

Università di Torino

QUADERNI DIDATTICI

del

Dipartimento di Matematica

PAOLA FAVRO – ANDREANA ZUCCO

Appunti di Geometria Convessa

Quaderno # 34 – Luglio 2005



PREFAZIONE

In questo Quaderno sono raccolte le lezioni tenute nel corso di Geometria Convessa nell'Anno Accademico 2004-2005 per il Corso di Laurea Specialistica in Matematica.

Nel I° capitolo, dopo aver introdotto le definizioni fondamentali, vengono dati esempi di convessi che saranno utilizzati in seguito. Viene definita la somma di Minkowski e dimostrati teoremi fondamentali come il teorema di separazione di Hahn-Banach.

Nel II° capitolo si prova il teorema di Helly. Si tratta di un teorema relativamente recente (1921) di enunciato assai semplice di cui vengono presentate alcune piacevoli applicazioni. Il III° capitolo è dedicato ai poliedri. Si dimostra la formula di Eulero e si dà poi la definizione di poliedro regolare: nonostante l'apparente semplicità la definizione corretta necessita di particolare attenzione. Si dimostra che i poliedri regolari sono i cinque poliedri platonici.

Il IV° capitolo tratta dei politopi che sono la generalizzazione nello spazio n -dimensionale dei poliedri dello spazio 3-dimensionale. Si prova che i politopi regolari, in dimensione maggiore od uguale a 5, sono tre: la generalizzazione del cubo, dell'ottaedro e del tetraedro e che, invece, in dimensione 4 oltre a questi tre vi sono altri tre politopi regolari, più complicati.

Il V° capitolo è dedicato alla dimostrazione della disuguaglianza isoperimetrica: fra i convessi compatti di dato perimetro il cerchio ha area massima. Sono riportate le dimostrazioni geometriche di Lebesgue (1914) e di Bonnesen (1920) ed una dimostrazione che si avvale del teorema di selezione di Blaschke.

Infine, nell'ultimo capitolo, viene dimostrato il primo teorema di Minkowski che viene utilizzato per dimostrare un teorema posto da Lagrange sulle forme quadratiche e per provare un teorema classico di teoria dei numeri.

Torino, giugno 2005



INDICE

PREFAZIONE	I
INDICE	III
CAPITOLO I - PRIME NOZIONI DI CONVESSITA'	1
1.1 - Notazioni.	1
1.2 - Rappresentazione dei punti di un segmento.	1
1.3 - Definizione di insieme convesso ed esempi.	2
1.4 - La somma di Minkowski.	9
1.5 - Iperpiani di supporto e punti di frontiera di un insieme convesso.	12
1.6 - Combinazioni lineari convesse.	13
1.7 - Definizione di n-simplesso.	14
1.8 - Inviluppo convesso.	16
1.9 - Il teorema di Carathéodory.	18
1.10 - Proprietà dell'inviluppo convesso.	20
1.11 - Il Teorema di Hahn-Banach.	22
1.12 - Lo spazio dei corpi convessi.	24
CAPITOLO II - TEOREMA DI HELLY E SUE APPLICAZIONI	27
2.1 - Teorema di Helly.	27
2.2 - Applicazioni del teorema di Helly.	32
CAPITOLO III - POLIGONI E POLIEDRI	35
3.1 - Poligoni.	35
3.2 - Poliedri.	36
3.2.1 - La formula di Eulero.	36
3.2.2 - Poliedri regolari.	38
3.2.3 - L'icosaedro.	46
3.2.4 - Dualità.	48
3.2.5 - Coordinate dei vertici dei poliedri regolari.	49
3.2.6 - La formula di Cartesio.	51
CAPITOLO IV - POLITOPI	57
4.1 - Generalizzazione della formula di Eulero.	57
4.2 - Esempi di politopi.	57
4.3 - Politopi regolari.	60
4.4 - La costruzione del 24-celle.	61
4.5 - Cenni sulla costruzione del 600-celle.	62
4.6 - Classificazione dei politopi regolari.	63
CAPITOLO V - IL PROBLEMA ISOPERIMETRICO	71
5.1 - Cenni storici.	71
5.2 - Cerchio inscritto e cerchio circoscritto.	71
5.3 - Anello minimale di un corpo convesso.	77
5.4 - Soluzioni geometriche del problema isoperimetrico.	81
5.4.1 - Tentativi di Steiner e critica di Perron.	81
5.4.2 - Formule di Steiner.	82
5.4.3 - La disuguaglianza di Lebesgue.	83
5.4.4. - La disuguaglianza di Bonnesen.	84

5.4.5 - Diseguaglianze isoperimetriche.....	85
5.5 - Il Teorema di Bonnesen.....	86
5.6 - Soluzione del problema isoperimetrico con il teorema di Blaschke.	88
5.7 - Alcune applicazioni.	91
5.8 - Disuguaglianze classiche e recenti.	93
CAPITOLO VI - CENNI SULLA GEOMETRIA DEI NUMERI.....	95
6.1 - Premesse.	95
6.2 - Il primo teorema di Minkowski.	97
6.3 - Applicazioni del teorema di Minkowski.	101
BIBLIOGRAFIA.....	105

CAPITOLO I

PRIME NOZIONI DI CONVESSITA'

In questo capitolo si introducono alcuni concetti base di convessità.

1.1 - Notazioni.

Indichiamo con \mathbf{R}^n lo spazio vettoriale reale euclideo n-dimensionale.

Dati due vettori $x = (x_1, \dots, x_n)$ ed $y = (y_1, \dots, y_n)$ di \mathbf{R}^n ed un numero reale α , scelti comunque, vengono definite le seguenti operazioni:

- somma di vettori: $x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$
- prodotto per uno scalare: $\alpha x = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n)$
- prodotto scalare: $x \cdot y = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$.

Si definisce **norma di un vettore** x il numero reale: $\|x\| = \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$.

Si definisce **distanza euclidea** la funzione di $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ definita da:

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2} \quad \forall x, y \in \mathbf{R}^n.$$

La funzione distanza soddisfa le seguenti proprietà:

$$\|x - y\| \geq 0 \quad \text{e} \quad \|x - y\| = 0 \Leftrightarrow x = y$$

$$\|x - y\| + \|y - z\| \geq \|x - z\|$$

$$\|x - y\| = \|y - x\|$$

$$\|\lambda x - \lambda y\| = \lambda \|x - y\| \quad \text{se} \quad \lambda \geq 0.$$

\mathbf{R}^n con la topologia indotta dalla distanza euclidea è uno spazio metrico.

Siano ora S uno spazio topologico ed X un suo sottoinsieme. Si indica con:

- $S - X$ il complementare di X ossia l'insieme degli elementi di S che non appartengono ad X .
- $\text{fr } X$ oppure $\text{fr } X$ la frontiera (o bordo) di X ossia l'insieme degli elementi x tali che in ogni intorno di x ci sono sia punti di X che di $S - X$.
- $\text{int } X$ oppure $\overset{\circ}{X}$ l'interno di X cioè l'insieme dei punti x per cui esiste un intorno tutto contenuto in X .
- $\text{cl } X$ oppure \overline{X} la chiusura di X cioè l'insieme dei punti x tali che ogni intorno di x contiene dei punti di X . Risulta quindi $\overline{X} = \overset{\circ}{X} \cup \text{fr } X$.

1.2 - Rappresentazione dei punti di un segmento.

Nella definizione di insieme convesso interviene il concetto di segmento di una retta, per cui ricordiamo anzitutto l'equazione vettoriale parametrica della retta per due punti.

Siano a, b i punti per cui passa la retta e sia p il punto generico della retta. Il vettore $p - a$ deve essere parallelo al vettore $b - a$ per cui l'equazione vettoriale della retta è:

$$p - a = t(b - a) \quad t \in \mathbf{R}.$$

Al variare di t in \mathbf{R} il punto p descrive la retta (a, b) .

Se invece si ha

$$p - a = t(b - a) \quad t \geq 0$$

il punto p descrive la semiretta chiusa di origine a e contenente b .

Infine se

$$p - a = t(b - a) \quad 0 \leq t \leq 1$$

si ha l'equazione del segmento chiuso di estremi a e b indicato con $[a, b]$.

Scelto come origine il punto o l'espressione precedente diventa

$$p - o - (a - o) = t(b - o) - t(a - o) \quad 0 \leq t \leq 1$$

ossia anche

$$p - o = \lambda(b - o) + \mu(a - o) \quad \text{ove } \lambda = t, \mu = 1 - t$$

e quindi con le condizioni

$$\lambda, \mu \geq 0 \quad \lambda + \mu = 1.$$

L'insieme dei vettori $p - o$ dell'espressione precedente dipende dai vettori $a - o$ e $b - o$ ed il valore di tali vettori dipende dal particolare punto scelto come origine. Tuttavia tale insieme non cambia scegliendo un nuovo punto o' come facilmente si verifica:

$$\begin{aligned} p' - o' &= \lambda(b - o') + \mu(a - o') = \lambda(b - o) + \mu(a - o) + \lambda(o - o') + \mu(o - o') = \\ &= \lambda(b - o) + \mu(a - o) + (\lambda + \mu)(o - o') = (p - o) + (o - o') = p - o' \end{aligned}$$

quindi $p' = p$.

In tale dimostrazione è essenziale l'ipotesi $\lambda + \mu = 1$.

In particolare scelto a come origine si ricava l'espressione precedente

$$p - a = \lambda(b - a) \quad 0 \leq \lambda \leq 1.$$

Nel seguito verrà utilizzata la scrittura

$$p = \lambda b + \mu a \quad \lambda \geq 0, \mu \geq 0, \lambda + \mu = 1$$

in cui i punti verranno trattati come vettori.

1.3 - Definizione di insieme convesso ed esempi.

DEFINIZIONE 1.3.1 - *Un insieme X di punti dello spazio affine \mathbf{R}^n è detto **convesso** se contenendo due punti x_1, x_2 contiene anche il segmento che congiunge tali punti.*

Per quanto visto prima X è convesso se presi comunque due punti x_1, x_2 appartenenti ad X , tutti i punti della forma

$$\lambda x_1 + \mu x_2 \quad \lambda \geq 0 \quad \mu \geq 0 \quad \lambda + \mu = 1$$

appartengono ad X .

Sono esempi di insiemi convessi un punto, un segmento (aperto o chiuso), una semiretta (aperta o chiusa), una retta, un poligono regolare, i poliedri regolari, tutto \mathbf{R}^d . Anche l'insieme vuoto si suppone convesso per convenzione. E' facile provare che i punti, i segmenti, le semirette sono gli unici sottoinsiemi convessi di \mathbf{R} .

DEFINIZIONE 1.3.2 - *Un insieme X di punti dello spazio affine \mathbf{R}^n è detto **strettamente convesso** se, considerati due punti distinti x ed y appartenenti alla chiusura di X , tutti i punti $\theta x + (1 - \theta)y$ con $0 < \theta < 1$ sono punti interni di X , ossia non ci sono segmenti sulla frontiera.*

Ricordiamo ora alcune definizioni e proprietà di topologia.

DEFINIZIONE 1.3.3 - Nello spazio vettoriale euclideo \mathbf{R}^n si dice **boccia chiusa** di centro c e raggio r e si indica con $B(c, r)$ l'insieme dei punti p di \mathbf{R}^n aventi da c distanza minore od uguale ad r .

In simboli: $B(c, r) = \{p \in \mathbf{R}^n: \|p - c\| \leq r\} = \{p \in \mathbf{R}^n: (p - c)^2 \leq r^2\}$

Si dice **boccia aperta** di centro c e raggio r e si indica con $U(c, r)$ l'insieme dei punti p di \mathbf{R}^n aventi da c distanza minore ad r .

In simboli: $U(c, r) = \{p \in \mathbf{R}^n: \|p - c\| < r\} = \{p \in \mathbf{R}^n: (p - c)^2 < r^2\}$

DEFINIZIONE 1.3.4 - Un sottoinsieme A di \mathbf{R}^n si dice **limitato** se è contenuto in una boccia chiusa, cioè se esistono un $a \in A$ e un $\rho > 0$ tali che $A \subset B(a, \rho)$.

PROPRIETÀ 1.3.1 - Un sottoinsieme C di \mathbf{R}^n è compatto se e solo se è chiuso e limitato.

DEFINIZIONE 1.3.5 - Si dice **corpo convesso** di \mathbf{R}^n un suo sottoinsieme compatto convesso ad interno non vuoto.

Ad esempio l'ellisse piena X è un corpo convesso in \mathbf{R}^2 ma non in \mathbf{R}^3 in quanto $\text{int } X = \emptyset$.

PROPRIETÀ 1.3.2 - L'intersezione di un'arbitraria famiglia di insiemi convessi è un insieme convesso.

Infatti, se un segmento è contenuto in ogni insieme della famiglia è anche contenuto nella loro intersezione.

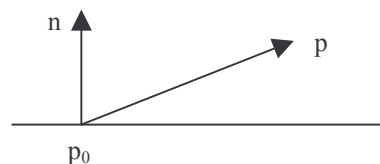
Nel piano affine l'equazione vettoriale di una retta per un punto p_0 ed ortogonale ad un vettore n è data da

$$n \cdot (p - p_0) = 0$$

dove il simbolo \cdot sta ad indicare il prodotto scalare.

Quest'equazione rende evidente la rappresentazione dei due semipiani di origine la retta r . Sia H^+ il semipiano verso il quale è rivolto il vettore n . Se il punto p appartiene ad H^+ per definizione di prodotto scalare

$$n \cdot (p - p_0) \geq 0.$$



Se invece $n \cdot (p - p_0) \leq 0$ significa che il punto appartiene all'altro semipiano diciamolo H^- .

Nel caso in cui la dimensione dello spazio è $d \geq 3$ l'equazione vettoriale dell'iperpiano H_{d-1} passante per p_0 ed ortogonale ad un vettore n è

$$n \cdot (p - p_0) = 0.$$

Anche in questo caso

$$n \cdot (p - p_0) \geq 0$$

rappresenta il semispazio chiuso verso cui è rivolto il vettore n , mentre $n \cdot (p - p_0) \leq 0$ rappresenta l'altro semispazio.

PROPRIETÀ 1.3.3 - *Un semipiano ed un semispazio (aperto o chiuso) sono insiemi convessi.*

Dimostrazione - Consideriamo, ad esempio, il semispazio chiuso

$$H^+ = \{p \in \mathbf{R}^d: n \cdot (p - p_0) \geq 0\}.$$

Vogliamo provare che se a e b sono due suoi punti ossia:

$$(1) \quad n \cdot (a - p_0) \geq 0$$

$$(2) \quad n \cdot (b - p_0) \geq 0.$$

il generico punto p del segmento $[a, b]$ appartiene ad H^+ .

Esprimiamo p nella forma

$$p - p_0 = t(b - p_0) + (1 - t)(a - p_0) \quad 0 \leq t \leq 1$$

e sostituiamo tale espressione in H^+ . Si ha, utilizzando proprietà del prodotto scalare:

$$n \cdot (p - p_0) = tn \cdot (b - p_0) + (1 - t)n \cdot (a - p_0)$$

e poiché si ha che $0 \leq t \leq 1$ e valgono le disuguaglianze (1) e (2), la precedente quantità è non negativa.

PROPRIETÀ 1.3.4 - *La boccia (chiusa od aperta) è un convesso.*

Dimostrazione - Per provare, ad esempio, che la boccia chiusa $B = B(c, r)$ è un insieme convesso dobbiamo dimostrare che se a e b sono punti di B , ossia

$$(a - c)^2 \leq r^2$$

$$(b - c)^2 \leq r^2$$

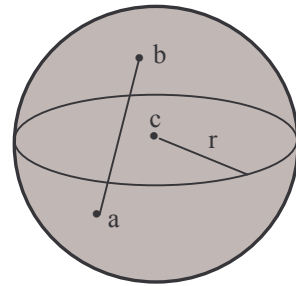
anche il generico punto p del segmento $[a, b]$ appartiene a B .

Esprimiamo p nella forma

$$p - c = (1 - t)(a - c) + t(b - c) \quad 0 \leq t \leq 1$$

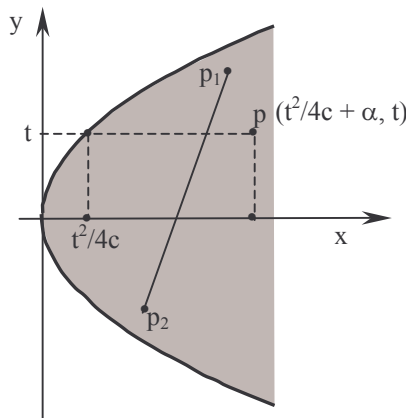
e calcoliamo $(p - c)^2$ tenendo conto delle proprietà del prodotto scalare:

$$(p - c)^2 = (p - c) \cdot (p - c) = (1 - t)^2 (a - c)^2 + 2t(1 - t)(a - c) \cdot (b - c) + t^2(b - c)^2 \leq (1 - t)^2 r^2 + 2t(1 - t)r^2 + t^2 r^2 = r^2, \text{ quindi il punto } p \text{ appartiene a } B.$$



ESEMPIO 1.3.1 - Dimostrare che l'insieme $S = \{p(x, y): y^2 \leq 4cx, \text{ dove } c > 0\}$ è un insieme convesso.

La parabola $y^2 = 4cx$ ha, ad esempio, equazioni parametriche $\begin{cases} x = \frac{t^2}{4c} \\ y = t \end{cases}$, dove t è un parametro reale.



Il generico punto di S è del tipo $\begin{cases} x = \frac{t^2}{4c} + \alpha \\ y = t \end{cases}$ con $\alpha \geq 0$. Proviamo che, indicati con

$p_1\left(\frac{t_1^2}{4c} + \alpha_1, t_1\right)$ e $p_2\left(\frac{t_2^2}{4c} + \alpha_2, t_2\right)$ due punti in S , ogni punto p del segmento $[p_1, p_2]$ appartiene ad S .

