



Stroming van Vloeistoffen

Fysische transportverschijnselen
I106/I125

Guido Wyseure

Faculteit Landbouwkundige en Toegepaste Biologische
Wetenschappen

Academiejaar 2002-2003

Inhoud

Inhoud.....	2
1. Stroming in gesloten leidingen.....	2
1.2 Laminaire stroming.....	3
1.1.1 Stationaire laminaire stroming tussen twee horizontale vlakke platen.....	4
1.1.2 Stationaire laminaire stroming in een horizontale ronde buis.....	7
1.1.3 Stationaire laminaire stroming in een horizontale annulus.....	9
1.1.4 Stationaire laminaire stroming door willekeurige doorsnedes.....	11
1.2 Turbulente stroming.....	13
1.2.1 Turbulente stroming in buizen.....	13
1.2.2 Druk-verschil in rechte buizen met constante ronde dwarsdoorsnede.....	16
1.3 Energie in gesloten leidingen: de vergelijking van Bernouilli.....	21
1.3.1. Vergelijking van Bernouilli.....	21
1.3.2. Keuze van het controle volume en de begroting van de termen.....	23
1.3.3. Uitgebreide Bernouilli-vergelijking: ladingsverliezen, pompen en turbines.....	27
1.3.4. Energie-verliezen (h_L) in leidingen.....	28
1.3.5. Systeem- en pompkarakteristieken.....	34
1.4. Ontwikkeling van het snelheidsprofiel en invloed op de warmte- en massa-overdracht.....	41
1.5. Krachten veroorzaakt door verandering van de hoeveelheid van beweging.....	42
2. Eenparige en uniforme stroming in open kanalen.....	44
Appendix A : Moody diagramma.....	49

1. Stroming in gesloten leidingen

1.1. Inleiding

Een belangrijke toepassing van fysische transportverschijnselen is de stroming van fluida in gesloten leidingen of buizen. De voorspelling van de stromingsweerstand en de invloed van obstakels laat toe een aantal stromingsproblemen op te lossen. Het verpompen van vloeistoffen doorheen een leidingstelsel is een courante operatie in bio-industriën, milieutechnologie, irrigatie, drainage enz.

De stroming van fluida kan onderverdeeld worden in laminaire en in turbulente stroming. De laminaire stroming leent zich goed tot theoretische beschouwingen en theoretische afleidingen gebaseerd op de inwendige wrijving in de fluida. Turbulente stroming vergt daarentegen een half-theoretische en half-empirische aanpak.

1.2 Laminaire stroming

Zoals reeds eerder behandeld is laminaire stroming gekenmerkt doordat de fluidum deeltjes zich bewegen volgens parallelle stroomlijnen. Laat men bv. siroop stromen over een hellend vlak dan zal er bij stationaire stroming een evenwicht ontstaan tussen het gewicht van de siroop en de wrijvingskrachten. De snelheid van de siroop, die in onmiddellijk contact staat met het vlak, is 0 ms^{-1} . Een snelheidsgradiënt ontstaat tussen de laminaire vloeistoflagen, die met verschillende snelheden stromen en dus over elkaar « schuiven ». Dit schuiven veroorzaakt schuifspanningen. Indien de relatie tussen de schuifspanning en de snelheids-gradiënt gekend is dan kan men laminaire stromingsproblemen oplossen op basis van fysische wetten en hieruit gepaste vergelijkingen afleiden.

De meest klassieke relatie tussen schuifspanning en snelheidsgradiënt is het Newtoniaanse verband: m.a.w. een lineaire relatie met spanning 0 voor de nul-gradiënt. Dergelijke vloeistoffen worden Newtoniaans genoemd. In de bio-industriën komen veelvuldig vloeistoffen voor die hiervan afwijken. Men spreekt dan over niet-Newtoniaanse vloeistoffen. Mayonaise is een klassiek voorbeeld; het meest praktische gevolg van het niet-Newtoniaanse karakter van mayonaise is het plots “wegschieten” van een klad mayonaise, wanneer een oorspronkelijk horizontale vlakke plaat gaat hellen (bv. plateau van de Alma ; probeer dit niet...).

Dus Newtoniaanse vloeistoffen hebben als fundamentele eigenschap dat de schuifspanning in de vloeistof τ_{xy} :

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = -\nu \frac{d(\rho v_x)}{dy}$$

Vergelijking 1

waarbij v_x de stroom-snelheid in de x-richting, ρ de soortelijke massa van de vloeistof en ν de kinematische viscositeit zijn. Bij onsamendrukbare vloeistoffen is ρ constant en kan dit met ν gecombineerd worden tot de dynamische viscositeit : $\mu = \rho \nu$.

Vele problemen kunnen opgelost worden aan de hand van een balans van de hoeveelheid van beweging. We vinden dan meestal een verband tussen een

drukverschil en een schuifkracht en maken gebruik van vergelijking 1. Voor niet-Newtoniaanse vloeistoffen zijn er andere vergelijkingen geldig (Fig 1) en worden de afleidingen meestal complexer. De laminaire stromingspatronen met Newtoniaanse vloeistoffen zijn het gemakkelijkst oplosbaar. In de tekst die volgt worden hoofdzakelijk Newtoniaanse vloeistoffen behandeld.

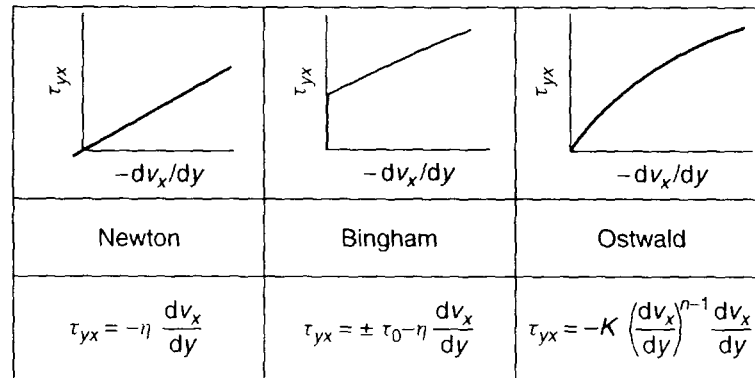


Figure 1 Relationship between shear force and velocity gradient

1.1.1 Stationaire laminaire stroming tussen twee horizontale vlakke platen.

Beschouwen we een Newtoniaanse vloeistof, die stroomt tussen twee parallelle horizontale platen (zie figuur 2). We kiezen een controle volume CV begrensd door een vlak in het midden van de platen, het vlak van de bovenste de plaat en links en rechts de verticale vlakken loodrecht op de platen. We definiëren een y-as loodrecht op de platen met $y=0$ in het midden tussen de platen en dus samenvallend met het onderste horizontale grensvlak van het CV. De x-as loopt op dat onderste horizontale

CV grensvlak

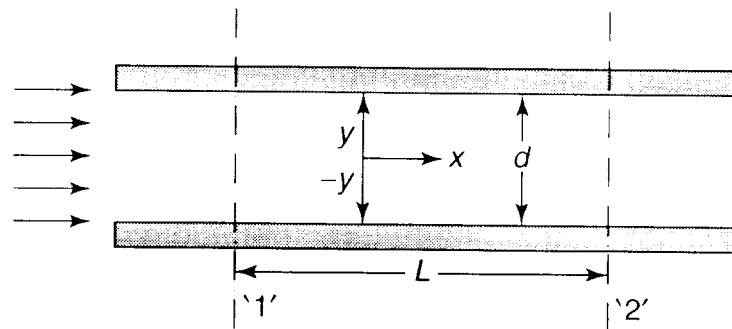


Figure 2 Flow between two flat plates

en $x=0$ op het linker verticale vlak dat het CV begrenst. Bij stationaire stroming kunnen we een balans van hoeveelheid van beweging opstellen:

$$V \frac{d(\rho v_x)}{dt} = 0 = \sum F_x + \Phi_{v,in} \rho v_{x,in} - \Phi_{v,out} \rho v_{x,out}$$

Vergelijking 2

waarbij ϕ het volume debiet en V het volume in het CV van de vloeistof is. Bij parallelle platen zal het doorstroom-oppervlak constant zijn. De in- en uitgangssnelheden zijn identiek, de soortelijke massa is constant indien onsamendrukbare vloeistof. Dus wordt vergelijking 2 vereenvoudigd tot:

$$\sum F_x = 0$$

Vergelijking 3

De krachten in de x-richting zijn de druk-krachten op het verticale in- en uitstroom-oppervlak van het CV en de schuifkrachten met de horizontale begrenzing van het CV. Dit is dus boven en onder het CV de platen zelf.

$$\sum F_x = 0 = p_1 y w - p_2 y w - \tau_{xy} L w$$

Vergelijking 4

Hierbij zijn w en L respectievelijk de breedte van de platen en de lengte van het CV.

We kunnen onze balans uitwerken per breedte w en aldus verkrijgen we:

$$\tau_{xy} = \frac{(p_1 - p_2)}{L} y$$

Vergelijking 5

Voeren we vergelijking 1 in dan bekomen we een eenvoudige differentiaalvergelijking:

$$\frac{dv_x}{dy} = -\frac{(p_1 - p_2)}{\mu L} y$$

Vergelijking 6

Indien d de afstand tussen de platen is dan varieert y van $y=0$ tot $y=d/2$ en is de vergelijking integreerbaar met als randvoorwaarde op $y=d/2$ is $v_x=0$

De oplossing is:

$$v_x = \frac{p_1 - p_2}{2\mu L} \left(\frac{d^2}{4} - y^2 \right)$$

Vergelijking 7

We zien dus dat het snelheidsprofiel parabolisch verloopt en dat de maximale snelheid zich in het midden tussen de twee platen bevindt. Ook kan men het debiet berekenen per eenheid van plaat-breedte door vergelijking 7 te integreren van de plaat beneden tot boven.

Het totale volume-debiet per eenheid plaat-breedte is:

$$\frac{\phi_v}{w} = \int_{-d/2}^{d/2} v_x dx = \frac{p_1 - p_2}{12\mu L} d^3 = v_{av} d$$

Vergelijking 8

waarbij v_{av} de macroscopisch gemiddelde snelheid is. Er is dus een relatie tussen het snelheidsprofiel en het drukverschil met als belangrijke vloeistofparameter: de viscositeit.

Een iets fundamenteeler alternatieve aanpak bestaat erin een balans van hoeveelheid van beweging voor een infinitesimaal volume op te stellen. Voor dit kleine volume bekomen we een differentiaalvergelijking die we oplossen door integratie.

1.1.2 Stationaire laminaire stroming in een horizontale ronde buis

Dezelfde aanpak als met de parallelle platen is mogelijk. We stellen opnieuw een CV op waarvoor we een balans van hoeveelheid van beweging opstellen. Nu gebruiken we een r-x assenstelsel. De polaire as r is 0 in het midden van de dwarsdoorsnede en wordt R op de binnenwand van de buis. Zie Figuur 3.

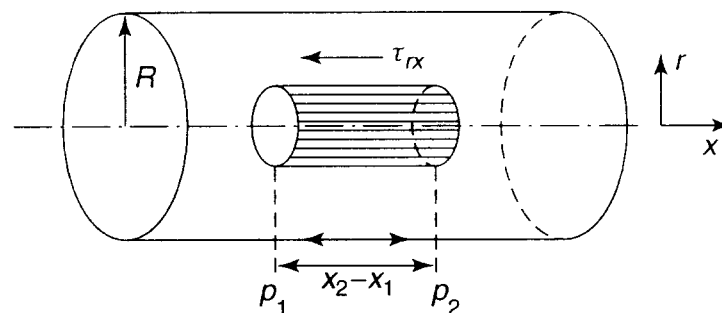


Figure 3 Flow through a circular tube

Vergelijking 4 wordt dan:

$$\sum F_x = 0 = p_1 \pi r^2 - p_2 \pi r^2 - \tau_{rx} 2\pi r (x_2 - x_1)$$

Vergelijking 9

Op analoge wijze kunnen we vergelijking 1 gebruiken in vergelijking 9. Ook kan men de afstand tussen x_2 en x_1 infinitesimaal klein maken en dus $dx = x_2 - x_1$. Dan ontstaat de volgende differentiaalvergelijking:

$$v_x(r) = \frac{1}{4\mu} \left(-\frac{dp}{dx} \right) (R^2 - r^2)$$

Vergelijking 10

Integratie met als randvoorwaarde $v_x = 0$ voor $r = R$ levert ons het snelheidsprofiel en de relatie tussen het debiet en de drukgradiënt (dp/dx) op:

$$\phi_v = \int_0^R 2\pi r v_x(r) dr = \frac{\pi R^4}{8\mu} \left(-\frac{dp}{dx} \right)$$

Vergelijking 11

Uit voorgaande kan de gemiddelde snelheid bepaald worden :

$$v_{av} = \frac{R^2}{8\mu} \left(-\frac{dp}{dx} \right)$$

Vergelijking 12

Deze vergelijking is gekend als de Hagen-Poiseuille vergelijking en vindt o.a. zijn toepassing in het meten van de viscositeit van Newtoniaanse vloeistoffen. De maximale snelheid in het midden is tweemaal de macroscopisch gemiddelde snelheid.

