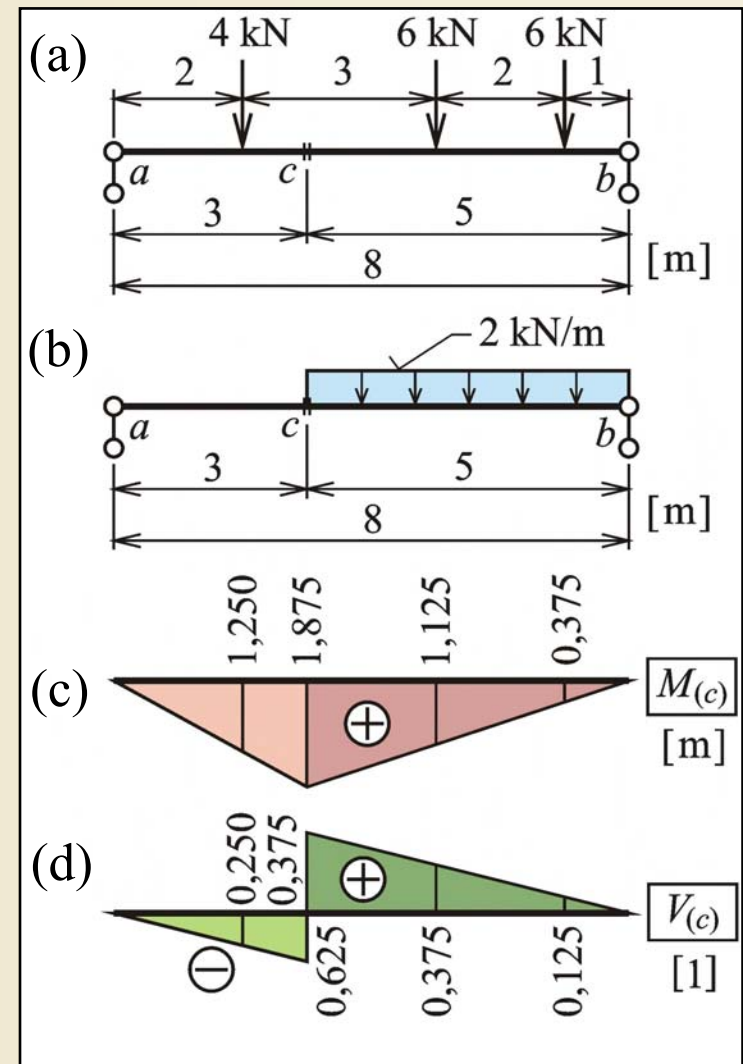
Příčinkové čáry na prostém nosníku bez převislých konců

Obr. 11.1. / str. 171

Příklad 8.1

Zadání:

S využitím příčinkových čar určete posouvající sílu V_c a ohybový moment M_c pro oba zatěžovací stavy s využitím příčinkových čar.



Zadání a řešení příkladu 8.1

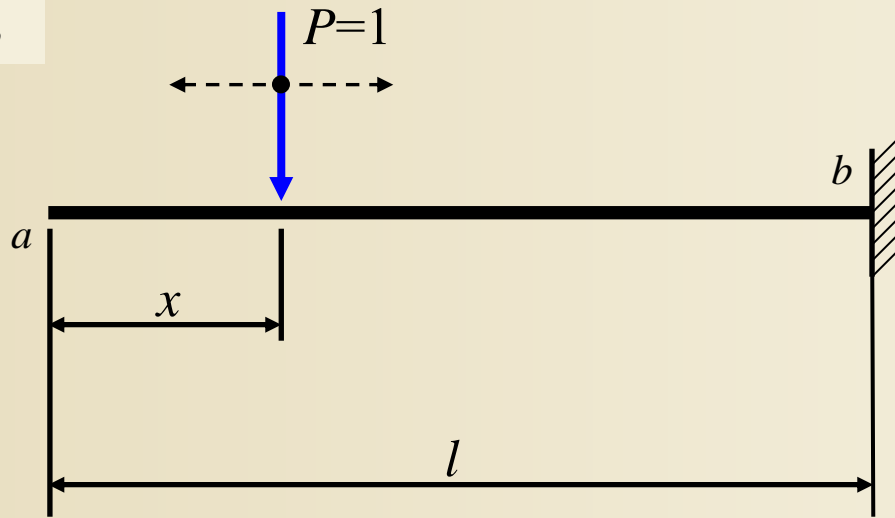
Obr. 11.6. / str. 175

Příčinkové čáry na konzole

Reakce R_b a M_b

$x \in \langle 0, l \rangle$

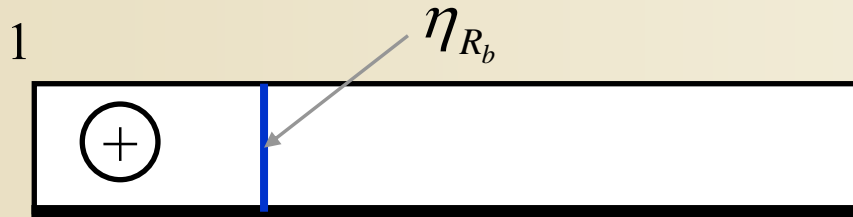
$c = konst.$



Proměnlivé
zatížení $P = 1$

$c = l$

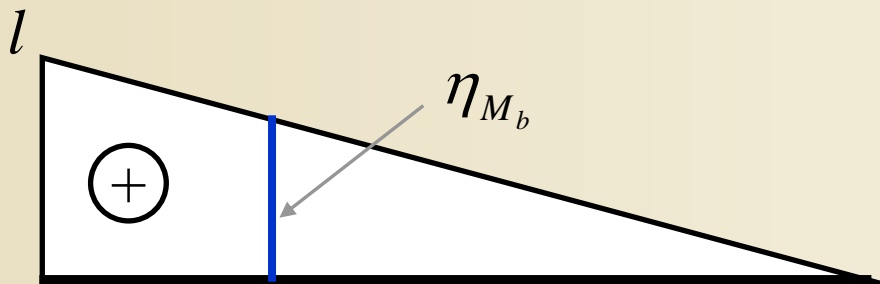
R_b



$$R_b = \eta_{R_b} = 1$$

$c = l$

M_b



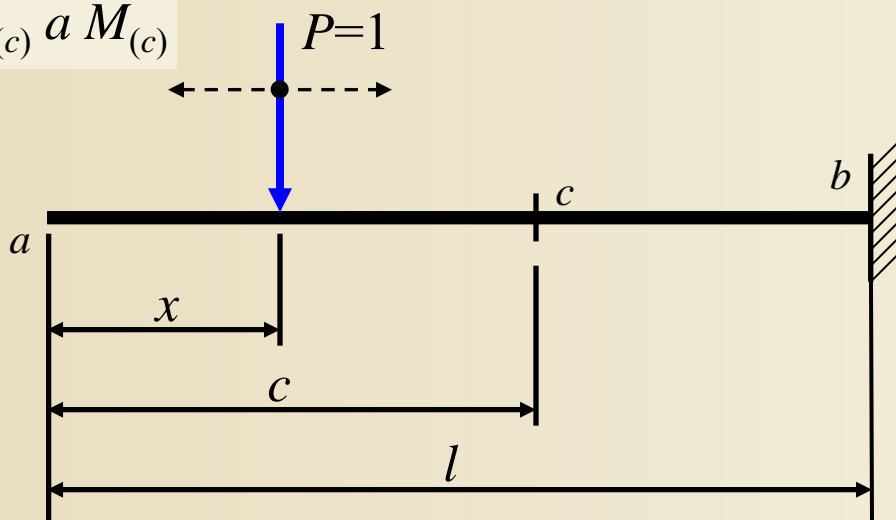
$$M_b = \eta_{M_b} = 1 \cdot (l - x)$$

Příčinkové čáry na konzole

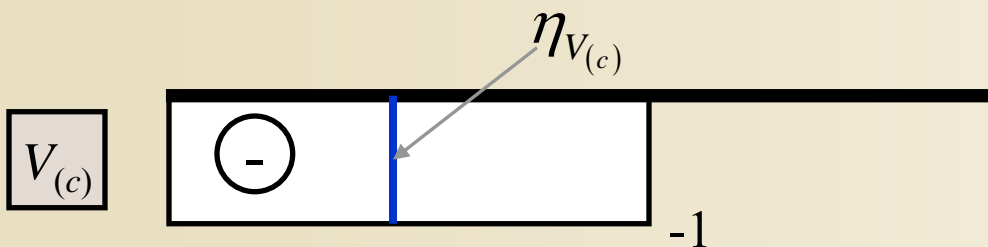
Vnitřní síly $V_{(c)}$ a $M_{(c)}$

$x \in \langle 0, l \rangle$

$c = konst.$



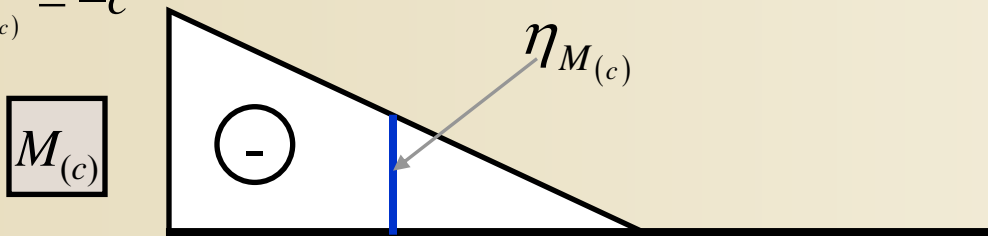
Proměnlivé
zatížení $P = 1$



$0 \leq x \leq c$

$V_{(c)} = \eta_{V(c)} = -1$

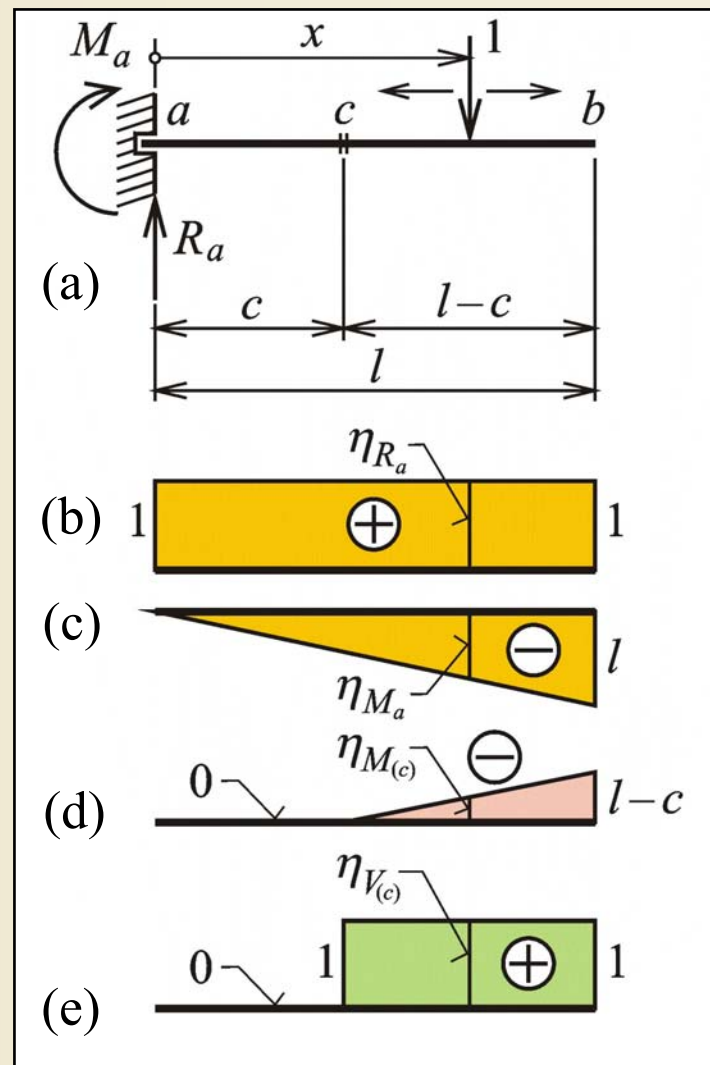
$\eta_{M(c)} = -c$



$M_{(c)} = \eta_{M(c)} = -1 \cdot x = -x$

Příčinkové čáry na konzole vlevo vetknuté

- (b) Příčinková čára reakce R_a na konzole
- (c) Příčinková čára reakce M_a na konzole
- (d) Příčinková čára ohybového momentu $M_{(c)}$ na konzole
- (e) Příčinková čára posouvající síly $V_{(c)}$ na konzole

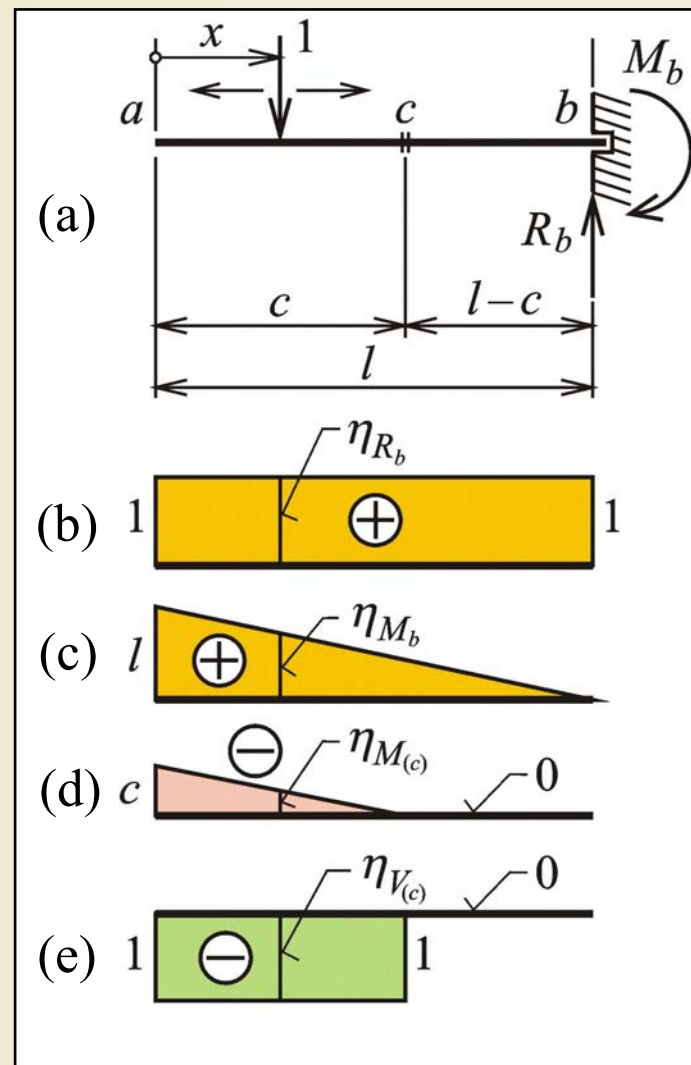


Příčinkové čáry na konzole vlevo vetknuté

Obr. 11.2. / str. 173

Příčinkové čáry na konzole vpravo vetknuté

- (b) Příčinková čára reakce R_b na konzole
- (c) Příčinková čára reakce M_b na konzole
- (d) Příčinková čára ohybového momentu $M_{(c)}$ na konzole
- (e) Příčinková čára posouvající síly $V_{(c)}$ na konzole