Si avrà $p = \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2$, con $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ e $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, e quindi, in coordinate:

$$\begin{cases} x = \lambda_1\left(\frac{t_1^2}{4c} + \alpha_1\right) + \lambda_2\left(\frac{t_2^2}{4c} + \alpha_2\right) \\ y = \lambda_1 t_1 + \lambda_2 t_2 \end{cases}$$

Sostituendo in $y^2 - 4cx$ si avrà:

$$\begin{aligned} y^2 - 4cx &= (\lambda_1 t_1 + \lambda_2 t_2)^2 - \lambda_1(t_1^2 + 4c\alpha_1) - \lambda_2(t_2^2 + 4c\alpha_2) = \\ &= \lambda_1^2 t_1^2 + \lambda_2^2 t_2^2 + 2\lambda_1 \lambda_2 t_1 t_2 - \lambda_1 t_1^2 - \lambda_1 4c\alpha_1 - \lambda_2 t_2^2 - \lambda_2 4c\alpha_2 = \\ &= 2\lambda_1 \lambda_2 t_1 t_2 + \lambda_1 t_1^2 (\lambda_1 - 1) + \lambda_2 t_2^2 (\lambda_2 - 1) - 4c(\lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2) = \\ &= -\lambda_1 \lambda_2 (t_1 - t_2)^2 - 4c(\lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2) \leq 0. \end{aligned}$$

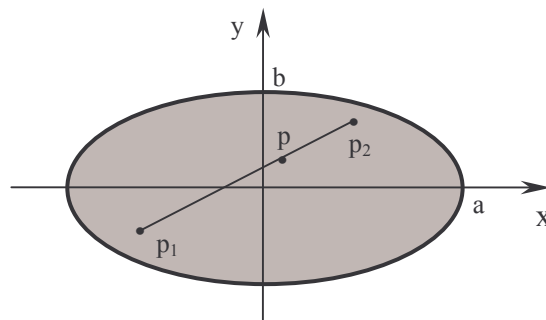
ESEMPIO 1.3.2 - Dimostrare che l'insieme $S = \left\{p(x, y) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \leq 0\right\}$ è un insieme convesso.

Ricordando che l'ellisse ha equazioni parametriche $\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases}$ l'insieme S si può rappresentare come $\{p(x, y) : x = \mu a \cos t, y = \mu b \sin t, 0 \leq t < 2\pi \text{ e } 0 \leq \mu \leq 1\}$.

Infatti un punto di coordinate $\begin{cases} x = \mu a \cos t \\ y = \mu b \sin t \end{cases}$ con $0 \leq t < 2\pi$ e $0 \leq \mu \leq 1$ appartiene all'insieme S in quanto

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \mu^2 \cos^2 t + \mu^2 \sin^2 t = \mu^2 \leq 1.$$

Viceversa un punto $p \in S$ ha coordinate $x = \mu a \cos t, y = \mu b \sin t$, dove μ e t sono dati da $\mu^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ (≤ 1 per gli elementi di S) e $\cos t = \frac{x}{\mu a}$ o $\sin t = \frac{y}{\mu b}$.



Proviamo ora che S è convesso dimostrando che se $p_1(x_1, y_1)$ e $p_2(x_2, y_2)$ sono due punti di S con: $\begin{cases} x_1 = \mu_1 a \cos t_1 \\ y_1 = \mu_1 b \sin t_1 \end{cases}$ e $\begin{cases} x_2 = \mu_2 a \cos t_2 \\ y_2 = \mu_2 b \sin t_2 \end{cases}$ con $0 \leq t_1 < 2\pi, 0 \leq \mu_1 \leq 1, 0 \leq t_2 < 2\pi$ e $0 \leq \mu_2 \leq 1$ il segmento $[p_1, p_2]$ è contenuto in S .

Un punto p del segmento $[p_1, p_2]$ è del tipo $p = \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2$, con $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ e $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, e quindi, in coordinate: $\begin{cases} x = \lambda_1(\mu_1 a \cos t_1) + \lambda_2(\mu_2 a \cos t_2) \\ y = \lambda_1(\mu_1 b \sin t_1) + \lambda_2(\mu_2 b \sin t_2) \end{cases}$ con $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ e $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$.

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= (\lambda_1 \mu_1 \cos t_1 + \lambda_2 \mu_2 \cos t_2)^2 + (\lambda_1 \mu_1 \sin t_1 + \lambda_2 \mu_2 \sin t_2)^2 = \\ &= \lambda_1^2 \mu_1^2 (\cos^2 t_1 + \sin^2 t_1) + \lambda_2^2 \mu_2^2 (\cos^2 t_2 + \sin^2 t_2) + 2\lambda_1 \mu_1 \lambda_2 \mu_2 \cos t_1 \cos t_2 + \\ &+ 2\lambda_1 \mu_1 \lambda_2 \mu_2 \sin t_1 \sin t_2 = \\ &= \lambda_1^2 \mu_1^2 + \lambda_2^2 \mu_2^2 + 2\lambda_1 \mu_1 \lambda_2 \mu_2 \cos(t_1 - t_2) \leq (\lambda_1 \mu_1 + \lambda_2 \mu_2)^2 \leq (\lambda_1 + \lambda_2)^2 = 1. \end{aligned}$$

L'ultima disuguaglianza segue ricordando che μ_1 e μ_2 sono ≤ 1 .

I punti del segmento $[p_1, p_2]$ soddisfano alla condizione $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \leq 0$ quindi appartengono ad S , che risulta convesso.

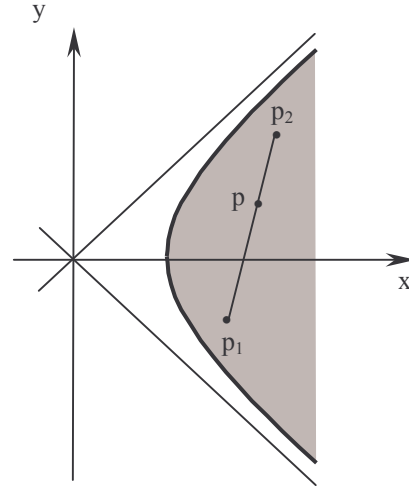
ESEMPIO 1.3.3 - Dimostrare che l'insieme $S = \left\{ p(x, y) : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 \leq 0 \right\}$ è un insieme convesso.

Siano $p_1(x_1, y_1)$ e $p_2(x_2, y_2)$ due punti di S , vogliamo dimostrare che ogni punto p del segmento $[p_1, p_2]$ appartiene ad S . $p(x, y)$ è del tipo $\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2$, con $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ e $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$,

quindi:
$$\begin{cases} x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \\ y = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \end{cases}$$

Sostituendo in $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$ le coordinate di p si ha:

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} &= \frac{(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)^2}{a^2} - \frac{(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2)^2}{b^2} = \\ &= \lambda_1^2 \left(\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} \right) + \lambda_2^2 \left(\frac{x_2^2}{a^2} - \frac{y_2^2}{b^2} \right) + 2\lambda_1 \lambda_2 \left(\frac{x_1 x_2}{a^2} - \frac{y_1 y_2}{b^2} \right). \quad (1) \end{aligned}$$



Poiché p_1 e p_2 appartengono ad S si ha $\frac{x_1^2}{a^2} \geq \frac{y_1^2}{b^2} + 1$ e $\frac{x_2^2}{a^2} \geq \frac{y_2^2}{b^2} + 1$. Moltiplicando mem-

bro a membro si ottiene: $\frac{x_1^2}{a^2} \cdot \frac{x_2^2}{a^2} \geq \frac{y_1^2 y_2^2}{b^4} + \frac{y_1^2}{b^2} + \frac{y_2^2}{b^2} + 1$.

Poiché $(y_1 - y_2)^2 \geq 0$, risulta $y_1^2 + y_2^2 \geq 2y_1 y_2$ quindi:

$$\frac{x_1^2}{a^2} \cdot \frac{x_2^2}{a^2} \geq \frac{y_1^2 y_2^2}{b^4} + 2 \frac{y_1 y_2}{b^2} + 1 = \left(\frac{y_1 y_2}{b^2} + 1 \right)^2, \text{ da cui } \frac{x_1 x_2}{a^2} \geq \frac{y_1 y_2}{b^2} + 1, \text{ essendo } x_1, x_2 \geq 0.$$

Nella (1) il coefficiente di λ_1^2 è ≥ 1 perché p_1 appartiene ad S , il coefficiente di λ_2^2 è ≥ 1 perché p_2 appartiene ad S ed il coefficiente di $2\lambda_1 \lambda_2$ è ≥ 1 per quanto visto ora, quindi la

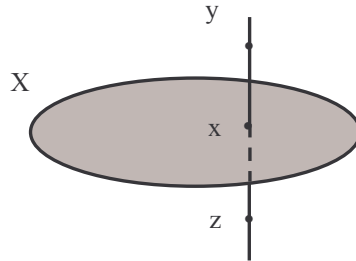
(1) diventa:
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \geq (\lambda_1 + \lambda_2)^2 = 1.$$

Si poteva anche dimostrare che S è un insieme convesso con un procedimento analogo a quello dell'ellisse usando la rappresentazione parametrica dell'iperbole $\begin{cases} x = a \operatorname{ch} t \\ y = b \operatorname{sh} t \end{cases}$ per cui risulta $S = \{p(x, y) : x = \mu a \operatorname{ch} t, y = \mu b \operatorname{sh} t, t \in \mathbf{R}, \mu \in \mathbf{R}, \mu \geq 1\}$.

DEFINIZIONE 1.3.6 - Se X è un insieme convesso ed y un punto non appartenente ad X , ogni

retta che congiunge y ad un punto x di X è divisa in due semirette una delle quali interseca X . L'unione di tali semirette che intersecano X è detta **cono** e si indica con $C(y, X)$.

Si noti che in tale definizione non è richiesto che se X appartiene ad un iperpiano P allora y non appartenga a P .



PROPRIETÀ 1.3.5 - Il cono $C(y, X)$ è un insieme convesso.

Dimostrazione - Un punto z appartiene a $C(y, X)$ se $z - y = \lambda(x - y)$ con $\lambda \geq 0$ ed $x \in X$ quindi $z = \lambda x + (1 - \lambda)y$.

Ponendo $\mu = 1 - \lambda$ il generico punto di $C(y, X)$ è $z = \lambda x + \mu y$ con $\lambda \geq 0$ e $\lambda + \mu = 1$.

Vogliamo ora provare che, presi comunque due punti:

$$z = \lambda x + \mu y \text{ con } \lambda \geq 0 \text{ e } \lambda + \mu = 1 \text{ e } z' = \lambda' x' + \mu' y \text{ con } \lambda' \geq 0 \text{ e } \lambda' + \mu' = 1$$

ogni punto \tilde{z} del segmento $[z, z']$ appartiene a $C(y, X)$.

Si può scrivere $\tilde{z} = \alpha z + \beta z'$ con $\alpha, \beta \geq 0$ e $\alpha + \beta = 1$.

$$\tilde{z} = \alpha(\lambda x + \mu y) + \beta(\lambda' x' + \mu' y) = \frac{\alpha\lambda x + \beta\lambda' x'}{\alpha\lambda + \beta\lambda'} (\alpha\lambda + \beta\lambda') + (\alpha\mu + \beta\mu') y =$$

$$= (\alpha\lambda + \beta\lambda') \tilde{x} + (\alpha\mu + \beta\mu') y, \text{ avendo posto } \tilde{x} = \frac{\alpha\lambda x + \beta\lambda' x'}{\alpha\lambda + \beta\lambda'} = \frac{\alpha\lambda}{\alpha\lambda + \beta\lambda'} x + \frac{\beta\lambda'}{\alpha\lambda + \beta\lambda'} x' \in X$$

in quanto $\frac{\alpha\lambda}{\alpha\lambda + \beta\lambda'} \geq 0$, $\frac{\beta\lambda'}{\alpha\lambda + \beta\lambda'} \geq 0$ e $\frac{\alpha\lambda}{\alpha\lambda + \beta\lambda'} + \frac{\beta\lambda'}{\alpha\lambda + \beta\lambda'} = 1$ ed x ed x' appartengono al convesso X .

Ora $\alpha\lambda + \beta\lambda' \geq 0$ e $(\alpha\mu + \beta\mu') + (\alpha\lambda + \beta\lambda') = \alpha(\lambda + \mu) + \beta(\mu' + \lambda') = \alpha + \beta = 1$,

quindi $\tilde{z} \in C(y, X)$.

In modo analogo al cono si può definire il cilindro.

DEFINIZIONE 1.3.7 - Siano X un insieme convesso ed \mathbf{n} un versore, cioè un vettore unitario. Si dice **cilindro** e si indica con $C(\mathbf{n}, X)$ l'insieme di tutte le rette per i punti di X e parallele ad \mathbf{n} .

Sono esempi di cilindro, secondo questa definizione il cilindro circoscritto alla sfera oppure il cilindro "circoscritto" ad una circonferenza.

PROPRIETÀ 1.3.6 - Il cilindro $C(\mathbf{n}, X)$ è un insieme convesso.

Dimostrazione - Un punto z appartiene a $C(\mathbf{n}, X)$ se $z - x = \lambda \mathbf{n}$ con $x \in X$ quindi il generico punto del cilindro si può indicare con $z = x + \lambda \mathbf{n}$. Vogliamo ora provare che, presi comunque due punti: $z = x + \lambda \mathbf{n}$ e $z' = x' + \lambda' \mathbf{n}$, ogni punto \tilde{z} del segmento $[z, z']$ appartiene a $C(\mathbf{n}, X)$.

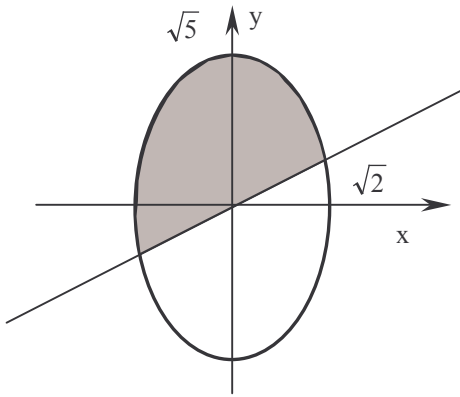
Si può scrivere $\tilde{z} = \alpha z + \beta z'$ con $\alpha, \beta \geq 0$ e $\alpha + \beta = 1$.

$$\tilde{z} = \alpha(x + \lambda \mathbf{n}) + \beta(x' + \lambda' \mathbf{n}) = (\alpha x + \beta x') + (\alpha \lambda + \beta \lambda') \mathbf{n}$$

$\alpha x + \beta x' = \tilde{x}$ è un elemento di X in quanto è un punto del segmento $[x, x']$ contenuto in X .

Ponendo $\mu = \alpha \lambda + \beta \lambda'$ possiamo scrivere $\tilde{z} = \tilde{x} + \mu \mathbf{n}$ e quindi \tilde{z} appartiene al cilindro.

OSSERVAZIONE - Se il cono $C(y, X)$, è troncato da un iperpiano si parla ancora di cono, così se il cilindro $C(\mathbf{n}, X)$ è troncato da due iperpiani paralleli si parla ancora di cilindro.



ESEMPIO 1.3.4 - La regione definita dal sistema

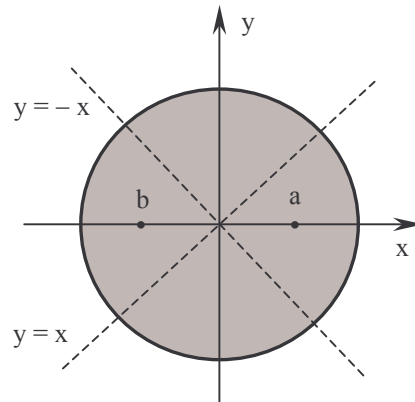
$$\begin{cases} \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{5} \leq 1 \\ y > x \end{cases}$$

è non vuota e convessa perché intersezione di due convessi.

ESEMPIO 1.3.5 - La regione del piano:

$S = \{p(x, y): x^2 + y^2 \leq 4, |y| \neq |x|\}$ non è convessa.

Infatti, ad esempio, il segmento di estremi $a(1, 0)$ e $b(-1, 0)$ non è contenuto interamente in S in quanto l'origine appartiene ad $[a, b]$ ma non ad S .



ESERCIZIO 1.3.1 - Provare che una trasformazione affine di \mathbf{R}^n in sé, trasforma insiemi convessi in insiemi convessi.

Dimostrazione - Una trasformazione affine è del tipo $x' = Ax + B$ dove A è una matrice quadrata con $\det A \neq 0$ e B è un vettore colonna.

Sia $z = \lambda x + \mu y$ con $\lambda \geq 0$, $\mu \geq 0$ e $\lambda + \mu = 1$. Se indichiamo con x' , y' , z' rispettivamente i trasformati di x , y , z vogliamo provare che $z' = \lambda x' + \mu y'$.

Calcoliamo:

$$\lambda x' + \mu y' = \lambda(Ax + B) + \mu(Ay + B) = A(\lambda x) + \lambda B + A(\mu y) + \mu B = A(\lambda x + \mu y) + (\lambda + \mu)B = Az + B = z',$$

quindi il segmento $[x, y]$ è trasformato nel segmento $[x', y']$.

ESERCIZIO 1.3.2 - Provare che in una trasformazione affine rette parallele sono trasformate in rette parallele ed il rapporto dei segmenti che stanno su rette parallele non cambia.

Una trasformazione affine si può quindi pensare come una trasformazione puntuale che lascia inalterate le relazioni geometriche che dipendono dalle proprietà dei vettori. Il paralle-

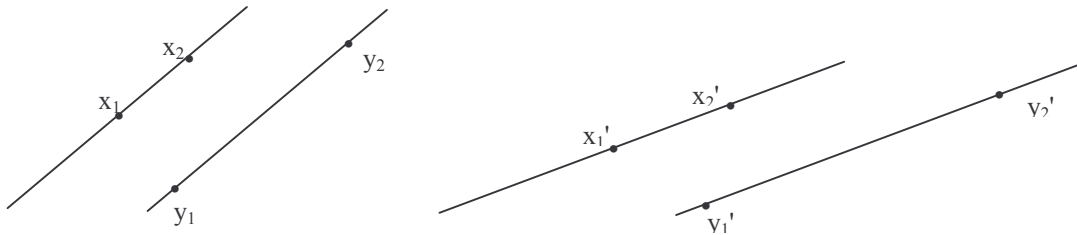
lismo è mantenuto ma non gli angoli.

Dimostrazione - Siano x_1 ed x_2 due punti di una retta r ed y_1 ed y_2 due punti di una retta s parallela ad r . Siano poi x_1', x_2', y_1', y_2' i loro trasformati ed r' ed s' le rette corrispondenti ad r ed s .

Dobbiamo dimostrare che se $x_1 - x_2 = \lambda(y_1 - y_2)$ allora $x_1' - x_2' = \lambda(y_1' - y_2')$.

$$\begin{aligned} x_1' - x_2' &= Ax_1 + B - (Ax_2 + B) = A(x_1 - x_2) = A(\lambda(y_1 - y_2)) = \lambda(Ay_1 - Ay_2) = \\ &= \lambda(Ay_1 + B) - \lambda(Ay_2 + B) = \lambda y_1' - \lambda y_2' = \lambda(y_1' - y_2'). \end{aligned}$$

Da quanto visto segue anche che rette parallele sono trasformate in rette parallele.