Door differentiatie van vergelijking 10 naar r kennen we de snelheidsgradiënt. Vullen we dan $r=R$ in, dan zijn we in staat de schuifspanning op de binnenwand van de buis te begroten voor Newtoniaanse vloeistoffen (gebruik vergelijking 1).

$$\tau_w = \frac{R}{2} \left(-\frac{dp}{dx} \right)$$

Vergelijking 13

Dezelfde afleiding kan herhaald worden voor niet-Newtoniaanse vloeistoffen. De vergelijking 1 wordt dan vervangen door het gepaste alternatief. Zo heeft een Ostwald vloeistof (zie figuur 1) als relatie tussen snelheidsgradiënt en schuifspanning:

$$\tau_{rx} = K \left| \frac{dv_x}{dr} \right|^n$$

Vergelijking 14

Deze relatie is niet-lineair. Als gevolg hiervan zijn de integraties enigszins verschillend maar niet echt veel moeilijker. Het snelheidsprofiel wordt dan:

$$v_x = \frac{n}{n+1} \left[\frac{1}{2K} \left(-\frac{dp}{dx} \right) \right]^{1/n} \left(R^{\frac{n+1}{n}} - r^{\frac{n+1}{n}} \right)$$

Vergelijking 15

In feite is dit een meer algemeen verband: $n=1$ zijn de Newtoniaanse, $n<1$ is een pseudo-plastische en $n>1$ zijn de dilatante vloeistoffen.

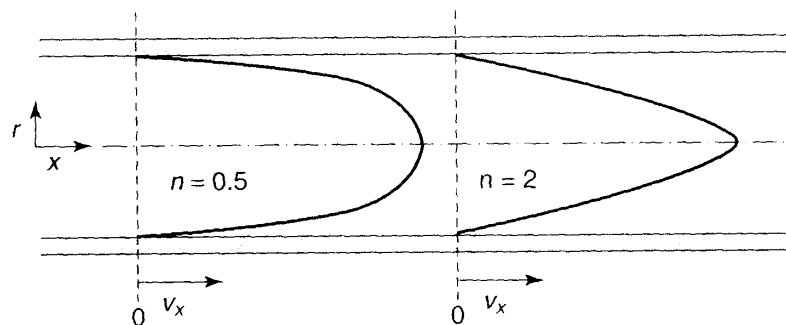


Figure 4 Velocity distribution for non-Newtonian flow of an Ostwald fluid

Analoog kunnen de relaties tussen het volumedebiet Φ_v , de druk-gradiënt (dp/dx), de macroscopische snelheid en de maximum-snelheid afgeleid worden.

1.1.3 Stationaire laminaire stroming in een horizontale annulus

Bij warmtewisselaars komt veel voor dat een vloeistof stroomt door een annulus. Zie figuur 5.

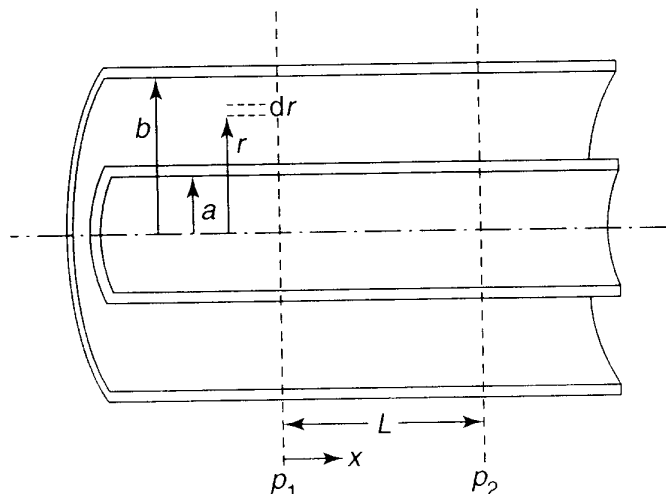


Figure 5 Laminar flow in an annulus

Een klein CV is hier aangewezen. Opnieuw begint de polaire r -as in het midden van de buizen. De annulus begint van $r=a$ tot $r=b$ waarbij a en b de binnen- en buitenstraal zijn. Het CV bevindt zich op straal r (tussen a en b) en is ringvormig met een dikte dr en een lengte L . Een krachtenbalans voor stationaire stroming ziet er als volgt uit:

$$\sum F_x = 0 = 2\pi r dr p_1 - 2\pi r dr p_2 + \tau_{rx} r \Big|_r 2\pi L - \tau_{rx} r \Big|_{r+dr} 2\pi L$$

Vergelijking 16

Door te delen door $2\pi L dr$ en mits de afgeleide van $r\tau_{rx}$ bekommen we de differentiaalvergelijking:

$$\frac{d(r\tau_{rx})}{dr} = \frac{p_1 - p_2}{L} r$$

Vergelijking 17

Na integratie en inbrengen van vergelijking 1 (Newtoniaanse vloeistoffen) kunnen we de randvoorwaarden inbrengen ($v_x=0$ voor $r=a$ en voor $r=b$) en bekommen we het snelheidsprofiel:

$$v_x = \frac{p_1 - p_2}{4\mu L} b^2 \left[1 - \left(\frac{r}{b}\right)^2 + \frac{1 - \left(\frac{a}{b}\right)^2}{\ln\left(\frac{a}{b}\right)} \ln\left(\frac{r}{b}\right) \right]$$

Vergelijking 18

En ook het volume-debiet kan becijferd worden:

$$\phi_v = \frac{\pi(p_1 - p_2)b^4}{8\mu L} \left[1 - \left(\frac{a}{b}\right)^4 - \frac{\left[1 - \left(\frac{a}{b}\right)^2\right]^2}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \right]$$

Vergelijking 19

De snelheden op de wanden van de buizen zijn dus 0 m/s. Door differentiatie van vergelijking 18 naar r en gelijkstelling van deze vergelijking aan 0 kan de extreme (maximale) snelheid berekend worden. Op die plaats is de snelheidsgradiënt dus 0 en zal ook de schuifspanning 0 zijn.

Dit punt met maximale snelheid bevindt zich op de straal “ r ” die beantwoordt aan:

$$\frac{r^2}{b^2} = \frac{1 - \left(\frac{a}{b}\right)^2}{2 \ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

Vergelijking 20

1.1.4 Stationaire laminaire stroming door willekeurige doorsnedes

Buizen kunnen vierkante, driehoekige, elipsvormige enz dwarsdoorsnedes hebben. De oplossingen voor Newtoniaanse vloeistoffen zijn mogelijk maar stellen mathematisch lastige problemen tijdens de integratie van de stromingsvergelijkingen.

Een praktische ingenieursaanpak gebruikt grafieken met een correctie-coëfficiënt M_0 in functie van de vorm en de verhoudingen.

Het volume debiet kan dan berekend worden door:

$$\phi_v = \frac{\Delta p}{12\mu L} B d^3 M_0$$

Vergelijking 21

De correctie-coëfficiënt M_0 is gelijk aan 1 voor stroming tussen parallelle platen (paragraaf 1.1.1). Figuur 6 toont de correctie-factoren. Bij rechthoekige doorsnede waarbij de breedte B vele malen groter is dan de tussenafstand tussen de platen d krijgen we $d/B = 0$ en lezen we op de figuur als correctie-coëfficiënt af.

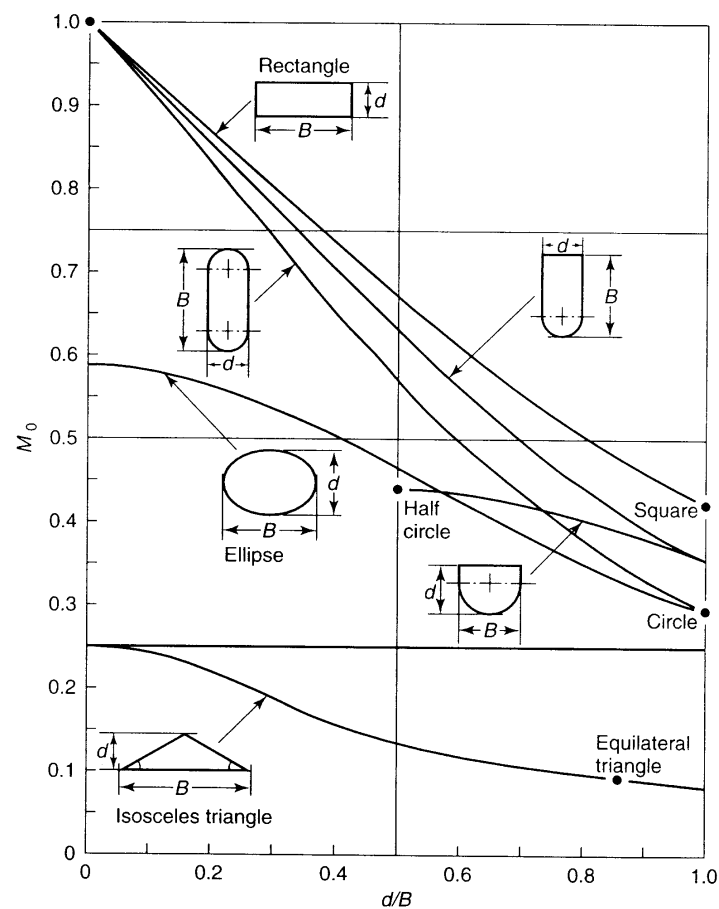


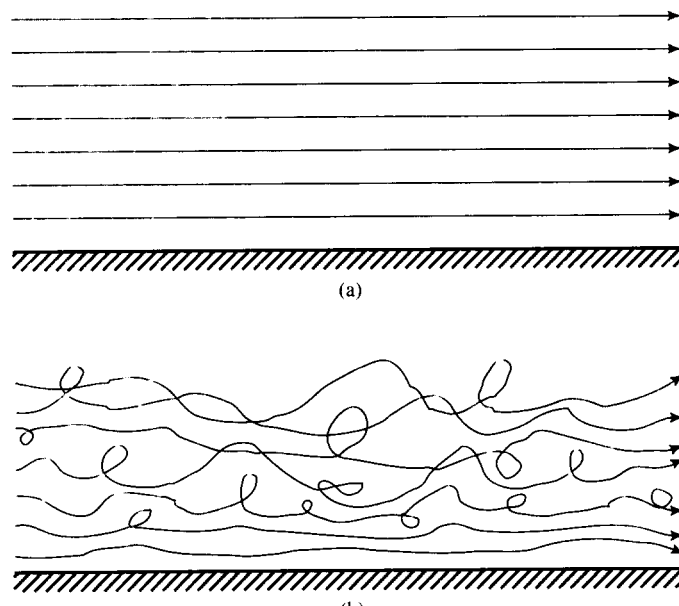
Figure 6 The flow coefficient M_0 for stationary flow of Newtonian liquids in cross-sections of various geometries

1.2. Turbulente stroming

1.2.1 Turbulente stroming in buizen

Reynolds injecteerde een kleurstof in een buis met vloeistof stromend aan verschillende snelheden. Bij lagere snelheden volgde de gekleurde vloeistof de stroomlijn en mengde nauwelijks met de omliggende vloeistof. Dergelijke stroming is laminair en de vloeistofdeeltjes stromen in parallelle lagen. Hogere snelheden vertoonden een snelle dispersie over de volledige buis. De vloeistofdeeltjes gaan eerder willekeurig bewegen. Dit is turbulente stroming.

FIGURE 7
Paths of individual water parcels in (a) laminar flow; (b) turbulent flow (highly schematic). After Dingman (1984).



De turbulente stroming heeft niet alleen een moleculaire viscositeit maar ook een “eddy” viscositeit. Er ontstaan “eddies” of dwars-stromingen, die ook hoeveelheid van beweging tussen de vloeistofdeeltjes uitwisselen. De effectieve viscositeit voor turbulente stroming is de som van de moleculaire en de eddy-viscositeit. Dichter bij de wand daalt de snelheid en neemt ook de intensiteit van de «eddies» af. Het voornaamste gevolg is dat de balans van de hoeveelheid van beweging belangrijke aanvullende uitwisselingen omwille van de turbulentie heeft. Om dit probleem enigzins te omzeilen definiëren we een wrijvingsfactor f aan de hand van de volgende relatie:

$$\tau_w \equiv f \frac{1}{8} \rho (v_{av})^2$$

Vergelijking 22

Belangrijk is dat men de gemiddelde (macroscopische) snelheid gebruikt. De factor f , wrijvingsfactor, wordt in het geval van turbulente stroming bepaald door experimenten. Voor laminaire stroming kan men deze factor theoretisch afleiden aan de hand van de formules van de vorige sectie. Een belangrijke misopvatting bij open kanalen stroming is dat een vlak wateroppervlak op afwezigheid van turbulentie wijst. Onder een glad water oppervlak is er veelal turbulente stroming.

Men kan het aantal experimenten beperken door gebruik te maken van similariteit (of gelijkaardigheid). In gelijkaardige situaties kan men dezelfde empirische coëfficiënten gebruiken. Een belangrijk dimensieloos getal om de wrijvingsfactoren in te delen is het Reynolds getal:

$$Re = (v_{av} D)/\nu$$

Dit getal drukt de verhouding uit tussen de inertiekrachten (leidend tot turbulentie) en de viskeuze (laminair blijven van de stroming). Het snelheidsprofiel in turbulente stroming is veel gelijkmatiger omwille van de dwars-stroompjes of “eddies”. Er is een laminair laagje dicht bij de wand met een steile snelheidsgradiënt; maar het grootste deel van de dwarssectie is turbulent en met relatief kleine snelheidsverschillen. Hierdoor is de maximale snelheid in het midden van de buis bij turbulente stroming in ronde buizen 1.1 tot 1.2 maal de gemiddelde snelheid v_{av} . Bij laminaire stroming kan men, gebruik makend van de formules van de vorige sectie, gemakkelijk aantonen dat $v_{max} = 2 v_{av}$.