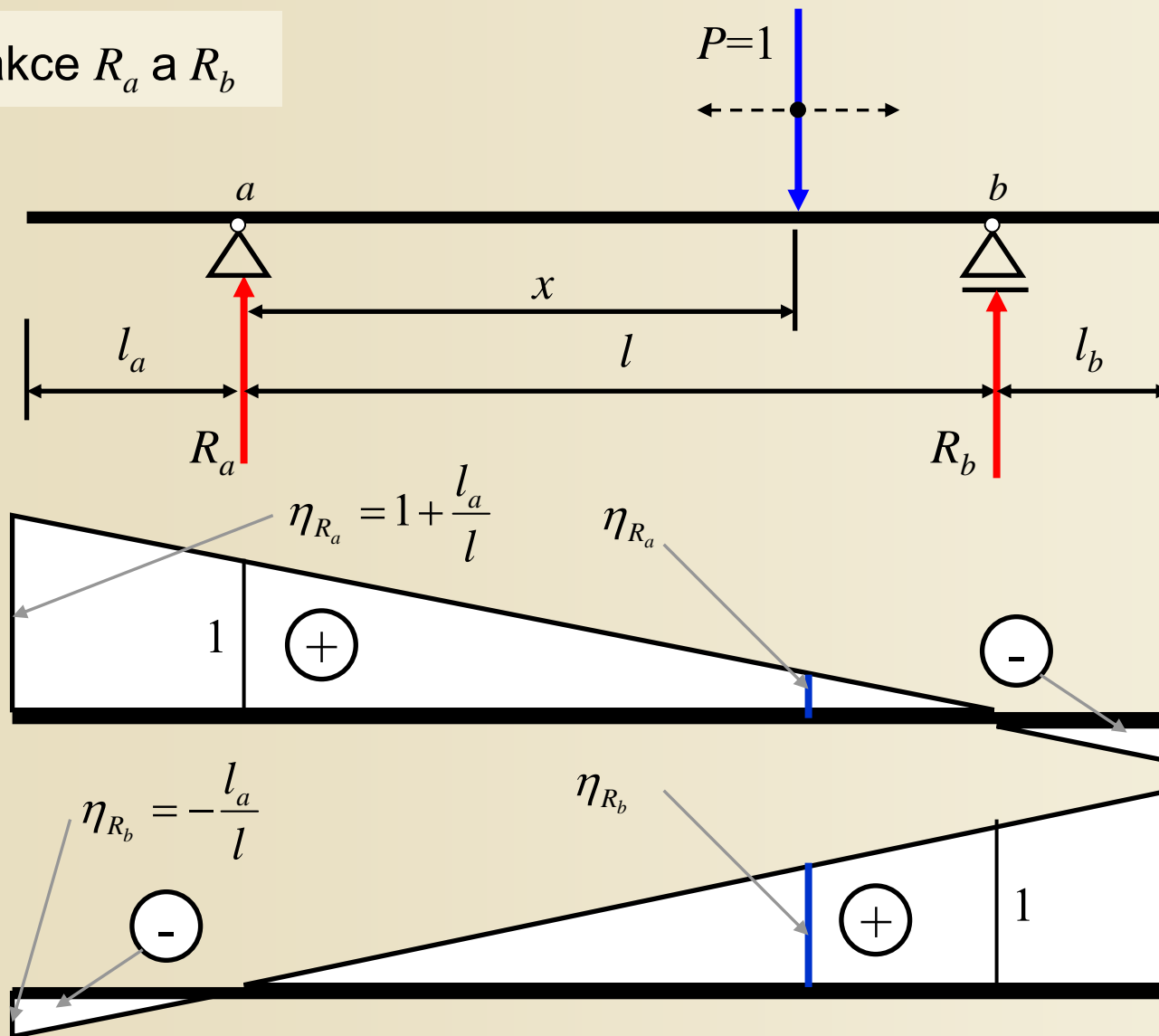


Příčinkové čáry na konzole vpravo vetknuté

Obr. 11.3. / str. 173

Prostý nosník s převislými konci

Reakce R_a a R_b



$$x \in \langle -l_a, l+l_b \rangle$$

$c = konst.$

$$R_a = \eta_{R_a} = 1 - \frac{x}{l}$$

$$R_b = \eta_{R_b} = \frac{x}{l}$$

$$R_a \quad c=0$$

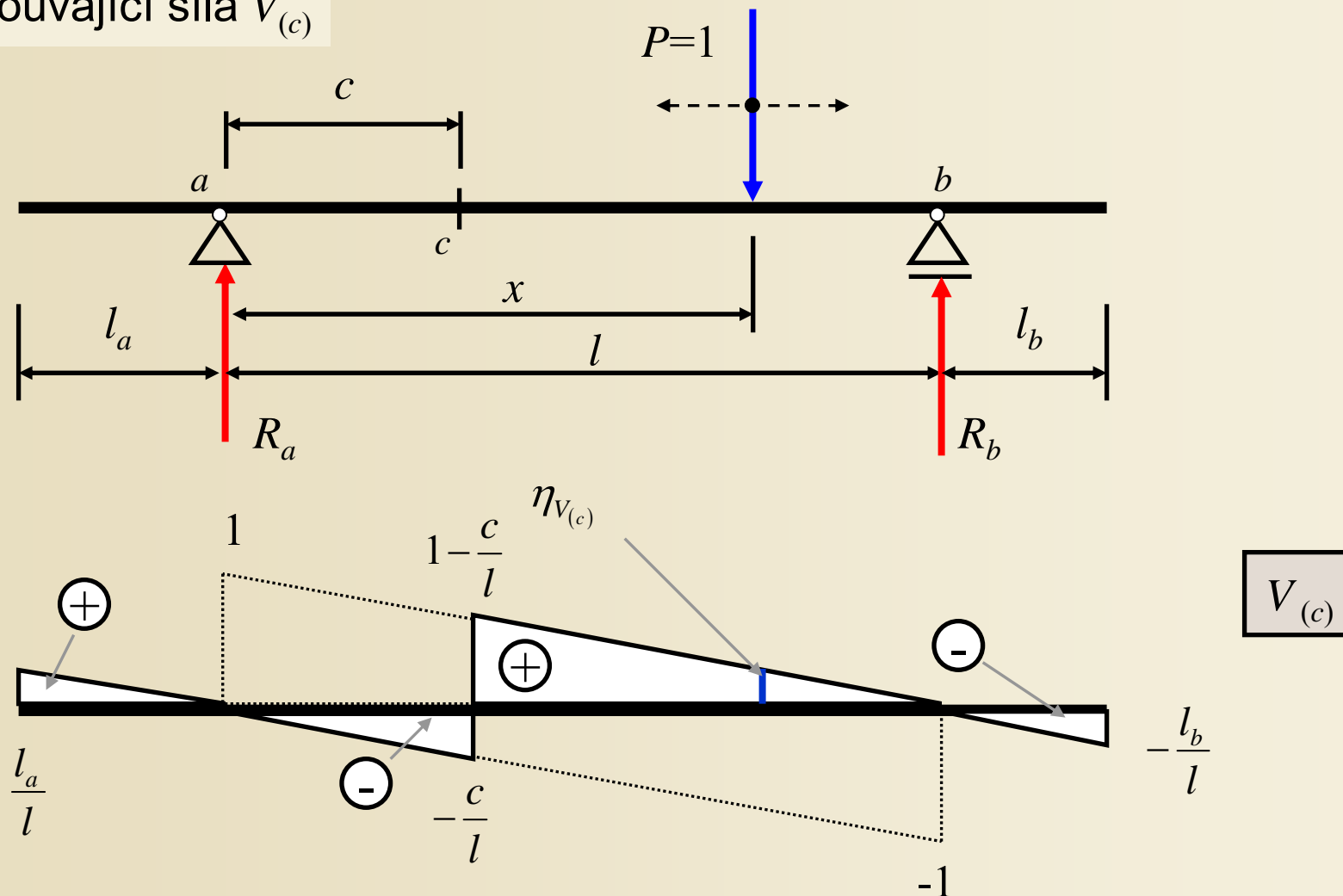
$$\eta_{R_a} = -\frac{l_b}{l}$$

$$R_b \quad c=l$$

$$\eta_{R_b} = 1 + \frac{l_b}{l}$$

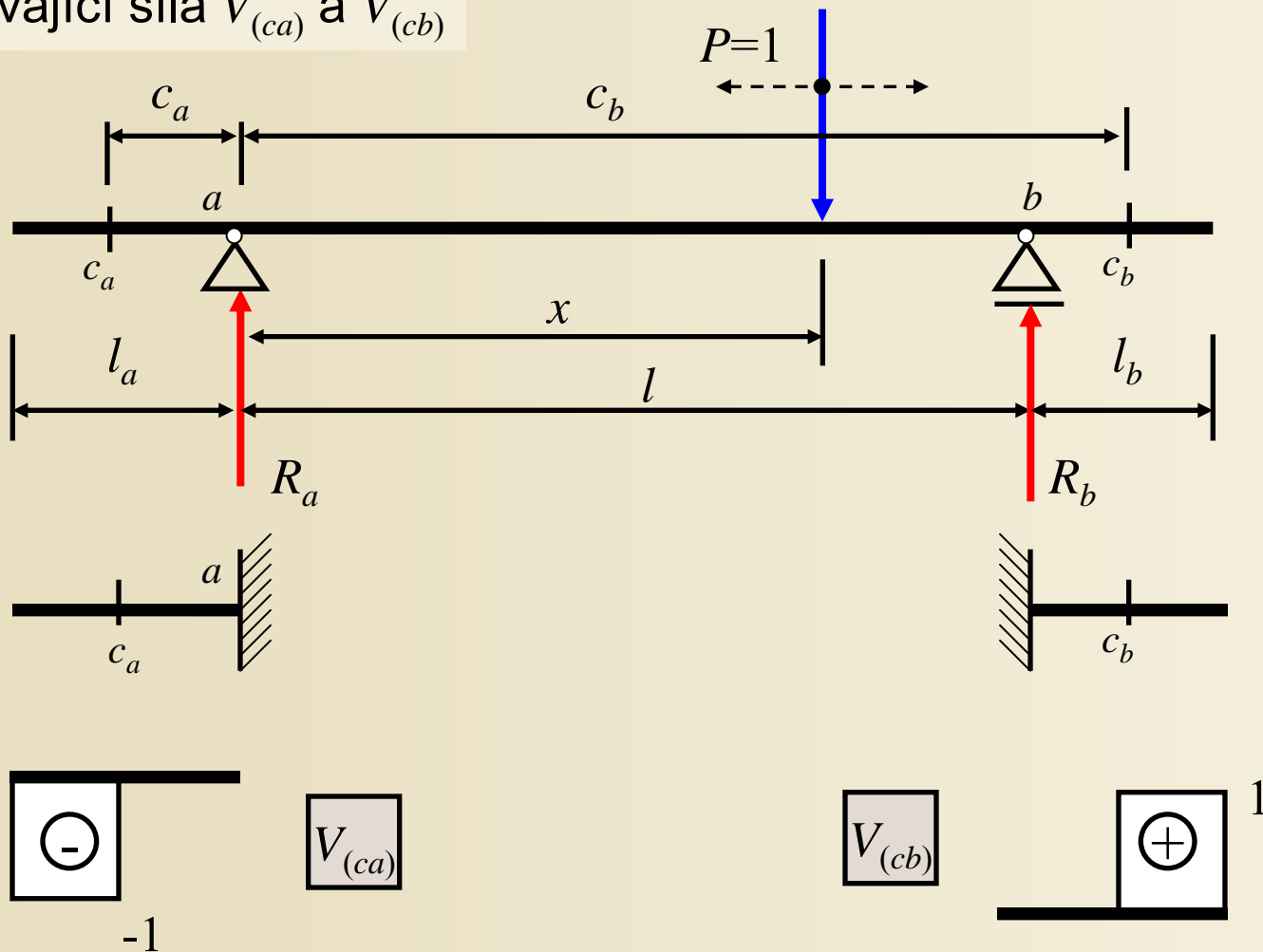
Prostý nosník s převislými konci

Posouvající síla $V_{(c)}$



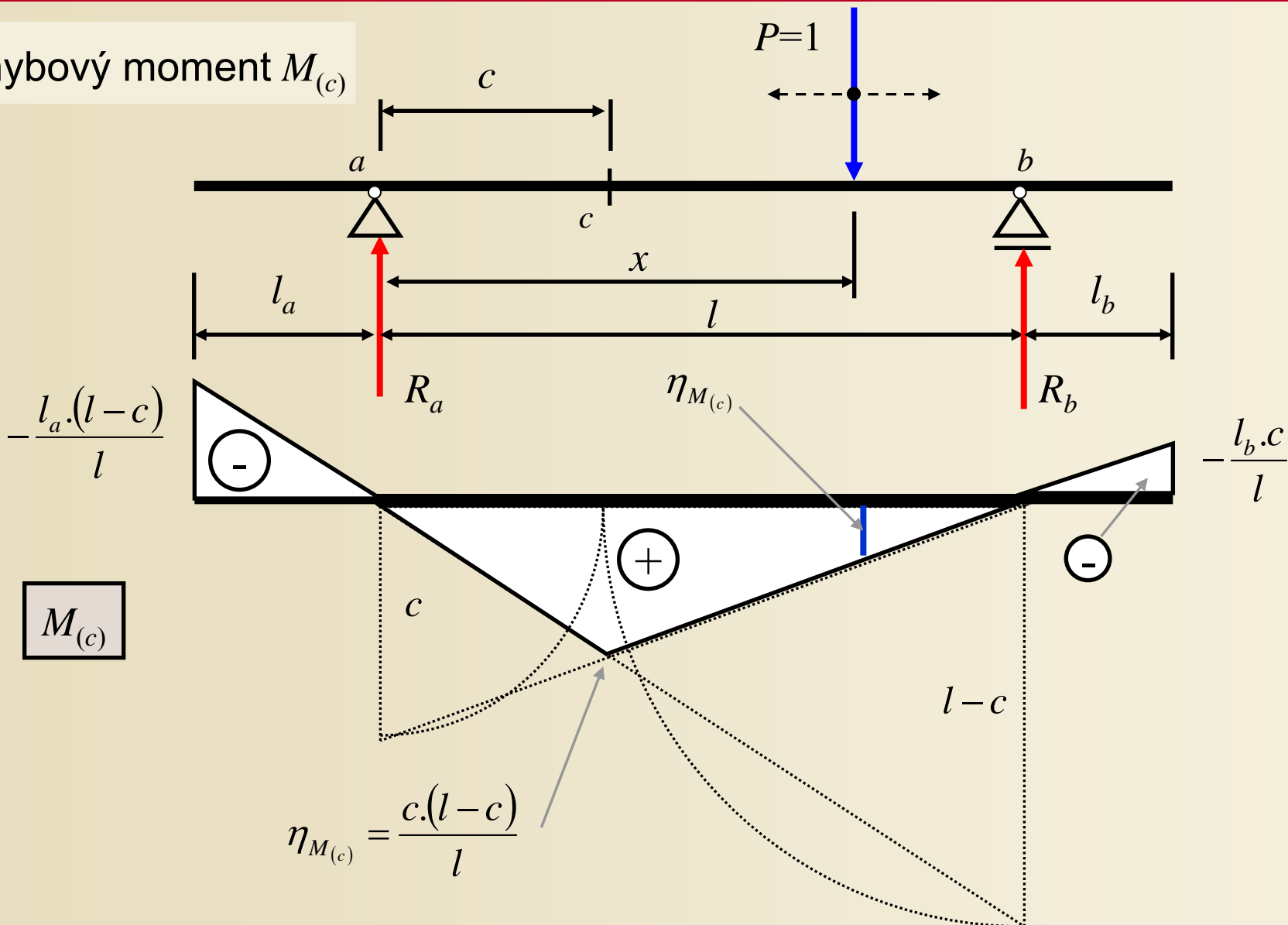
Prostý nosník s převislými konci

Posouvající síla $V_{(ca)}$ a $V_{(cb)}$



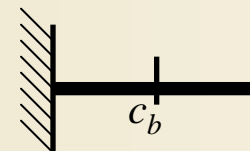
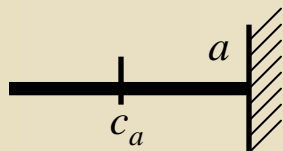
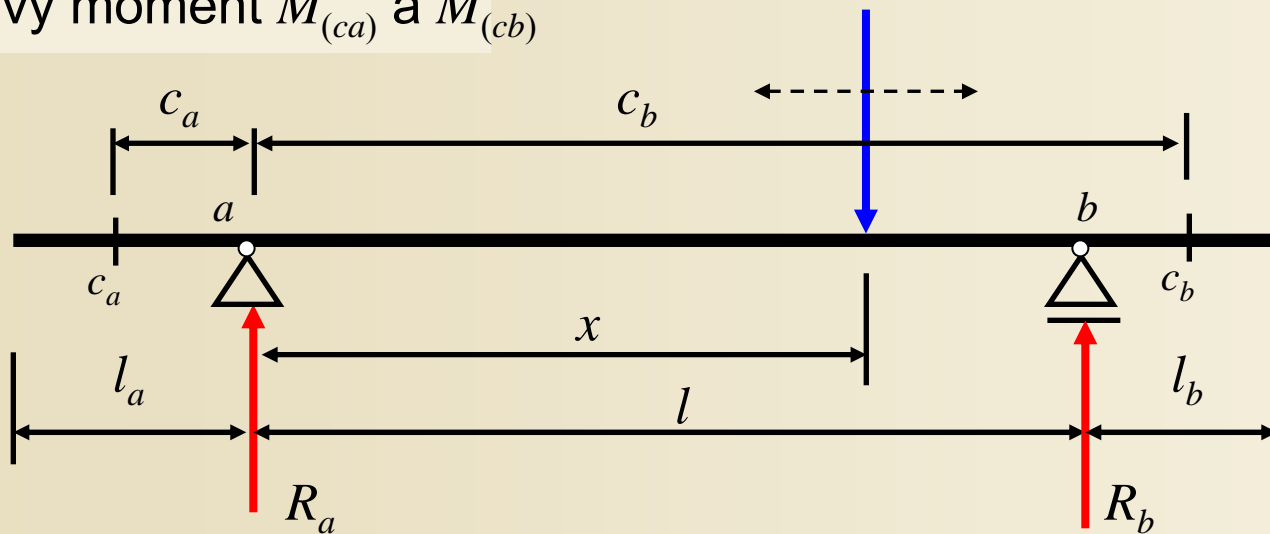
Prostý nosník s převislými konci