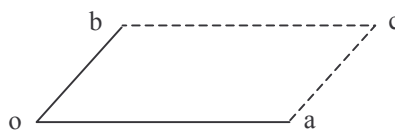


1.4 - La somma di Minkowski.

Introduciamo un'operazione tra insiemi convessi la cui definizione è dovuta a Minkowski. Nel piano, scelto un punto o come origine, dati due punti a, b si definisce somma di a e b e si indica con

$$c = a + b$$

il vertice c del parallelogramma di vertici consecutivi a, o, b, c .



Se i punti sono allineati il parallelogramma degenera



ed il punto c viene determinato come in figura, essendo $c - b$ congruo a $a - o$.

Siano F_1 ed F_2 due figure piane limitate convesse, scelto comunque il punto o si considerino le possibili somme $a_1 + a_2$, dove a_1 ed a_2 sono punti di F_1 ed F_2 rispettivamente. L'insieme dei punti $a_1 + a_2$ costituisce una figura piana che sarà la somma di Minkowski delle figure F_1 ed F_2 :

$$F_1 + F_2 = \{ a_1 + a_2 : a_1 \in F_1 \wedge a_2 \in F_2 \}.$$

Consideriamo ora convessi di \mathbf{R}^n .

Proviamo inizialmente che se S e T sono due convessi di \mathbf{R}^n , λ e μ due numeri reali qualunque fissati, allora l'insieme:

$$\lambda S + \mu T = \{ \lambda s + \mu t : s \in S \wedge t \in T \}$$

è un convesso, ove le operazioni indicate sono le operazioni fra vettori di \mathbf{R}^n .

Osserviamo dapprima che l'operazione $\lambda S + \mu T$ dipende dal punto scelto come origine. Ricordando che la scrittura $x = \lambda s + \mu t$ significa $x - o = \lambda(s - o) + \mu(t - o)$, se come origine si sceglie il punto o , scegliendo come origine un altro punto p si ha:

$$x' - p = \lambda(s - p) + \mu(t - p) = \lambda s + \mu t - (\lambda + \mu)p = x - (\lambda + \mu)p \text{ ossia } x' = x + (1 - \lambda - \mu)p.$$

Risulta $x = x'$ solo se $\lambda + \mu = 1$ ed in tal caso l'operazione è indipendente dall'origine. In ogni caso si ottiene un nuovo insieme $(\lambda S + \mu T)'$ dato da $(\lambda S + \mu T)$ a cui è stata applicata la traslazione $(1 - \lambda - \mu)p$.

Dimostriamo ora che, nelle ipotesi dette, l'insieme $X = \lambda S + \mu T$ è convesso.

Con ovvie notazioni, considerati due punti $x_1 = \lambda s_1 + \mu t_1$ e $x_2 = \lambda s_2 + \mu t_2$ di X ed il punto $z \in [x_1, x_2]$ dobbiamo provare che $z \in X$. Si ha $z = hx_1 + kx_2$ ove h, k sono non negativi ed $h + k = 1$.

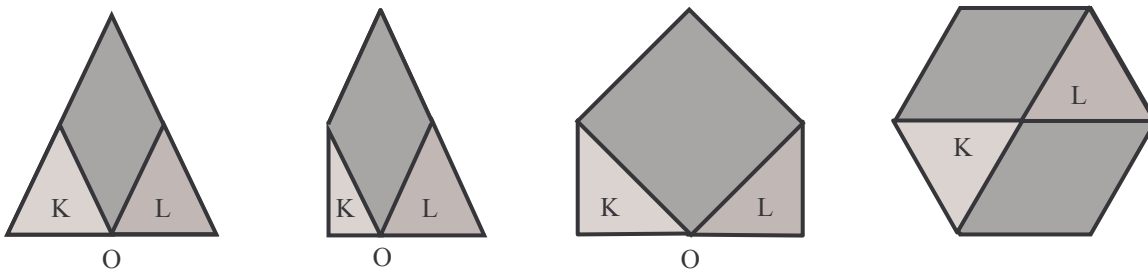
Risulta: $z = h(\lambda s_1 + \mu t_1) + k(\lambda s_2 + \mu t_2) = \lambda(hs_1 + ks_2) + \mu(ht_1 + kt_2)$ e poiché $hs_1 + ks_2$ è un punto di S essendo S convesso e $ht_1 + kt_2$ è un punto di T essendo T convesso allora $z \in \lambda S + \mu T$, per cui $\lambda S + \mu T$ è convesso.

DEFINIZIONE 1.4.1 - Se S e T sono due insiemi convessi di \mathbf{R}^n , diciamo somma di Minkowski l'insieme convesso $S + T = \{s + t: s \in S \wedge t \in T\}$.

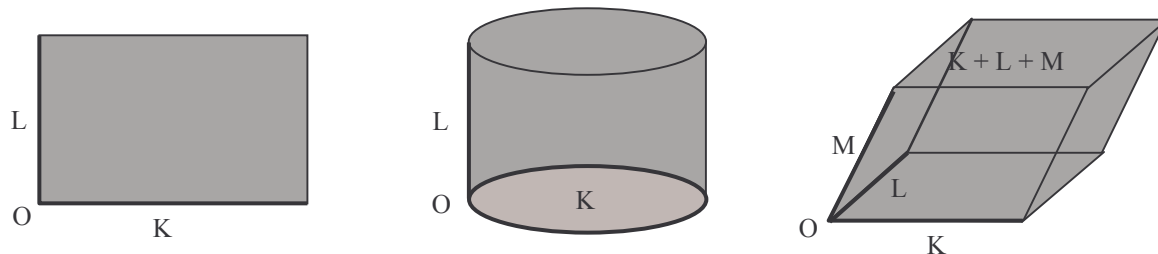
Notiamo che tale definizione particularizza l'operazione definita sopra al caso $\lambda = \mu = 1$.

Se, in particolare, $T = \{x\}$ indichiamo con $S + x$ l'insieme dei punti $y + x$ con $y \in S$.

Esempi - La somma di due triangoli K, L in un piano può essere, un triangolo, un quadrilatero, un pentagono od un esagono, come si può vedere dalle seguenti figure:



La somma di Minkowski può aumentare la dimensione degli insiemi di partenza, come si può vedere nei casi seguenti.



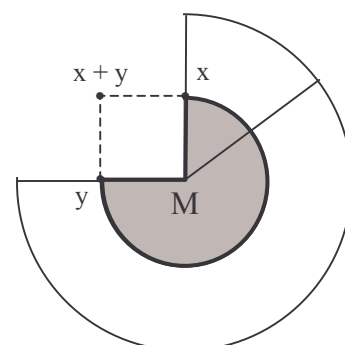
Se α è un numero reale ed M è sottoinsieme di \mathbf{R}^n possiamo indicare con αM l'insieme dei punti αx ove $x \in M$.

Se M è un insieme convesso di \mathbf{R}^n è possibile costruire la somma di Minkowski $M + M$ e risulta $M + M = 2M$.

Infatti se $x + y \in M + M \rightarrow x \in M \wedge y \in M \rightarrow (x + y)/2 \in M$ (convesso) $\rightarrow 2[(x + y)/2] = x + y \in 2M$, così se $x \in 2M \rightarrow x/2 \in M \rightarrow x/2 + x/2 = x \in M + M$.

Se M non è convesso l'uguaglianza precedente può non essere valida come dimostra il seguente controesempio.

Presi M non convesso come in figura ed i suoi punti x ed y , il punto $x + y$ appartiene per definizione ad $M + M$, ma non appartiene a $2M$.

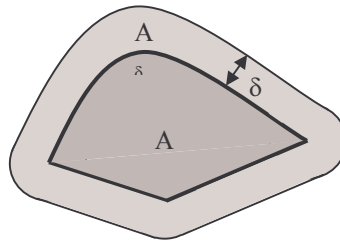


DEFINIZIONE 1.4.2 - Siano x un punto di \mathbf{R}^n ed A un compatto di \mathbf{R}^n ad interno non vuoto. Si definisce **distanza di x da A**

$$d(x, A) = \inf \{d(x, a) \text{ ove } a \in A\}.$$

Si dice intorno di A di raggio δ l'insieme $U(A, \delta) = \{x \in \mathbf{R}^n : d(x, A) < \delta\}$ e si definisce **corpo parallelo di A a distanza δ** l'insieme :

$$A_\delta = B(A, \delta) = \{x \in \mathbf{R}^n : d(x, A) \leq \delta\}.$$



PROPRIETÀ 1.4.1 - Se A è un compatto di \mathbf{R}^n ad interno non vuoto e $B(o, \delta)$ è la boccia chiusa di centro o e raggio δ risulta:

$$B(A, \delta) = A + B(o, \delta)$$

Dimostrazione - Se $x \in B(A, \delta)$ risulta $d(x, A) \leq \delta$, quindi esiste un $a \in A$ tale che $d(x, a) \leq \delta$, ossia $\|x - a\| \leq \delta$. Fissato o , si ha $x - o = (x - a) + (a - o)$. D'altra parte, fissato il punto o esiste un unico b tale che $b - o$ è un altro rappresentante del vettore $x - a$. Dunque $\|b - o\| \leq \delta$, allora si ha $x - o = (a - o) + (b - o)$ ossia $x = a + b$ ove $a \in A$ e $b \in B(o, \delta)$. Viceversa, se $x \in A + B(o, \delta)$ si può scrivere: $x - o = (a - o) + (b - o)$ ove $a \in A$ e $b \in B(o, \delta)$ ossia $d(b, o) \leq \delta$.

Poiché $x - a = b - o$ segue $\|x - a\| = \|b - o\| \leq \delta$, quindi $x \in B(A, \delta)$.

COROLLARIO - Se A è un compatto convesso di \mathbf{R}^n , allora il corpo parallelo A_δ è convesso.

Dimostrazione - Segue immediatamente dalla proprietà precedente ricordando che la somma di Minkowski di due insiemi convessi è un convesso.

PROPRIETÀ 1.4.2 - Se A è limitato in \mathbf{R}^n , anche il corpo parallelo A_δ è limitato.

Dimostrazione - Se A è limitato, esistono un punto c di \mathbf{R}^n ed un numero reale positivo r tali che $A \subseteq B(c, r)$. Verifichiamo che $A_\delta \subseteq B(c, r + \delta)$. Infatti se $x \in A_\delta$ esiste un $y \in A$ tale che $d(x, y) \leq \delta$, ma $d(y, c) \leq r$ quindi $d(x, c) \leq d(x, y) + d(y, c) \leq \delta + r$.

Ricordiamo la seguente proprietà topologica:

PROPRIETÀ 1.4.3 - Un insieme A è chiuso se e solo se per ogni successione convergente di punti di A il limite appartiene ad A .

Dimostrazione - Supponiamo inizialmente che l'insieme A sia chiuso, che una successione di elementi x_n di A converga ad x e proviamo che x appartiene ad A . Se per assurdo x non appartenesse ad A apparterebbe al suo complementare che è un aperto quindi esisterebbe una boccia $B(x, r)$ con $r > 0$ contenuta nell'aperto.

Allora esiste un n_0 tale che, per $n > n_0$, gli x_n cadono nella boccia e quindi non appartengono ad A , il che è assurdo. Segue che x appartiene ad A .

Viceversa supponiamo che per una qualunque successione di elementi x_n di A convergente ad x risulti che x appartiene ad A e proviamo che A è un insieme chiuso.

Considerato un punto x appartenente alla frontiera di A , per ogni n , $B(x, 1/n) \cap A$ è non vuoto quindi esiste un $x_n \in B(x, 1/n) \cap A$. Si costruisce in tal modo una successione x_n di punti di A che converge ad x quindi, per ipotesi, x appartiene ad A . Ossia A è chiuso.

PROPRIETÀ 1.4.4 - Se A è un compatto di \mathbf{R}^n , allora il corpo parallelo A_δ è un chiuso di \mathbf{R}^n .

Dimostrazione - Consideriamo una successione convergente $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ di punti di A_δ e sia x il suo limite. Per la proprietà precedente A_δ è chiuso se x appartiene ad A_δ .

Ora, per ogni $n \in \mathbf{N}$ esiste un $a_n \in A$ tale che $d(x_n, a_n) \leq \delta$. Poiché A è sequenzialmente compatto (vedi [D]) dalla successione (a_n) possiamo estrarre una sottosuccessione convergente $(a_{n_k})_{k \in \mathbf{N}}$ il cui limite è $a \in A$. Proviamo che $x \in B(a, \delta)$.

Fissiamo un qualsiasi numero reale $\varepsilon > 0$. Poiché la successione degli a_{n_k} converge ad a esiste un $m_1 \in \mathbf{N}$ tale che per $k > m_1$: $d(a_{n_k}, a) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Per ogni $k \in \mathbf{N}$ consideriamo il termine x_{n_k} di $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$. Poiché la successione degli x_n converge ad x , anche la sottosuccessione degli x_{n_k} converge ad x ; quindi esiste un $m_2 \in \mathbf{N}$ tale che per $k > m_2$: $d(x_{n_k}, x) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Inoltre per ogni $k \in \mathbf{N}$ risulta $d(x_{n_k}, a_{n_k}) \leq \delta$.

Allora considerato un qualsiasi $k > \max(m_1, m_2)$ si ha:

$$d(x, a) \leq d(x, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, a_{n_k}) + d(a_{n_k}, a) < \frac{\varepsilon}{2} + \delta + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon + \delta.$$

Da $d(x, a) < \varepsilon + \delta$ per ogni $\varepsilon > 0$ segue $d(x, a) \leq \delta$ quindi $x \in B(a, \delta) \subset A_\delta$ ed A_δ è un chiuso di \mathbf{R}^n .

COROLLARIO - Se A è un corpo convesso di \mathbf{R}^n , allora il corpo parallelo A_δ è un corpo convesso.

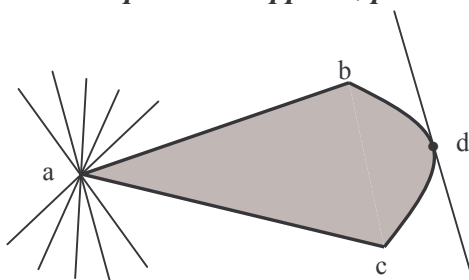
Dimostrazione - Segue dalle proprietà precedenti e dal fatto che $\text{int}A$ non è vuoto ed $\text{int}A \subset A_\delta$.

1.5 - Iperpiani di supporto e punti di frontiera di un insieme convesso.

DEFINIZIONE 1.5.1 - Un iperpiano H è detto **iperpiano di supporto** o **iperpiano di appoggio** o **tac-piano** di un sottoinsieme chiuso convesso K di \mathbf{R}^n se:

- $K \cap H$ non è vuota e
- K è contenuto in H^+ oppure K è contenuto in H , dove H^+ e H^- sono i due semispazi chiusi delimitati da H .

Se la dimensione $n = 2$ si parlerà di **retta di supporto** o **retta di appoggio** e se la dimensione $n = 3$ di **piano di supporto**, **piano di appoggio** o **tac-piano**.



Nel disegno, nel punto a sono tracciate diverse rette di supporto, mentre in d esiste solo una retta di supporto: la retta tangente.

Studiamo ora due diversi tipi di punti di frontiera di un insieme convesso.

DEFINIZIONE 1.5.2 - Sia A un convesso chiuso di \mathbf{R}^n ed x un punto della frontiera di A . Si dice che x è **di ordine α** se il sottospazio affine, intersezione di tutti gli iperpiani di supporto di A in x è di dimensione α . In particolare x è detto **vertice** se è di ordine $\alpha = 0$ e se invece $\alpha = n - 1$, ossia l'iperpiano di supporto è unico, si dice che A è **liscio in x** .

ESEMPIO 1.5.1 - In un cerchio tutti i punti sono lisci, mentre il tetraedro possiede punti di frontiera di ordine 0, 1, 2 e la sua generalizzazione ossia l' n -simpleso avrà punti di ordine 0, 1, ..., $n - 1$.

DEFINIZIONE 1.5.3 - Un punto x è detto **estremo** del convesso A se x è un punto di A e non esistono due punti x_1, x_2 di A tali che x appartenga al segmento $[x_1, x_2]$ ($x \neq x_1, x \neq x_2$).

OSSERVAZIONE - Un vertice è estremo, il reciproco è falso: basta pensare ai punti di frontiera di un cerchio che sono estremi, ma non vertici. Si può invece provare che per un poliedro i vertici coincidono con i punti estremi. Infatti siano P un poliedro ed x un punto della frontiera di P . Se x non è un estremo, esiste un segmento $[y, z]$ contenuto nella fr P con x che sta nel segmento $]y, z[$; dunque x ha ordine > 0 , ossia x non è un vertice.

1.6 - Combinazioni lineari convesse.

Si tratta di espressioni di notevole importanza nello studio degli insiemi convessi.

DEFINIZIONE 1.6.1 - Diciamo che x è **combinazione lineare convessa** (in breve **c.l.c.**) di x_1, \dots, x_r punti di \mathbf{R}^d se esistono scalari $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbf{R}$ tali che

$$(1) \quad x - o = \lambda_1(x_1 - o) + \dots + \lambda_r(x_r - o) \quad \lambda_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, r) \quad \sum_1^r \lambda_i = 1$$

con o punto arbitrario.

OSSERVAZIONE - La definizione non dipende dal punto o . Sia infatti o' un punto diverso da o ed x' il punto che la (1) associa ad o' . Si ha:

$$\begin{aligned} x' - o' &= \lambda_1(x_1 - o') + \dots + \lambda_r(x_r - o') = \lambda_1[(x_1 - o) + (o - o')] + \dots + \lambda_r[(x_r - o) + \dots + (o - o')] = \\ &= \lambda_1(x_1 - o) + \dots + \lambda_r(x_r - o) + (\lambda_1 + \dots + \lambda_r)(o - o') = (x - o) + (o - o') = x - o' \end{aligned}$$

quindi $x' = x$.

Caso particolare: le c.l.c. di 2 punti a, b sono i punti del loro segmento $[a, b]$.

Mediante le c.l.c. si ha la seguente caratterizzazione di un insieme convesso.

PROPRIETÀ 1.6.1 - Un insieme è convesso se e solo se contiene le c.l.c. dei suoi punti.

Dimostrazione - Supponiamo S convesso. L'enunciato è valido per c.l.c. di 2 punti (distinti o coincidenti). Ammesso valido per m punti, lo proveremo per $m + 1$ punti.

Sia

$$p - o = \sum_1^{m+1} t_i(p_i - o) \quad t_i \geq 0 \quad (i = 1, \dots, m + 1) \quad \sum_1^{m+1} t_i = 1 \quad \text{dove } p_i \in S.$$

Se $t_{m+1} = 1$ si ha $p = p_{m+1}$ e pertanto $p \in S$.