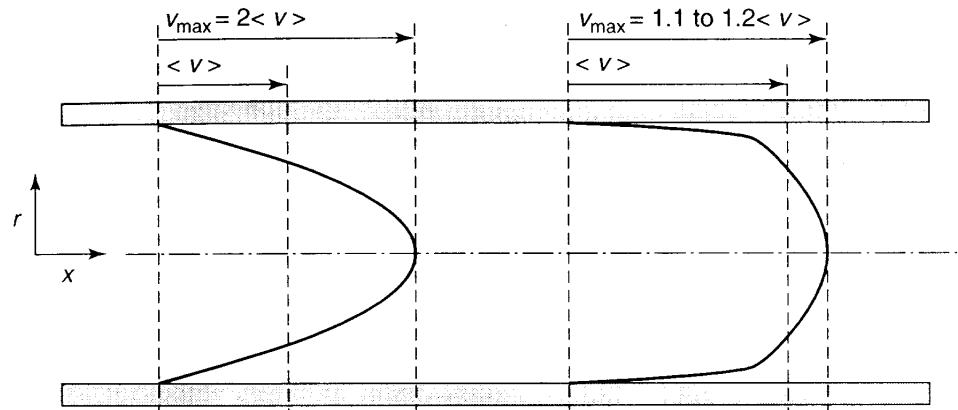


Figure 8 Laminar and turbulent velocity profiles in a pipe

De overgang van laminaire naar turbulente stroming in rechte ronde buizen begint vanaf $Re=1000$ (waarbij er zich “eddies” beginnen voor te doen maar de stroming zich nog hoofdzakelijk laminair gedraagt) tot $Re=4000$ wanneer we een volledig turbulente stroming krijgen. Als kritische grens voor het Re getal wordt dikwijls 2300 aangenomen.

Zelfs bij zeer hoge Re getallen zal de turbulentie afnemen dicht bij de wand. Aldus is er altijd een laminaire grenslaag. Deze kan uiterst dun zijn. In deze laminaire grenslaag met dikte δ_h is er voor Newtoniaanse vloeistoffen (zie vergelijking 1) een constante snelheidsgradiënt. Op voorwaarde dat de grenslaag relatief zeer dun is in verhouding met de diameter kan de schuifspanning op de wand berekend worden in functie van de dikte van de laminaire grenslaag:

$$\tau_w = \mu \frac{v_{av}}{\delta_h}$$

Vergelijking 23

Indien de wrijvingsfactor f gekend is (empirisch bij turbulente stroming) dan kan men de dikte van de grenslaag ruwweg schatten als:

$$\delta_h = D \frac{8}{f Re}$$

Vergelijking 24

De kennis van de dikte van de grenslaag is vooral nuttig indien er ook warmte-transport plaatsgrijpt tussen de wand van de buis en de stromende vloeistof. De dikte van de temperatuurgrenslaag en de snelheidsgrenslaag hoeven niet noodzakelijk samen te vallen. Een dimensieloos getal (Prandtl getal) drukt de gelijkaardigheid uit van de twee grenslagen:

$$\frac{\delta_h}{\delta_T} = \left(\frac{\nu}{\alpha} \right)^{\frac{1}{3}} = \text{Pr}^{\frac{1}{3}}$$

Vergelijking 25

waarbij index T de temperatuur voorstelt en α de thermische diffusiviteit (m^2/s). Bij $\text{Pr}=1$ zijn de diktes van beide lagen identiek. Zo heeft water bij kamertemperatuur ongeveer $\text{Pr}=7$ en is dus de snelheidsgrenslaag ongeveer dubbel zo dik als de temperatuurgrenslaag.

Analoog kan er massatransport zijn tussen de wand en stromende turbulente vloeistof. De verhouding van de grenslagen zijn dan functie van het Schmidt getal:

$$\frac{\delta_h}{\delta_c} = \text{Sc}^{\frac{1}{3}}$$

Vergelijking 26

1.2.2. Druk-verschil in rechte buizen met constante ronde dwarsdoorsnede

Met de kennis van de schuifspanning op de wand van de buis kunnen we een balans van de hoeveelheid van beweging voor een vloeistof CV opstellen in de buis (figuur 9). Het CV heeft nu een straal die gelijk is aan de binnenstraal van de buis.

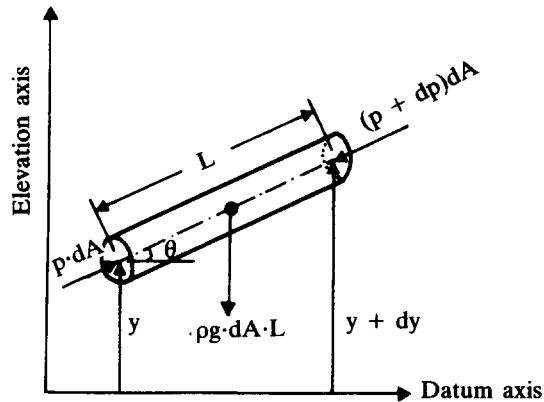


Figure 9 Pressure variation with elevation

Beschouwen we hierbij een hellende rechte buis met straal R en helling θ met stationaire stroming en met een schuifspanning op de mantel van de cylinder:

$$(p_1 - p_2)\pi R^2 + \rho g \pi R^2 L \sin(\theta) - \tau_w 2\pi R L = 0$$

Vergelijking 27

We kunnen delen door πR^2 , ρg en $L \sin(\theta)$. Deze laatste term is het hoogte verschil tussen de centra van de in- en uitstroom-dwarssectie. Dus $L \sin(\theta)$ is ook $z_1 - z_2$. Hieruit bekomen we voor een buis met een constante doorsnede:

$$\frac{p_1 - p_2}{\rho g} + (z_1 - z_2) = \frac{2\tau_w}{\rho g} \frac{L}{R}$$

Vergelijking 28

We vullen vergelijking 22 in het rechterlid van de vergelijking 28 om de schuifspanning te vervangen. Dan definiëren we als h_f :

$$h_f \equiv f \frac{L}{2R} \frac{(v_{av})^2}{2g}$$

Vergelijking 29

Deze vergelijking is de **Darcy-Weisbach vergelijking**, die het verband tussen de wrijving met de wand en het nodige drukverschil berekent.

De wrijvingsfactor f voor laminaire stroming kan theoretisch afgeleid worden uit de Hagen-Poiseuille vergelijking:

$$f = \frac{64}{\text{Re}} \quad \text{voor } \text{Re} < 2300$$

Vergelijking 30

Voor turbulente stroming bestaan experimentele relaties. In buizen met een gladde wand (“*smooth*” in het Engels) heeft Blasius volgende relatie bekomen:

$$f = 0.316 \text{Re}^{-0.25} \quad \text{voor } 4000 < \text{Re} < 10^5$$

Vergelijking 31

Turbulente stroming wordt sterk beïnvloed door de wandruwheid. De wrijvingsfactor f blijkt functie te zijn van de relatieve ruwheid. Dit is de absolute ruwheid h_r (of hoogte van de onregelmatigheden van de wand) gedeeld door de diameter van de buis.

Tabel 1: Absolute ruwheden van wanden

Materiaal	h_r (mm)
Beton	0.3 tot 3
Geschaafd hout	0.18 tot 1
Gietijzer	0.26
Gegalvaniseerd ijzer	0.15
Glad ijzer	0.05
Geasfalteerd ijzer	0.1
PE en PVC	0.001
Asbest Cement	0.1
Glas	« glad » of 0

Bij bv. beton zijn de uiteenlopende waarden uiteraard functie van de afwerking van het beton-oppervlak.

De Colebrook vergelijking vat alle empirische “ f ”s voor turbulente stroming in buizen samen in een formule:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left[\frac{h_r}{3.7D} + \frac{2.51}{\text{Re} \sqrt{f}} \right]$$

Het is niet mogelijk om f te isoleren uit deze vergelijking. Deze impliciete vergelijking van f wordt traditioneel opgelost via het Moody diagram (figuur 10 en appendix fig. A). Alternatief kan men d.m.v. een iteratieve numerische methode f vinden. Deze laatste methode is vooral zinvol in spreadsheets, waarbij men bv. gebruik maakt van de Tools/ Solver of de Tools/Goal Seek.

Churchill heeft meer recentelijk een expliciete vergelijking gefit die zowel het laminaire als het turbulente domein omvat. De f waarde in de overgang tussen beide stromingspatronen is in realiteit niet zo zinvol maar wordt ook gedefiniëerd. De methode van Churchill is vooral interessant om numerisch op een PC uit te voeren.

Churchill solution to Moody -diagramma

 $e := 0.1$ $D := 500$ $Re := 5000$

$$k_1(Re, e, D) := \left[2.457 \cdot \ln \left[\frac{1}{\left[\left(\frac{7}{Re} \right)^{0.9} + 0.27 \cdot \frac{e}{D} \right]} \right] \right]^{16}$$

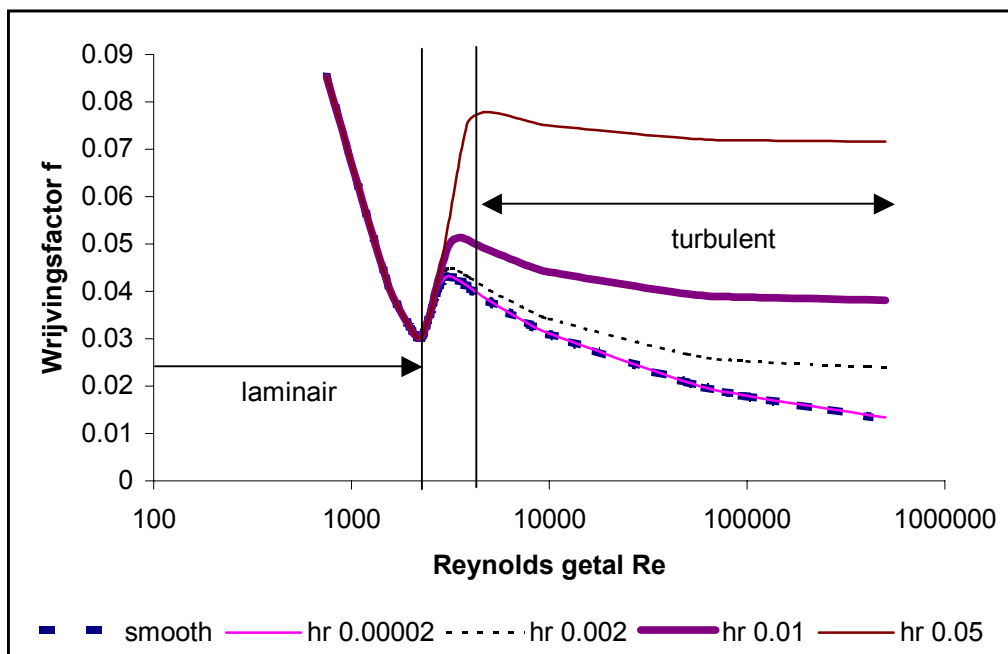
$$k_2(Re) := \left(\frac{37530}{Re} \right)^{16}$$

$$f_{\text{church}}(e, D, Re) := 8 \cdot \left[\left(\frac{8}{Re} \right)^{12} + \frac{1}{\left((k_1(Re, e, D) + k_2(Re))^{1.5} \right)} \right]^{\frac{1}{12}}$$

$$f_{\text{church}}(e, D, Re) = 0.038$$

Hierbij zijn e en D respectievelijk de absolute wandruwheid en diameter van de buis in **dezelfde eenheden** (bv. allebei in m)

Figuur 10: Moody diagram



1.3 Energie in gesloten leidingen: de vergelijking van Bernoulli

Een balans van de energiestroom, die geassocieerd is met de stroming van vloeistoffen in gesloten leidingen, leidt tot de vergelijking van Bernoulli. Deze vergelijking wordt in eerste instantie uitgewerkt voor behoud van energie. Alle energie verliezen worden verwaarloosd. De praktische en best toegepaste vorm is de uitgebreide vergelijking van Bernoulli. In de uitbreiding worden eveneens de verliezen en toevoegingen aan mechanische energie in rekening gebracht.

Nuttige toepassingen zijn:

- berekenen van debieten en ladingsverliezen in hydraulische leidingen
- keuze van pomp; opstellen en gebruik van pomp- en systeemcurves

1.3.1. Vergelijking van Bernoulli

Beschouwen we in eerste instantie een geïdealiseerde vloeistof, die onsamendrukbaar en wrijvingsloos is (geen viscositeit) in een laminaire stroming. We kunnen een klein CV definiëren, dat bestaat uit een infinitesimaal stroombuisje rond een stroomlijn. Een balans van de energie kan opgesteld worden waarbij er geen energie door wrijving verloren gaat (zie figuur 11).

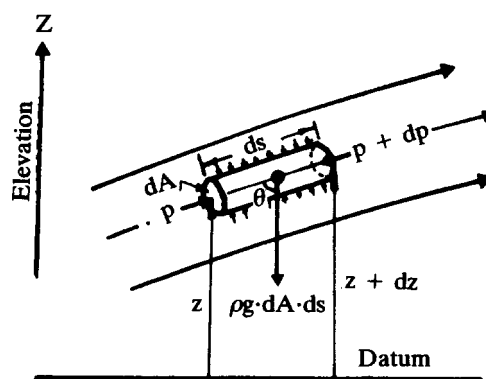


Figure 11 Euler's equation of motion

In de cursus natuurkunde werd de vergelijking van Euler afgeleid op basis van de bewegingsvergelijking van een volumedeeltje vloeistof langs een stroombaan. Het gewicht, de druk op voor- en achtervlak en de hoeveelheid van beweging worden hierin opgenomen.