Ohybový moment $M_{(c)}$



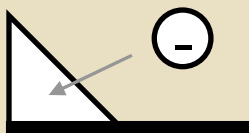
Prostý nosník s převislými konci

Ohybový moment $M_{(ca)}$ a $M_{(cb)}$



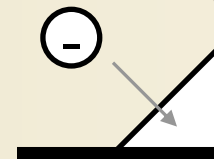
$$\eta_{M_{(ca)}} = -(l_a - c_a)$$

$$\eta_{M_{(cb)}} = -[l_b - (c_b - l)]$$



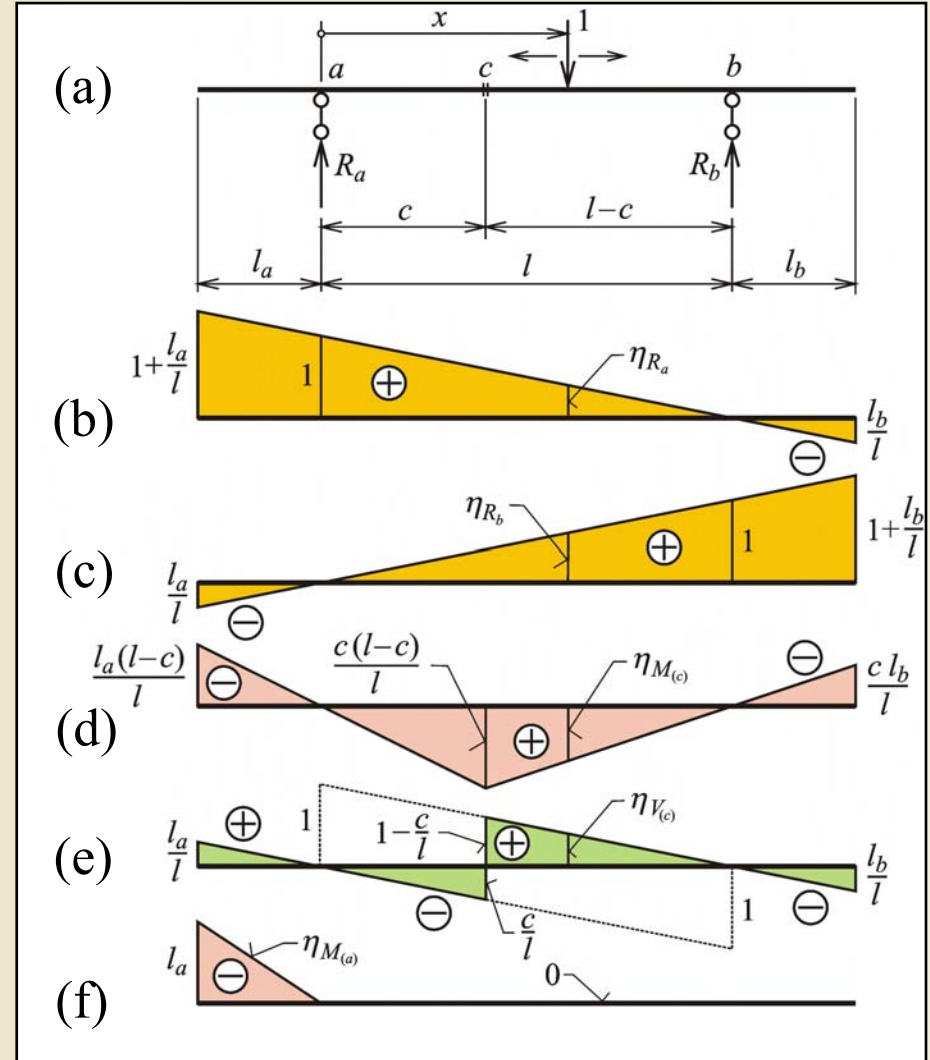
$M_{(ca)}$

$M_{(cb)}$



Příčinkové čáry na prostém nosníku s převislými konci

- (b) Příčinková čára reakce R_a
- (c) Příčinková čára reakce R_b
- (d) Příčinková čára ohybového momentu $M_{(c)}$ v poli
- (e) Příčinková čára posouvající síly $V_{(c)}$ v poli
- (f) Příčinková čára ohybového momentu $M_{(a)}$ nad podporou a



Příčinkové čáry na prostém nosníku s převislými konci

Obr. 11.4. / str. 174

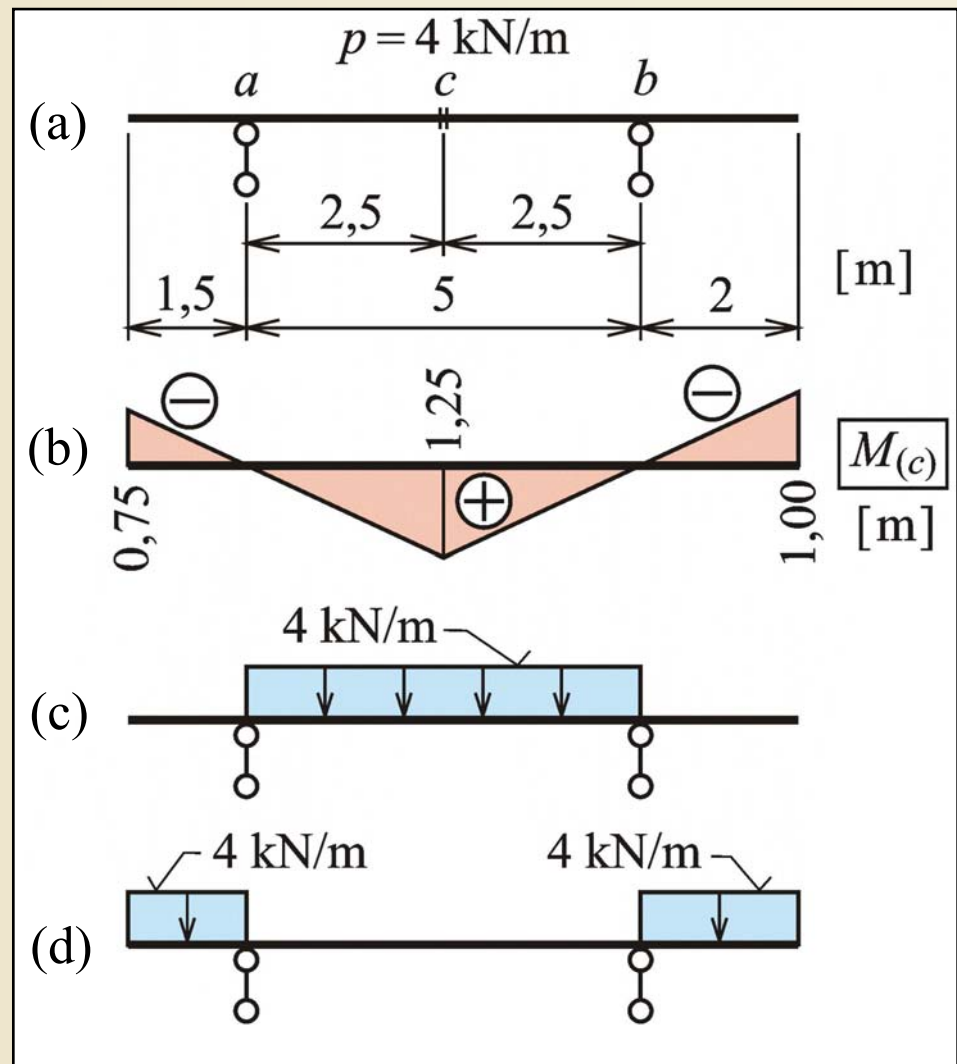
Příklad 8.2

Zadání:

S využitím příčinkových čar určete případný extrémní účinek nahodilého zatížení

Řešení:

Největší **kladný (záporný)** ohybový moment – zatížit pouze část konstrukce s **kladnými (zápornými)** pořadnicemi příčinkové čáry



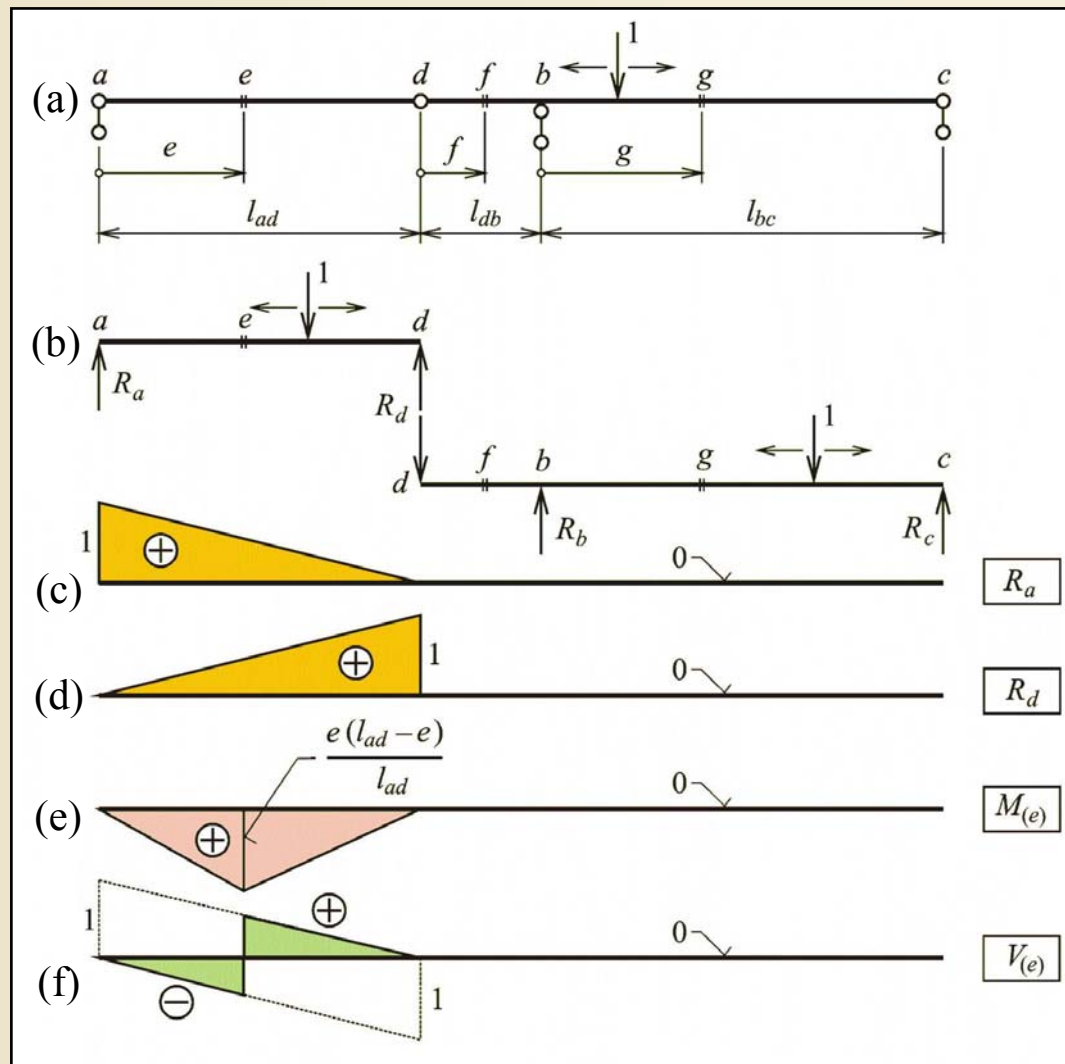
Zadání a řešení příkladu 8.2

Obr. 11.7. / str. 176

Příčinkové čáry na spojitém nosníku s vloženými klouby

Část nesená

- (c) Příčinková čára reakce R_a
- (d) Příčinková čára interakce R_d
- (e) Příčinková čára ohybového momentu $M_{(e)}$
- (f) Příčinková čára posouvající síly $V_{(e)}$



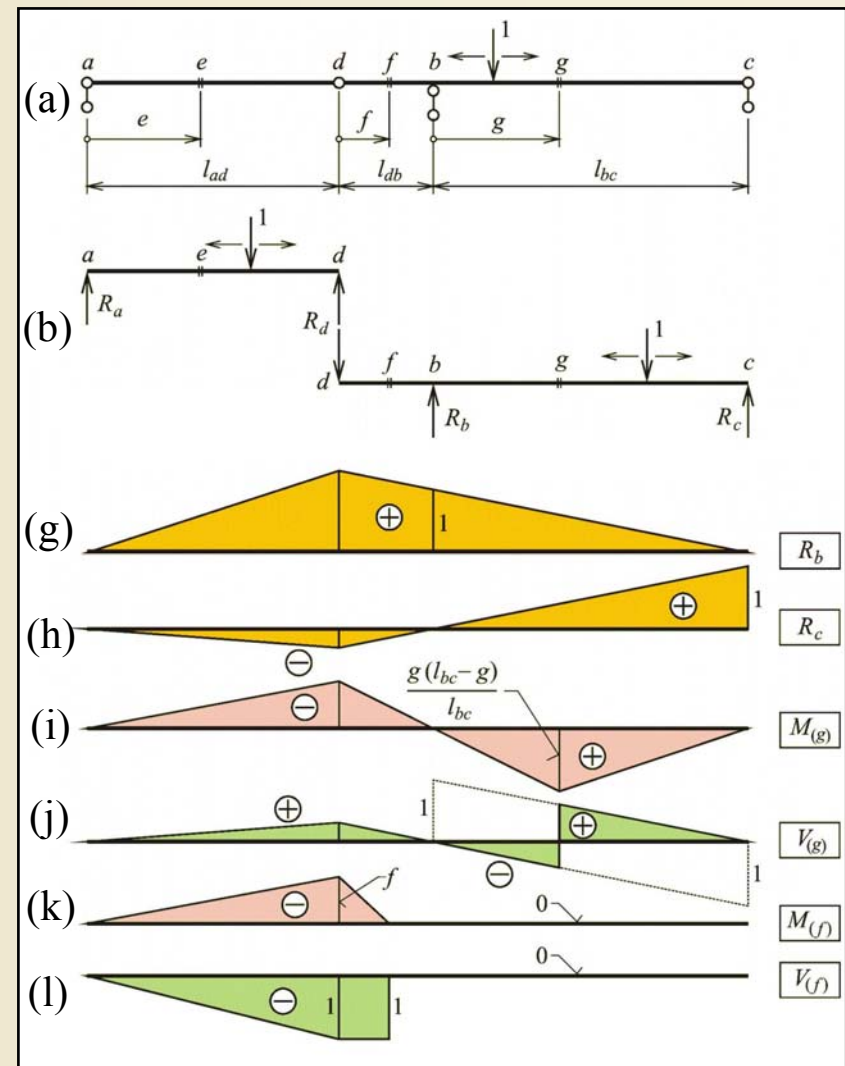
Příčinkové čáry na spojitém nosníku s vloženým kloubem

Obr. 11.8.b. / str. 178

Příčinkové čáry na spojitém nosníku s vloženými klouby

Část nesoucí

- (g) Příčinková čára reakce R_b
- (h) Příčinková čára reakce R_c
- (i) Příčinková čára ohybového momentu $M_{(g)}$ v poli
- (j) Příčinková čára posouvající síly $V_{(g)}$ v poli
- (k) Příčinková čára ohybového momentu $M_{(f)}$ na převislém konci
- (l) Příčinková čára posouvající síly $V_{(f)}$ na převislém konci

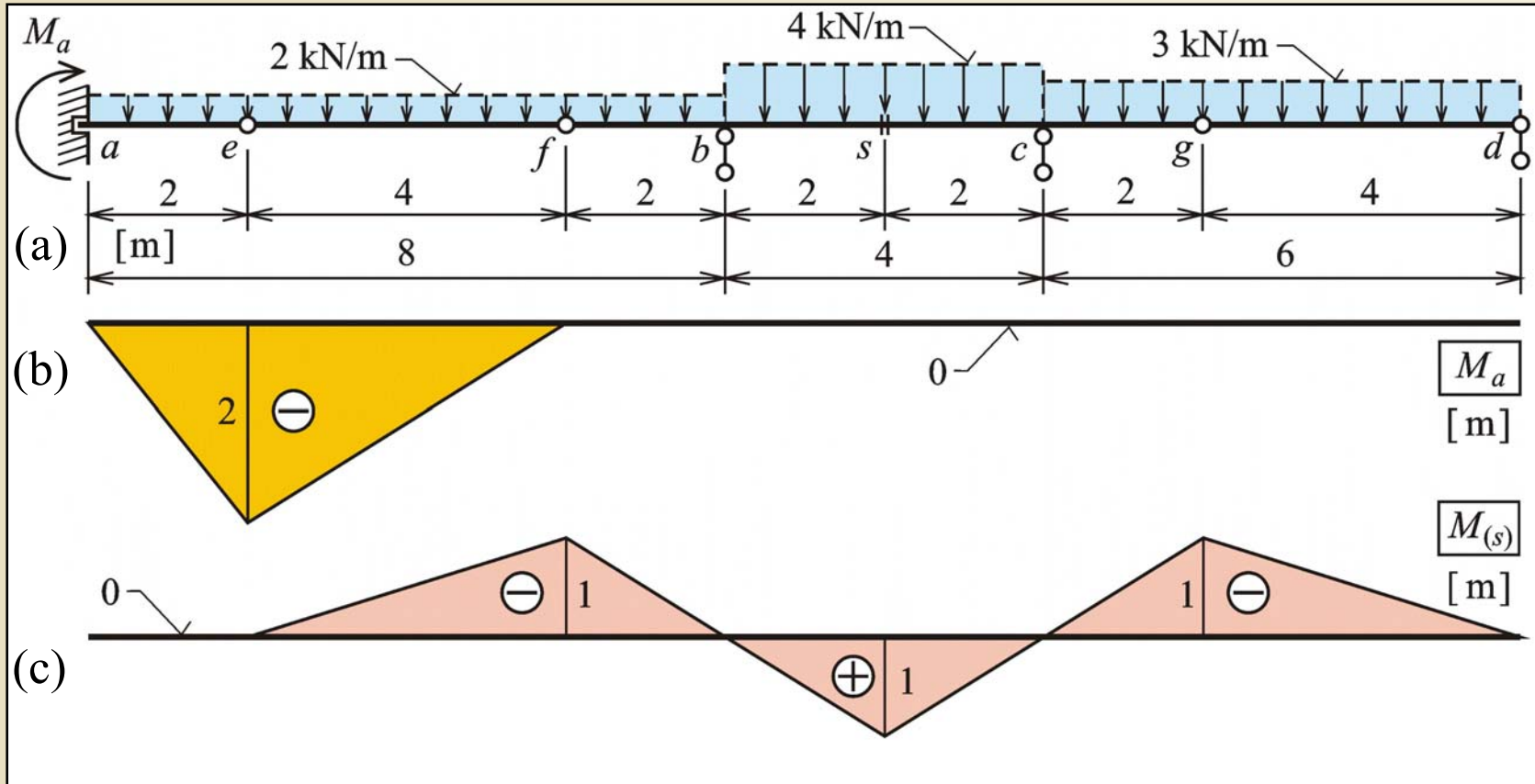


Příčinkové čáry na spojitém nosníku s vloženým kloubem

Obr. 11.8.b. / str. 178

Příklad 8.3

Zadání: S využitím příčinkových čar určete případné extrémní účinky nahodilého zatížení M_a a $M_{(s)}$



Zadání a řešení příkladu 8.3

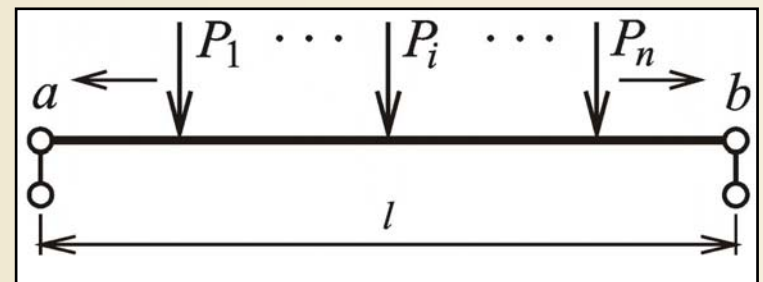
Obr. 11.9. / str. 180

Pohyblivé vozidlo na prostém nosníku - formulace úlohy

Zatížení: Pohyblivé vozidlo ve formě soustavy svislých bodových sil $P_1, \dots, P_i, \dots, P_n$.