Se $t_{m+1} \neq 1$ poniamo

$$t = 1 - t_{m+1} \quad s_i = \frac{t_i}{t}.$$

ESEMPIO 1.7.1 - Provare che i seguenti 4 punti sono i vertici di un 3-simplesso:

$$x_1 = (0, 1, 1) \quad x_2 = (1, 2, 0) \quad x_3 = (1, 0, 2) \quad x_4 = (2, 3, 1).$$

La condizione può essere espressa dal sistema:

$$\begin{cases} \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 + \lambda_4 x_4 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0 \end{cases}$$

Ossia dal sistema:

$$\begin{cases} \lambda_1(0, 1, 1) + \lambda_2(1, 2, 0) + \lambda_3(1, 0, 2) + \lambda_4(2, 3, 1) = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0 \end{cases}$$

che scritto in componenti diventa:

$$\begin{cases} \lambda_2 + \lambda_3 + 2\lambda_4 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_4 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_3 + \lambda_4 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0 \end{cases}$$

Il determinante dei coefficienti di tale sistema è non nullo (vale 4) quindi il sistema omogeneo ha solo la soluzione nulla, per cui i punti sono vertici di un 3-simplesso.

OSSERVAZIONE 2 - Se invece si considerano in \mathbf{R}^n k punti a_1, a_2, \dots, a_k con $k \geq n + 2$ i vettori $a_2 - a_1, a_3 - a_1, \dots, a_k - a_1$ sono sempre linearmente dipendenti (l.d.), ossia esistono valori non tutti nulli delle variabili $\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_k$ tali che

$$\alpha_2(a_2 - a_1) + \alpha_3(a_3 - a_1) + \dots + \alpha_k(a_k - a_1) = 0$$

ossia, con lo stesso procedimento prima seguito, il sistema omogeneo nelle $k > n + 1$ incognite $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$

$$\begin{cases} \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_k a_k = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k = 0 \end{cases}$$

ammette soluzioni non tutte nulle.

OSSERVAZIONE 3 - Nel caso in cui $n = 1$, si ha che l'1-simplesso coincide con il segmento.

PROPRIETÀ 1.7.1 - Il 2-simplesso coincide con il triangolo della geometria elementare.

Dimostrazione - Siano a, b, c 3 punti non allineati, ossia $b - a, c - a$ sono due vettori l.i. e sia x un punto del 2-simplesso

$$x = o + \alpha(a - o) + \beta(b - o) + \gamma(c - o) \quad \alpha, \beta, \gamma \geq 0 \quad \alpha + \beta + \gamma = 1$$

scegliendo come origine a , x si scrive

$$x = a + \beta(b - a) + \gamma(c - a) \quad \beta, \gamma \geq 0 \quad \beta + \gamma \leq 1.$$

Per quanto visto se $\beta + \gamma = 1$ ($\beta \geq 0, \gamma \geq 0$) il punto x appartiene al segmento $[b, c]$.

Introduciamo il riferimento affine di origine a ed avente come base i vettori l.i. $b - a, c - a$.

Il punto x dato da $x = a + \beta(b - a) + \gamma(c - a)$ ha coordinate (β, γ) .

Poiché $\beta \geq 0, \gamma \geq 0$ si tratta di un punto del I quadrante del sistema di riferimento.

Ora poiché l'equazione $\beta + \gamma = 1$ rappresenta la retta per il punto b di coordinate $(1, 0)$ e per il punto c di coordinate $(0, 1)$ la disequazione $\beta + \gamma \leq 1$ rappresenta il semipiano individuato dalla retta $\beta + \gamma = 1$ (ossia per i punti b e c) e contenente l'origine ossia il punto a .

Il punto x , dovendo appartenere anche a tale semipiano, è un punto del triangolo a, b, c .

Viceversa, se si considera il triangolo non degenere a, b, c ed un suo punto x , si ha che:

i) se x è un punto della frontiera del triangolo, ad esempio x appartiene ad $[a, b]$, x si scrive come c.l.c. di a, b, c ove il coefficiente di c è nullo;

ii) se x è un punto interno del triangolo a, b, c detto y il punto di intersezione della retta (a, x) con $[b, c]$ si ha:

$$x = o + \alpha(a - o) + \beta(y - o) \quad \alpha, \beta \geq 0 \quad \alpha + \beta = 1$$

e poiché $y \in [b, c]$

$$y = o + \gamma(b - o) + \delta(c - o) \quad \delta \geq 0, \gamma \geq 0, \delta + \gamma = 1$$

segue che

$$x = o + \alpha(a - o) + \beta\gamma(b - o) + \beta\delta(c - o)$$

ove

$$\alpha \geq 0, \beta\gamma \geq 0, \beta\delta \geq 0, \alpha + \beta\gamma + \beta\delta = 1,$$

ossia x è un punto del 2-simplesso.

OSSERVAZIONE 4 - In modo analogo si ottiene che il 3-simplesso coincide con il tetraedro.

DEFINIZIONE 1.7.2 - Siano x_1, x_2, \dots, x_{n+1} gli $n + 1$ vertici di un n -simplesso. Ogni punto x

di \mathbf{R}^n si può scrivere nella forma
$$\begin{cases} x = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_{n+1} x_{n+1} \\ \lambda_1 + \dots + \lambda_{n+1} = 1 \end{cases} . 0$$

I numeri $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1})$ sono detti **coordinate baricentriche** di x relative alla base x_1, \dots, x_{n+1} .

OSSERVAZIONE 5 - Tali coordinate sono univocamente determinate. Infatti, poiché i vettori $x_2 - x_1, x_3 - x_1, \dots, x_{n+1} - x_1$ formano una base di \mathbf{R}^n , ogni vettore $x - x_1$ si esprime in modo unico come loro combinazione lineare:

$$x - x_1 = \lambda_2(x_2 - x_1) + \dots + \lambda_{n+1}(x_{n+1} - x_1)$$

da cui si ricava $x = (1 - \lambda_2 - \dots - \lambda_{n+1})x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_{n+1} x_{n+1}$ ossia il sistema scritto sopra, ove si ponga $\lambda_1 = 1 - \lambda_2 - \dots - \lambda_{n+1}$.

ESEMPIO 1.7.2 - Dati i punti $a(1, 0), b(3, 0), c(1, 4)$, il triangolo avente questi vertici è formato dai punti $p(x, y)$ tali che:

$$p - o = \alpha(a - o) + \beta(b - o) + \gamma(c - o) \quad \alpha, \beta, \gamma \geq 0 \quad \alpha + \beta + \gamma = 1,$$

ossia tali che:

$$\begin{cases} x = \alpha + 3\beta + \gamma \\ y = 4\gamma \\ \alpha, \beta, \gamma \geq 0 \quad \alpha + \beta + \gamma = 1 \end{cases} .$$

Per decidere se un punto appartiene al triangolo oppure no basta calcolare le sue coordinate baricentriche: se sono tutte non negative il punto sta nel triangolo, in caso contrario il punto è esterno.

Ad esempio il punto di coordinate $(2, 2)$ appartiene al triangolo, dato che il precedente sistema, con $x = y = 2$, ammette la soluzione $\alpha = 0, \beta = \gamma = 1/2$.

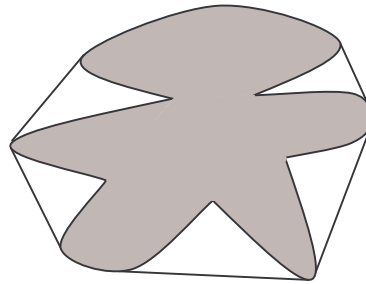
Così pure il punto $(2, 1)$, che si ottiene per $\alpha = 1/4, \beta = 1/2, \gamma = 1/4$, appartiene al triangolo mentre il punto $(4, 4)$ non è interno al triangolo perché si ottiene per $\alpha = -3/2, \beta = 3/2, \gamma = 1$. Per $\alpha = \beta = \gamma = 1/3$ si ottiene invece il baricentro del triangolo.

1.8 - Inviluppo convesso.

Ad un qualsiasi insieme di punti X si può associare un insieme convesso che gode anche di alcune proprietà del corrispondente insieme X .

DEFINIZIONE 1.8.1 - Si dice **inviluppo convesso** di un insieme X di \mathbf{R}^n , e si scrive $\text{conv}(X)$ il più piccolo convesso che contiene X .

Quindi $\text{conv}(X)$ è anche l'intersezione di tutti gli insiemi convessi contenenti X .
 In particolare se X è formato da 2 punti $\{a, b\}$, $\text{conv}(a, b)$ è il segmento di estremi a e b , che si indica anche con il simbolo $[a, b]$.



Un modo per trovare l'involuppo convesso è dato dalla seguente proprietà:

PROPRIETÀ 1.8.1 - *L'involuppo convesso di un insieme X coincide con le c.l.c. di punti di X . Ossia $\text{conv}(X)$ coincide con l'insieme*

$$A = \left\{ \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i : \forall i x_i \in X, \forall i \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1, \forall k \in \mathbb{N} \right\}.$$

Dimostrazione - Si verifica facilmente che A è convesso. Infatti dai passaggi seguenti si ricava che se y e z sono punti di A e $x \in [y, z]$, anche $x \in A$.

$$y = \lambda_1 y_1 + \dots + \lambda_s y_s \quad y_1, \dots, y_s \in X, \quad \lambda_1 \geq 0, \dots, \lambda_s \geq 0 \quad \lambda_1 + \dots + \lambda_s = 1$$

$$z = \mu_1 z_1 + \dots + \mu_t z_t \quad z_1, \dots, z_t \in X, \quad \mu_1 \geq 0, \dots, \mu_t \geq 0 \quad \mu_1 + \dots + \mu_t = 1$$

$$x = \alpha y + (1 - \alpha)z \quad 0 \leq \alpha \leq 1$$

da cui si ricava

$$x = \alpha(\lambda_1 y_1 + \dots + \lambda_s y_s) + (1 - \alpha)(\mu_1 z_1 + \dots + \mu_t z_t) =$$

$$= \alpha \lambda_1 y_1 + \dots + \alpha \lambda_s y_s + (1 - \alpha)\mu_1 z_1 + \dots + (1 - \alpha)\mu_t z_t$$

ossia x è combinazione lineare di punti di X i coefficienti sono tutti positivi e la loro somma è $\alpha(\lambda_1 + \dots + \lambda_s) + (1 - \alpha)(\mu_1 + \dots + \mu_t) = 1$, quindi anche x è combinazione lineare convessa di punti di X .

Inoltre A contiene X in quanto ogni elemento $x \in X$, pensato come $x = 1x$ è c.l.c. di punti di X .

Infine poiché ogni convesso B che contiene X , contenendo per la Proprietà 1.6.1 tutte le c.l.c. di suoi punti, contiene in particolare anche le c.l.c. di punti di X , ossia B contiene A .

Quindi: $A = \text{conv}(X)$.

OSSERVAZIONE - La scrittura degli elementi di $\text{conv}(X)$ come c.l.c. di punti di X non è unica.

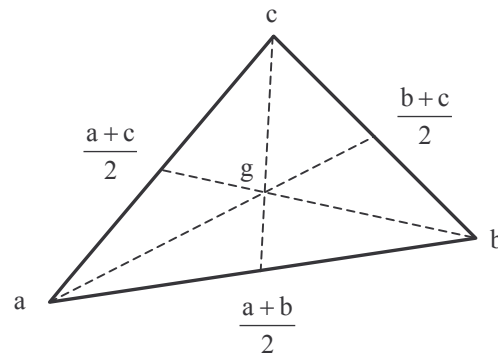
Se ad esempio $X = \{a, b, c\}$ è formato da 3 punti distinti non allineati, $\text{conv}(X)$ è il triangolo di vertici a, b, c . Il baricentro g è definito come la c.l.c. dei vertici con coefficienti tutti uguali ad $\frac{1}{3}$, quindi si scrive come:

$$g = \frac{1}{3}a + \frac{1}{3}b + \frac{1}{3}c = \frac{1}{3}a + \frac{2}{3}\left(\frac{b+c}{2}\right) = \frac{1}{3}b + \frac{2}{3}\left(\frac{a+c}{2}\right) = \frac{1}{3}c + \frac{2}{3}\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

le varie uguaglianze stanno ad indicare che

$$g \in \left[a, \frac{b+c}{2} \right], \quad g \in \left[b, \frac{a+c}{2} \right], \quad g \in \left[c, \frac{a+b}{2} \right]$$

e la conseguenza geometrica è che le tre mediane si incontrano nel baricentro del triangolo.



DEFINIZIONE 1.8.2. - Si dice **diametro** di un insieme X , e si indica con $D(X)$, l'estremo superiore delle distanze fra due suoi punti.

Per esempio il triangolo equilatero di lato 1 ha diametro 1, la boccia unitaria ha diametro 2.

PROPRIETÀ 1.8.2 - Il diametro dell'involuppo convesso di un insieme X coincide con il diametro dell'insieme stesso.

Dimostrazione - Poiché $X \subseteq \text{conv}(X)$ segue che $D(X) \leq D(\text{conv}(X))$.

Si prova che non può essere $D(X) < d < D(\text{conv}(X))$.

Se fosse $D(X) < d \forall x_1, \forall x_2 \in X$ risulterebbe $|x_1 - x_2| < d$, quindi $X \subset B(x_2, d)$, boccia aperta di centro x_2 e raggio d . Ma $B(x_2, d)$ è convessa quindi $\text{conv}(X) \subset B(x_2, d)$ perché $\text{conv}(X)$ è il minimo convesso che contiene X . Considerati ora due qualsiasi punti y_1 ed y_2 di $\text{conv}(X)$ risulta:

$y_1 \in B(x_2, d) \Rightarrow |x_2 - y_1| < d \Rightarrow x_2 \in B(y_1, d)$ per ogni $x_2 \in X$.

Segue $X \subset B(y_1, d)$ quindi $\text{conv}(X) \subset B(y_1, d) \Rightarrow |y_1 - y_2| < d, \forall y_1, \forall y_2 \in \text{conv}(X) \Rightarrow D(\text{conv}(X)) < d$, il che è assurdo.

1.9 - Il teorema di Carathéodory.

Tale teorema permette di semplificare la scrittura dell'involuppo convesso di un dato insieme.

TEOREMA 1.9.1 - (Carathéodory) - Sia x un punto dell'involuppo convesso di un insieme X contenuto in \mathbf{R}^n , allora x si può scrivere come c.l.c. di (al più) $n + 1$ punti di X .

Quindi

$$\text{conv}(X) = \left\{ \sum_1^{n+1} \lambda_i x_i : \forall i x_i \in X, \forall i \lambda_i \geq 0 \quad \sum_1^{n+1} \lambda_i = 1 \right\}.$$

Tale teorema ci assicura che se X è un sottoinsieme di \mathbf{R}^2 ogni punto di $\text{conv}(X)$ è:

- un punto di X ;
- oppure un punto di un segmento i cui estremi sono due punti di X ;
- oppure un punto interno di un triangolo i cui vertici sono punti di X .

Dimostrazione - Per la Proprietà 1.8.1 per ogni $x \in \text{conv}(X)$ si ha:

$$x = \sum_1^k \lambda_i x_i \quad (x_i \in X) \quad \lambda_i \geq 0 \quad \sum_1^k \lambda_i = 1,$$

ove k è un intero positivo.

Scopo del teorema è trovare per x un'analogia espressione con $k \leq n + 1$.

Supponiamo quindi che

$$\begin{cases} \alpha_1(1, 1) + \alpha_2(0, 1) + \alpha_3(-1, 0) + \alpha_4(3, 0) = (0, 0) \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0 \end{cases}$$

ossia, in componenti:
$$\begin{cases} \alpha_1 - \alpha_3 + 3\alpha_4 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 0, \text{ ad esempio:} \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0 \end{cases} \begin{cases} \alpha_1 = -4 \\ \alpha_2 = 4 \\ \alpha_3 = -1 \\ \alpha_4 = 1 \end{cases}.$$

Tale soluzione permette di costruire gli insiemi:

$$\begin{aligned} I_1 &= \left\{ -4\tau + \frac{1}{4} \geq 0 \right\} = \left\{ \tau \leq \frac{1}{16} \right\} \\ I_2 &= \left\{ 4\tau + \frac{1}{4} \geq 0 \right\} = \left\{ \tau \geq -\frac{1}{16} \right\} \\ I_3 &= \left\{ -\tau + \frac{1}{4} \geq 0 \right\} = \left\{ \tau \leq \frac{1}{4} \right\} \\ I_4 &= \left\{ \tau + \frac{1}{4} \geq 0 \right\} = \left\{ \tau \geq -\frac{1}{4} \right\} \end{aligned}$$

Come punto di frontiera di $I_1 \cap I_2 \cap I_3 \cap I_4$ si può scegliere $\tau_0 = -\frac{1}{16}$ (oppure $\tau_0 = \frac{1}{16}$) e si ottiene:

$$\begin{aligned} \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{2} \right) &= \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{16}(-4) \right) (1, 1) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{16}4 \right) (0, 1) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{16}(-1) \right) (-1, 0) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{16} \right) (3, 0) \\ &= \frac{1}{2}(1, 1) + \frac{5}{16}(-1, 0) + \frac{3}{16}(3, 0), \end{aligned}$$

quindi g è un punto del triangolo di vertici a, c, d .

1.10 - Proprietà dell'involuppo convesso.

Come corollario del teorema di Carathéodory si ha la seguente proprietà che vale per i compatti di \mathbf{R}^n ossia per gli insiemi chiusi e limitati.

PROPRIETÀ 1.10.1 - Se S è un compatto di \mathbf{R}^n , anche $\text{conv}(S)$ lo è.

Dimostrazione - Il sottoinsieme di \mathbf{R}^{n+1} definito da:

$$B = \{x: x = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n+1}), \lambda_i \geq 0 \text{ per } 1 \leq i \leq n+1, \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_{n+1} = 1\}$$

è un compatto di \mathbf{R}^{n+1} perché è un n -simpleso di vertici

$$x_1 = (1, 0, \dots, 0), x_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, x_{n+1} = (0, 0, \dots, 0, 1),$$

nell'iperpiano

$$H = \{(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n+1}) : \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_{n+1} = 1\} \text{ di } \mathbf{R}^{n+1}.$$

In particolare per $n=2$ coincide con il triangolo del piano $H = \{(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) : \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1\}$ di \mathbf{R}^3 .

L'insieme $B \times S^{n+1}$ è un compatto contenuto in $\mathbf{R}^{n+1} \times S^{n+1}$ quindi l'immagine di tale compatto mediante la funzione continua f :

$$(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n+1}, x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \longrightarrow \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_{n+1} x_{n+1}$$

è un compatto.