Deze Euler vergelijking voor stationaire een-dimensionale stroming bij constante temperatuur (inwendige energie constant) kan o.a. geschreven worden als:

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{ds} + g \frac{dz}{ds} + v \frac{dv}{ds} = 0$$

Vergelijking 32

Door herschikken van de vergelijking met constante massa-dichtheid en per eenheid van gewichtsdebiet krijgen we:

$$dz + \frac{dp}{\rho g} + \frac{d(v)^2}{2g} = 0$$

Equation 32 b

Integratie levert ons de Bernoulli-vergelijking:

$$z + \frac{p}{g\rho} + \frac{V^2}{2g} = \text{constant}$$

Vergelijking 33

Mits invoeren van de randvoorwaarden (waarden van p, z en v van het in- en uitstroomvlak) krijgen we de klassieke en best bekende vorm van de Bernoulli vergelijking:

$$z_1 + \frac{p_1}{g\rho} + \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{g\rho} + \frac{V_2^2}{2g}$$

Vergelijking 34

De drie vormen van energie (druk, snelheid en gravitatie) kunnen reversibel in elkaar omgezet worden. Indien er geen energie bijgevoegd of verloren gaat in het CV dan zal de energie die binnenkomt doorheen vlak 1 gelijk zijn aan de energie die buitenstroomt doorheen vlak 2.

Vergelijking 34 heeft de dimensies van lengte. We spreken daarom van “ladingshoogte”, d.w.z. energie equivalent aan de energie in een kolom van dezelfde

vloeistof. De Bernoulli vergelijking is dus afgeleid voor een stroombuis rond een stroomlijn gevuld met een vloeistof zonder wrijving.

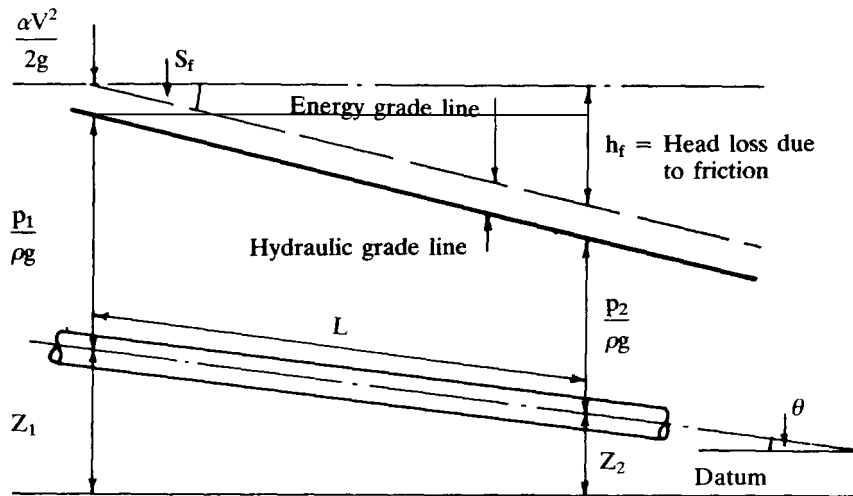


Figure 12 Pressure head and energy gradients in full, uniform pipe flow

Indien er geen ladingsverliezen zouden zijn dan zou in figuur 12 de totale energielijn horizontaal zijn. De snelheidshoogte blijft constant bij constante dwarsdoorsnede. De hoogte z varieert in de hellende buis. Het gevolg is dat de druk zal toenemen van punt 1 naar punt 2. De ladingsverliezen door wrijving zijn verantwoordelijk voor de helling van de energieverhanglijn. De berekening van deze energieverliezen volgt later.

1.3.2. Keuze van het controle volume en de begroting van de termen.

Meestal kunnen de termen uit de vergelijking het eenvoudigst berekend worden door een intelligente keuze van het controle volume. Vooral de keuze van de vlakken 1 en 2 bepalen het CV. De rest van de ondoordringbare buizen-wand van het CV ligt vast door de keuze van 1 en 2. De controle-oppervlaktes 1 en 2 zijn waar het fluidum respectievelijk binnen en buiten het controle volume stroomt.

Een energie-toestand is ook relatief t.o.v. een arbitrair gekozen referentietoestand.

Volgende aandachtspunten zijn belangrijk:

- de hoogte van 1 en 2 (z_1 en z_2) bepaalt de potentiële energie;
- in grote reservoirs kan de snelheid van de vloeistof verwaarloosd worden; en
- in open lucht is er atmosferische druk, die dikwijls per conventie en gemakshalve als referentie druk genomen wordt, voor de energie-toestand ($p=p_{\text{atm}}=0$).

Pas echter op met problemen waarin de absolute druk van belang is. dit is o.a. het geval indien er een risico tot fase-verandering bestaat.

(bv. aanzuigen van alcohol kan explosies veroorzaken)

De keuze van het CV en de referentie toestand voor de energie kan in belangrijke mate bijdragen tot een eenvoudige Bernoulli-vergelijking.

Ook de ondoordringbare wand van het CV is meestal de buizenwand.

1. Een buizenstelsel is een vanzelfsprekende ondoordringbare wand voor het controlevolume. Er is geen uitwisseling van massa, momentum of energie doorheen de wand van de buis (zonder lekken of aftakkingen).
2. Minder evident zijn het verwaarlozen van de interactie tussen de waterstraal en de omringende lucht. Het oppervlak van de omtrek van een waterstraal vormt dan bij benadering een “ondoordringbare” wand.
3. In theoretische afleidingen en voor laminaire stroming kan men een stroombuis rond een stroomlijn isoleren in een stromende vloeistof.

De kinetische energie in bovenstaande formule wordt berekend aan de hand van de **gemiddelde (macroscopische) snelheid binnen de dwarsdoorsnede**. De macroscopische snelheid is het volume-debiet gedeeld door de oppervlakte van de natte dwarsdoorsnede loodrecht op de snelheidsvector V (m s^{-1}):

$$V = \frac{\Phi_V}{A}$$

Vergelijking 35

Binnen een natte dwarsdoorsnede is er echter een snelheidsverdeling. Hierdoor ontstaan fouten in de berekening van de totale energie (niet-lineaire functie van de microscopische snelheid). Zoals in de vorige secties behandeld is de snelheid aan de wand nul (*no-slip boundary*), terwijl de snelheid in het midden van de dwarsdoorsnede maximaal is. De **microscopische snelheden variëren dus** en de berekening van de kinetische energie zou in feite op deze snelheden gebaseerd dienen te zijn.

Om dit probleem op te lossen wordt een correctie-factor α ingevoerd. Deze factor wordt als volgt geëvalueerd:

$$\alpha = \left(\frac{V^2}{2g} \rho V A \right)^{-1} \iint_A \frac{V^2}{2g} \rho v dA = \frac{1}{A} \iint_A \left[\frac{v}{V} \right]^3 dA$$

Vergelijking 36

De factor α is de verhouding van de echte kinetische energie (door integratie van het snelheidsprofiel) en van deze berekend op basis van een uniform gemiddelde (over de dwars-doorsnede) snelheid (ook macroscopische snelheid genaamd). We berekenen het volume-debiet * kinetische energie enerzijds op macroscopische en anderzijds op microscopische wijze. Men kan theoretisch afleiden voor laminaire stroming in ronde buizen dat de factor $\alpha = 2$. Bij turbulente stroming is het snelheidsprofiel (zie sectie 1.2 en figuur 8 in die sectie) niet af te leiden en varieert de factor $\alpha = 1.1$ tot 1.2.

Daar in vele problemen de kinetische energie een minder belangrijke term is gebruikt men in turbulente stroming een factor $\alpha = 1$ en verwaarloost men dus de relatief kleine snelheidscorrectie voor de kinetische energie. Een andere vereenvoudiging is mogelijk doordat de meeste vloeistoffen (water, olie enz.) weinig samendrukbaar zijn. De soortelijke massa **ρ is dus constant**. De continuïteit van massa onder stationaire en **niet-samendrukbare** stroming:

$$A_1 V_1 = A_2 V_2$$

Vergelijking 37

Deze vergelijking is ook gekend als de **continuïteitswet**. Uiteraard kan dit niet voor gassen, die goed samendrukbaar zijn.

Voor vloeistoffen verkiest men Bernouilli-vergelijking te delen door ρ . Dan is de Bernouilli-vergelijking in eenheden van "energie-verandering (arbeid of *work*) per gewichts-debiet ($g \cdot m \cdot V \cdot A$)" uitgedrukt en bekomt men voor een controle oppervlak (de ingang en uitgang van het CV):

$$H = z + \alpha \frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\rho g}$$

Vergelijking 38

$$H_1 = H_2 + H_A + h_L + H_E$$

Vergelijking 39

De dimensie van H , ook “*total head*” of “**ladingshoogte**” genaamd, is lengte (liefst in de SI-eenheid m). De vergelijking is nog altijd de energie (zij het per gewichtsdebiet) die het controle volume verlaat of binnenkomt per eenheid van tijd doorheen het controle oppervlak.

Het nut van deze vorm voor onsamendrukbare vloeistoffen is dat dit bv. voor water overeenkomt met de hoogte van een water-kolom in een piezometer. Ladingshoogte is dus eenvoudig meetbaar en visualiseerbaar.

De Bernoulli vergelijking ligt ook aan de basis van een methode om snelheden van vloeistoffen te meten. Bij stromende fluida zal men afhankelijk van de opstelling de statische, totale of stagnatie-druk meten. De Pitot-buis (zie figuur 13) past dit principe toe.

⇒ statische = geen snelheidscomponente

⇒ stagnatie-druk= met snelheidscomponente

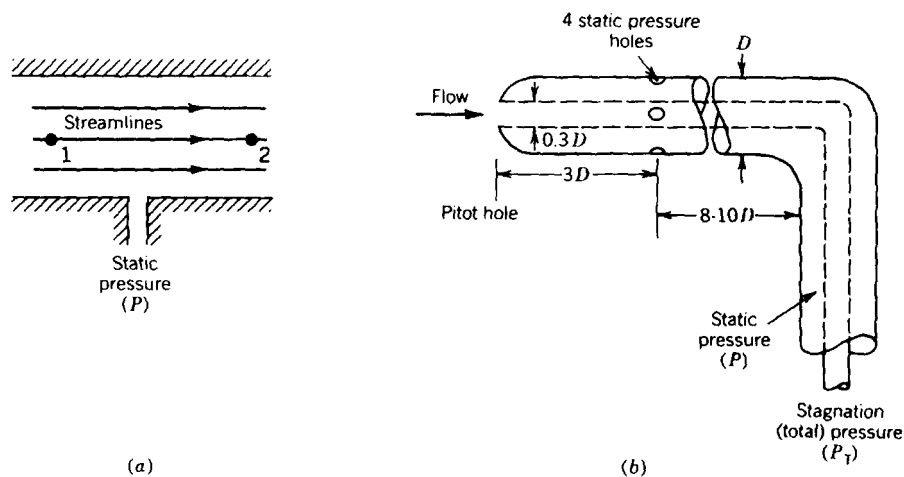


Figure 13 Techniques for measuring static and stagnation pressure. (a) Wall static pressure tap. (b) Pitot-static probe.

1.3.3. Uitgebreide Bernoulli-vergelijking: ladingsverliezen, pompen en turbines

De oorspronkelijke Bernoulli-vergelijking is gebaseerd op het behoud van energie in het CV. In een buizenstelsel met “binnenstroming” via oppervlak 1 en “buitenstroming” via oppervlak 2 zijn er echter ook irreversibele energie verliezen, toevoegingen en extracties. Dan wordt de vergelijking:

$$H_1 = H_2 + H_A + h_L + H_E$$

Vergelijking 40

(uitgebreide Bernoulli-vergelijking)

waarbij H_A h_L en H_E de toegevoegde, verloren (in leidingen) en geëxtraheerde energie is.

- Men kan energie toevoegen (H_A) met behulp van een pomp. **H_A is negatief (arbeid verricht op de vloeistof).**
- Er wordt energie verloren (h_L) in continue wrijving en door lokale stromingsveranderingen, zoals contractie van de pijp, bochten, kranen aftakkingen (ladingsverliezen).
- De extractie van mechanische energie (H_E) kan gebeuren via een turbine (bv. een watermolen). **H_E is positief (arbeid verricht door de vloeistof).**

Merk op dat de keuze van positief en negatief eerder een conventie is. Indien we de H_A h_L en H_E de toegevoegde, verloren (in leidingen) en geëxtraheerde energie links van het gelijkheidsteken zouden plaatsen met een + in de vergelijking dan is de conventie uiteraard anders. Belangrijk is vooral consequent de conventie aan te houden.

Fundamenteel belangrijk is dat deze energie-verliezen of toenames gebeuren **binnen het controle-volume**. De verliezen en winsten voor of na het doorstroomoppervlak van het controle volume en dus buiten het CV mogen dus niet in de vergelijking opgenomen worden.