Předpoklad: Celá soustava se vejde na nosník, žádná síla nevyjede za okraj nosníku ani na nosník nevjede další síla.

Požadavek: Stanovení největšího možného ohybového momentu na nosníku.



Pohyblivé vozidlo na prostém nosníku
Obr. 11.10. / str. 181

Maximální ohybový moment v zadaném průřezu

Pevně zadaný průřez c , v němž se zjišťuje maximální možný ohybový moment.

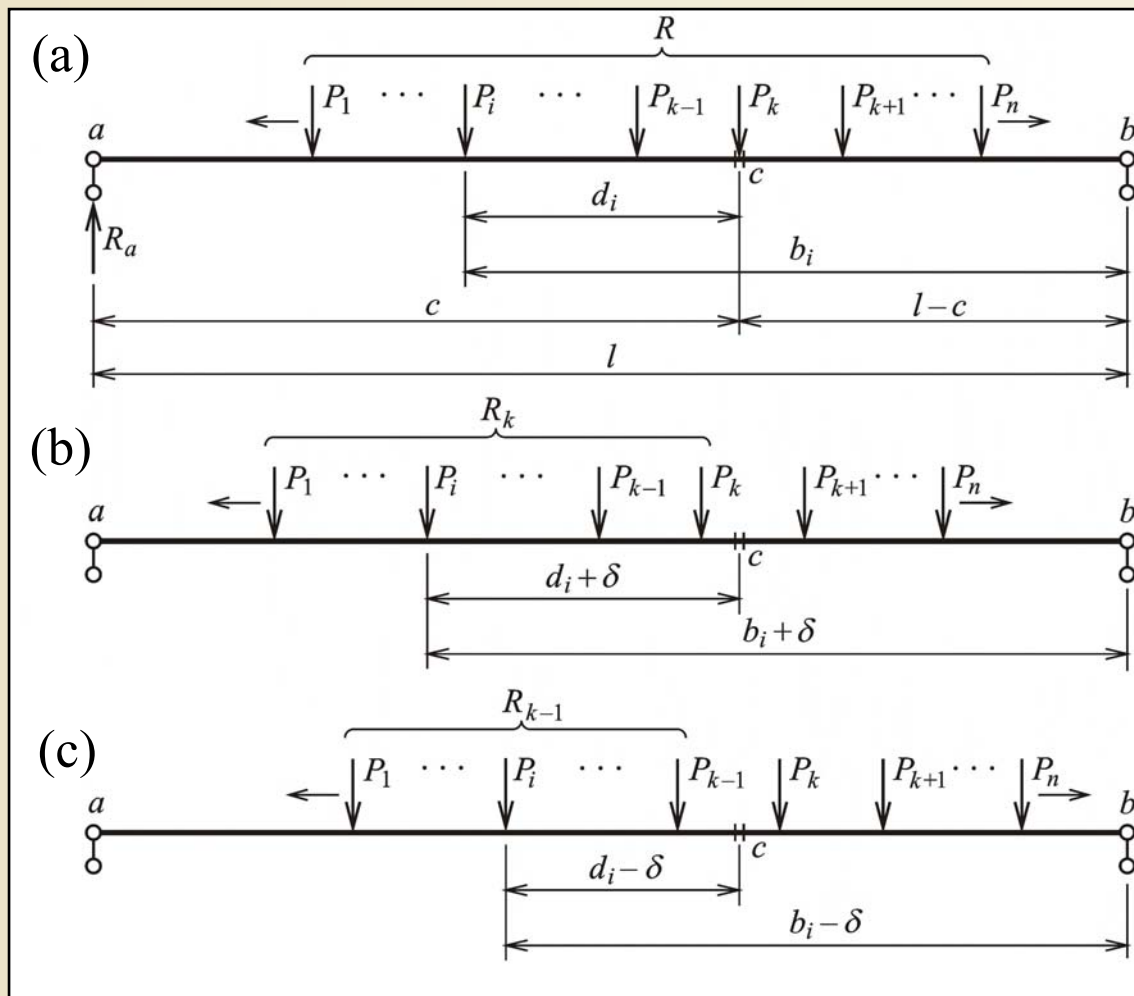
Reakce

$$R_a = \frac{1}{l} \cdot \sum_{i=1}^n P_i \cdot b_i$$

Ohybový moment

$$\begin{aligned} M_{(c)} &= R_a \cdot c - \sum_{i=1}^k P_i \cdot d_i = \\ &= \frac{c}{l} \cdot \sum_{i=1}^n P_i \cdot b_i - \sum_{i=1}^{k-1} P_i \cdot d_i = \\ &= \frac{c}{l} \cdot \sum_{i=1}^n P_i \cdot b_i - \sum_{i=1}^k P_i \cdot d_i \end{aligned}$$

$$d_k = 0$$



K odvození Winklerova kritéria

Obr. 11.11. / str. 181

Maximální ohybový moment v zadaném průřezu

Soustava popojede o δ doleva

$$\begin{aligned} \bar{M}_{(c)} &= \frac{c}{l} \cdot \sum_{i=1}^n P_i \cdot (b_i + \delta) - \sum_{i=1}^k P_i \cdot (d_i + \delta) = \\ &= M_{(c)} + \delta \cdot \left(\frac{c}{l} \cdot R - R_k \right) \end{aligned}$$

kde $R = \sum_{i=1}^n P_i$ $R_k = \sum_{i=1}^k P_i$

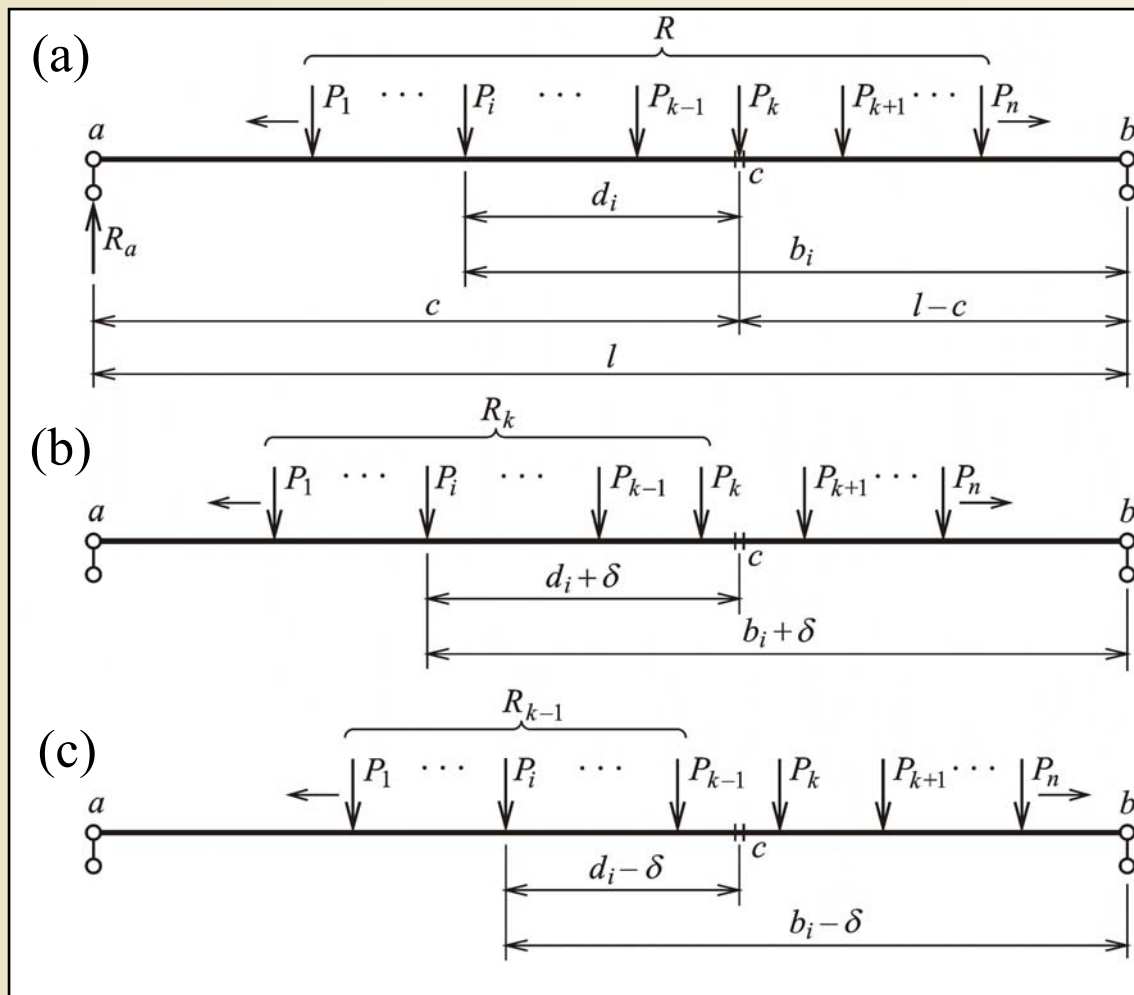
Rozhoduje znaménko výrazu
(nesmí být kladné)

$$D = \frac{c}{l} \cdot R - R_k$$

Soustava popojede o δ doprava

$$\begin{aligned} \bar{M}_{(c)} &= \frac{c}{l} \cdot \sum_{i=1}^n P_i \cdot (b_i - \delta) - \sum_{i=1}^{k-1} P_i \cdot (d_i - \delta) = \\ &= M_{(c)} - \delta \cdot \left(\frac{c}{l} \cdot R - R_{k-1} \right) \end{aligned}$$

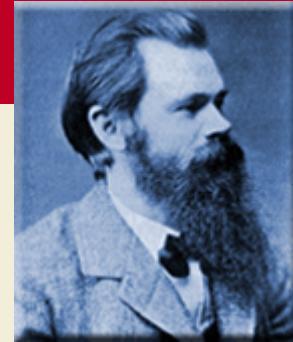
kde $R_{k-1} = \sum_{i=1}^{k-1} P_i$



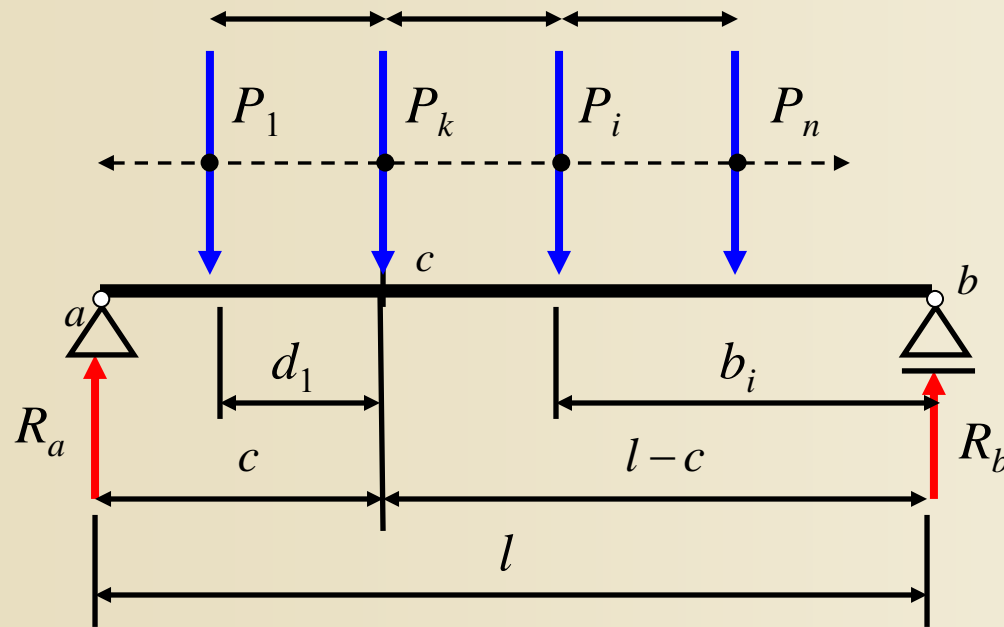
K odvození Winklerova kritéria

Obr. 11.11. / str. 181

Winklerovo kritérium



Emil Winkler
(1835-1888)



Musí platit:

$$D = \frac{c}{l} \cdot R - R_k \leq 0 \Rightarrow \frac{c}{l} \cdot R \leq R_k$$

$$D = \frac{c}{l} \cdot R - R_{k-1} \geq 0 \Rightarrow R_{k-1} \leq \frac{c}{l} \cdot R$$

P_k ... kritická síla

Winklerovo kritérium

$$R_{k-1} \leq \frac{c}{l} \cdot R \leq R_k$$

$$\eta_{M(c)} = \eta_k = \frac{c \cdot (l - c)}{l}$$

$$\max M_{(c)} = \sum_{i=1}^n P_i \cdot \eta_i$$

$$\sum_{i=1}^{k-1} P_i = R_{k-1}$$

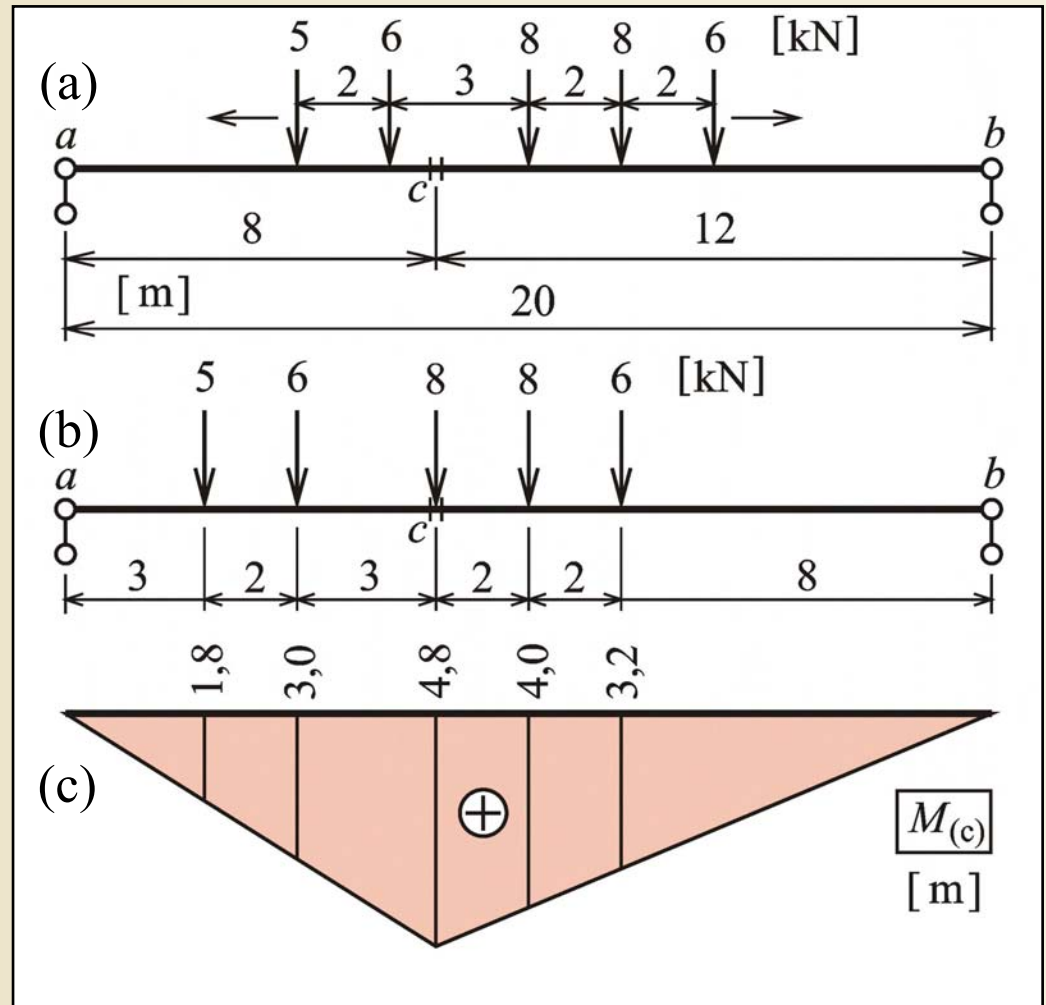
$$\sum_{i=1}^n P_i = R$$

$$\sum_{i=1}^k P_i = R_k$$

Příklad 8.4

Zadání:

S využitím Winklerova kritéria určete rozhodující sílu a umístěte soustavu sil do nejúčinnější polohy, při které v průřezu c vznikne maximální ohybový moment. S využitím příčinkové čáry vypočtete velikost maximálního ohybového momentu.