Per il teorema visto f manda $B \times S^{n+1}$ in $\text{conv}(S)$ che perciò è compatto.

OSSERVAZIONE 1 - Se S è limitato, anche $\text{conv}(S)$ è limitato.

Infatti se S è limitato, è contenuto in una boccia B che è un insieme convesso, ma $\text{conv}(S)$ è il più piccolo convesso che contiene S , quindi $\text{conv}(S)$ è contenuto in B .

OSSERVAZIONE 2 - Se S è chiuso, non è detto che $\text{conv}(S)$ lo sia: supponiamo che S sia costituito dai punti interni e contorno di un ramo di iperbole e dal suo centro, in tal caso S è chiuso, non $\text{conv}(S)$, perché non contiene gli asintoti.

PROPRIETÀ 1.10.2 - Se S è un convesso compatto, allora $S = \text{conv}(\text{fr}S)$, ove $\text{fr}S$ è la frontiera di S .

Dimostrazione - Siano x un punto di S e D una retta per x , appartenente alla varietà lineare generata da S . Ora $D \cap S$ è un convesso chiuso limitato di D , pertanto è un segmento $[u, v]$ contenente x , quindi x è c.l.c. di due punti u e v , appartenenti alla frontiera di S , ossia $x \in \text{conv}(\text{fr}S)$.

Viceversa essendo S chiuso, $\text{fr}S \subset S$ quindi:

$$\text{conv}(\text{fr}S) \subset \text{conv}(S) = S.$$

TEOREMA 1.10.1 (Krein e Milman) - Un convesso compatto è l'involuppo convesso dei suoi punti estremi:

$$A = \text{conv}(\text{Extr}(A))$$

ove con $\text{Extr}(A)$ si indica l'insieme dei punti estremi del convesso A .

Dimostrazione - Si verifica inizialmente, mediante la doppia inclusione, che, per ogni iperpiano H di supporto di un convesso chiuso qualsiasi A , si ha:

$$\text{Extr}(A \cap H) = \text{Extr}(A) \cap H.$$

Proviamo che:

$$\text{Extr}(A \cap H) \subseteq \text{Extr}(A) \cap H.$$

Infatti se $y \notin \text{Extr}(A) \cap H$:

$$\text{i) } y \notin H \rightarrow y \notin A \cap H \rightarrow y \notin \text{Extr}(A \cap H)$$

oppure

$$\text{ii) } y \notin \text{Extr}(A).$$

In tal caso ci sono due possibilità:

$$y \notin A \rightarrow y \notin A \cap H \rightarrow y \notin \text{Extr}(A \cap H),$$

oppure

$$y \in A \text{ ed } \exists a, b \in A : y \in [a, b] \text{ } y \neq a, y \neq b.$$

In questo caso poiché H è un iperpiano di supporto di A , per $[a, b] \cap H$ possono presentarsi tre situazioni: l'intersezione è vuota e quindi $y \notin H$, l'intersezione è tutto $[a, b]$ e allora il segmento è tutto contenuto in $A \cap H$ e quindi $y \notin \text{Extr}(A \cap H)$ oppure $[a, b] \cap H$ è un punto estremo ossia il punto a oppure il punto b ed in tal caso $y \notin H$. In tutti e tre i casi $y \notin \text{Extr}(A \cap H)$.

Proviamo ora che

$$\text{Extr}(A) \cap H \subseteq \text{Extr}(A \cap H).$$

Infatti se $x \notin \text{Extr}(A \cap H)$ si ha:

$$\text{i) } x \notin A \cap H \rightarrow x \notin A \text{ oppure } x \notin H \rightarrow x \notin \text{Extr}(A) \text{ oppure } x \notin H \rightarrow x \notin \text{Extr}(A) \cap H$$

oppure

$$\text{ii) } x \in A \cap H \text{ ed } \exists c, d \in A \cap H : x \in [c, d] \text{ } x \neq c, x \neq d \rightarrow x \in A \text{ ed } \exists c, d \in A : x \in [c, d] \text{ } x \neq c, x \neq d \rightarrow x \notin \text{Extr}(A) \rightarrow x \notin \text{Extr}(A) \cap H.$$

Il teorema si prova per induzione sulla dimensione n dello spazio.

Per $n = 1$, A è un segmento $[a, b]$, $\text{Extr}(A) = \{a, b\}$ in quanto gli estremi di un intervallo chiuso sono i suoi estremi nel senso della Definizione 1.4.3 e poiché

$$A = \text{conv}(a, b)$$

in questo caso il teorema è verificato.

Supponiamo vero il teorema in dimensione $n - 1$ e lo proviamo in dimensione n .

Poiché $\text{Extr}(A) \subset A$ ed A è convesso

$$\text{conv}(\text{Extr}(A)) \subset A.$$

Per provare l'altra inclusione dapprima si prova che

$$(1) \quad \text{fr}A \subset \text{conv}(\text{Extr}(A)).$$

Sia x un punto della frontiera di A ed H un'iperpiano di appoggio di A in x (che esiste per il teorema di Hahn-Banach), allora $A \cap H$ è un convesso di H di dimensione al più $n - 1$ e per l'ipotesi induttiva

$$\text{conv}(\text{Extr}(A \cap H)) = A \cap H$$

quindi se $x \in \text{fr}A$, per costruzione:

$$x \in A \cap H = \text{conv}(\text{Extr}(A \cap H)) = \text{conv}(\text{Extr}(A) \cap H) \subset \text{conv}(\text{Extr}(A)) \text{ e la (1) è verificata.}$$

Poiché per la Proprietà 1.10.2 si ha

$$A = \text{conv}(\text{fr}A)$$

considerando l'involuppo convesso di ambo i membri di (1) si ha

$$A \subset \text{conv}(\text{Extr}(A))$$

da cui segue la tesi.

1.11 - Il Teorema di Hahn-Banach.

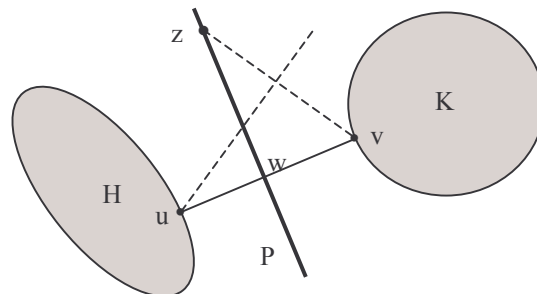
Diamo prima una versione di questo teorema nel caso di due corpi convessi disgiunti.

DEFINIZIONE 1.11.1 - *Dati due convessi A e B diciamo che l'iperpiano H **separa** (rispettivamente **separa strettamente**) A e B , se A e B sono in semispazi chiusi (rispettivamente aperti) diversi determinati da H .*

TEOREMA 1.11.1 (Hahn-Banach) - *Dati due corpi convessi disgiunti esiste un iperpiano che li separa strettamente.*

Dimostrazione - Siano H e K i corpi convessi. Poiché sono limitati la distanza $d(H, K) = \inf\{d(x, y) : x \in H \text{ ed } y \in K\}$ è positiva; allora esistono due punti $u \in H$ e $v \in K$ di minima distanza, ossia tali che: $d(u, v) = d(H, K)$.

Indichiamo con $w = \frac{u+v}{2}$ il punto medio del segmento $[u, v]$ e con P l'iperpiano per w ortogonale ad $u - v$.



L'iperpiano P non può avere punti comuni con H e K : se per assurdo esistesse un punto z comune a P e K , il segmento $[v, z]$ sarebbe contenuto in K e il punto u avrebbe da K distanza minore della distanza di u da v considerando che nel triangolo u, v, z la distanza di u

da $[v, z]$ è minore del lato $[u, v]$.

OSSERVAZIONE - Il teorema vale anche se si ha un corpo convesso ed un punto che non gli appartiene.

Un'altra formulazione del teorema di Hahn-Banach è la seguente:

TEOREMA 1.11.2 - *Sia H un corpo convesso di \mathbf{R}^n , allora per ogni punto della frontiera passa almeno un tac-piano di H .*

Dimostrazione - Si dimostra per induzione sulla dimensione n . Se $n = 1$, allora H è un intervallo e un estremo dell'intervallo è al tempo stesso il tac-piano desiderato.

Supponiamo vero il teorema per corpi convessi in \mathbf{R}^{n-1} ($n \geq 2$) e consideriamo un arbitrario corpo convesso H in \mathbf{R}^n .

Sia a un punto della frontiera di H e indichiamo con H_0 l'intersezione di H con il sottospazio $x_n = 0$. Senza mancare di generalità supponiamo che l'origine o sia un punto interno di H e che il punto a appartenga al sottospazio $x_n = 0$.

H_0 è un corpo convesso, perché intersezione di H con un iperpiano, quindi per l'ipotesi di induzione esiste in a un iperpiano P_0 in $x_n = 0$ che è un tac-piano per H_0 .

P_0 non passa per o , perché punto interno ed avrà un'equazione del tipo:

$$P_0: a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_{n-1}x_{n-1} = 1$$

e per ogni punto x di H_0 si avrà per esempio:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_{n-1}x_{n-1} \leq 1.$$

Consideriamo in H due punti

$$y = (y_1, \dots, y_{n-1}, y_n) \quad \text{con } y_n > 0$$

$$z = (z_1, \dots, z_{n-1}, z_n) \quad \text{con } z_n < 0$$

Costruiamo ora il punto t del segmento $[y, z]$ che sta su $x_n = 0$.

Posto

$$\theta = (-z_n) : (y_n - z_n) \quad \eta = (y_n) : (y_n - z_n)$$

si ha ovviamente

$$\theta > 0, \eta > 0 \quad \text{e} \quad \theta + \eta = 1$$

quindi il punto

$$t = \theta y + \eta z$$

appartiene al segmento $[y, z]$ e poiché

$$\theta y_n + \eta z_n = t_n = 0$$

il punto t trovato sta su $x_n = 0$, appartiene ad H_0 , allora

$$a_1t_1 + a_2t_2 + \dots + a_{n-1}t_{n-1} \leq 1$$

ossia

$$a_1(\theta y_1 + \eta z_1) + a_2(\theta y_2 + \eta z_2) + \dots + a_{n-1}(\theta y_{n-1} + \eta z_{n-1}) \leq 1.$$

Dalla precedente disuguaglianza si ha:

$$\theta(a_1y_1 + a_2y_2 + \dots + a_{n-1}y_{n-1}) + \eta(a_1z_1 + a_2z_2 + \dots + a_{n-1}z_{n-1}) \leq 1,$$

ossia

$$(-z_n)(a_1y_1 + a_2y_2 + \dots + a_{n-1}y_{n-1}) : (y_n - z_n) + (y_n)(a_1z_1 + a_2z_2 + \dots + a_{n-1}z_{n-1}) : (y_n - z_n) \leq 1,$$

oppure anche

$$(-z_n)(a_1y_1 + a_2y_2 + \dots + a_{n-1}y_{n-1}) + (y_n)(a_1z_1 + a_2z_2 + \dots + a_{n-1}z_{n-1}) \leq y_n - z_n,$$

ossia

$$(-z_n)(a_1y_1 + a_2y_2 + \dots + a_{n-1}y_{n-1} - 1) + (y_n)(a_1z_1 + a_2z_2 + \dots + a_{n-1}z_{n-1} - 1) \leq 0$$

dunque per ogni $y \in H$ con $y_n > 0$ e per ogni $z \in H$ con $z_n < 0$ si ha:

$$(a_1y_1 + a_2y_2 + \dots + a_{n-1}y_{n-1} - 1) : (y_n) \leq (a_1z_1 + a_2z_2 + \dots + a_{n-1}z_{n-1} - 1) : (z_n).$$

Allora esiste un numero reale che indichiamo con $-a_n$ tale che

$$(a_1y_1 + a_2y_2 + \dots + a_{n-1}y_{n-1} - 1) : (y_n) \leq -a_n \leq (a_1z_1 + a_2z_2 + \dots + a_{n-1}z_{n-1} - 1) : (z_n).$$

Da ciò segue

$$a_1y_1 + a_2y_2 + \dots + a_{n-1}y_{n-1} + a_ny_n \leq 1$$

$$a_1z_1 + a_2z_2 + \dots + a_{n-1}z_{n-1} + a_nz_n \leq 1.$$

Allora l'iperpiano

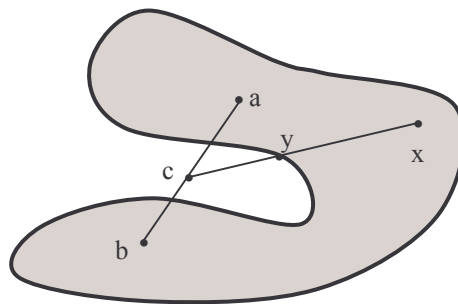
$$P: a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_{n-1}x_{n-1} + a_nx_n = 1$$

è un tac-piano di H perché tutti i punti di H stanno in uno stesso semispazio ed il punto a sta in P , infatti le sue coordinate soddisfano P_0 quindi anche P , essendo la sua n -esima coordinata zero.

Dal teorema precedente segue una nuova caratterizzazione dei corpi convessi.

PROPRIETÀ 1.11.1 - Sia X un compatto di \mathbf{R}^n ad interno non vuoto, X è convesso se e solo se per ogni punto della frontiera passa un iperpiano di supporto di X .

Dimostrazione - Occorre solo più provare che se X gode della proprietà detta, X è convesso. Ragioniamo per assurdo, supponiamo che esista un segmento $[a, b]$ con $a \in X, b \in X$ e un punto c del segmento $[a, b]$ tale che c non appartenga ad X .



Sia x un punto interno di X non sulla retta (a, b) . Esiste almeno un punto y sulla frontiera di X appartenente al segmento $[c, x]$ ed y è interno al triangolo di vertici a, b, x . Ma ogni iperpiano per y separa un vertice del triangolo dagli altri due, per cui non è di supporto, contro l'ipotesi.

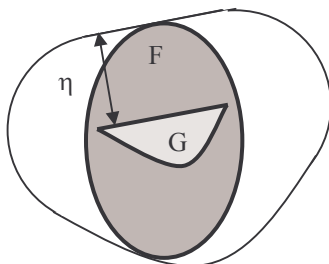
1.12 - Lo spazio dei corpi convessi.

Introduciamo una struttura di spazio metrico nell'insieme dei compatti di \mathbf{R}^n per poter enunciare il Teorema di selezione di Blaschke.

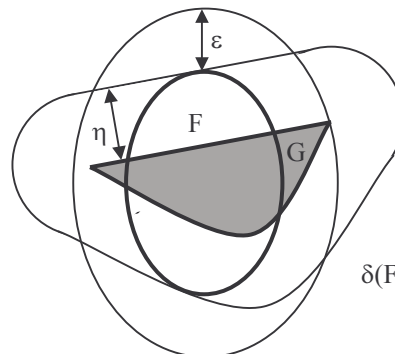
DEFINIZIONE 1.12.1 - Siano (\mathbf{R}^n, d) lo spazio metrico euclideo n -dimensionale \mathcal{K} l'insieme di tutti i compatti di \mathbf{R}^n e siano F e G due elementi di \mathcal{K} . Si pone:

$$\delta(F, G) = \inf\{\rho: F \subset B(G, \rho) \text{ e } G \subset B(F, \rho)\}$$

dove $B(G, \rho)$ è il corpo parallelo di G a distanza ρ .



$$\delta(F, G) = \eta$$



$$\delta(F, G) = \max(\epsilon, \eta)$$

TEOREMA 1.12.1 - δ è una metrica su \mathcal{K} .

Dimostrazione - Vediamo che δ soddisfa agli assiomi della distanza.

- i) $\delta(F, G) \geq 0$ per ogni F e G appartenenti a \mathcal{K} . Infatti l'estremo inferiore di un insieme di numeri reali positivi è un numero reale non negativo.
- ii) $\delta(F, G) = \delta(G, F)$ per ogni F e G appartenenti a \mathcal{K} è una conseguenza immediata della definizione di δ .
- iii) $\delta(F, G) = 0$ se e solo se $F = G$. Ovviamente $\delta(F, F) = 0$, viceversa vediamo che se $\delta(F, G) = 0$ allora $F = G$ poichè risulta $F \subset B(G, 0) = \bar{G} = G$ e $G \subset B(F, 0) = \bar{F} = F$.
- iv) $\delta(F, H) \leq \delta(F, G) + \delta(G, H)$ per ogni F, G ed H appartenenti a \mathcal{K} .
 Poniamo $\delta(F, G) = \rho$ e $\delta(G, H) = \sigma$: dobbiamo provare che $\delta(F, H) \leq \rho + \sigma$.
 Se $\delta(G, H) = \sigma$ risulta $G \subset B(H, \sigma)$ da cui $B(G, \rho) \subset B(H, \sigma + \rho)$ e quindi essendo $F \subset B(G, \rho)$ segue $F \subset B(H, \sigma + \rho)$.
 Analogamente se $\delta(F, G) = \rho$ risulta $G \subset B(F, \rho)$ da cui $B(G, \sigma) \subset B(F, \rho + \sigma)$ e quindi essendo $H \subset B(G, \sigma)$ segue $H \subset B(F, \rho + \sigma)$.
 $\delta(F, H)$ essendo per definizione l'estremo inferiore delle distanze per cui valgono le due inclusioni è in particolare minore od uguale alla distanza $\rho + \sigma$.

DEFINIZIONE 1.12.2 - La metrica δ definita su \mathcal{K} si dice **distanza di Hausdorff**.

Consideriamo una porzione limitata di \mathbf{R}^n ad esempio la sfera chiusa di centro l'origine e raggio R e sia \mathcal{F} la classe di tutti i compatti contenuti in tale sfera. Una famiglia di elementi di \mathcal{F} si dice **limitata** (oppure equilimitata o totalmente limitata).

DEFINIZIONE 1.12.3 - Data una successione $\{A_i\}$ di elementi di \mathcal{F} si dice che $\{A_i\}$ tende ad A e si indica $A_i \rightarrow A$ se esiste un elemento A di \mathcal{F} tale che $\delta(A_i, A) \rightarrow 0$ per $i \rightarrow \infty$.

DEFINIZIONE 1.12.4 - Una famiglia \mathcal{F} di insiemi convessi è compatta nella topologia di Hausdorff se ogni successione estratta da \mathcal{F} ha una sottosuccessione convergente il cui limite appartiene ad \mathcal{F} .

Si può dimostrare il seguente:

TEOREMA 1.12.2 - Data una successione $\{A_i\}$ di elementi di \mathcal{F} che tende ad A se ogni A_i è un sottoinsieme convesso, allora anche A è convesso.