1.3.4 Energie-verliezen (h_L) in leidingen.

Een belangrijke vorm van energie-verlies in leidingen ontstaat door wrijving. Dit verlies komt overeen met het reeds behandelde drukverschil in buizen (zie sectie 1.2.2) en werd h_f genoemd. Een ander energieverlies ontstaat door lokale verandering van het snelheidsprofiel. Bv. bij een plotse expansie (van kleine diameter buis naar een grotere) ontstaan lokale wervels, die een gedeelte van de kinetische energie laten verloren gaan. Elke appendage (veelgebruikte term in de Nederlandse vakliteratuur over hydraulica) heeft zijn lokaal energie verlies (h_m). Dit wordt meestal empirisch bepaald. Het totale energieverlies door continue verliezen h_f en door lokale verliezen h_m vormen tezamen:

$$h_L = h_f + h_m$$

Vergelijking 41

Zoals reeds behandeld in sectie 1.2.1 is er laminaire en turbulente stroming. Bij laminaire stroming bewegen de vloeistofdeeltjes in parallelle stroomlijnen (of laminaire lagen). De vloeistofdeeltjes bij turbulente stroming bewegen zich in alle richtingen (via turbulente wervelingen). Veelal maakt men gebruik van een

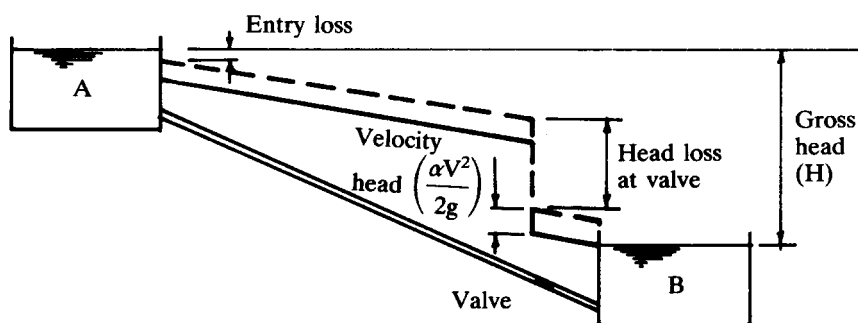


Figure 14 Energie verliezen door wrijving en door kraan

combinatie van theoretische en empirische relaties.

Zoals reeds eerder gesteld is het Reynolds getal een dimensieloos getal dat de verhouding tussen inertie-krachten en viskeuze krachten weergeeft:

$$\text{Re} = \frac{Vd\rho}{\mu}$$

Vergelijking 42

waarbij μ de dynamische viscositeit ($\text{kg m}^{-1} \text{s}^{-1}$) is.

Voor niet-ronde buizen vervangt men de diameter door de hydraulische diameter d_h die als volgt gedefiniëerd is:

$$d_h = \frac{4A_c}{P}$$

Vergelijking 43

waarbij A_c de natte dwarsdoorsnede (loodrecht op de snelheidsvector) is en P de natte omtrek van de natte dwarsdoorsnede (zie figuur 15). Het gebruik van de equivalente diameter is alleen zinvol bij turbulente stroming. We kunnen voor alle problemen in eerste instantie het Re-getal met de hydraulische diameter gebruiken om laminaire en turbulente stroming van elkaar te onderscheiden.

Het gebruik van lage (laminaire) Re waarden in het Moody diagramma is dus minder zinvol indien de buizen geen ronde doorsnede hebben. Zie sectie 1.1.4 voor laminaire stroming doorheen willekeurige doorsnedes.




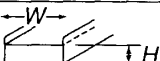
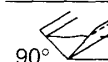


Flow situation	Hydraulic diameter $D_h = 4A/S$	A
 Circular pipe	D	$\frac{\pi}{4} D^2$
 Concentric pipe or slit	$D_2 - D_1 = 2\delta$	$\frac{\pi}{4} (D_2^2 - D_1^2)$
 Rectangular pipe	$\frac{2WB}{W+B}$	WB
 Open channel	$\frac{4WH}{W+2H}$	WH
 Open channel	$\frac{2H}{\sqrt{2}}$	H^2
 Half-filled	D	$\frac{\pi}{8} D^2$
 Liquid film in a tube	4δ	$\delta\pi D$

Figure 15 Hydraulic diameters of various channels

Voor ronde buizen komt de hydraulische diameter overeen met de geometrische diameter.

~~=niet te kennen=opmerking=====maar ev. belangrijk voor latere cursussen=====~~

In de **hydraulica** hanteert men meestal een andere definitie:

de **hydraulische straal** R_h

als:

$$R_h = \frac{A}{P}$$

Merk op dat voor een ronde buis $R_h = (\pi d^2/4)/(\pi d) = d/4$. Dus de hydraulische straal is **niet** gelijk aan de geometrische straal van de buis.

In deze tekst houden we ons aan de definitie waarbij de geometrische en de hydraulische diameter dezelfde zijn.

Meer algemeen voor alle dwarsdoorsneden wordt:

$$Re = \frac{V d_h}{\nu}$$

Vergelijking 44

met ν de kinematische viscositeit ($m^2 s^{-1}$); welke onafhankelijk is van de massadichtheid. Water bij 20°C heeft ongeveer een kinematische viscositeit $\nu = 10^{-6} m^2 s^{-1}$. Bij lage Reynolds getallen zoals $Re < 2300$ in gesloten leidingen hebben we laminaire stromingen. Bij hogere Re hebben we turbulente. Uiteraard is 2300 geen absolute grens en is er een geleidelijke overgang. In een andere context heeft de Re -grenswaarde andere waarde (zie bv warmte-overdracht in de cursus: fysische transportverschijnselen).

Zoals reeds afgeleid in sectie 1.2.2 is de **Darcy-Weisbach-formule** voor wrijvingsverliezen in ronde buizen en leidingen als volgt :

$$h_f = f \left(\frac{L}{d} \right) \left(\frac{V^2}{2g} \right)$$

Vergelijking 45

waarbij f de wrijvingsfactor, L de lengte van de buis en d de diameter van de leiding is. De waarden voor f werden reeds behandeld in sectie 1.2.2.

===== **niet te kennen opm** in andere handboeken =====

Er is een alternatieve definitie van de wrijvingsfactor: $f' = f/4$ (het alternatief is f' ; wij gebruiken factor f zoals gedefiniëerd in vgl 22).

=====

Bij de gangbare buizen en snelheden is de stroming van water bijna altijd turbulent

Een verandering van het stromingspatroon (en hoeveelheid van beweging; een vectoriële eigenschap, dus zowel grootte als richting) geeft aanleiding tot lokale energieverliezen.

Men kan het voorbeeld uitwerken van een plotse expansie (figuur 16).

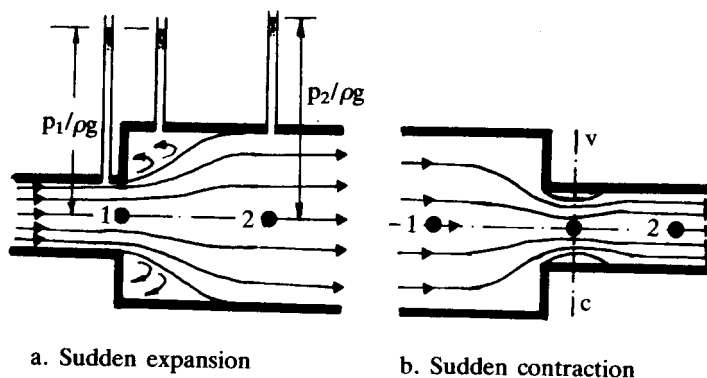


Figure 16 Energy losses in sudden transitions

De lokale energieverliezen worden berekend door toepassing van de balans van hoeveelheid van beweging.

$$p_1 A_1 + p_1 (A_2 - A_1) - p_2 A_2 = \rho Q (V_2 - V_1)$$

Vergelijking 46

De continuïteitsvergelijking stelt dat: $Q = A_1 V_1 = A_2 V_2$ op voorwaarde dat de vloeistof onsamendrukbaar is. Indien deze expansie horizontaal is en de punten 1 en 2 op korte

afstand dan kan men afleiden door combinatie van de uitgebreide Bernoulli-vergelijking (met onbekende h_L), de vorige vergelijking en de continuïteit dat:

$$h_L = \frac{(V_1 - V_2)^2}{2g}$$

Vergelijking 47

De lokale verliezen worden meestal berekend door:

$$h_m = K \left(\frac{V^2}{2g} \right)$$

Vergelijking 48

De coëfficiënt K is afhankelijk van het soort ladingsverlies (kranen of valven, terugslag-kleppen, filters, debietsmeters, bochten en diameterveranderingen). Deze coëfficiënt K is afhankelijk van de geometrie van de appendage bij hogere Re getallen

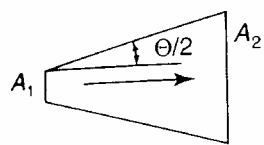
Merk op: lokale ladingsverliezen zijn geen wrijvingsverliezen.

=====niet te kennen opmerking=====

Sommige (verouderde) handboeken vervangt men in de berekening de lokale verliezen door de equivalente wrijvingsverliezen van een fictieve lengte buis.

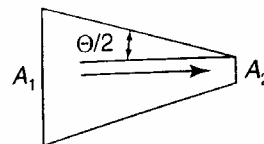
=====

Table 2. Some values of the friction loss factor K_w (referring to downstream velocity for $Re > 10^5$ (Always with *downstream* velocity))

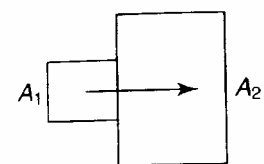


$$K_w = k \left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right)^2$$

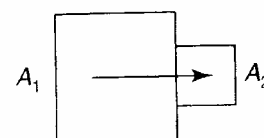
Θ	$< 10^\circ$	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
k	0	0.17	0.41	0.71	0.90	1.03	1.12	1.13	1.10	1.05



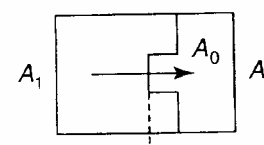
Θ	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°
K_w	0.16	0.20	0.24	0.28	0.31	0.32	0.34	0.35



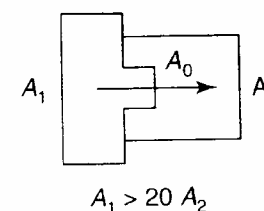
$$K_w = \left(\frac{A_2}{A_1} - 1\right)^2$$



$$K_w = 0.45 \left(1 - \frac{A_2}{A_1}\right)$$




$\frac{A_0}{A_1}$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
K_w	226	47.8	17.5	7.8	3.75	1.80	0.80	0.30	0.06

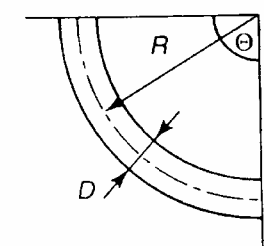


$\frac{A_0}{A_2}$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
K_w	232	51	20	9.6	5.3	3.1	1.9	1.2	0.73

$A_1 > 20 A_2$

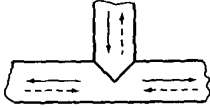
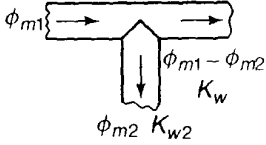
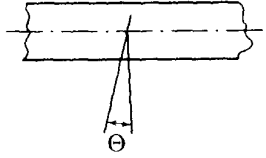
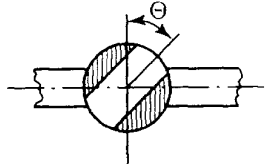


Θ	20°	40°	60°	80°	90°	100°	120°	140°
K_w	0.05	0.14	0.36	0.74	0.98	1.26	1.86	2.43



$$K_w = \left(0.131 + 0.163 \left(\frac{D}{R}\right)^{3.5}\right) \frac{\Theta}{90^\circ}$$

Table 2 (continued)

	— $K_w = 2$ - - - $K_w \sim 0.75$																					
	<table border="1"> <tbody> <tr> <td>$\frac{\phi_{m2}}{\phi_{m1}}$</td> <td>= 0</td> <td>0.2</td> <td>0.4</td> <td>0.6</td> <td>0.8</td> <td>1.0</td> </tr> <tr> <td>K_w</td> <td>= 0.95</td> <td>0.88</td> <td>0.89</td> <td>0.95</td> <td>1.10</td> <td>1.28</td> </tr> <tr> <td>K_{w2}</td> <td>= -</td> <td>-0.08</td> <td>-0.05</td> <td>0.07</td> <td>0.21</td> <td>0.35</td> </tr> </tbody> </table>	$\frac{\phi_{m2}}{\phi_{m1}}$	= 0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	K_w	= 0.95	0.88	0.89	0.95	1.10	1.28	K_{w2}	= -	-0.08	-0.05	0.07	0.21	0.35
$\frac{\phi_{m2}}{\phi_{m1}}$	= 0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0																
K_w	= 0.95	0.88	0.89	0.95	1.10	1.28																
K_{w2}	= -	-0.08	-0.05	0.07	0.21	0.35																
	<table border="1"> <tbody> <tr> <td>$\Theta = 20^\circ$</td> <td>30°</td> <td>40°</td> <td>50°</td> <td>60°</td> <td>70°</td> <td>80°</td> <td>85°</td> </tr> <tr> <td>$K_w = 751$</td> <td>118</td> <td>33</td> <td>11</td> <td>4</td> <td>1.5</td> <td>0.52</td> <td>0.24</td> </tr> </tbody> </table>	$\Theta = 20^\circ$	30°	40°	50°	60°	70°	80°	85°	$K_w = 751$	118	33	11	4	1.5	0.52	0.24					
$\Theta = 20^\circ$	30°	40°	50°	60°	70°	80°	85°															
$K_w = 751$	118	33	11	4	1.5	0.52	0.24															
	<table border="1"> <tbody> <tr> <td>$\Theta = 25^\circ$</td> <td>30°</td> <td>40°</td> <td>50°</td> <td>60°</td> <td>70°</td> <td>80°</td> <td>85°</td> </tr> <tr> <td>$K_w = 486$</td> <td>206</td> <td>53</td> <td>17</td> <td>5.5</td> <td>1.6</td> <td>0.29</td> <td>0.05</td> </tr> </tbody> </table>	$\Theta = 25^\circ$	30°	40°	50°	60°	70°	80°	85°	$K_w = 486$	206	53	17	5.5	1.6	0.29	0.05					
$\Theta = 25^\circ$	30°	40°	50°	60°	70°	80°	85°															
$K_w = 486$	206	53	17	5.5	1.6	0.29	0.05															
Gate valve	Fraction closed	0	1/8	2/8	3/8	4/8	5/8	6/8	7/8													
	K_w	= 0.05	0.07	0.26	0.81	2.1	5.5	17	98													
Globe valve	Open	$K_w = 4$																				
Sieve plate		$\epsilon = 0.6$	0.5	0.2																		
Fraction free space ϵ		$K_w = 0.7$	1.5	2.0																		
Cyclone		$K_w = 10$ to 20																				
Water meter		$K_w = 6$ to 12																				

1.3.5. Systeem- en pompkarakteristieken

De ladingsverliezen worden dikwijls gecompenseerd door het toevoegen van **energie d.m.v. pompen (H_A)**. Een pomp voegt energie, H_A , toe aan de vloeistof **in het controle volume**.