Výpočet maximálního ohybového momentu
v zadaném průřezu (příklad 8.4)

Obr. 11.12. / str. 184

Obory sil pohyblivé soustavy na prostém nosníku

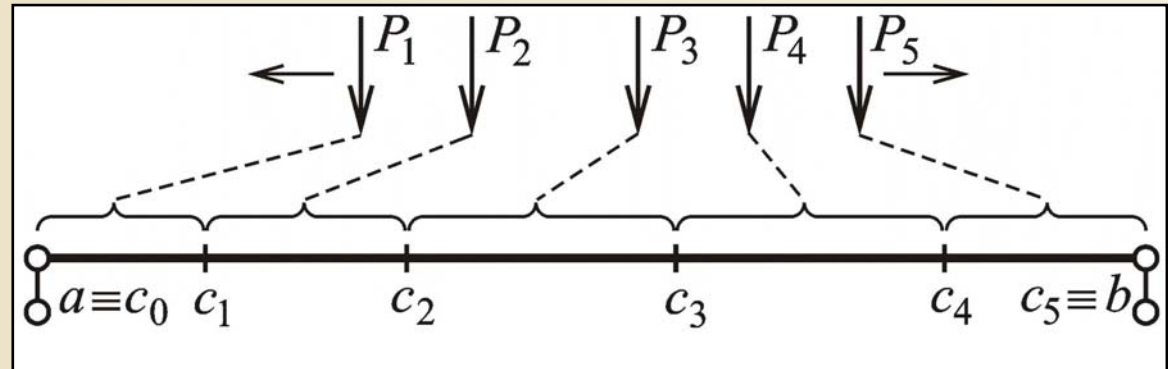
Obor síly – množina všech bodů, pro něž je rozhodující táž síla pohyblivé soustavy

Levá hranice

$$R_{k-1} = \frac{c_{k-1}}{l} \cdot R \quad \rightarrow \quad c_{k-1} = \frac{R_{k-1}}{R} \cdot l$$

Pravá hranice

$$R_k = \frac{c_k}{l} \cdot R \quad \rightarrow \quad c_k = \frac{R_k}{R} \cdot l$$



Obory sil pohyblivé soustavy

Obr. 11.13. / str. 184

Čára maximálních ohybových momentů pod sledovanou silou

$$\sum M_{P_k} = 0$$

$$-\sum_{i=1}^n P_i \cdot d_i = R \cdot r \Rightarrow r = -\frac{1}{R} \cdot \sum_{i=1}^n P_i \cdot d_i$$

$$R_a = R \cdot \frac{l-x}{l}$$

Reakce

Ohybový moment v působišti P_k

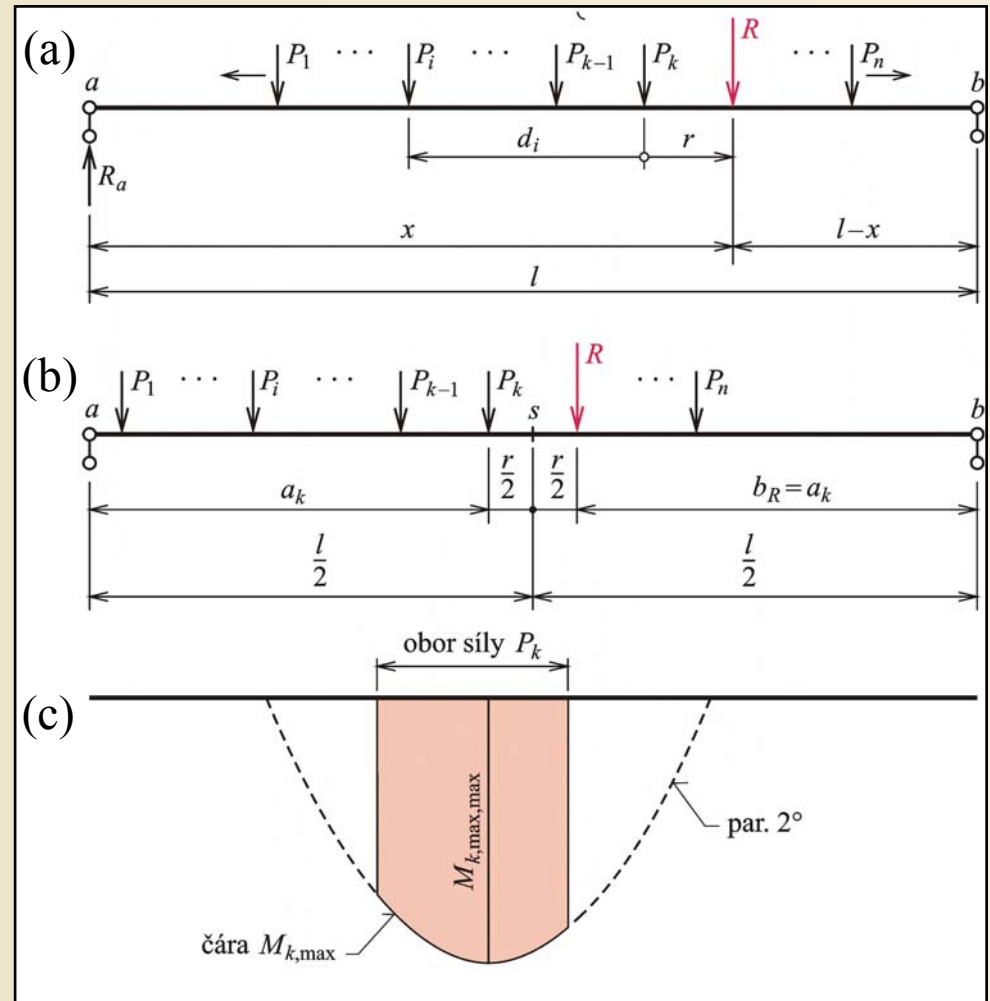
$$M_{k,\max} = R \cdot \frac{l-x}{l} \cdot (x-r) - \sum_{i=1}^{k-1} P_i \cdot d_i$$

$$M_{k,\max} = -\frac{R}{l} \cdot x^2 + \frac{R \cdot (l+r)}{l} \cdot x - \left(R \cdot r + \sum_{i=1}^{k-1} P_i \cdot d_i \right)$$

Poloha největšího možného ohybového momentu $M_{k,\max,\max}$ pod P_k

$$\frac{dM_{k,\max}}{dx} = -\frac{2R}{l} \cdot x + \frac{R \cdot (l+r)}{l} = 0$$

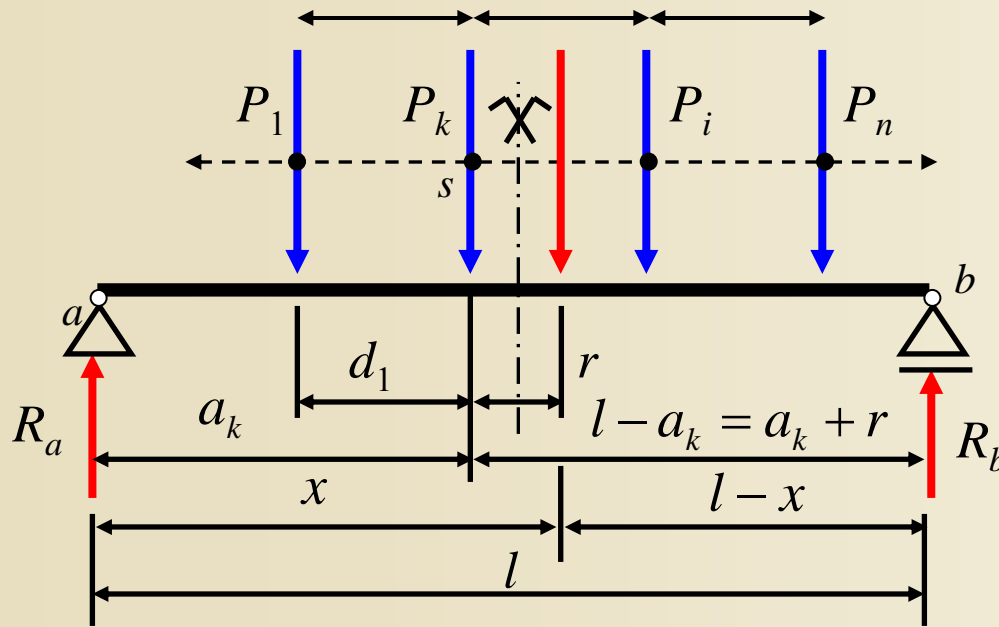
$$\frac{l}{2} = x - \frac{r}{2} \quad \dots \text{břemenové kritérium}$$



K odvození čáry maximálních ohybových momentů pod sledovanou silou a břemenového kritéria

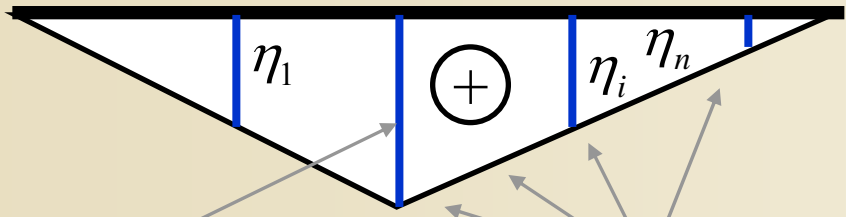
Obr. 11.14. / str. 186

Břemenové kritérium



Pod sledovanou silou P_k pohyblivé soustavy sil na prostém nosníku vznikne maximální ohybový moment tehdy, jestliže střed nosníku s půlí vzdálenost r mezi paprskem výslednice R soustavy a paprskem sledované síly P_k .

$M_{(ak)}$



$$\eta_{M_{(ak)}} = \eta_k = \frac{a_k \cdot (l - a_k)}{l}$$

$$M_{k, \max, \max} = \sum_{i=1}^n P_i \cdot \eta_i$$

$$r = -\frac{1}{R} \cdot \sum_{i=1}^n P_i \cdot d_i$$

$$R = \sum_{i=1}^n P_i$$

$$a_k = \frac{l}{2} - \frac{r}{2}$$

Příklad 8.6

Zadání:

S využitím břemenového kritéria určete maximální ohybový moment $M_{2,\max,\max}$ pod silou P_2 . Zjistěte, zda pořadnice momentu $M_{2,\max,\max}$ leží uvnitř oboru sledované síly.

Řešení:

$$R = \sum_{i=1}^n P_i$$

$$r = -\frac{1}{R} \cdot \sum_{i=1}^n P_i \cdot d_i$$

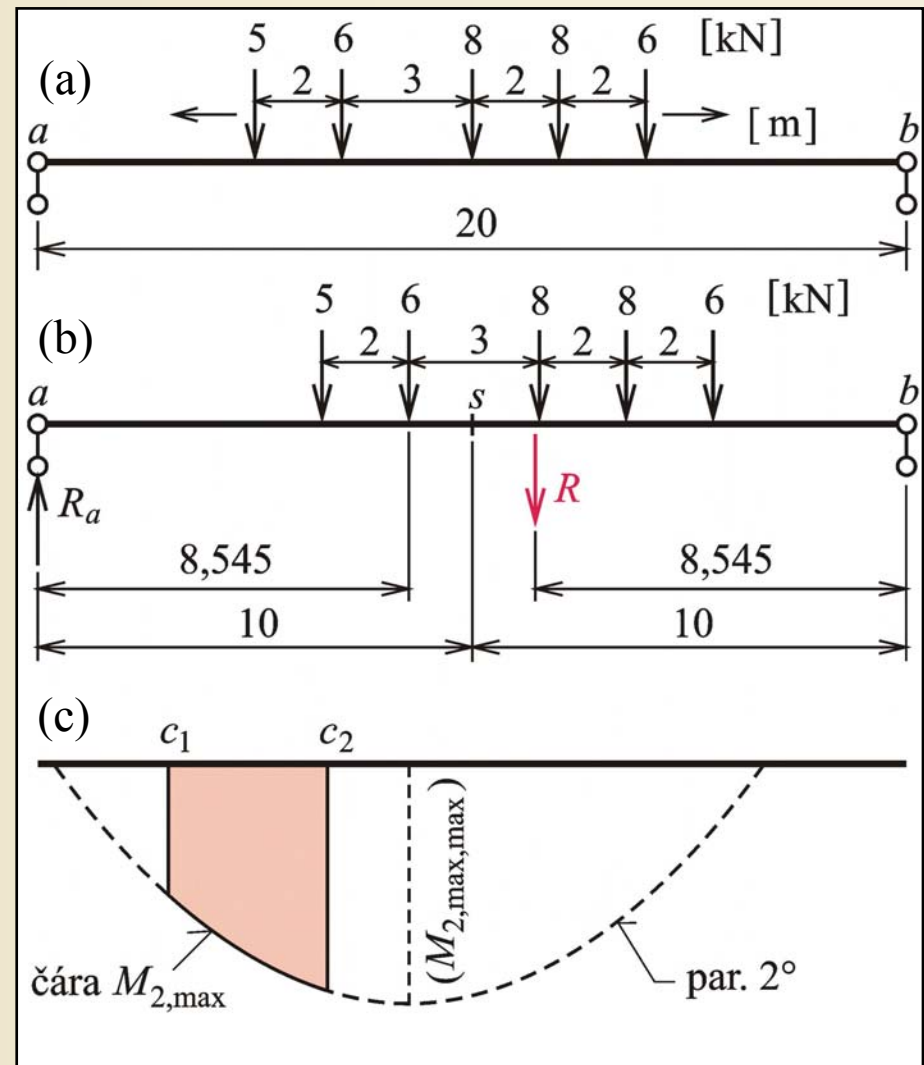
$$a_2 = \frac{l}{2} - \frac{r}{2} = 8,545\text{m}$$

$$R_a = R \cdot \frac{a_k}{l}$$

$$M_{2,\max,\max} = R_a \cdot a_k - P_1 \cdot d_1$$

$$c_1 = \frac{P_1}{R} \cdot l = 3,03\text{m}$$

$$c_2 = \frac{P_1 + P_2}{R} \cdot l = 6,66\text{m} < a_2$$



Zadání a řešení příkladu 8.6

Obr. 11.16. / str. 187

Příklad 8.7

Zadání:

Sestrojte čáru maximálních ohybových momentů na celém nosníku pohyblivé soustavy tří sil, působících na prostém nosníku. Zjistěte moment $M_{\max, \max}$.

Řešení:

- Hranice oborů sil a příčinkové čáry pro vnitřní hranice

$$c_{k-1} = \frac{R_{k-1}}{R} \cdot l \quad c_k = \frac{R_k}{R} \cdot l$$

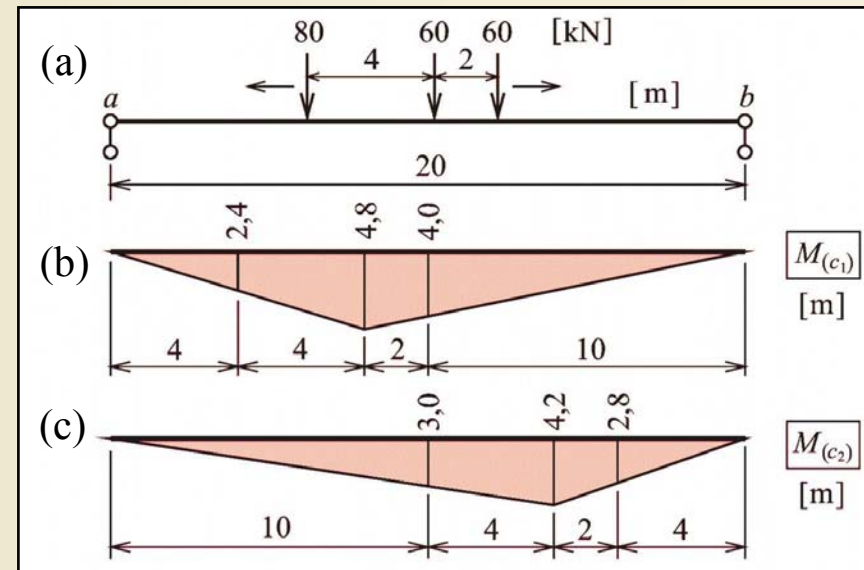
$$\sum_{i=1}^{k-1} P_i = R_{k-1} \quad \sum_{i=1}^n P_i = R = 200 \text{ kN} \quad \sum_{i=1}^k P_i = R_k$$

$$c_0 = 0 \text{ m} \quad c_1 = 8 \text{ m} \quad c_2 = 14 \text{ m} \quad c_3 = 20 \text{ m}$$

- Pořadnice čáry maximálních ohybových momentů v místech vnitřních hranic

$$M_{(c_k), \max} = \sum_{i=1}^n P_i \cdot \eta_i$$

$$M_{1, \max} = 720 \text{ kNm} \quad M_{2, \max} = 660 \text{ kNm}$$



Zadání a řešení příkladu 8.7

Obr. 11.17.a. / str. 189

Příklad 8.7

Řešení:

3. Výpočet maximálních ohybových momentů pod silami soustavy

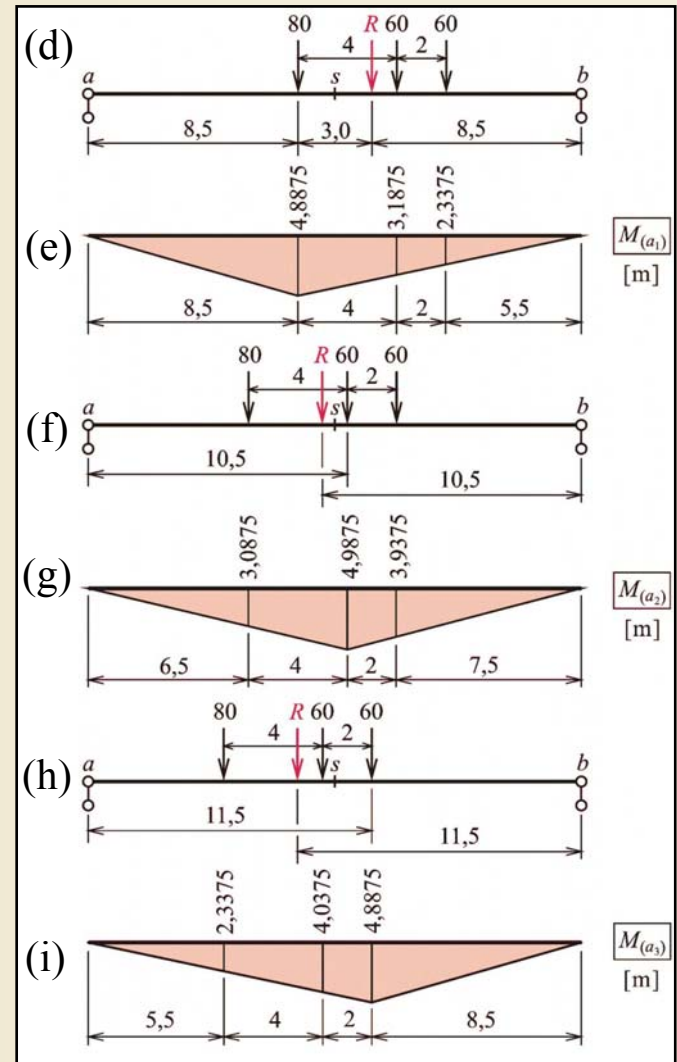
$$r = -\frac{1}{R} \cdot \sum_{i=1}^n P_i \cdot d_i \quad R = \sum_{i=1}^n P_i = 200 \text{ kN}$$

$$a_k = \frac{l}{2} - \frac{r}{2} \quad M_{k,\max,\max} = \sum_{i=1}^n P_i \cdot \eta_i$$