Si può dimostrare (cfr. [E]) il teorema di selezione di Blaschke nel caso dei corpi convessi:

TEOREMA 1.12.3 - (Blaschke) Ogni famiglia infinita limitata di corpi convessi di \mathbf{R}^n con la topologia indotta dalla metrica di Hausdorff ammette una sottosuccessione convergente, nel senso che da ogni famiglia infinita limitata si può estrarre una successione e da questa una sottosuccessione convergente.

Un'altra formulazione del teorema di Blaschke è la seguente:

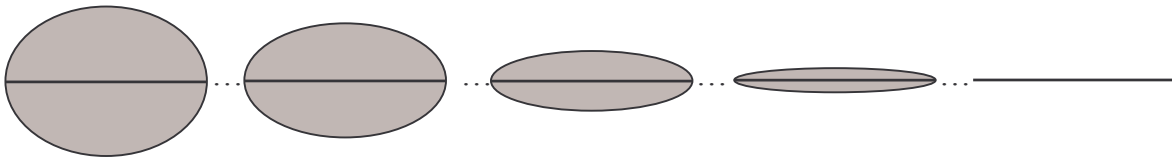
TEOREMA 1.12.4 - Sia S uno spazio topologico in cui un sottoinsieme è compatto se e solo se è chiuso e limitato. Se lo spazio (S, d) è compatto, ad esempio una porzione limitata di \mathbf{R}^n con la solita topologia, allora anche lo spazio metrico $(\mathcal{K}(S), \delta)$ dei compatti con topologia indotta dalla metrica di Hausdorff è compatto.

Classiche applicazioni di tale teorema sono l'esistenza di soluzioni di problemi estremali, ad esempio il problema isoperimetrico.

OSSERVAZIONE - Si prova che, indicato con C^* l'insieme dei compatti convessi di \mathbf{R}^n con la topologia indotta dalla metrica di Hausdorff δ , lo spazio $\langle C^*, \delta \rangle$ è uno spazio metrico completo e quindi è **uno spazio di Baire** (cfr. [D]).

Invece se C è l'insieme dei corpi convessi di \mathbf{R}^n , ossia dei compatti convessi ad interno non vuoto, con la topologia indotta dalla metrica di Hausdorff lo spazio $\langle C, \delta \rangle$ non è uno spazio metrico completo.

Infatti se consideriamo una successione di Cauchy di ellissi di diametro maggiore fisso e diametro minore che tende a zero essa ha come limite un segmento ed un segmento ha interno vuoto e quindi non è un corpo convesso.



Tuttavia, per il teorema di selezione di Blaschke, $\langle C, \delta \rangle$ è localmente compatto, quindi è **uno spazio di Baire**.

Le applicazioni di tali proprietà hanno portato alla pubblicazione di un gran numero di lavori. [G-W 2]

CAPITOLO II

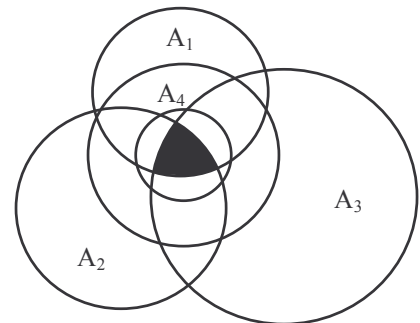
TEOREMA DI HELLY E SUE APPLICAZIONI

Consideriamo ora un teorema sull'intersezione di insiemi convessi che fu scoperto da Helly nel 1913 ma fu pubblicato, per la prima volta, nel 1921 da Radon con una sua dimostrazione.

2.1 - Teorema di Helly.

TEOREMA 2.1.1. (Helly 1913) - Sia \mathcal{F} una famiglia finita di k insiemi convessi di \mathbf{R}^n , con $k > n$. Se l'intersezione di $n + 1$ qualsiasi insiemi di \mathcal{F} non è vuota, allora esiste un punto comune a tutti gli insiemi di \mathcal{F} . La precedente proprietà vale anche per una famiglia infinita di convessi, purchè compatti.

OSSERVAZIONE 1 - L'ipotesi di convessità è essenziale. Come controesempio costruiamo in \mathbf{R}^2 una famiglia \mathcal{F} costituita da tre cerchi A_1, A_2, A_3 che si intersecano (vedi figura) e da una corona circolare A_4 (che non è convessa) che intersechi $A_1 \cap A_2, A_3 \cap A_1, A_2 \cap A_3$ ma non $A_1 \cap A_2 \cap A_3$. L'intersezione di tre sottoinsiemi non è vuota mentre non esiste un punto comune ai quattro insiemi.



OSSERVAZIONE 2 - Il teorema vale solo se la cardinalità degli elementi di \mathcal{F} che si intersecano è $\geq n + 1$ (cioè $n + 1$ non può essere sostituito da un numero più piccolo). Come controesempio se nel piano consideriamo la famiglia formata da tre segmenti, lati di un triangolo, $n = 2 < n + 1$ di tali insiemi si intersecano nei vertici ma non c'è un punto comune a tutti gli elementi della famiglia.

OSSERVAZIONE 3 - Se la famiglia non è finita, né formata da compatti, che sono gli insiemi chiusi e limitati, non vale il teorema.

Come primo controesempio consideriamo in \mathbf{R}^2 la famiglia \mathcal{F} , non finita, formata dai semispazi del piano cartesiano $x \geq 1, x \geq 2, x \geq 3, \dots$. Tali semispazi sono insiemi chiusi ma non limitati; l'intersezione di un numero finito di essi non è vuota ma non esiste un punto comune a tutti.

Come secondo controesempio consideriamo, sulla retta reale, la famiglia non finita \mathcal{F} dei segmenti $F_n = \left]0, \frac{1}{n}\right]$. Gli elementi di \mathcal{F} sono limitati ma non chiusi; l'intersezione di un numero finito di essi non è vuota ma non esiste un punto comune a tutti.

I^a Dimostrazione - Vediamo una prima dimostrazione, dovuta a Radon, basata sull'algebra lineare, provando il teorema:

- i) per una famiglia finita di convessi,
- ii) per una famiglia non necessariamente finita i cui elementi sono compatti.

i) Sia $\{X_1, X_2, \dots, X_r\}$ una famiglia finita di r convessi di \mathbf{R}^n con $r \geq n + 1$ tale che ogni sottofamiglia di $n + 1$ elementi abbia intersezione non vuota: dobbiamo provare che esiste un punto comune a tutti gli r convessi.

Per $r = n + 1$ il teorema è banalmente vero. Supponiamo quindi $r > n + 1$.

Si procede per induzione; supponiamo vero il teorema per ogni sottofamiglia di $r - 1$ elementi e lo dimostriamo nel caso in cui la famiglia sia composta da r elementi.

Per ipotesi esiste un punto x^j ($j = 1, \dots, r$) che appartiene a tutti gli X_i eccetto uno X_j altrimenti la tesi sarebbe provata. Con tali punti costruiamo il sistema (contenente una equazione vettoriale)

$$\begin{cases} \alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_r x^r = \mathbf{0} \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_r = 0 \end{cases}$$

che corrisponde al sistema lineare

$$\begin{cases} \alpha_1 x_1^1 + \alpha_2 x_1^2 + \dots + \alpha_r x_1^r = 0 \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ \alpha_1 x_n^1 + \alpha_2 x_n^2 + \dots + \alpha_r x_n^r = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_r = 0 \end{cases}$$

È un sistema omogeneo di $n + 1$ equazioni, nelle $r > n + 1$ incognite $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$.

Il rango è al più $n + 1$, minore del numero delle incognite che è r , quindi esiste una soluzione non banale: indichiamola con a_1, a_2, \dots, a_r .

Poiché $a_1 + a_2 + \dots + a_r = 0$, almeno due a_i hanno segno opposto; supponiamo (eventualmente rinumerandole) che:

a_1, a_2, \dots, a_j siano positive ed $a_{j+1}, a_{j+2}, \dots, a_r$ siano negative

e poniamo:

$$a = a_1 + a_2 + \dots + a_j = -(a_{j+1} + a_{j+2} + \dots + a_r).$$

La prima equazione vettoriale del sistema diventa:

$$a_1 x^1 + a_2 x^2 + \dots + a_j x^j = -(a_{j+1} x^{j+1} + a_{j+2} x^{j+2} + \dots + a_r x^r).$$

Detto y l'elemento

$$\frac{a_1 x^1 + a_2 x^2 + \dots + a_j x^j}{a} = - \frac{a_{j+1} x^{j+1} + a_{j+2} x^{j+2} + \dots + a_r x^r}{a}$$

si ha che y è combinazione lineare di x^1, x^2, \dots, x^j ed essendo i coefficienti $\frac{a_1}{a}, \dots, \frac{a_j}{a}$ tutti

positivi e con somma 1 si ha che y è combinazione lineare convessa di punti che appartengono a tutti gli X_i tranne $X_{j+1}, X_{j+2}, \dots, X_j$. Quindi y appartiene certamente ai rimanenti convessi

$$y \in X_{j+1}, X_{j+2}, \dots, X_r.$$

Per l'analoga ragione y è combinazione lineare convessa di $x^{j+1}, x^{j+2}, \dots, x^r$ punti che non appartengono a $X_{j+1}, X_{j+2}, \dots, X_r$ ma solo ai rimanenti, quindi y appartiene certamente a:

$$y \in X_1, X_2, \dots, X_j.$$

In definitiva y è comune a tutti gli r insiemi X_i .

ii) Dobbiamo ora provare che, considerata in \mathbf{R}^n una famiglia \mathcal{F} (non necessariamente finita) di sottoinsiemi convessi e compatti, con l'ipotesi che ogni sottofamiglia di \mathcal{F} di $n + 1$ elementi abbia intersezione non vuota, \mathcal{F} ha intersezione non vuota.

Osserviamo che nel punto i) abbiamo già provato che se ogni sottofamiglia di \mathcal{F} di $n + 1$ elementi ha intersezione non vuota allora ogni famiglia finita di \mathcal{F} con un numero qualsiasi

di elementi ha intersezione non vuota.

Supponiamo ora, per assurdo, che la famiglia \mathcal{F} di compatti convessi abbia intersezione vuota. Scelto un insieme C di \mathcal{F} , nell'ipotesi fatta, per ogni x di C esiste un elemento di \mathcal{F} , indichiamolo con C_x , che non contiene x (altrimenti x appartenerrebbe all'intersezione della famiglia, che abbiamo supposto vuota). Poiché ogni C_x di \mathcal{F} è chiuso in quanto compatto, esiste tutto un intorno aperto $N(x)$ di x disgiunto da C_x : $N(x) \cap C_x = \emptyset$.

Gli $N(x)$ così costruiti formano un ricoprimento aperto di C da cui, essendo C compatto, si può estrarre un ricoprimento finito $\{N(x_1), N(x_2), \dots, N(x_k)\}$.

Risulta, in particolare:

$$C_{x_i} \cap N(x_i) = \emptyset \quad i = 1, 2, \dots, k$$

e quindi, poiché $C \subset N(x_1) \cup \dots \cup N(x_k)$, si ha:

$$C \cap (C_{x_1} \cap \dots \cap C_{x_k}) = \emptyset.$$

Il che è assurdo perché ogni sottofamiglia finita ha intersezione non vuota.

II^a Dimostrazione - Vediamo ora una ulteriore dimostrazione, dovuta a Köning (1922) che fa uso del teorema di separazione di Hahn-Banach.

Proviamo che il teorema di Helly vale:

- i) per una famiglia finita di insiemi convessi e compatti,
- ii) per una famiglia, non necessariamente finita, di insiemi convessi compatti,
- iii) per una famiglia finita di insiemi convessi, non necessariamente compatti.

i) Si procede per induzione sulla dimensione n dello spazio \mathbf{R}^n .

Proviamo il teorema in \mathbf{R}^1 . Consideriamo una famiglia finita \mathcal{F} di insiemi convessi compatti in \mathbf{R} , cioè di segmenti chiusi, aventi un punto comune a due a due: dobbiamo provare che questa famiglia ha intersezione non vuota.

Se $[a_1, b_1], \dots, [a_m, b_m]$ sono gli insiemi di questa famiglia il minimo b_i , diciamo b_s , è comune a tutti perché da $[a_r, b_r] \cap [a_s, b_s] \neq \emptyset$ e $b_s < b_r$ segue $b_s \geq a_r$ ($\forall r = 1, \dots, m$) e pertanto b_s appartiene a tutti gli intervalli della famiglia. Analogamente, detto a_t il massimo a_i , risulta che a_t appartiene a tutti gli intervalli della famiglia quindi $\bigcap \mathcal{F} = [a_t, b_s] \neq \emptyset$.

Supponiamo il teorema vero in \mathbf{R}^{n-1} e dimostriamolo in \mathbf{R}^n .

In \mathbf{R}^n procediamo ancora per induzione sul numero (maggiore di n per ipotesi) di elementi della famiglia. Supponiamo vera la proprietà quando \mathcal{F} ha $s \geq n + 1$ elementi e vogliamo provarlo quando la famiglia ha $s + 1$ elementi.

Per $s = n + 1$ è ovvio perché \mathcal{F} avendo solo $n + 1$ elementi, ha intersezione non vuota per ipotesi.

Quindi supponiamo $s > n + 1$ e che, per assurdo, per gli $s + 1$ elementi di \mathcal{F} si abbia:

$$F_1 \cap F_2 \cap \dots \cap F_{s+1} = \emptyset.$$

Poiché

$$F_1 \cap F_2 \cap \dots \cap F_s \text{ ed } F_{s+1}$$

sono due convessi compatti disgiunti esiste per il teorema di Hahn-Banach un iperpiano H che li separa strettamente.

Poniamo:

$$A_1 = F_2 \cap F_3 \cap \dots \cap F_s$$

$$A_2 = F_1 \cap F_3 \cap \dots \cap F_s$$

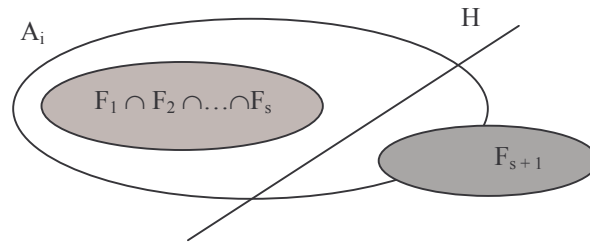
....

$$A_s = F_1 \cap F_2 \cap \dots \cap F_{s-1}.$$

Ogni s elementi di F_1, F_2, \dots, F_{s+1} hanno intersezione non vuota per ipotesi, quindi gli elementi $A_i \cap F_{s+1}$ hanno intersezione non vuota:

$$A_i \cap F_{s+1} \neq \emptyset \text{ per } i = 1, 2, \dots, s.$$

Poiché $F_1 \cap F_2 \cap \dots \cap F_s$ è contenuto in ogni A_i ($i = 1, \dots, s$) mentre $A_i \cap F_{s+1} \neq \emptyset$ si ha che $A_i \cap H \neq \emptyset$.



Gli insiemi $A_i \cap H$ ($i = 1, \dots, s$) sono compatti non vuoti convessi in \mathbf{R}^{n-1} .

Gli insiemi $F_i \cap H$ (con $i = 1, \dots, s$) sono in numero di s ed $s - 1$ di essi hanno intersezione non vuota perché coincide con un $A_i \cap H$, per esempio:

$$F_1 \cap H \cap F_2 \cap H \cap \dots \cap F_{s-1} \cap H = A_s \cap H.$$

Poiché la dimensione di H è $n - 1$ e poiché $s - 1 > n$ si può applicare ad $\{F_i \cap H\}$ l'ipotesi di induzione il che implica che l'intersezione di tutti gli $\{F_i \cap H\}$ non sia vuota:

$$F_1 \cap F_2 \cap \dots \cap F_s \cap H \neq \emptyset.$$

Ma questo è assurdo in quanto, per il teorema di Hahn-Banach, l'iperpiano H era disgiunto da $F_1 \cap F_2 \cap \dots \cap F_s$. Dunque:

$$F_1 \cap F_2 \cap \dots \cap F_{s+1} \neq \emptyset.$$

Allora, per induzione, si ha che ogni famiglia finita estratta dalla famiglia \mathcal{F} ha intersezione non vuota.

ii) La dimostrazione che una famiglia non necessariamente finita di convessi compatti, nell'ipotesi del teorema, ha intersezione non vuota, è già stata data al punto ii) della prima dimostrazione.

iii) Proviamo infine il teorema per una famiglia finita di convessi non necessariamente compatti, riportandoci al caso dei compatti.

Osserviamo che è sufficiente provare che la famiglia formata da $n + 2$ convessi ha intersezione non vuota se tutte le sottofamiglie formate da $n + 1$ convessi sono ad intersezione non vuota.

Sia $\mathcal{F} = \{C_1, \dots, C_{n+2}\}$ una famiglia di convessi tale che tutte le sottofamiglie di $n + 1$ elementi siano ad intersezione non vuota.

Costruiamo dei "poliedri" compatti $K_i \subset C_i$ ($i = 1, \dots, n + 2$) tali che tutte le sottofamiglie di $n + 1$ elementi siano ad intersezione non vuota: per il punto i) la famiglia dei K_i sarà ad intersezione non vuota e quindi anche la famiglia \mathcal{F} .

Per ipotesi esiste un $p_i \in C_1 \cap C_2 \cap \dots \cap C_{i-1} \cap C_{i+1} \cap \dots \cap C_{n+2} \neq \emptyset$ (ciclico), cioè un p_i che appartiene a tutti gli elementi della famiglia tranne che a C_i .

Poniamo $K_1 = \text{conv}(p_2, \dots, p_{n+2})$.

Se $x \in K_1$ allora $x = \lambda_2 p_2 + \dots + \lambda_{n+2} p_{n+2}$ con $\lambda_i \geq 0$ e $\sum \lambda_i = 1$ ove $p_2 \in C_1$ ($p_2 \notin C_2$) $p_{n+2} \in C_1$ ($p_{n+2} \notin C_{n+2}$), quindi $x \in C_1$, dunque K_1 è un "poliedro" compatto contenuto in C_1 e la famiglia $\{K_1, C_2, \dots, C_{n+2}\}$ è formata da $n + 2$ convessi tali che $n + 1$ di essi sono ad intersezione non vuota:

$K_1 \cap C_2 \cap \dots \cap C_{i-1} \cap C_{i+1} \cap \dots \cap C_{n+2} \neq \emptyset \dots 3 \leq i \leq n + 1$ (in quanto c'è almeno un p_i)

$K_1 \cap C_2 \cap \dots \cap C_{n+1} \neq \emptyset$ (in quanto c'è almeno p_{n+2}) e $C_2 \cap \dots \cap C_{n+2} \neq \emptyset$.

Si costruiscono poi, con la stessa tecnica, un compatto K_2, \dots , un compatto K_{n+2} fino ad ottenere la famiglia finita di compatti cercata.