Per conventie in deze text (zie 1.3.3) wordt dit als **negatief** genomen en in de uitgebreide vergelijking van Bernouilli aan de rechterkant van het gelijkheidsteken geplaatst.

De mechanische efficiëntie van een pomp is:

$$\eta_p = \frac{\rho g H_A \dot{\phi}_V}{\dot{W}_s}$$

Vergelijking 49

waarbij subscript s staat voor “shaft” (vertaald: “as”). \dot{W}_s is het as-vermogen (Watt) geleverd door de motor aan de as van de pomp. Daarenboven heeft de motor een efficiëntie om (electrisch) vermogen (η_E) om te zetten naar as- (“*shaft*”)vermogen. Dus het nodige vermogen (bv. elektrisch) is evenredig met de nodige ladingshoogte. De **verbruikte energie** om te pompen is dit totale vermogen vermenigvuldigd met de tijdsduur van het pompen en wordt dikwijls in kWh uitgedrukt.

In deze cursus worden geen details van pompen bestudeerd. Vele types van pompen (zoals o.a. de centrifugale pompen) hebben een operatie-karakteristiek, die een relatie weergeeft tussen de opvoerhoogte (toegevoegde energie-lading), H_A , en het volume debiet.

Het electrisch vermogen (Watt) nodig om water (of andere vloeistoffen) op te pompen is:

$$\dot{W}_s = \frac{\rho g H_A \dot{\phi}_V}{\eta_p (\eta_E)}$$

Vergelijking 50

Een belangrijke uitzondering is de piston-pomp. Deze pomp heeft een constant debiet onafhankelijk van de opvoerhoogte. Uiteraard kunnen mechanische componenten van de pomp/motor gaan breken indien de opvoerhoogte te groot wordt voor de piston-pomp.

Pomp-fabrikanten testen hun pompen en publiceren pomp-karakteristieken met het verband tussen opvoerhoogte en debiet. Ook wordt dikwijls op dezelfde grafiek meerdere pompen getoond. De efficiëntie van de pomp wordt dikwijls getoond als contourlijnen (zie figuur 17). Men zal grafieken vergelijken en pompen opzoeken met een goede efficiëntie bij het verwachte debiet en opvoerhoogte.

In deze cursus wordt de pomp als een “black box” gebruikt.

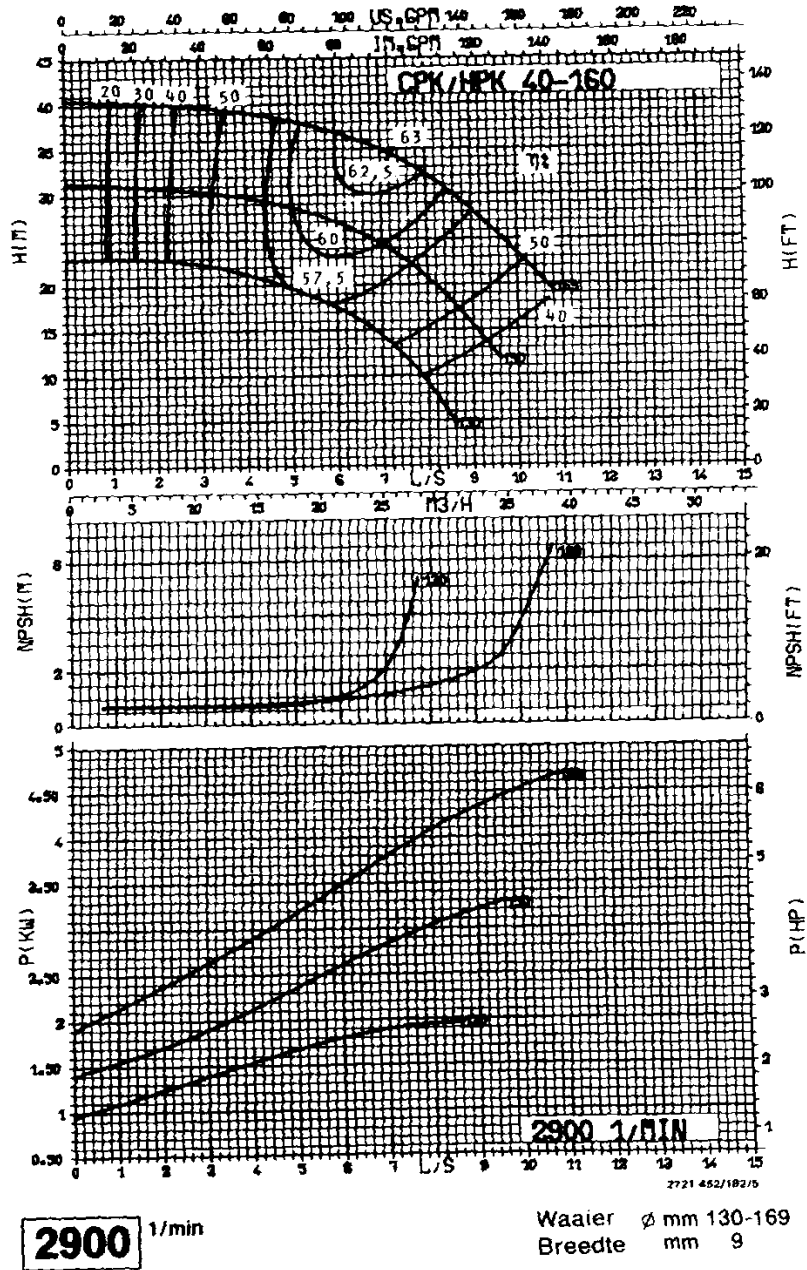
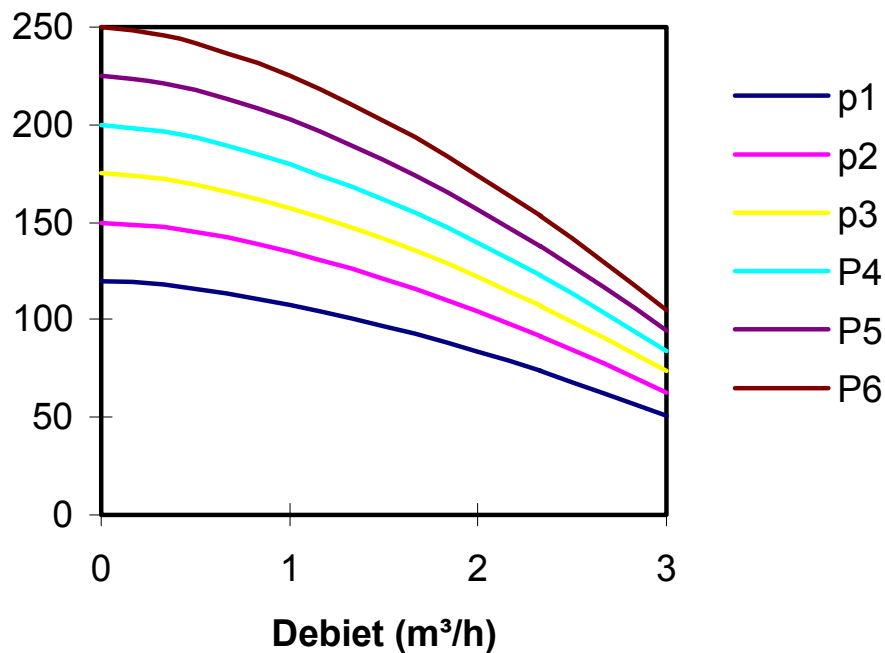


Fig. 17 Voorbeeld van pomp-karakteristieken

Figuur 18 : Pompkarakteristiek van zes centrifugaal pompen (p1 .. p6); opvoerhoogte: $-H_A$ (m) in de y-as



Een groot gevaar voor pompen is dat er inwendig cavitatie optreedt. Dit is een lokale dampvorming in de pomp, die de levensduur van de pomp vermindert, veel lawaai-hinder veroorzaakt, de efficiëntie van de pomp doet dalen en in kritieke gevallen leidt tot breuk van de pomp. Dit kan vermeden worden door de aanzuigdruk aan de ingang van de pomp te beperken tot een toegelaten maximale NPSH (net positive suction head) waarde. De maximale NPSH is ook een functie van het debiet en staat meestal ook vermeld op de pomp-karakteristieken.

$$NPSH = \frac{P_a}{\rho g} - \Delta z_s - h_{Ls} - \frac{V_s^2}{2g} - \frac{P_v}{\rho g}$$

Vergelijking 51

Vergelijking met p_a en p_v de absolute druk van de atmosfeer en de toegelaten druk aan de ingang van de pomp, respectievelijk; index s refereert naar de aanzuigleiding (s= suction); Δz is het hoogteverschil tussen pompingang en het vrije water en tenslotte h_{Ls} zijn de totale ladingsverliezen in de aanzuigleiding (zie figuur 19). De toegelaten

druk is hoger dan de dampdruk. Drukken in de pomp kunnen nog veel lager zijn dan de aanzuigdruk aan de ingang van de pomp.

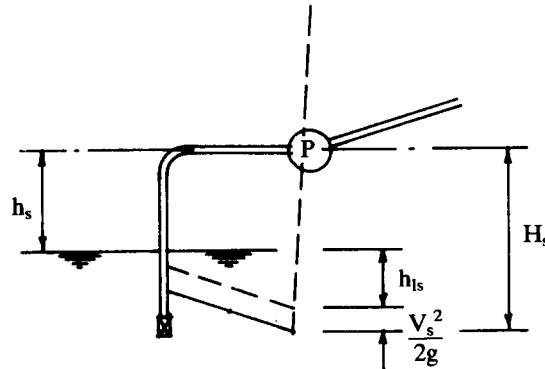


Figure 19 Head conditions in suction pipe

De pomp wordt bij voorkeur ingezet bij een combinatie van Q-H dichtbij het punt met de hoogste efficiëntie. De toelevering van lading door de pomp neemt af in functie van het te pompen debiet.

Een pompkarakteristiek (**in absolute waarde**) kan uitgedrukt worden door:

$$H(Q) = H_0 - H_0 \left(\frac{Q}{Q_{\max}} \right)^B$$

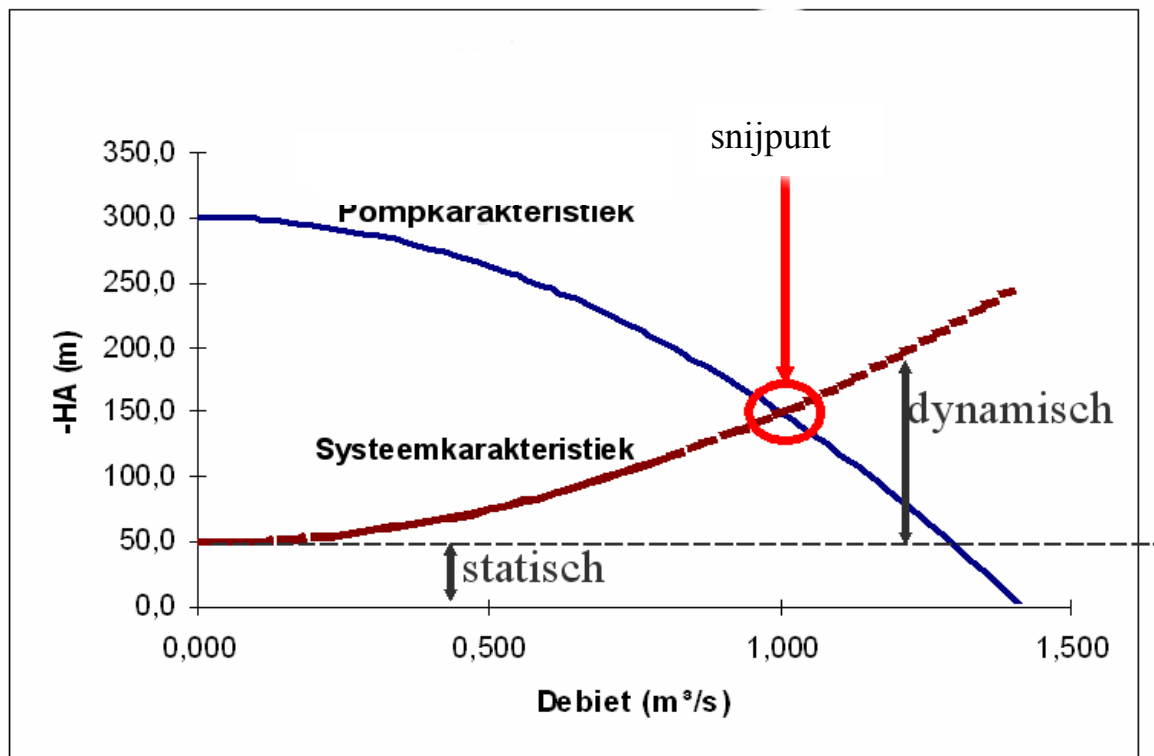
Vergelijking 52

Waarbij Q het volumedebiet (m^3/s) is; H_0 de (absolute) opvoerhoogte is bij $Q=0$ m^3/s , Q_{\max} het maximale debiet bij $H=0$ m en B een coëfficiënt is.