(d,e) $r_1 = 3\text{m}$ $a_1 = 8,5\text{m}$ $M_{1,\max,\max} = 722,5\text{kNm}$

(f,g) $r_2 = -1\text{m}$ $a_2 = 10,5\text{m}$ $M_{2,\max,\max} = 782,5\text{kNm}$

(h,i) $r_3 = -3\text{m}$ $a_3 = 11,5\text{m}$ $M_{3,\max,\max} = 722,5\text{kNm}$



Zadání a řešení příkladu 8.7

Obr. 11.17.b. / str. 189

Příklad 8.7

Řešení:

4. Čára maximálních ohybových momentů na celém nosníku

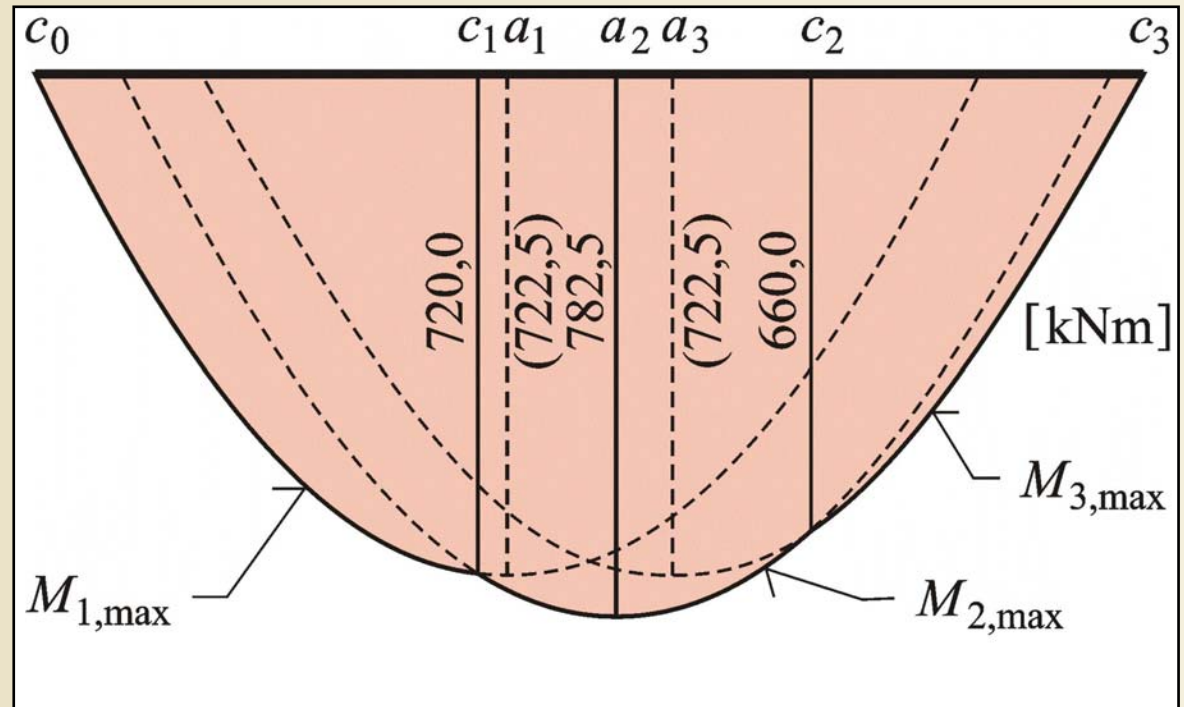
$$M_{k,\max,\max} = -\frac{R}{l} \cdot x^2 + \frac{R \cdot (l+r)}{l} \cdot x - \left(R \cdot r + \sum_{i=1}^{k-1} P_i \cdot d_i \right)$$

$$M_{2,\max,\max} = M_{\max,\max} = 782,5 \text{ kNm}$$

Čára maximálních ohybových momentů představuje nejúplnější informaci o ohybu nosníku, často dosti pracné.

Přímý výpočet – pod kterou P_i vznikne

$M_{\max,\max}$?



Čára maximálních ohybových momentů (výsledek příkladu 8.7)

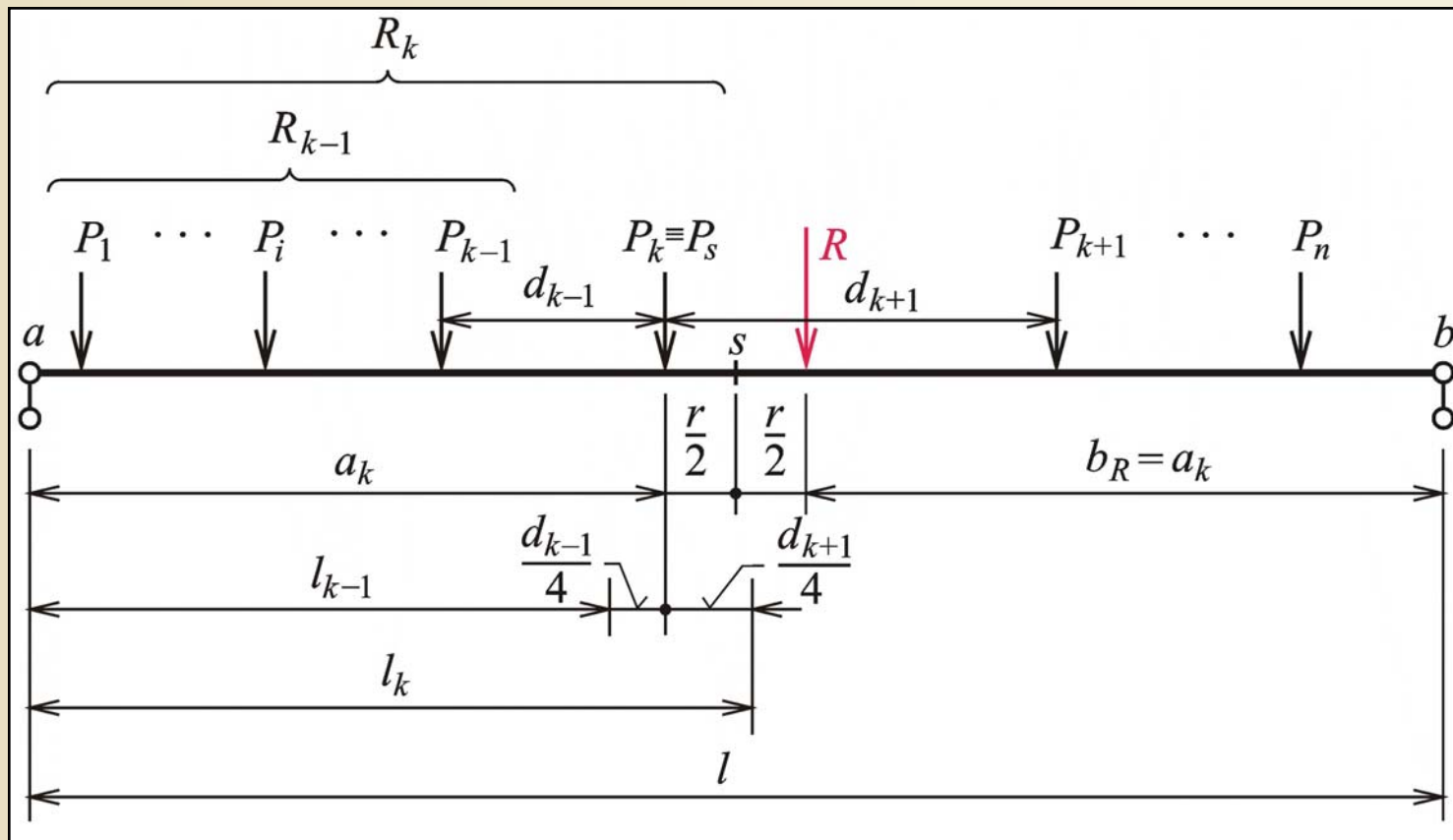
Obr. 11.18. / str. 190

Přímý výpočet vůbec největšího ohybového momentu

Předpoklad: $M_{\max, \max}$ vznikne ve smyslu Winklerova kritéria pod silou rozhodující pro střed nosníku ($c=l/2$) – **aritmeticky střední síla** P_s . Ve smyslu břemenového kritéria ($P_k = P_s$) pak pod P_k určit $M_{\max, \max}$.

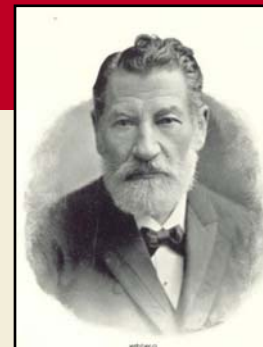
Nevzniká-li $M_{\max, \max}$ pod některou sousední silou (pokud jsou výrazně větší než P_k) se lze přesvědčit pomocí **Šolínova kritéria:**

$$\frac{R_{k-1}}{l_{k-1}} \leq \frac{R}{l} \leq \frac{R_k}{l_k}$$

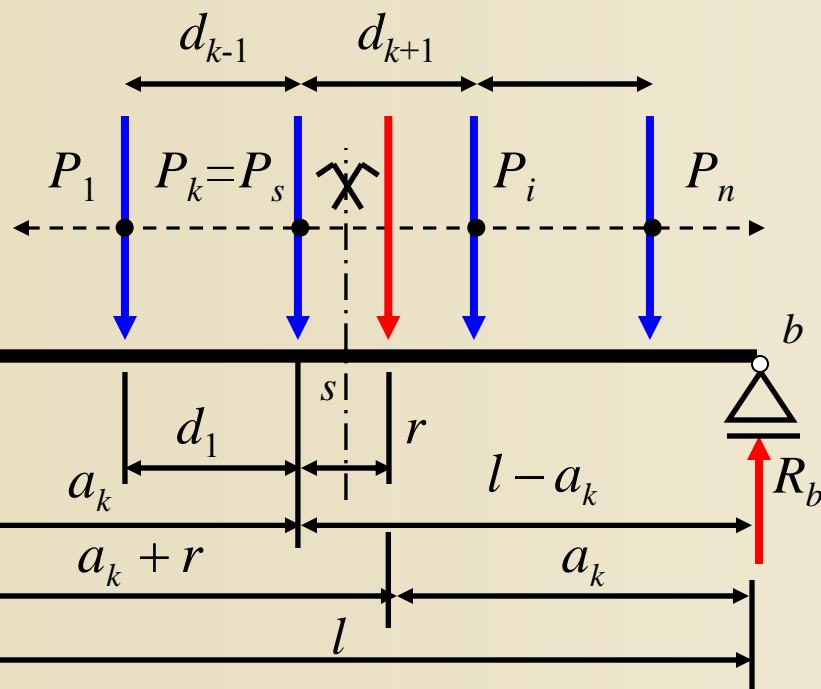


Šolínovo kritérium
Obr. 11.19. / str. 191

Šolínovo kritérium



Josef Šolín
(1841 - 1912)



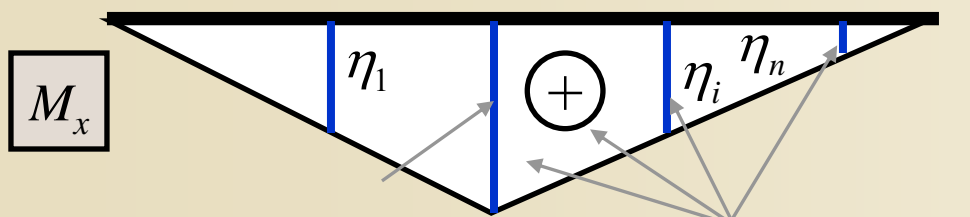
Postup:

1. Určení P_k pomocí Winklerova kritéria
2. Určení r pomocí břemenového kritéria
3. Ověření účinnosti dle Šolínova kritéria

$$\frac{R_{k-1}}{l_{k-1}} \leq \frac{R}{l} \leq \frac{R_k}{l_k} \quad \sum_{i=1}^{k-1} P_i = R_{k-1} \quad \sum_{i=1}^n P_i = R \quad \sum_{i=1}^k P_i = R_k$$

$$l_{k-1} = a_k - \frac{1}{4} \cdot d_{k-1}$$

$$l_k = a_k + \frac{1}{4} \cdot d_{k+1}$$



$$\eta_{M(a_k)} = \eta_k = \frac{a_k \cdot (l - a_k)}{l}$$

$$\max \max M = \sum_{i=1}^n P_i \cdot \eta_i$$

Průměrná hodnota zatížení připadající na celou délku nosníku l leží mezi průměrnými hodnotami zatížení připadajícími na pomocné úseky o délkách l_{k-1} a l_k .

Příklad 8.8

Zadání:

Zjistěte přímým výpočtem (s použitím Šolínova kritéria) hodnotu největšího možného ohybového momentu $M_{\max, \max}$ na celém nosníku.

Řešení:

1. Zjištění aritmeticky střední síly (**Winklerovo kritérium**)

$$R_{k-1} \leq \frac{c}{l} \cdot R \leq R_k$$

$$c = \frac{l}{2} \quad R = 330 \text{ kN} \\ P_s = P_3 = 50 \text{ kN}$$

2. Výpočet maximálního ohybového momentu pod aritmeticky střední silou (**břemenové kritérium**)

$$r = -\frac{1}{R} \cdot \sum_{i=1}^n P_i \cdot d_i$$

$$r = -0,630 \text{ m} \quad a_3 = 6,315 \text{ m}$$

$$M_{3, \max, \max} = 552,731 \text{ kNm}$$

3. Použití **Šolínova kritéria**:

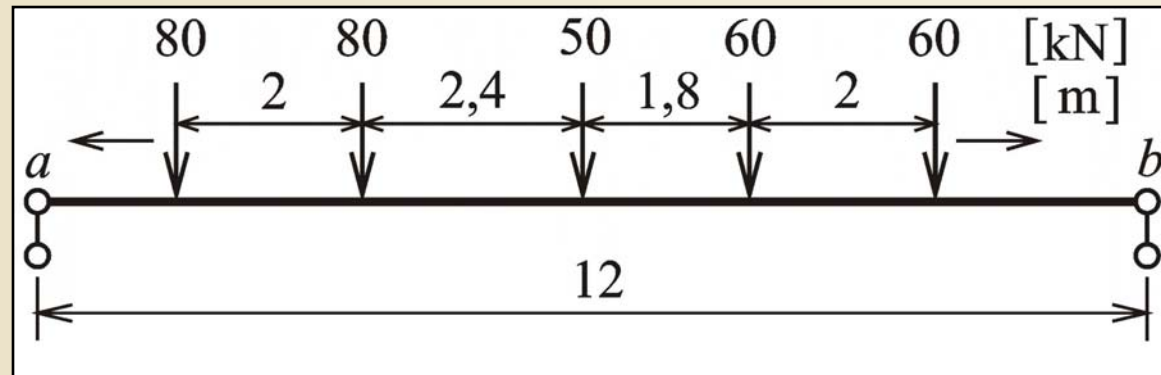
$$\frac{R_{k-1}}{l_{k-1}} \leq \frac{R}{l} \leq \frac{R_k}{l_k}$$

$$l_{k-1} = 5,715 \text{ m}$$

$$l_k = 6,765 \text{ m}$$

$$R_{k-1} = 160 \text{ kN} \quad R_k = 210 \text{ kN}$$

$$27,997 > 27,5 < 31,042$$



Není splněno, $M_{\max, \max}$ vznikne pod P_2 $M_{\max, \max} = 559,531 \text{ kNm}$

Zadání příkladu 8.8

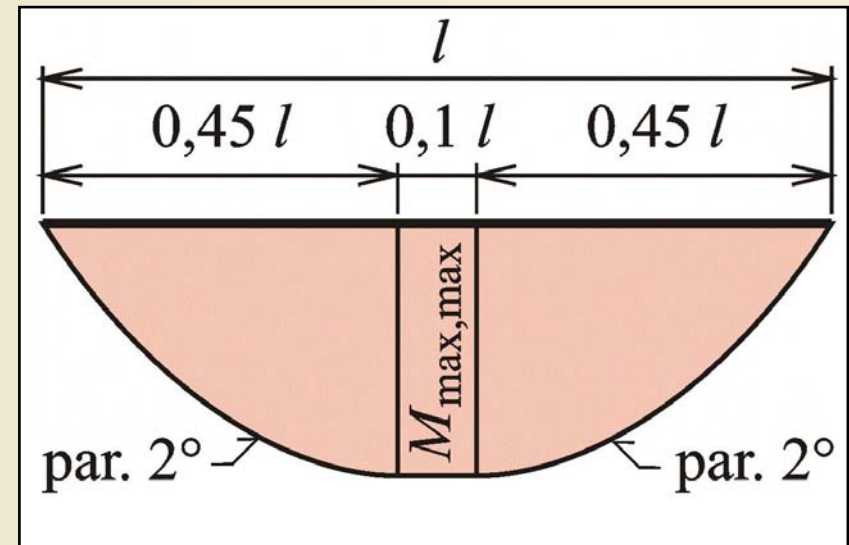
Obr. 11.20. / str. 192

Přibližná konstrukce čáry maximálních ohybových momentů

Sestrojení s využitím přímého výpočtu dle Šolínova kritéria.