ESERCIZIO - Dimostrare il teorema di Helly per una famiglia finita di k convessi di \mathbf{R}^2 .

Date k figure convesse nel piano e supposto che ogni tre abbiano un punto comune dobbiamo provare che tutte le k figure hanno un punto comune.

Si dimostra per induzione su k .

Dimostriamolo prima per $k = 4$. Siano A_0, A_1, A_2, A_3 le quattro figure convesse e siano:

- a_0 il punto comune di A_1, A_2, A_3 ,
- a_1 il punto comune di A_0, A_2, A_3 ,
- a_2 il punto comune di A_0, A_1, A_3 ,
- a_3 il punto comune di A_0, A_1, A_2 .

Poiché i punti a_0, a_1, a_2 appartengono tutti al convesso A_3 , tutto il triangolo appartiene ad A_3 e così per le altre terne di punti.

Si possono presentare due casi:

- 1 - uno dei quattro punti a_0, a_1, a_2, a_3 (per esempio a_0) appartiene al triangolo individuato dagli altri tre (a_1, a_2, a_3).

In tal caso a_0 appartiene anche ad A_0 , per cui a_0 appartiene a $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_0$.

L'osservazione resta valida anche se ad esempio il triangolo $\text{conv}(a_1, a_2, a_3)$ diventa un segmento $\rightarrow a_2 \in [a_1, a_3] \rightarrow a_2 \in A_2 \rightarrow a_2 \in A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_0$.

- 2 - i quattro punti sono vertici di un quadrilatero, in tal caso l'intersezione delle due diagonali è un punto di $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_0$.

Quindi per 4 figure il teorema è vero, supponiamolo vero per k figure e lo dimostriamo per $k + 1$ figure.

Siano $B_1, B_2, \dots, B_k, B_{k+1}$ le $k + 1$ figure convesse, indichiamo con $B = B_k \cap B_{k+1}$. Allora le k figure convesse $B_1, B_2, \dots, B_{k-1}, B$ sono tali che, se sono distinte da B , ogni tre hanno un punto comune inoltre anche B_j, B_1, B hanno un punto comune perché B_j, B_1, B_k, B_{k+1} sono tali che ogni tre hanno un punto comune quindi esiste un punto comune a tutte e quattro per quanto dimostrato.

Per l'ipotesi induttiva esiste un punto comune a $B_1, B_2, \dots, B_{k-1}, B$ quindi anche a $B_1, B_2, \dots, B_k, B_{k+1}$.

Nel caso la famiglia \mathcal{F} sia formata da un numero finito di convessi la dimostrazione del teorema di Helly si può dedurre dal seguente:

TEOREMA 2.1.2 (Radon 1921) - Sia $S = \{x_1, x_2, \dots, x_s\}$ un insieme di s punti di \mathbf{R}^n con $s > n + 1$, allora esiste una partizione di S in due insiemi disgiunti S_1 ed S_2 tali che i loro involuppi convessi non siano disgiunti:

$$\text{conv}(S_1) \cap \text{conv}(S_2) \neq \emptyset.$$

OSSERVAZIONE - Questo teorema implica che se S è un sottoinsieme di \mathbf{R}^2 formato da 4 punti $\{a, b, c, d\}$ ci sono due casi:

- o un punto sta nel triangolo individuato dagli altri tre:

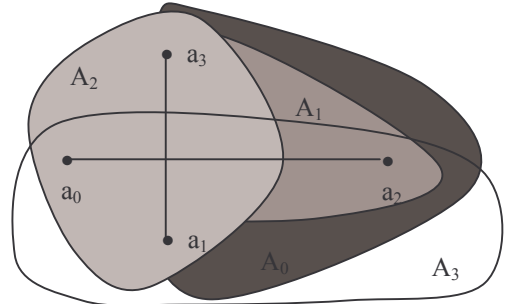
$$\text{conv}(a, b, c) \cap \text{conv}(d) = \{d\},$$

- oppure il segmento individuato da una coppia interseca il segmento individuato dalla coppia rimanente:

$$\text{conv}(a, b) \cap \text{conv}(c, d) = \{p\} \neq \emptyset.$$

Dimostrazione - Fissata la base di \mathbf{R}^n il sistema:

$$\begin{cases} \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_s x_s = \mathbf{0} \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_s = 0 \end{cases}$$



è un sistema omogeneo di $n + 1$ equazioni, nelle $s > n + 1$ incognite $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$.

Il rango è al più $n + 1$, minore del numero delle incognite che è s , quindi esiste una soluzione non banale: indichiamola con a_1, a_2, \dots, a_s .

Poiché almeno due a_i hanno segno opposto supponiamo (eventualmente rinumerandole) che:

a_1, a_2, \dots, a_j siano positive ed $a_{j+1}, a_{j+2}, \dots, a_s$ siano negative

e poniamo

$$a = a_1 + a_2 + \dots + a_j = -(a_{j+1} + a_{j+2} + \dots + a_s).$$

La prima equazione vettoriale del sistema diventa:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_j x_j = -(a_{j+1} x_{j+1} + a_{j+2} x_{j+2} + \dots + a_s x_s).$$

Detto y l'elemento

$$\frac{a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_j x_j}{a} = - \frac{a_{j+1} x_{j+1} + a_{j+2} x_{j+2} + \dots + a_s x_s}{a}$$

si ha che y è combinazione lineare di x_1, x_2, \dots, x_j ed essendo i coefficienti $\frac{a_1}{a}, \dots, \frac{a_j}{a}$ tutti

positivi e con somma 1 si ha che y è combinazione lineare convessa dei punti di $S_1 = \{x_1, x_2, \dots, x_j\}$. Per l'analogia ragione y è combinazione lineare convessa dei punti di $S_2 = \{x_{j+1}, x_{j+2}, \dots, x_s\}$.

Allora

$$y \in \text{conv}(S_1) \cap \text{conv}(S_2).$$

Per provare il teorema di Helly per una famiglia finita di insiemi convessi di \mathbf{R}^n usando il teorema di Radon si osservi anzitutto che il teorema è vero per ipotesi per una famiglia di $n + 1$ insiemi. Supposto il teorema valido per tutte le famiglie di $j - 1$ insiemi convessi di \mathbf{R}^n , con $j \geq n + 2$, lo si deve provare in \mathbf{R}^n per una famiglia \mathcal{F} di j insiemi convessi.

Sia $\mathcal{F} = \{A_1, A_2, \dots, A_j\}$ la famiglia di j insiemi convessi.

Per ipotesi induttiva per ogni $A_i \in \mathcal{F}$ esiste un punto p_i comune a tutti i $j - 1$ elementi di $\mathcal{F} - \{A_i\}$. Per il teorema di Radon, considerati $\{p_1, \dots, p_j\}$ esiste una partizione di tale insieme in modo che (eventualmente rinumerando) esiste un punto comune

$$z \in \text{conv}(p_1, \dots, p_r) \cap \text{conv}(p_{r+1}, \dots, p_j).$$

Poiché $z \in \text{conv}(p_1, \dots, p_r)$ segue che $z \in A_{r+1}, \dots, A_j$, e poiché $z \in \text{conv}(p_{r+1}, \dots, p_j)$ segue che $z \in A_1, \dots, A_r$, essendo i j insiemi convessi.

Quindi z appartiene a tutti gli elementi di \mathcal{F} .

OSSERVAZIONE - Notiamo che esiste uno stretto legame fra il teorema di Helly e quello di Carathéodory. Si può infatti dimostrare che è possibile dedurre il teorema di Helly da quello di Carathéodory e viceversa (cfr. [E]).

2.2 - Applicazioni del teorema di Helly.

Vediamo alcuni teoremi in cui viene utilizzato il teorema di Helly.

TEOREMA 2.2.1 (Karlin-Shapley) - *Se un insieme convesso C in \mathbf{R}^n ammette un ricoprimento finito formato da semispazi aperti o chiusi, allora C ammette un sottoricoprimento formato, al più, da $n + 1$ di questi semispazi.*

Dimostrazione - Supponiamo che il convesso C di \mathbf{R}^n ammetta un ricoprimento finito \mathcal{F} formato da semispazi aperti o chiusi oppure, più in generale, tale che per ogni $F \in \mathcal{F}$ l'insieme $F' = C - F$ sia convesso. Allora $\mathcal{F}' = \{F' : F \in \mathcal{F}\}$ è una famiglia finita di insiemi

convessi la cui intersezione è vuota perchè, se esistesse un $x \in \bigcap \mathcal{F}' = \bigcap (C - F_i)$, x apparterebbe a $C - F_i$, per ogni i , quindi $x \in C$ e $x \notin F_i$ per ogni i , il che è assurdo perchè gli insiemi F_i di \mathcal{F} formano un ricoprimento di C . Per il teorema di Helly ci sono, al più, $n + 1$ insiemi di \mathcal{F}' con intersezione vuota, ad esempio $(C - F_1) \cap \dots \cap (C - F_{n+1}) = \emptyset$.

I corrispondenti F_1, \dots, F_{n-1} formano il sottoricoprimento cercato di C in quanto:

$$C - (F_1 \cup \dots \cup F_{n+1}) = \emptyset.$$

Un altro teorema per la cui dimostrazione si può usare il teorema di Helly è il teorema di Kirchberger (1903). La dimostrazione originale era lunga circa 24 pagine, utilizzando il teorema di Helly è molto breve.

TEOREMA 2.2.2 (Kirchberger 1903) - *Siano X ed Y due sottoinsiemi finiti di \mathbf{R}^n . Se per ogni sottoinsieme S di $X \cup Y$ formato da $n + 2$ punti gli insiemi $S \cap X$ ed $S \cap Y$ sono separati strettamente da un iperpiano, allora X ed Y possono essere strettamente separati.*

OSSERVAZIONE - Il numero $n + 2$ non può essere ridotto. Sia per esempio $X = \{a, b, c, d\}$ formato dai 4 vertici di un simpleso regolare (tetraedro) di \mathbf{R}^3 ed $Y = \{y\}$ il suo baricentro. Detta S l'unione di X ed Y , si ha che presi $n + 1 = 4$ punti di S è possibile separare $S \cap X$ da $S \cap Y = \{y\}$, ma X non può essere separato da Y .

Dimostrazione - La dimostrazione che segue è dovuta a Rademacher e Schoenberg (1950). Possiamo supporre che sia $X = \{x_1, \dots, x_m\}$ ed $Y = \{y_1, \dots, y_q\}$ con $m + q \geq n + 2$ per ipotesi.

Per ogni $x = (x^1, x^2, \dots, x^n)$ punto di X e per ogni $y = (y^1, y^2, \dots, y^n)$ punto di Y definiamo i semispazi aperti J_x e Q_y di \mathbf{R}^{n+1} come segue:

$$J_x := \{\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n) : \lambda_0 + \lambda_1 x^1 + \lambda_2 x^2 + \dots + \lambda_n x^n > 0\}$$

$$Q_y := \{\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n) : \lambda_0 + \lambda_1 y^1 + \lambda_2 y^2 + \dots + \lambda_n y^n < 0\}$$

Si ottengono quindi gli $m + q$ semispazi $J_{x_1}, J_{x_2}, \dots, J_{x_m}$ e $Q_{y_1}, Q_{y_2}, \dots, Q_{y_q}$.

Per ipotesi scelti $n + 2$ elementi $X \cup Y$ ad esempio $x_1, \dots, x_s, y_1, \dots, y_t$ con $s + t = n + 2$, si ha che i punti x ed i punti y sono strettamente separati da un iperpiano di \mathbf{R}^n i cui coefficienti saranno indicati con h_0, h_1, \dots, h_n .

Ossia si ha:

$$h_0 + h_1 x_1^1 + \dots + h_n x_1^n > 0$$

.....

$$h_0 + h_1 x_s^1 + \dots + h_n x_s^n > 0$$

$$h_0 + h_1 y_1^1 + \dots + h_n y_1^n < 0$$

.....

$$h_0 + h_1 y_t^1 + \dots + h_n y_t^n < 0$$

quindi (h_0, h_1, \dots, h_n) è un punto di \mathbf{R}^{n+1} che appartiene ad $n + 2$ semispazi $J_{x_1}, J_{x_2}, \dots, J_{x_s}$ e $Q_{y_1}, Q_{y_2}, \dots, Q_{y_t}$.

La famiglia $\mathcal{F} = \{J_x : x \in X\} \cup \{Q_y : y \in Y\}$ è formata da un numero finito di convessi tali che $n + 2$ di essi hanno un elemento comune, si può usare il teorema di Helly ed esiste quindi un:

$$a = (a_0, a_1, \dots, a_n) \in \bigcap \mathcal{F} = \{\bigcap J_x\} \cap \{\bigcap Q_y\}$$

ossia

$$a \in \bigcap J_x \rightarrow a_0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n > 0 \quad \forall x \in X$$

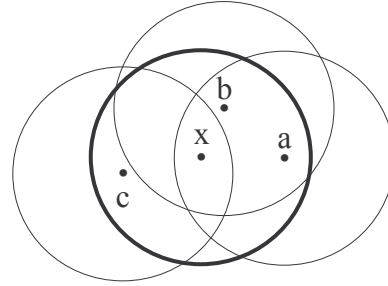
$$a \in \bigcap Q_y \rightarrow a_0 + a_1 y^1 + a_2 y^2 + \dots + a_n y^n < 0 \quad \forall y \in Y.$$

Allora X ed Y sono separati strettamente dall'iperpiano corrispondente:

$$\{z \in \mathbb{R}^n: a_0 + a_1 z^1 + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n = 0\}.$$

TEOREMA 2.2.3 - *Se in \mathbb{R}^2 n punti sono tali che tre di essi, comunque scelti, possono essere racchiusi in un cerchio di raggio r , allora tutti gli n punti possono essere racchiusi in un cerchio di raggio r .*

Dimostrazione - Dobbiamo provare che esiste nel piano un punto o la cui distanza da tutti gli altri punti non è maggiore di r , cioè che esiste un punto o del piano che appartiene a tutti i cerchi di raggio r aventi centro in uno qualunque dei punti dati.



Per il teorema di Helly, affinché n cerchi di raggio r ed aventi centro in uno dei punti dati abbiano intersezione non vuota è sufficiente provare che tre qualunque di questi cerchi hanno intersezione non vuota.

Per ipotesi ogni tre punti a, b, c , possono essere racchiusi in un cerchio di raggio r e centro x . Tale punto x appartiene ai cerchi di raggio r e di centro a, b, c in quanto la sua distanza da a, b, c è minore di r .

COROLLARIO - *Se n punti del piano sono tali che, presi a coppia, siano a distanza al massimo 1 da ogni altro, allora tutti gli n punti possono essere racchiusi in un cerchio di raggio $\frac{1}{\sqrt{3}}$.*

Dimostrazione - Per il teorema 2.2.3 è sufficiente provare che tre qualunque dei punti dati, indichiamoli con a, b, c , possono essere racchiusi in un cerchio di raggio $r = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Nessun lato del triangolo $\text{conv}(a,b,c)$ è maggiore di 1 per ipotesi. Se il triangolo è ottusangolo o rettangolo è completamente racchiuso dal cerchio avente come diametro il lato maggiore. Tale cerchio ha raggio $R \leq \frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Se il triangolo $\text{conv}(a,b,c)$ è acutangolo il raggio del cerchio circoscritto è minore od uguale a $\frac{1}{\sqrt{3}}$ in quanto uno degli angoli del triangolo, ad esempio l'angolo in a , è maggiore od uguale di 60° . Il lato bc , come corda di un arco con angolo al centro compreso tra 120° e 180° , è maggiore od uguale di $r\sqrt{3}$, dove r è il raggio circoscritto al triangolo $\text{conv}(a,b,c)$ quindi: $1 \geq bc \geq r\sqrt{3}$ da cui $r \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Come ulteriore applicazione del teorema di Helly abbiamo un risultato sulla risolubilità di un sistema di equazioni lineari.

PROPRIETÀ 2.2.1 - *Un sistema di k equazioni lineari in n incognite ($k > n$) ha soluzioni se ammette soluzioni un qualunque sistema di $n + 1$ equazioni estratte dalle k assegnate.*

Dimostrazione - L'asserto segue immediatamente dal teorema di Helly osservando che il luogo dei punti di \mathbb{R}^n che soddisfa un'equazione lineare è un iperpiano ossia un convesso.

CAPITOLO III

POLIGONI E POLIEDRI

DEFINIZIONE 3.1.1 - L'involuppo convesso di un numero finito di punti si dice **poligono** in \mathbb{R}^2 , **poliedro** in \mathbb{R}^3 , **politopo** in \mathbb{R}^n .

3.1 - Poligoni.

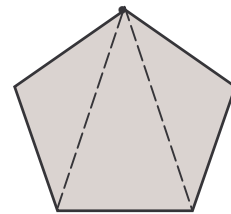
DEFINIZIONE 3.1.2 - Un **poligono** di p lati e p vertici si dice **regolare** se è equiangolo ed equilatero e si indica, usando i simboli di Schläfli, con $\{p\}$.

Ad esempio $\{4\}$ rappresenta solo il quadrato che è regolare mentre il rettangolo è equiangolo ma non equilatero ed il rombo è equilatero ma non equiangolo.

Per un poligono regolare di p lati valgono le seguenti proprietà:

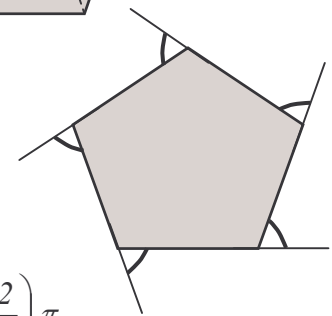
1) La somma degli angoli interni vale $(p - 2)\pi$.

Per convincersene basta fissare un vertice del poligono e da questo tracciare le diagonali possibili. In tale modo il poligono viene suddiviso in $(p - 2)$ triangoli. Ricordando che la somma degli angoli interni di un triangolo vale π segue la tesi.



2) La somma degli angoli esterni vale 2π .

E' essenziale il fatto che il poligono sia convesso: in tal caso gli angoli interni sono convessi e la somma di un angolo interno e dell'angolo esterno adiacente è un angolo piatto. Allora la proprietà segue, per differenza, dalla 1).

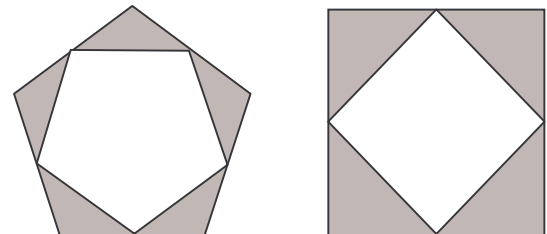


3) Ogni angolo esterno vale $\frac{2\pi}{p}$ ed ogni angolo interno $\left(1 - \frac{2}{p}\right)\pi$.