Een bepaald leidingssysteem heeft analoog een ladingsverlies in functie van het debiet. Hoe hoger het debiet hoe hoger het ladingsverlies. Dit ladingsverlies kan berekend worden m.b.v. bovenstaande formules tussen de input en output in het systeem. De (leiding-)systeemcurve geeft de benodigde lading (verschil ingang en uitgang en ladingsverliezen) weer in functie van het debiet.

Het debiet met een bepaald leidingssysteem en pomp kan gevonden worden door de twee curves te combineren. Het snijpunt van beide curves geeft het debiet en het ladingsverlies aan (Fig 18b).

Figuur 18b: Werkingspunt als snijpunt tussen pomp- en systeemkarakteristiek.



In de praktijk heeft men een aantal buizen-diameters en pomp-modellen ter beschikking. Veelal wenst men een vloeistof met een bepaald debiet te verpompen. Men zoekt dan de beste combinatie van buizen-diameters en pomp, die het gevraagde debiet het best benadert. Soms overdimensioneert men de pomp en plaatst men een kraan, die gedeeltelijk dichtgedraaid wordt om extra ladingsverliezen in te voeren. Dit laat toe het debiet enigzins te regelen. Dit is 'smoren' (Fig 18 c) in het Engels 'trottle'). Deze aanpak is energetisch niet efficiënt omdat we het debiet gaan beperken door extra energie te verbruiken.

Elke pomp heeft zijn karakteristiek. Soms kan men de pomp sneller doen draaien. In dat geval wijzigt de pompkarakteristiek (zie fig 18 d) en zal bij eenzelfde leidingssysteem het werkingpunt (of snijpunt op de grafiek) op een andere plaats liggen.

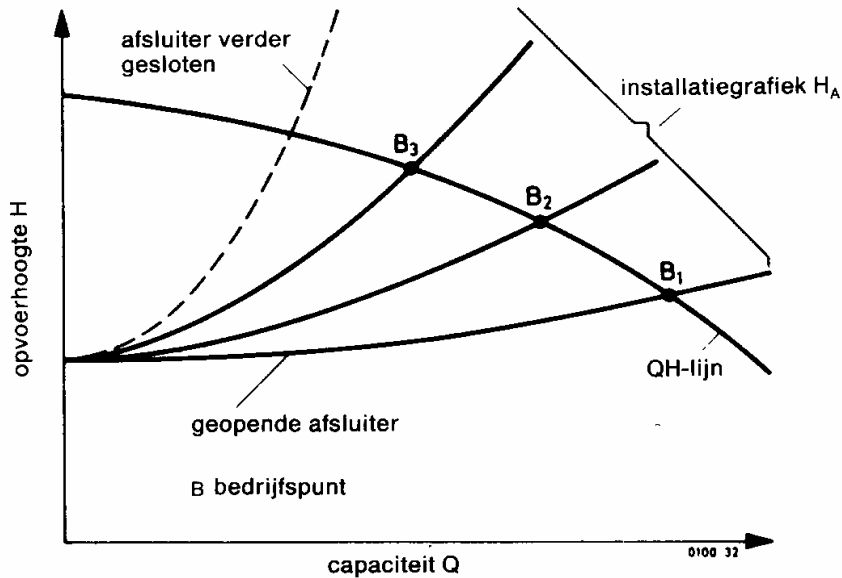


Fig. 18C Verandering van het bedrijfspunt van B_1 naar B_2 op de QH-lijn door toenemend smoren.

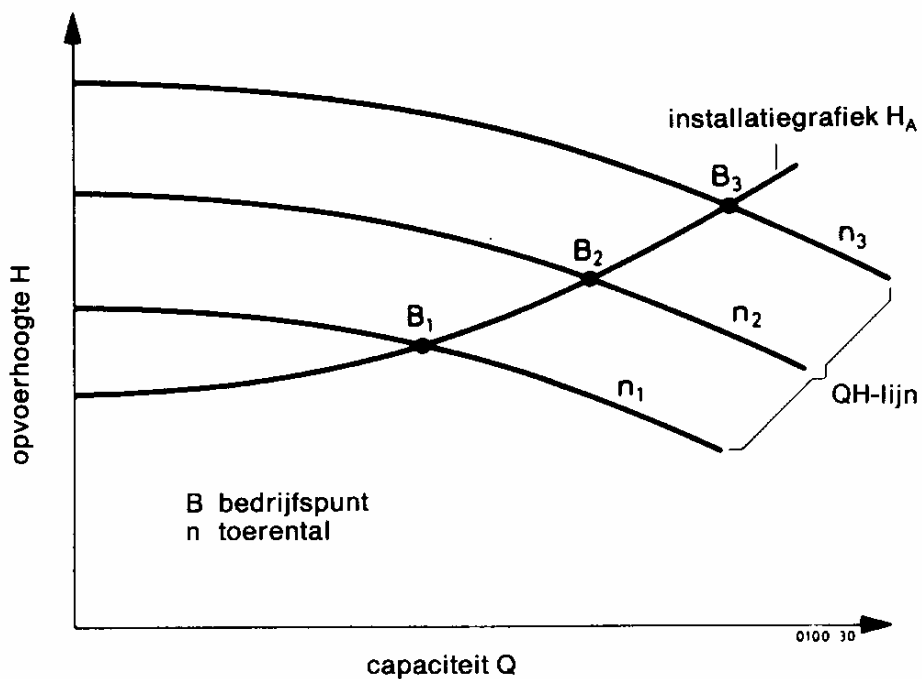


Fig. 18D Verandering van het bedrijfspunt van B_1 naar B_2 op de installatiegrafiek H_A door vergroting van het toerental van de pomp van n_1 naar n_2 .

Vele systemen hebben een variabele afname (debiet) naargelang de noden, dit wordt geregeld d.m.v. van de aftap-kraan. De pomp, met een pomp-karakteristieke relatie Q-H, levert extra lading H naargelang de vloeistof-consumptie. De druk kan berekend worden naargelang het debiet.

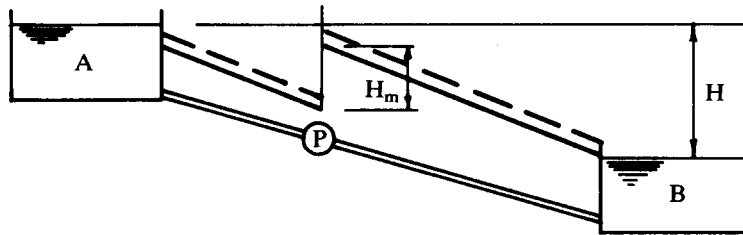


Figure 20: Verhanglijn met pomp

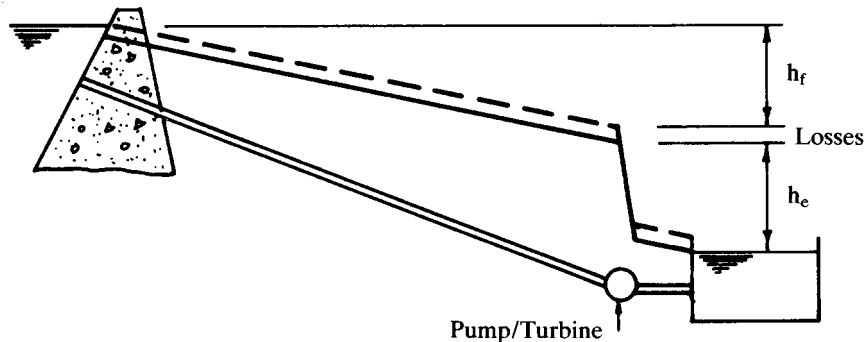


Figure 21 Pumped-storage power scheme in generating mode

1.4. Ontwikkeling van het snelheidsprofiel en invloed op de warmte- en massa-overdracht.

Indien in een homogeen stromingveld de vloeistof in een buis stroomt dan zal aan de ingang het snelheidsprofiel nog niet ontwikkeld zijn. Pas na een afstand in de buis krijgen we een snelheidsprofiel zoals we afgeleid hebben in de vorige secties. Het dimensieloze Peclet getal :

$$Pe = Re Pr$$

Vergelijking 53

bepaalt in belangrijke mate na hoeveel afstand het ontwikkelde snelheidsprofiel bereikt wordt.

Voor laminaire stroming in ronde buizen met een constante wandtemperatuur is het gemiddelde Nusselt getal:

$$\text{Nu}_{\text{av}} = \sqrt[3]{(3.66)^3 + (1.61)^3} \text{Pe} \frac{d}{L}$$

Vergelijking 54

met d als diameter en L als lengte van de buis.

Het Nusselt getal is dus groter dan 3.66, en is er dus meer warmteuitwisseling.

Warmtewisselaars maken gebruik van dit principe om de warmteuitwisseling te verhogen. Bij turbulente stroming is dit verschijnsel iets minder belangrijk, maar zal eveneens tot grotere warmteuitwisseling leiden.

Ook in massa-overdracht doen zich analoge effecten voor: zo kan grondwaterstroming doorheen een poreus medium voorgesteld worden als een opeenvolging van korte buisjes.

1.5. Krachten veroorzaakt door verandering van de hoeveelheid van beweging.

Een CV van een fluidum heeft een in- en uitstroom van hoeveelheid van beweging.

Wanneer de **vectoriële** som van deze balans niet in evenwicht is dienen er extra krachten uitgeoefend te worden om het CV op zijn plaats te houden. Deze krachten dienen gelijk te zijn aan de balans van de hoeveelheid van beweging. De vectoriële balans wordt dan:

$$\sum_{CV} \vec{F} = \left[\vec{V}q_m \right]_d - \left[\vec{V}q_m \right]_i$$

Vergelijking 55

waarbij F de krachten op het vloeistof volume van het CV, V de vectoriële snelheid en q_m het massadebiet dat in en uit het CV treedt via de in- en uitstroom controle oppervlakken (in “i” en uit “d”). Bij stationaire stroming is q_m constant en gelijk. De **vector** snelheid kan zowel in **absolute grootte** (doorsnede van een buis bv.) als in **richting** (bocht van een buis bv.) variëren.

Het CV voor de balans van de hoeveelheid van beweging bevat volgende krachten:

- het eigen-gewicht van de vloeistof en

- de oppervlaktekrachten op het oppervlak (CS “control surface”) dat het CV omsluit.

Het gewicht kan voorgesteld worden als een resultante die aangrijpt in het zwaartepunt van het CV:

$$\left| \vec{F}_{gew} \right| = \left(F_{gew} \right)_y = \rho V \vec{g}$$

Vergelijking 56

met V als volume, ρ de soortelijke massa en g de aardversnelling ($9.807 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$).

De oppervlakte krachten op CS bestaan uit drukkrachten (normaal gericht op CS) en schuifkrachten (rakend aan CS). Wanneer we lokaal een klein CV isoleren (bv. de bocht op een leiding) dan is de invloed van de wrijving (schuifweerstand) meestal verwaarloosbaar. De drukkrachten bestaan uit de druk van de binnen- en buitenstromende vloeistof en de druk van de ondoordringbare wand. Door gepaste keuze van het CS (de oppervlakken waar er vloeistof binnen en buiten stroomt staan loodrecht op de snelheidsvectoren) is de evaluatie van de drukkrachten geassocieerd aan de binnen- en buitenstromende vloeistof eenvoudig: met name druk*oppervlakte. De drukkrachten op de ondoordringbare wand van een leiding vormen actie-reactie met het fluidum in het CV. De leiding dient bevestigd of verstevigd te worden om die krachten te compenseren.

Werken we dit uit voor een horizontale spuit (zie figuur 22) met wrijving en gewicht verwaarloosd.

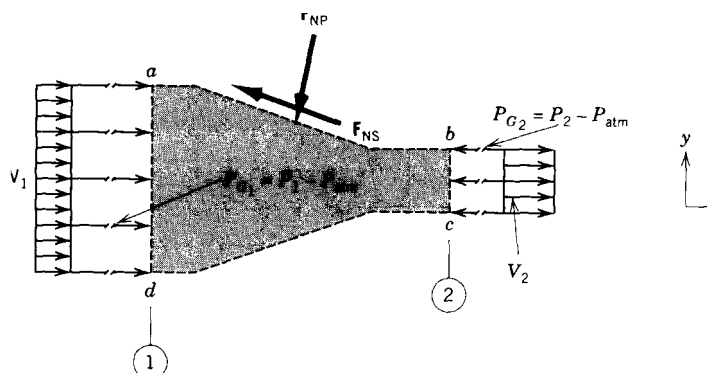


Figure 22 Free-body diagram of a nozzle control volume (top view).

De resulterende kracht (alleen de x-componente voor een horizontale spuit) is:

$$F_x = q_m (V_{x1} - V_{x2}) + P_{G1} A_1 - P_{G2} A_2$$

Vergelijking 57

waarbij P_{G1} en P_{G2} de druk zijn relatief t.o.v. van de atmosferische druk agerend op de oppervlaktes A_1 en A_2 , respectievelijk.

Analoog kan een balans gemaakt worden voor een verticale bocht (zie figuur 23). In zo'n geval hebben we een x en een y-componente van onze vectoren.