Výhodné pro soustavy s mnoha silami, u nichž se předpokládá symetrie působení (vlaky v obou směrech).

Doporučuje norma ČSN 73 6203 Zatížení mostů.



Přibližná konstrukce čáry maximálních momentů

Obr. 11.21. / str. 192

Výpočet extrémních hodnot posouvající síly v zadaném průřezu

$V_{(c),\max}, V_{(c),\min} = ?$ $c = \text{konst.}$ Maximum (minimum) - kladná (záporná) část příčinkové čáry

Pozice I. P_1 v c zprava

$$R_{a,I} = V_{(c),I} = \frac{1}{l} \cdot \sum_{i=1}^n P_i \cdot b_i$$

Pozice II. P_2 v c zprava

(v případě, že P_1 je výrazně menší než P_2)

$$R_{a,II} = \frac{1}{l} \cdot \sum_{i=1}^n P_i \cdot (b_i + d)$$

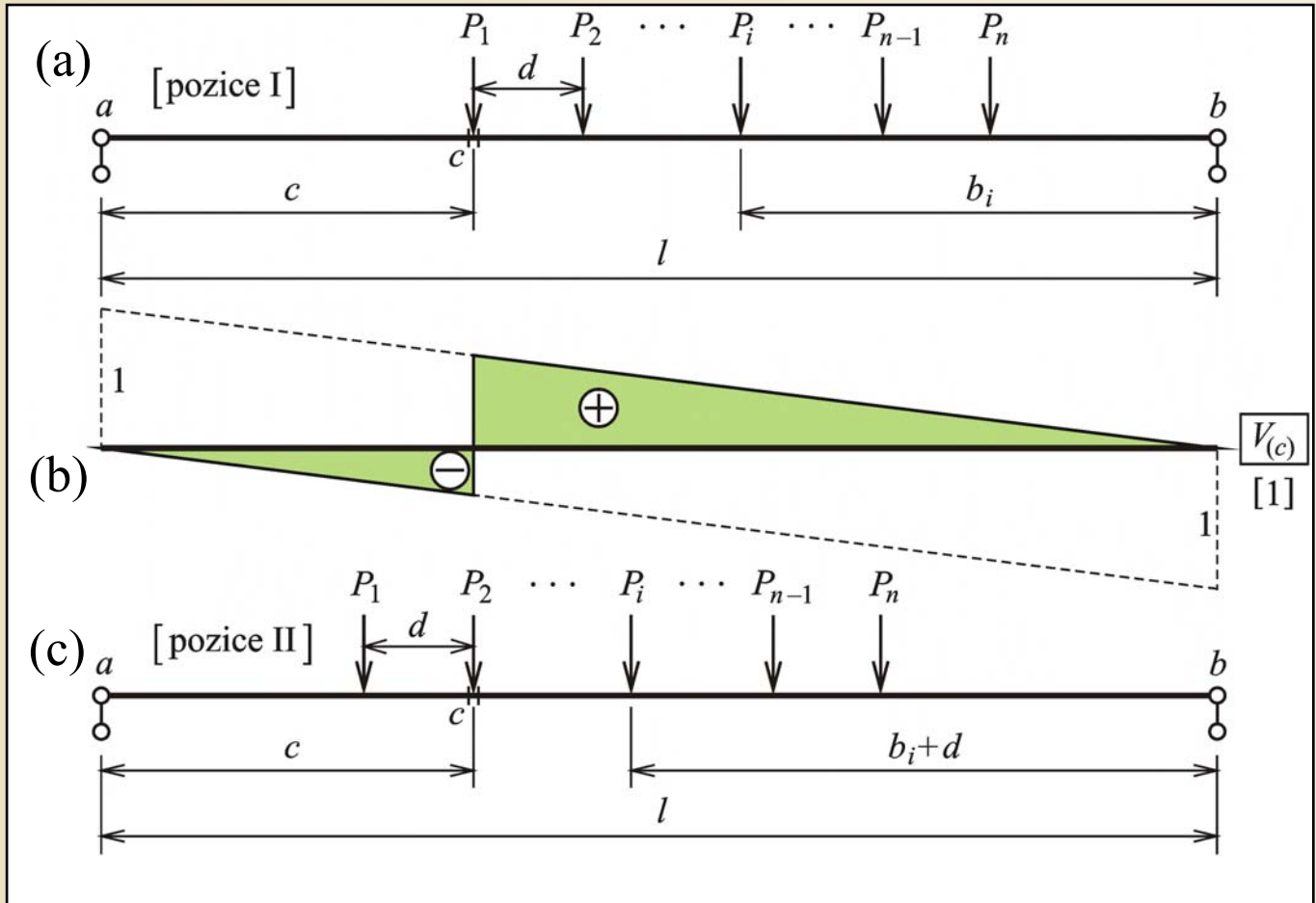
$$V_{(c),II} = \frac{1}{l} \cdot \sum_{i=1}^n P_i \cdot (b_i + d) - P_1$$

Kritérium pro výběr pozice I nebo II

$$V_{(c),I} > V_{(c),II} \Rightarrow P_1 > R \cdot \frac{d}{l}$$

Obdobně pro minimum (P_n nebo P_{n-1} zleva)

$$V_{(c),I} < V_{(c),II} \Rightarrow P_n > R \cdot \frac{d}{l}$$



K výpočtu maximální posouvající síly v zadaném průřezu

Obr. 11.22. / str. 193

Příklad 8.9

Zadání:

Zjistěte nejúčinnější pozice pohyblivé soustavy 4 sil pro vyvození maximální a minimální posouvající síly v průřezu c . Určete tyto extrémy.

Řešení:

1. Maximální $V_{(c)}$

$$P_1 = 20\text{kN} > R \cdot \frac{d}{l} = 56 \cdot \frac{1,8}{16} = 6,3\text{kN}$$

Platí, pozice I

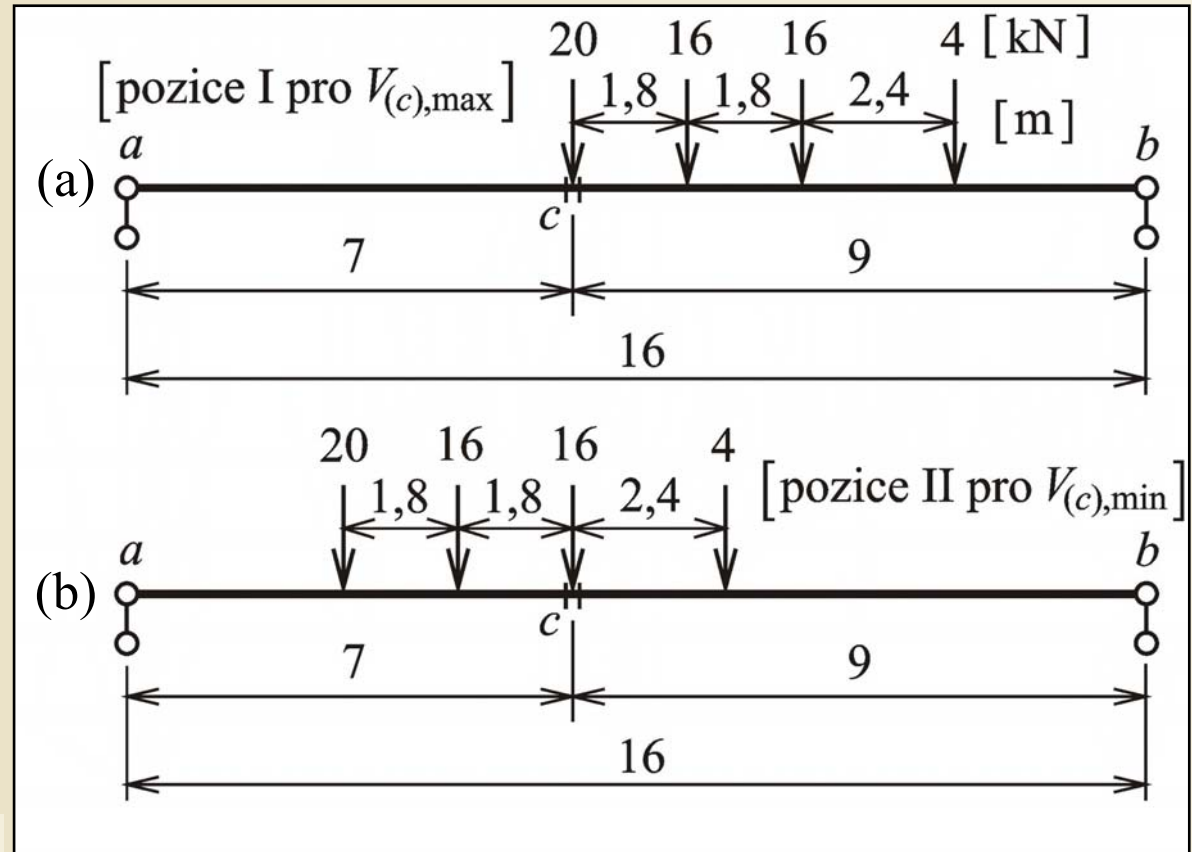
$$V_{(c),\text{max}} = \frac{1}{l} \cdot \sum_{i=1}^n P_i \cdot b_i = 24,6\text{kN}$$

2. Minimální $V_{(c)}$

$$P_4 = 4\text{kN} < R \cdot \frac{d}{l} = 56 \cdot \frac{2,4}{16} = 8,4\text{kN}$$

Neplatí, pozice II

$$V_{(c),\text{min}} = \frac{1}{l} \cdot \sum_{i=1}^n P_i \cdot b_i - \sum_{i=1}^{n-1} P_i = -14,8\text{kN}$$

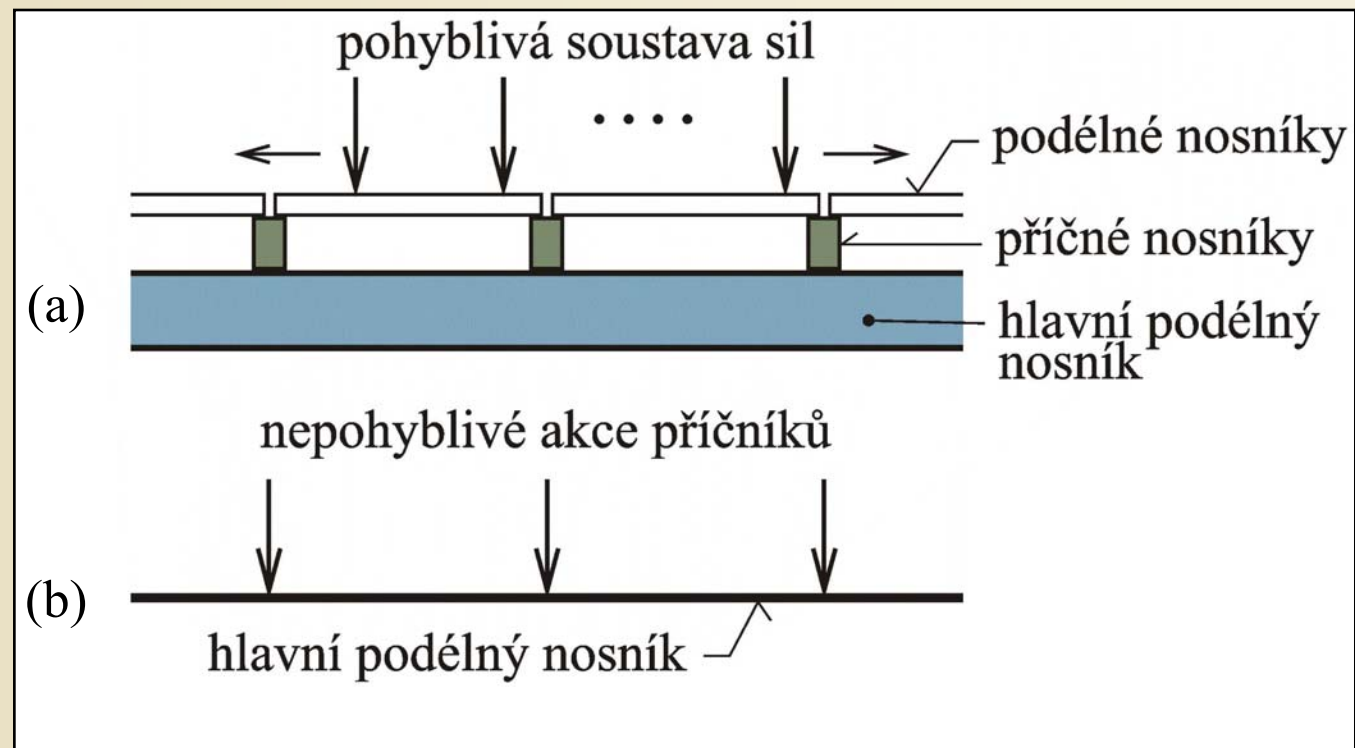


Zadání a řešení příkladu 8.9

Obr. 11.23. / str. 194

Nepřímé pohyblivé zatížení

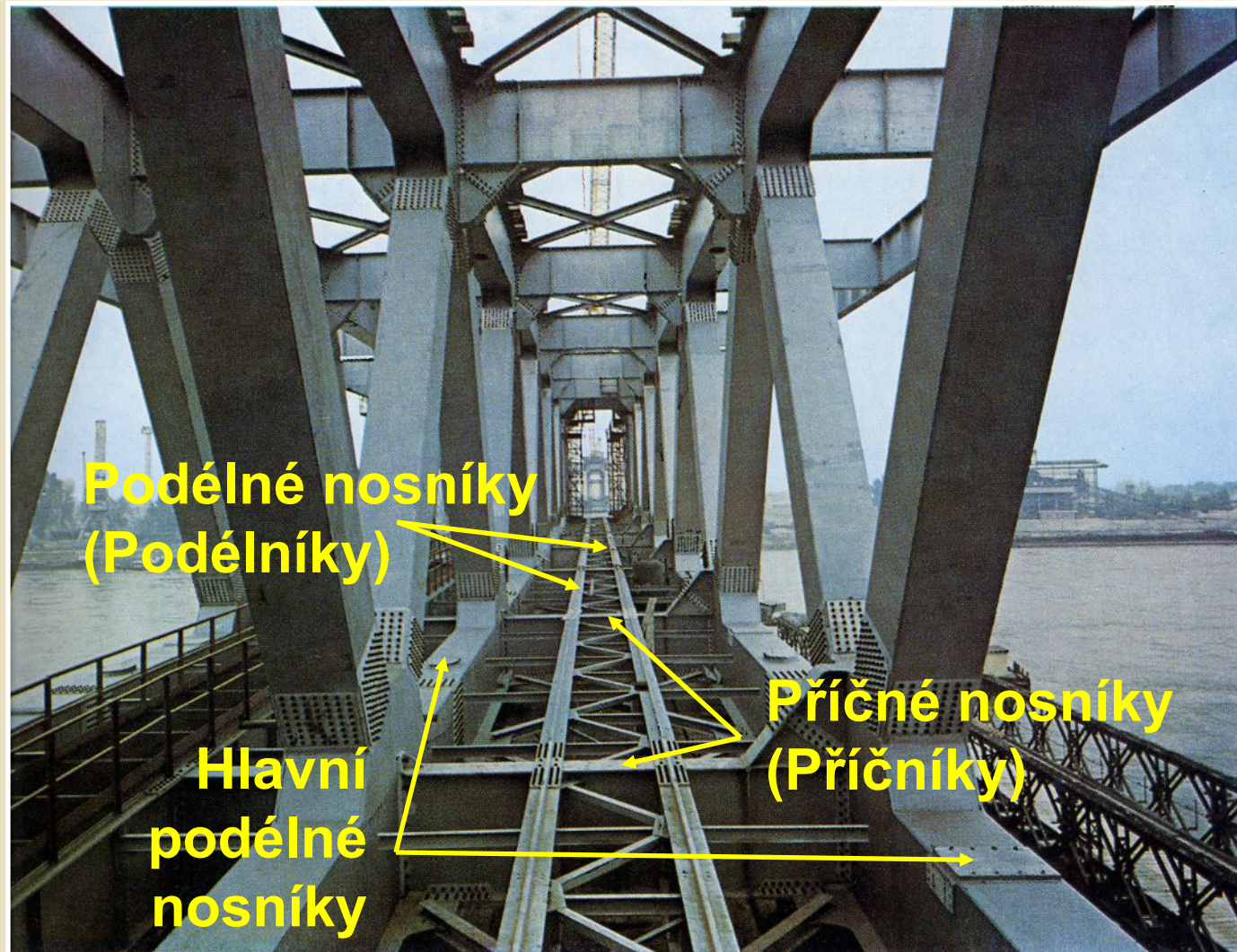
Konstrukce složená z mnoha prutů, hlavní podélný nosník zatížen **nepohyblivými** akcemi příčných nosníků.



Nepřímé pohyblivé zatížení

Obr. 11.24. / str. 195

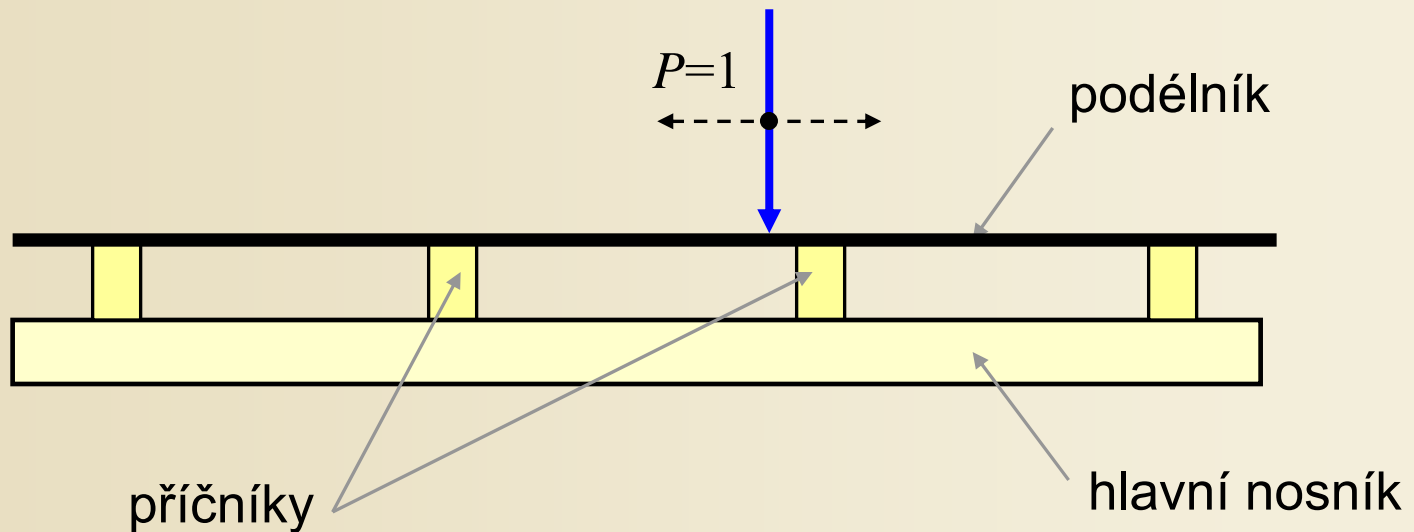
Dálničně - železniční most, Bratislava



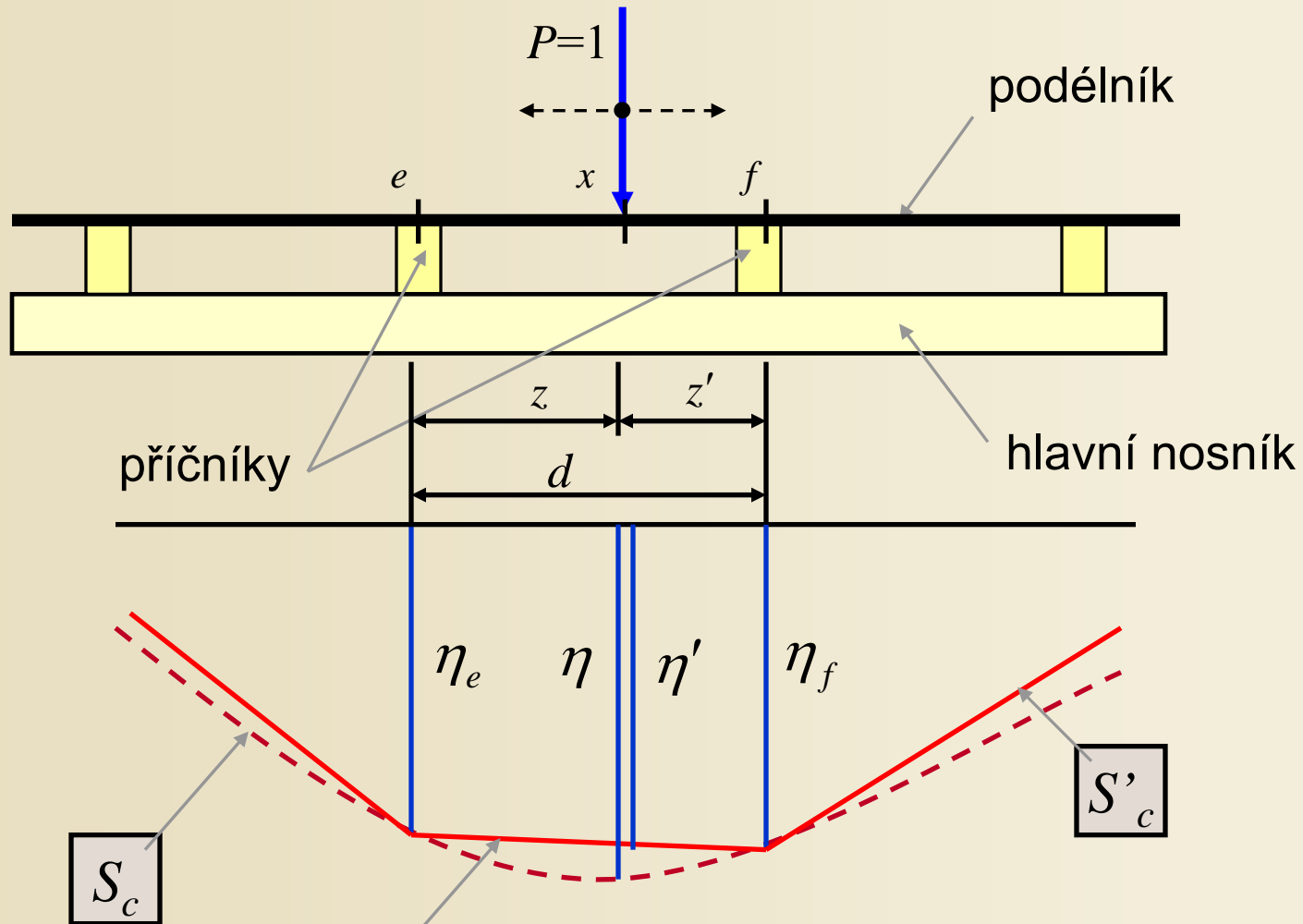
Rozpětí 460,8 m, 4 pole, modul příhrady 12,8 m.

Příčinkové čáry za nepřímého pohyblivého zatížení

Účinek břemene P , působícího na **podélník**, se přenáší na **příčnící** a na **hlavní nosník**



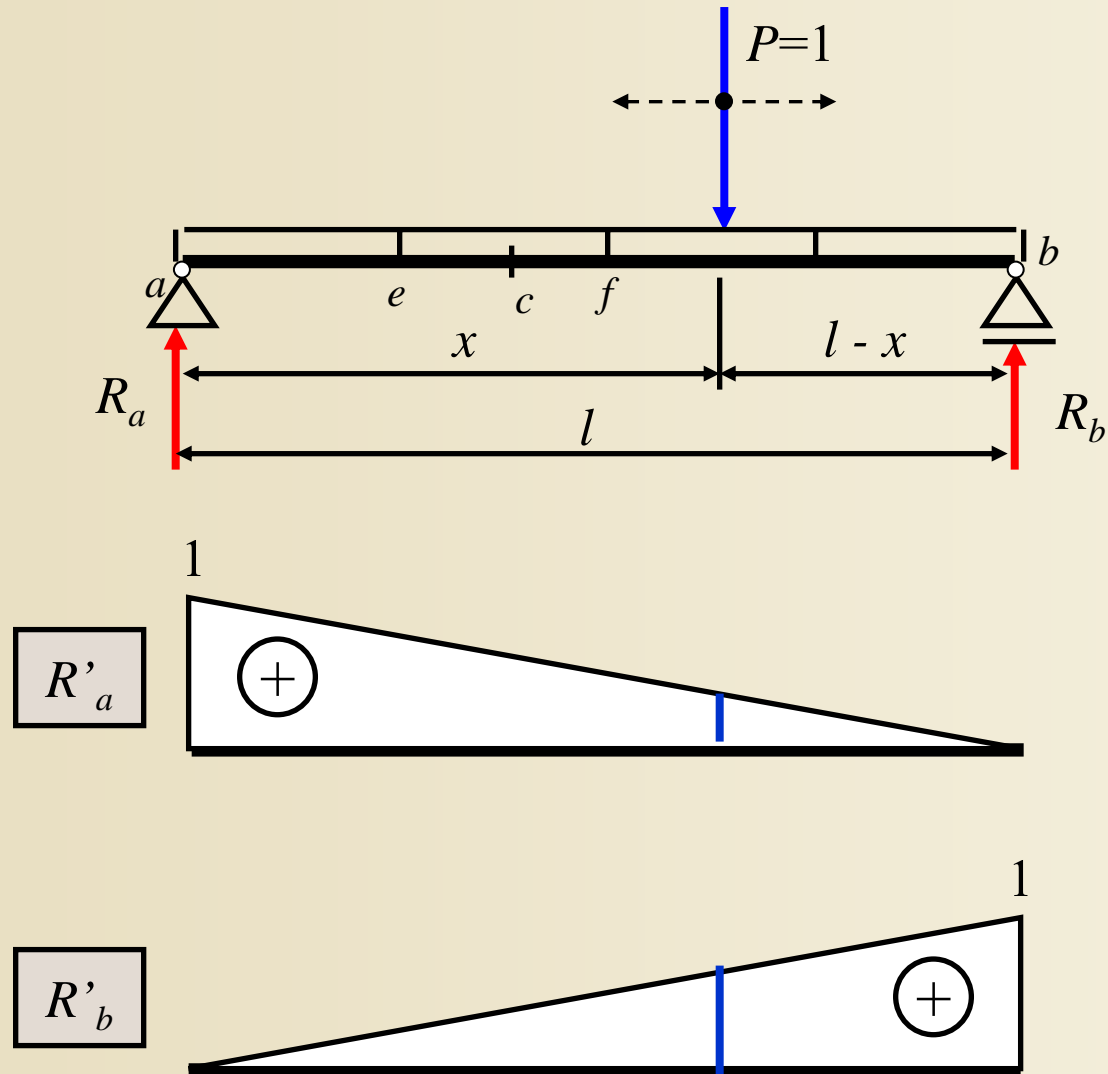
Příčinkové čáry za nepřímého zatížení



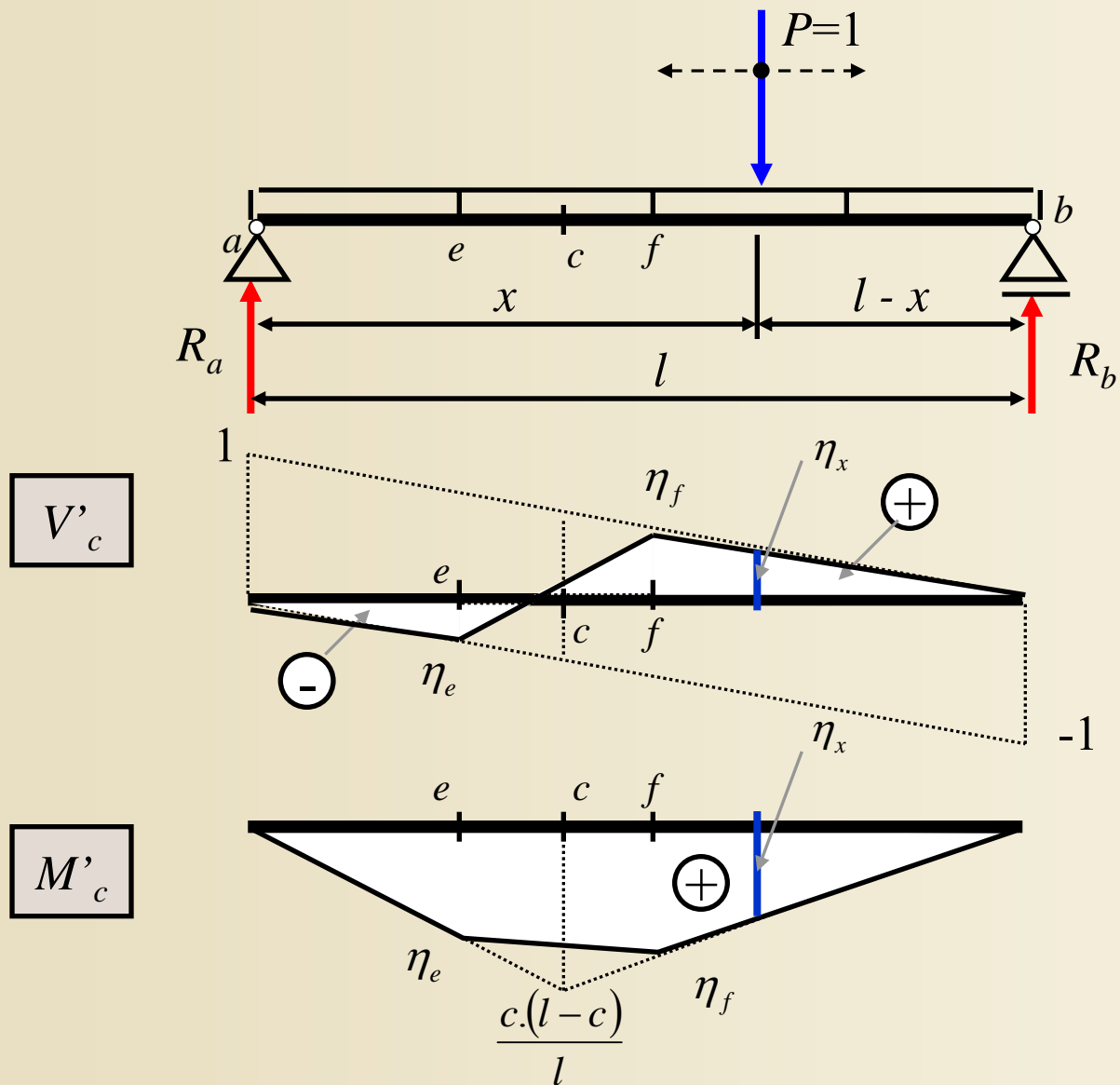
vždy lineární průběh

$$S'_c = F_e \cdot \eta_e + F_f \cdot \eta_f = F \cdot \left(\frac{d-z}{d} \cdot \eta_e + \frac{z}{d} \cdot \eta_f \right) = F \cdot \eta'$$

Příčinkové čáry reakcí R_a a R_b za nepřímého zatížení



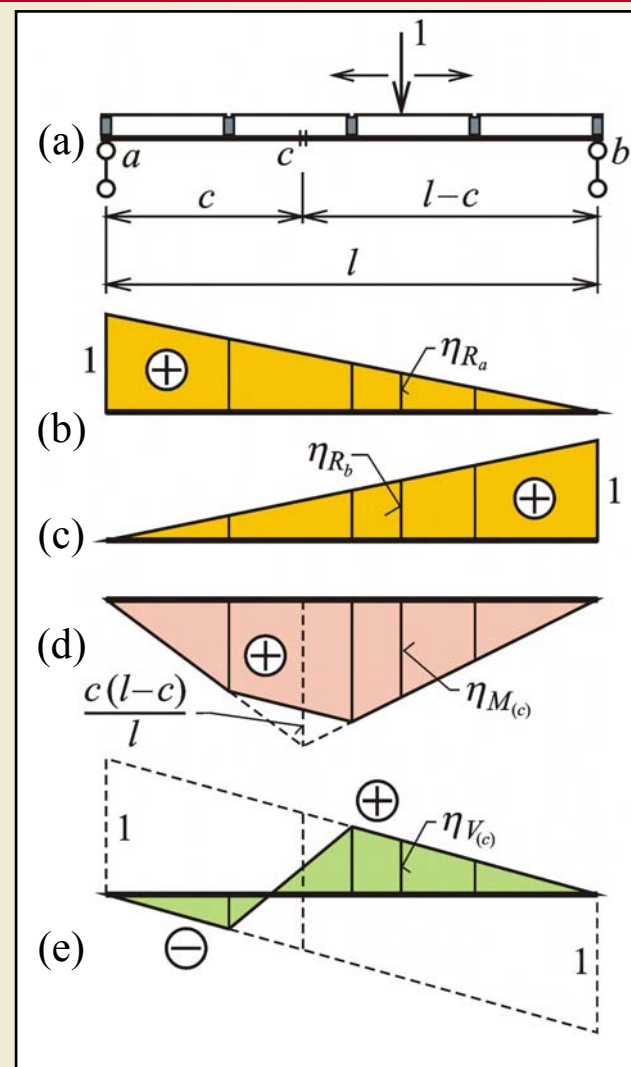
Příčinkové čáry V_x a M_x za nepřímého zatížení



Nepřímé pohyblivé zatížení

Příčinkové čáry při nepřímém zatížení

- (a,b) Reakce
- (c) Ohybový moment
- (d) Posouvající síla



Příčinkové čáry na prostém nosníku při nepřímém zatížení

Obr. 11.25. / str. 195

Metody řešení příčinkových čar, účinků pohyblivého zatížení

- a) **metoda analytická** – odvozené vzorce dle zásad statiky
- b) **metoda kinematická** – s užitím kinematické definice příčinkové čáry

Příčinková čára veličiny S v průřezu c konstrukce je kinematická čára, vyvozená na uvažované konstrukci jednotkovým impulsem v průřezu c .

Jednotkový impuls:

pro příčinkovou čáru V , N a reakcí - posunutí $\delta = 1$
pro ohybový moment M - pootočení $\varphi = 1$

Numerická metoda zjišťování extrémních účinků pohyblivého vozidla (počítačová simulace pohyblivého zatížení)



Okruhy problémů k ústní části zkoušky

1. Příčinkové čáry na prostém nosníku bez převislých konců
2. Příčinkové čáry na konzole
3. Příčinkové čáry na prostém nosníku s převislými konci
4. Příčinkové čáry na spojitém nosníku s vloženými klouby
5. Využití příčinkových čar pro výpočet (extrémních) účinků nehybného zatížení
6. Maximální ohybový moment v zadaném průřezu (Winklerovo kritérium)
7. Maximální ohybový moment pod sledovanou silou (břemenové kritérium)
8. Vůbec největší ohybový moment na celém nosníku (Šolínovo kritérium)
9. Nepřímé pohyblivé zatížení