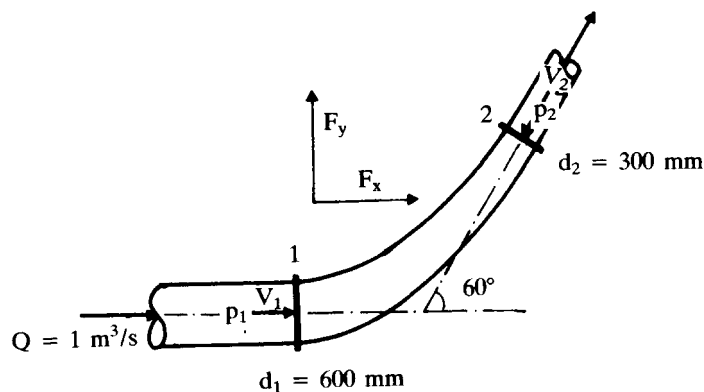


Figure 23 Forces on a converging bend

Aan de bolle kant van een bocht in een leiding wordt daarom meestal verstevigd en ondersteut. Bij mof-koppeling is er risico dat de bocht eraf schuift indien er geen maatregelen genomen worden.

2. Eenparige en uniforme stroming in open kanalen.

De stroming in open kanalen is gekenmerkt door de aanwezigheid van een interface tussen het water (of een andere vloeistof) en de atmosfeer. De wrijving met de atmosfeer is verwaarloosbaar (tenzij bv. bij sterke wind) relatief in vergelijking met de wrijving met de wand van het kanaal. De aanwezigheid van een vrij (in contact met de atmosfeer) wateroppervlak brengt veel complicaties met zich mee, die in cursussen over open kanalen stroming behandeld worden.

In deze cursus beperken we ons tot het eenvoudigste geval: **eenparige en uniforme stroming**. Onder stationaire toestand en bij een constante dwarsdoorsnede zal de

energie-verhanglijn parallel lopen met de helling van het kanaal. De energieverliezen in de uitgebreide Bernoulli-vergelijking zijn dan uitsluitend de ladingsverliezen door wrijving h_f . Aldus wordt de longitudinale helling van de bodem S_0 gelijk aan de helling van de verhanglijn $S_f = h_f/L$. De ladingsverliezen door wrijving worden geschat d.m.v. de Darcy-Weisbach vergelijking:

$$S_0 = S_f = f \frac{1}{d_h} \frac{v^2}{2g}$$

Vergelijking 58

De gemiddelde stroomsnelheid wordt dan:

$$v = \sqrt{\frac{1}{f} 2g d_h S_f}$$

Vergelijking 59

Bij normale temperaturen en water als vloeistof worden specifieke formules toegepast.

Voor **water** in buizen is Hazen-Williams populair:

$$v = 0.8492 C (R_h)^{0.63} (S_0)^{0.54}$$

Vergelijking 60

met C als specifieke coëfficiënt.

Voor open kanalen stroming gebruikt men dikwijls Manning:

$$v = \frac{1}{n} (R_h)^{2/3} S^{1/2} \quad (m / s)$$

Vergelijking 61

met n als *Mannings' n*

Hierbij zijn dus C en n , de Hazen-Williams en Manning ruwheids-coëfficiënten respectievelijk, afhankelijk van het soort wand.

In de traditionele hydraulica gebruikt men de

hydraulische straal: $R_h = d_h/4$ (is dus niet de geometrische straal)

Bemerk dat de twee formules (Hazen-Williams en Manning) allebei empirisch, de hydraulische straal gebruiken en die verheffen tot de macht $2/3$ en niet tot de macht $1/2$ zoals verwacht uit de theoretisch beter onderbouwde Darcy-Weisbach vergelijking. Dit is deels veroorzaakt doordat de factor f uit Darcy-Weisbach, eigenlijk niet constant is in functie van de snelheid, maar beïnvloed wordt door het Re getal, dat zowel de snelheid als de hydraulische diameter bevat (zie het Moody diagramma in appendix A). De macht $1/2$ voor het verhang S_f komt overeen. Heel kleine afwijking is dat Hazen-Williams 0.54 gebruikt. De Hazen-Williams formule is echter niet geschikt voor kleine diameters ($<75\text{mm}$) en kleine debieten ($<3\text{ L/s}$).

Een speciaal geval van open kanalen stroming is de “sheet flow”, (“sheet” een laag zoals een blad). De diepte d is dan vele malen kleiner dan de breedte w . Aldus wordt de hydraulische diameter

$$d_h = 4A/P = 4d \cdot w / (w + 2d) = 4d$$

Vergelijking 62

Er kan dan afgeleid worden door vergelijking 22 te combineren met de Darcy-Weisbach formule dat de schuifspanning op een bodem waarover sheetflow stroomt als volgt is:

$$\tau_w = \rho g (d_h/4) S_f = \rho g (d) S_f$$

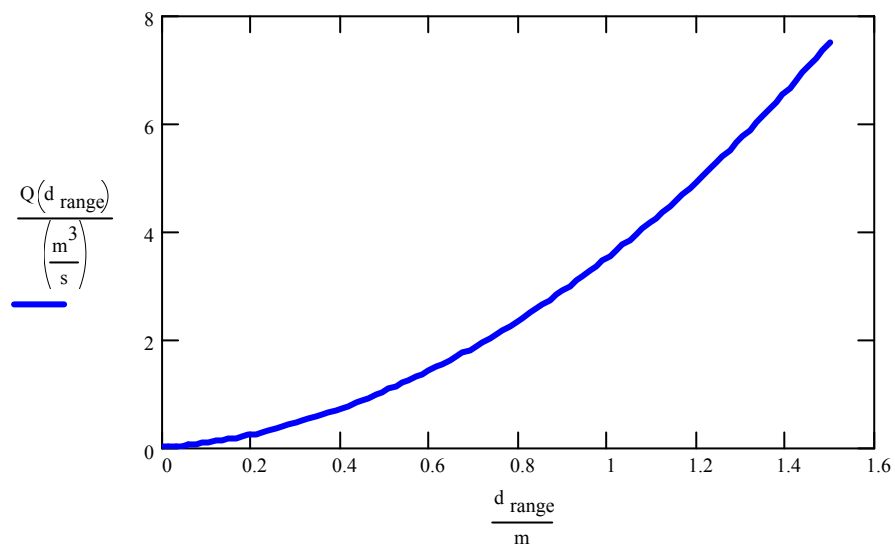
Vergelijking 63

Indien deze schuifspanning groter wordt dan een kritische spanning zal de bodem eroderen en krijgen we erosie. De schuifspanning zal dus korrels uit de bodem los maken en indien er voldoende stroomsnelheid is wordt dit sediment vervoerd met het stromende water.

Bij eenparige en uniforme stroming hangt de diepte d van de stroming samen met de snelheid en het debiet (eenparige relatie). Gedeeltes van natuurlijke rivieren en beken met een constante dwarsdoorsnede, helling en debiet (Figuur 24).

Figuur 24: Debiet en snelheid in functie van de diepte van het water.

Debiet bij eenparige-uniforme stroming in een kanaal



Snelheid in een kanaal (v_{crit} kritische snelheid)

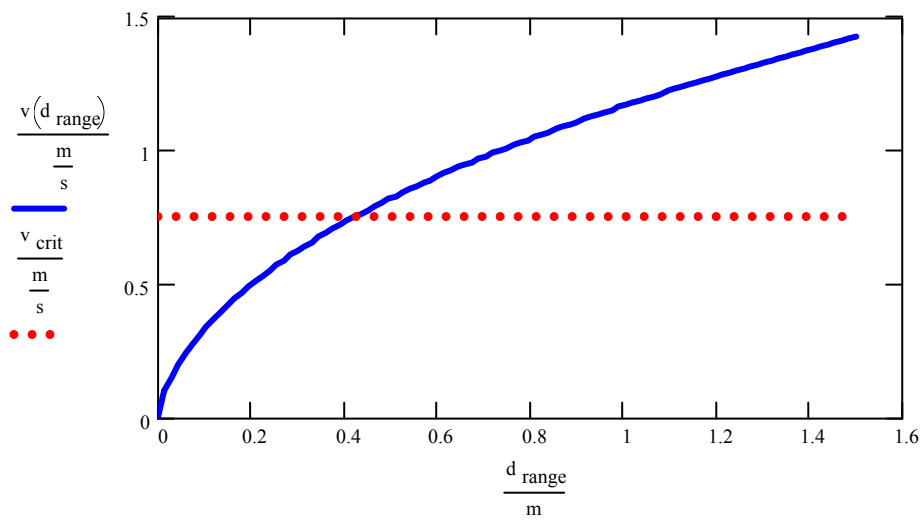


Table 8.3 Critical tractive force and mean velocity for different bed materials

Material	Size mm	Critical tractive force N/m ²	Approximate mean velocity m/sec	Manning's coefficient of roughness
Sandy loam (non-colloidal)		2.0	0.50	0.020
Silt loam (non-colloidal)		2.5	0.60	0.020
Alluvial silt (non-colloidal)		2.5	0.60	0.020
Ordinary firm loam		3.7	0.75	0.020
Volcanic ash		3.7	0.75	0.020
Stiff clay (very colloidal)		1.22	1.15	0.025
Alluvial silts (colloidal)		12.2	1.15	0.025
Shales and hard-pans		31.8	1.85	0.025
Fine sand (non-colloidal)		1.2	0.45	0.020
Medium sand (non-colloidal)	0.062-0.25	1.7	0.50	0.020
Coarse sand (non-colloidal)	0.25-0.5	2.5	0.60	0.020
Fine gravel	0.5-2.0	3.7	0.75	0.020
Coarse gravel	4-8	14.7	1.25	0.025
Cobbles and shingles	8-64	44.0	1.55	0.035
Graded loam and cobbles (non-colloidal)	64-256	19.6	1.15	0.30
Graded silts to cobbles (colloidal)	0.004-64	22.0	1.25	0.30
	0-64			0.30

Appendix A : Moody diagramma

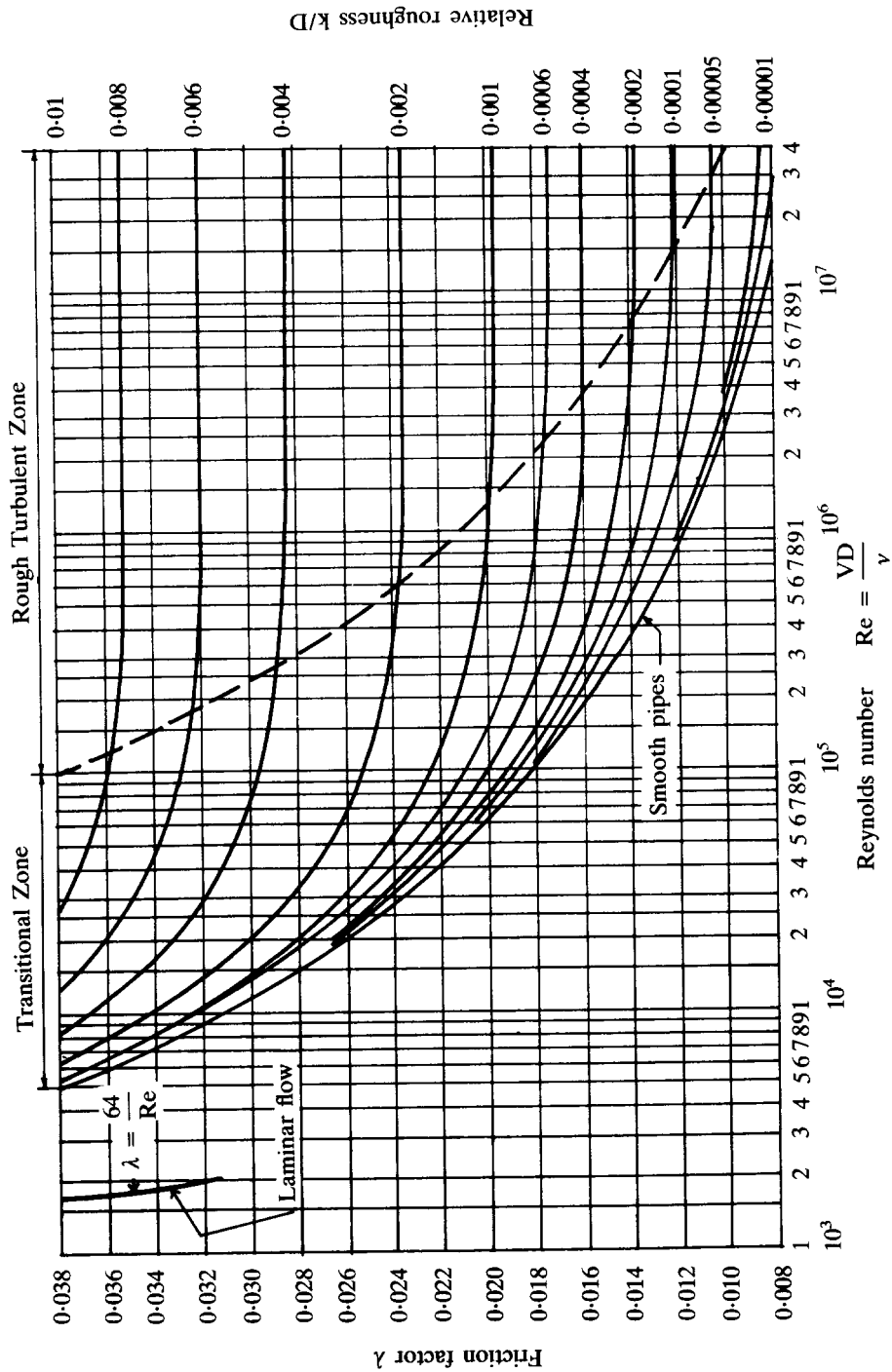


Figure A Moody diagram