La proprietà segue immediatamente dalle precedenti ricordando che un poligono regolare è equiangolo.

DEFINIZIONE 3.1.3 - Si dice **figura al vertice a** (v.f.) di un poligono $\{p\}$ il segmento che unisce i punti medi dei lati aventi a come vertice.

Se consideriamo un poligono regolare $\{p\}$ e ne tracciamo tutte le figure al vertice, tali segmenti sono i lati di un nuovo $\{p\}$ che viene detto **poligono troncato** di $\{p\}$.



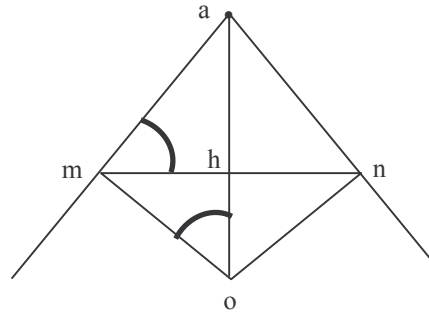
PROPRIETÀ 3.1.1 - Se il poligono $\{p\}$ ha lato ℓ il poligono troncato ha lato $\ell \cos \frac{\pi}{p}$.

Dimostrazione - Siano m ed n i punti medi di due lati consecutivi uscenti dal vertice a . Si conduca l'altezza ah relativa alla base mn del triangolo isoscele conv(m,n,a).

Poiché l'angolo \widehat{man} vale $\left(1 - \frac{2}{p}\right)\pi$, risulta:

$\widehat{mah} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{p}$. Nel triangolo rettangolo $\text{conv}(a,m,h)$

si ha $mh = \frac{\ell}{2} \cos \frac{\pi}{p}$ da cui $mn = 2mh = \ell \cos \frac{\pi}{p}$.



3.2 - Poliedri.

L'estensione in \mathbf{R}^3 del poligono è il **poliedro P**, definito anche come l'intersezione di un numero finito di semispazi chiusi che sia anche limitata. Il poliedro è quindi un insieme convesso. I piani che lo delimitano lo intersecano secondo poligoni piani, detti *facce*, disposte in modo tale che ogni loro lato, detto *spigolo*, sia comune a due di essi; inoltre si dicono *vertici* di P i suoi punti estremi. Il poliedro è quindi una regione dello spazio limitata da N_0 vertici, N_1 spigoli ed N_2 facce.

I tre numeri N_0 , N_1 ed N_2 sono legati dalla formula di Eulero.

3.2.1 - La formula di Eulero.

TEOREMA 3.2.1 - (Eulero 1752/3). *In un poliedro sia N_0 il numero dei vertici, N_1 il numero degli spigoli, N_2 il numero delle facce, allora vale la formula:*

$$N_0 - N_1 + N_2 = 2.$$

Dimostrazione - Supponiamo che il poliedro sia costruito poco a poco, aggiungendo una faccia ad un'altra, fino a completarlo e supponiamo sia possibile aggiungere sempre nuove facce in modo che ogni nuova faccia abbia in comune con le vecchie solo spigoli consecutivi.

Poniamo $g = F - S + V - 1$ ove F, S, V indicano il numero delle facce, degli spigoli e dei vertici nel generico passaggio.

Si procede per induzione.

Per la prima faccia supponiamo sia un n-poligono si ha: $F = 1, S = n, V = n$ ossia $g = 0$.

Aggiungendo una seconda faccia, diciamo un m-poligono, avente una spigolo comune con l'n-poligono e due vertici si ha: $F = 2, S = n + m - 1, V = n + m - 2$ ossia $g = 0$.

Per induzione proviamo che fino a quando il poliedro è incompleto si ha $g = 0$.

Supponiamo che sia $g = 0$ per un dato passaggio con valori della configurazione F, S, V ossia $F - S + V - 1 = 0$ e supponiamo di aggiungere un p-poligono con q spigoli consecutivi in comune e perciò q + 1 vertici in comune con quelli preesistenti.

Detti F', S', V' i nuovi valori di F, S, V si ha: $F' = F + 1, S' = S + (p - q), V' = V + (p - q - 1)$ ossia $F' - S' + V' - 1 = F + 1 - S - (p - q) + V + (p - q - 1) - 1 = F - S + V - 1 = 0$.

Alla fine si aggiunge solo più una faccia, non si aggiungono nè vertici, nè spigoli poiché sono tutti comuni a quelli preesistenti. Quindi $N_2 - N_1 + N_0 - 1 = F + 1 - S + V - 1$, ma per l'ipotesi induttiva $F - S + V - 1 = 0$ da cui:

$$N_0 - N_1 + N_2 = 2.$$

COROLLARIO 3.2.1 - *In un poliedro, indicando con α la somma degli angoli delle facce, vale la relazione $\alpha = 2\pi(N_0 - 2)$.*

Dimostrazione - Osserviamo anzitutto che in un qualunque poliedro il numero degli angoli

delle facce è il doppio del numero degli spigoli. Infatti, se indichiamo con n_1, n_2, \dots, n_{N_2} il numero degli angoli di ciascuna faccia (che è uguale al numero dei lati della faccia) possiamo scrivere $n_1 + n_2 + \dots + n_{N_2} = 2N_1$ in quanto ogni spigolo è comune a due facce.

La somma degli angoli di ogni faccia vale $(n_k - 2)\pi$ con $k = 1, \dots, N_2$.

Quindi $\alpha = [(n_1 - 2)\pi] + [(n_2 - 2)\pi] + \dots + [(n_{N_2} - 2)\pi] = [(n_1 + n_2 + \dots + n_{N_2}) - 2N_2]\pi = (2N_1 - 2N_2)\pi = 2\pi(N_1 - N_2) = 2\pi(N_0 - 2)$ usando la formula di Eulero.

COROLLARIO 3.2.2. - *In un poliedro, tra i numeri delle facce dei vertici e degli spigoli, sussistono le limitazioni:*

$$N_1 + 6 \leq 3N_2 \leq 2N_1 \quad N_1 + 6 \leq 3N_0 \leq 2N_1.$$

Dimostrazione - Se le facce del poliedro sono tutte triangolari si ha che $3N_2 = 2N_1$ in quanto ogni faccia ha tre lati e ogni lato è comune a due facce.

Se esistono facce che non sono triangolari si ha che $3N_2 < 2N_1$ quindi è sempre $3N_2 \leq 2N_1$.

Se gli angoloidi del poliedro sono tutti triedri si ha che $3N_0 = 2N_1$ in quanto in ogni angolode convergono tre lati e ciascun lato congiunge due vertici. Se esistono angoloidi che non sono triedri si ha che $3N_0 < 2N_1$ quindi è sempre $3N_0 \leq 2N_1$.

Ricordando la formula di Eulero si ha $3N_0 = 3(N_1 - N_2 + 2) = 3N_1 - 3N_2 + 6 \leq 2N_1$ per quanto visto sopra. Ne segue $N_1 + 6 \leq 3N_2$.

Analogamente si ha $3N_2 = 3(N_1 - N_0 + 2) = 3N_1 - 3N_0 + 6 \leq 2N_1$ per quanto visto sopra. Ne segue $N_1 + 6 \leq 3N_0$.

OSSERVAZIONE 1 - Come conseguenza del Corollario 3.2.2 si ha pure che:

In un poliedro qualsiasi almeno una faccia è un triangolo, un quadrato od un pentagono ed anche

Un poliedro qualsiasi deve contenere almeno un vertice comune a tre, quattro, oppure cinque spigoli.

Dimostrazione - Si è visto nella dimostrazione precedente che $3N_2 \geq N_1 + 6$. Tale disuguaglianza si può anche scrivere come $6N_2 - 2N_1 \geq 12$. Indicando con p_k il numero delle facce che sono k poligoni si ha $N_2 = p_3 + p_4 + p_5 + p_6 + \dots$ e $2N_1 = 3p_3 + 4p_4 + 5p_5 + 6p_6 + \dots$ (ricordando che ogni spigolo è comune a due facce) e, sostituendo nella disuguaglianza precedente, risulta:

$$6(p_3 + p_4 + p_5 + p_6 + p_7 + \dots) - 3p_3 - 4p_4 - 5p_5 - 6p_6 - 7p_7 - \dots \geq 12$$

da cui

$$3p_3 + 2p_4 + p_5 - p_7 - \dots \geq 12.$$

Affinchè tale disuguaglianza sia soddisfatta almeno uno dei primi tre addendi, cioè p_3, p_4 o p_5 deve essere non nullo.

In modo analogo partendo dalla relazione $3N_0 \geq N_1 + 6$ ed indicando con v_k il numero dei vertici da cui escono k spigoli si ottiene che almeno uno fra v_3, v_4 o v_5 deve essere non nullo.

OSSERVAZIONE 2 - Dalle relazioni $3N_2 \leq 2N_1$ e $3N_0 \leq 2N_1$ segue che *non può esistere un poliedro con 7 spigoli.*

Infatti se fosse $N_1 = 7$ dalla prima relazione risulterebbe $3N_2 \leq 14$ e poiché N_2 deve essere maggiore di 3 si otterrebbe $N_2 = 4$. In modo analogo da $3N_0 \leq 14$ seguirebbe $N_0 = 4$.

In tal caso la relazione di Eulero $N_0 - N_1 + N_2 = 4 - 7 + 4 = 2$ non varrebbe.

COROLLARIO 3.2.3 - *In un poliedro qualsiasi la somma del numero delle facce triangolari e del numero dei vertici da cui partono tre spigoli è maggiore od uguale ad 8.*

Dimostrazione - Se indichiamo con v_k il numero dei vertici da cui escono k spigoli e con p_k il numero delle facce che sono k -poligoni dobbiamo dimostrare che:

$$v_3 + p_3 \geq 8.$$

Risulta, secondo le notazioni usate, che:

$$N_0 = v_3 + v_4 + v_5 + \dots$$

$$N_2 = p_3 + p_4 + p_5 + \dots$$

Inoltre, poiché ogni spigolo è comune a due vertici ed a due facce:

$$2N_1 = 3v_3 + 4v_4 + 5v_5 + \dots$$

$$2N_1 = 3p_3 + 4p_4 + 5p_5 + \dots$$

Sommando membro a membro le due precedenti relazioni si ha:

$$4N_1 = 3(v_3 + p_3) + 4(v_4 + p_4) + 5(v_5 + p_5) + \dots$$

Ricordando la relazione di Eulero (moltiplicata per 4) risulta: $8 + 4N_1 = 4N_0 + 4N_2$ e sostituendo i valori precedentemente trovati si ottiene:

$$8 + 3(v_3 + p_3) + 4(v_4 + p_4) + 5(v_5 + p_5) + \dots = 4v_3 + 4v_4 + 4v_5 + \dots + 4p_3 + 4p_4 + 4p_5 + \dots$$

ossia $v_3 + p_3 = 8 + v_5 + p_5 + 2v_6 + 2p_6 + \dots$ dunque $v_3 + p_3 \geq 8$.

ESEMPLI.

Per un parallelepipedo risulta $v_3 = 8$ e $p_3 = 0$.

Per una piramide a base triangolare risulta $v_3 = 4$ e $p_3 = 4$.

Per una piramide a base quadrata risulta $v_3 = 4$ e $p_3 = 4$.

Per una bipyramide a base triangolare risulta $v_3 = 2$ e $p_3 = 6$.

Per una bipyramide a base quadrata risulta $v_3 = 0$ e $p_3 = 8$.

Per una bipyramide a base pentagonale risulta $v_3 = 0$ e $p_3 = 10$.

Per una prisma a base triangolare risulta $v_3 = 6$ e $p_3 = 2$.

NOTA - Nel 1906, in un suo articolo, Steinitz ricorda che accanto all'uguaglianza espressa dalla formula di Eulero

$$N_0 - N_1 + N_2 = 2$$

esistono le disuguaglianze, anch'esse scoperte da Eulero:

$$3N_2 \leq 2N_1$$

$$3N_0 \leq 2N_1$$

e valide per ogni poliedro.

Steinitz prova che se solo si aggiunge come condizione che N_0 , N_1 ed N_2 siano numeri interi, allora le tre relazioni precedenti non sono solo necessarie, ma anche sufficienti per l'esistenza di poliedri convessi con N_0 vertici, N_1 spigoli ed N_2 facce.

3.2.2 - Poliedri regolari.

La definizione di poliedro regolare può essere data in modi diversi, ovviamente fra di loro equivalenti.

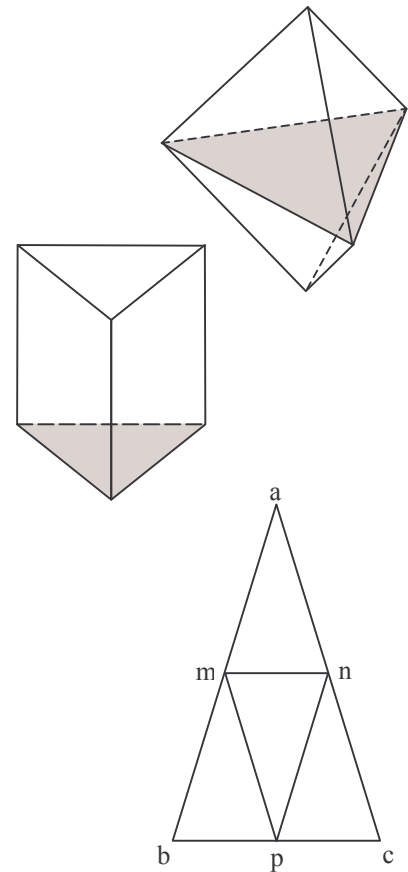
DEFINIZIONE 3.2.1 - Un **poliedro** si dice **regolare** se tutte le sue facce sono regolari ed eguali fra di loro e se tutti gli angoloidi sono eguali.

Ricordiamo che si dice angoloide la parte di spazio compresa fra le facce uscenti da un stesso vertice e che, affinché due angoloidi con egual numero di facce siano uguali, è sufficiente che abbiano ordinatamente eguali tutte le facce e tutti i diedri compresi tra due facce uguali.

Le condizioni richieste sono indipendenti e compatibili.

Un solido che soddisfa a tutte le condizioni e che quindi è un poliedro regolare è il cubo. Vediamo ora che esistono solidi che soddisfano a due delle tre condizioni e non alla terza.

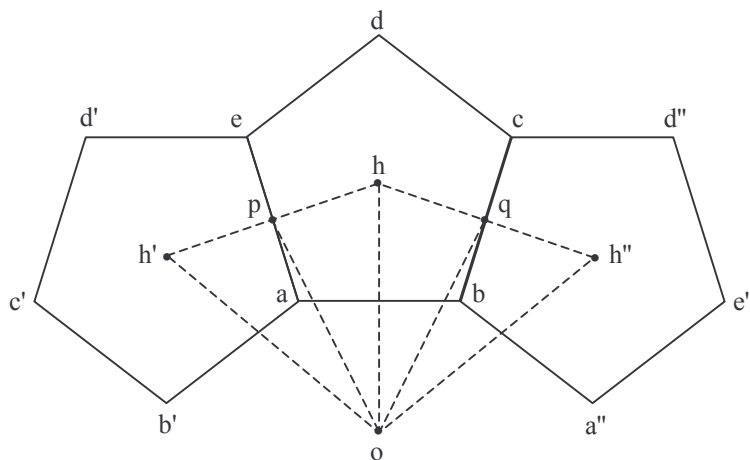
- 1) La bpiramide formata da due tetraedri regolari incollati per una faccia non è un poliedro regolare in quanto ha facce regolari ed eguali (triangoli equilateri) ma gli angoloidi diversi, infatti da due vertici escono tre lati e dagli altri tre vertici escono quattro lati.
- 2) Il prisma a basi triangolari equilatera e facce laterali quadrate non è un poliedro regolare in quanto ha facce regolari ma non tutte uguali, mentre i triedri, avendo le stesse facce, sono eguali.
- 3) Per costruire una piramide con facce uguali ed angoloidi eguali, ma facce non regolari, si considera un triangolo acutangolo non equilatero. Si costruisce all'interno un triangolo congiungendo i punti medi di ciascun lato. Piegando il triangolo lungo i tre segmenti $[m, n]$, $[n, p]$, $[p, m]$ ed unendo i vertici a, b, c si ottiene la piramide voluta. Poiché $[m, n] = [b, p] = [p, c]$, $[m, p] = [a, n] = [n, c]$ e $[n, p] = [a, m] = [m, b]$ le facce sono eguali, ma non regolari, ed anche gli angoloidi sono eguali perché basta che due triedri abbiano facce uguali per dedurre che sono eguali.



PROPRIETÀ 3.2.1 - Per ogni poliedro regolare esiste un punto, detto **centro del poliedro**, che è il centro di tre sfere: la **sfera circoscritta**, passante per i vertici, la **sfera inscritta** tangente alle facce ed una terza sfera, la **sfera media**, tangente agli spigoli nei loro punti medi.

Dimostrazione - Per dimostrare l'esistenza del centro basta provare che le perpendicolari alle facce nei rispettivi centri si incontrano in un medesimo punto.

Siano, ad esempio, $abcde, ab'c'd'e, a''bcd''e''$, tre facce contigue di un poliedro regolare, h, h', h'' i rispettivi centri, p e q i punti medi di ae e bc .



Tracciamo le perpendicolari alle prime due facce nei loro centri: esse si incontreranno in un punto o del piano hph' . Infatti per il teorema delle tre perpendicolari, ae è perpendicolare al piano determinato dalla retta ph' ed alla perpendicolare in h alla prima faccia ed al piano determinato da ph' e dall'altra perpendicolare. Ma il piano perpendicolare alla retta

ae nel suo punto medio è unico, pertanto ph , ph' e le due perpendicolari appartengono tutte allo stesso piano. Poiché inoltre le due perpendicolari non sono parallele (altrimenti le due facce starebbero sullo stesso piano), tali perpendicolari si incontrano in un punto, indichiamolo con o . Poiché o è su oh ed h è il centro della faccia, valgono le seguenti eguaglianze: $oa = ob = \dots = oe$ e, analogamente, $oa = ob' = \dots = od' = oe$. Infatti, ad esempio, i triangoli aho e bho sono uguali perché rettangoli in h , hanno ho in comune ed $ah = bh$ perché raggi della circonferenza inscritta ad un faccia del poliedro.

Osserviamo ora che i triangoli rettangoli $oh'p$ ed oph sono uguali perché hanno op in comune, gli angoli in h ed in h' eguali perché retti, $h'p = ph$, perché raggio della circonferenza inscritta nella faccia del poliedro.

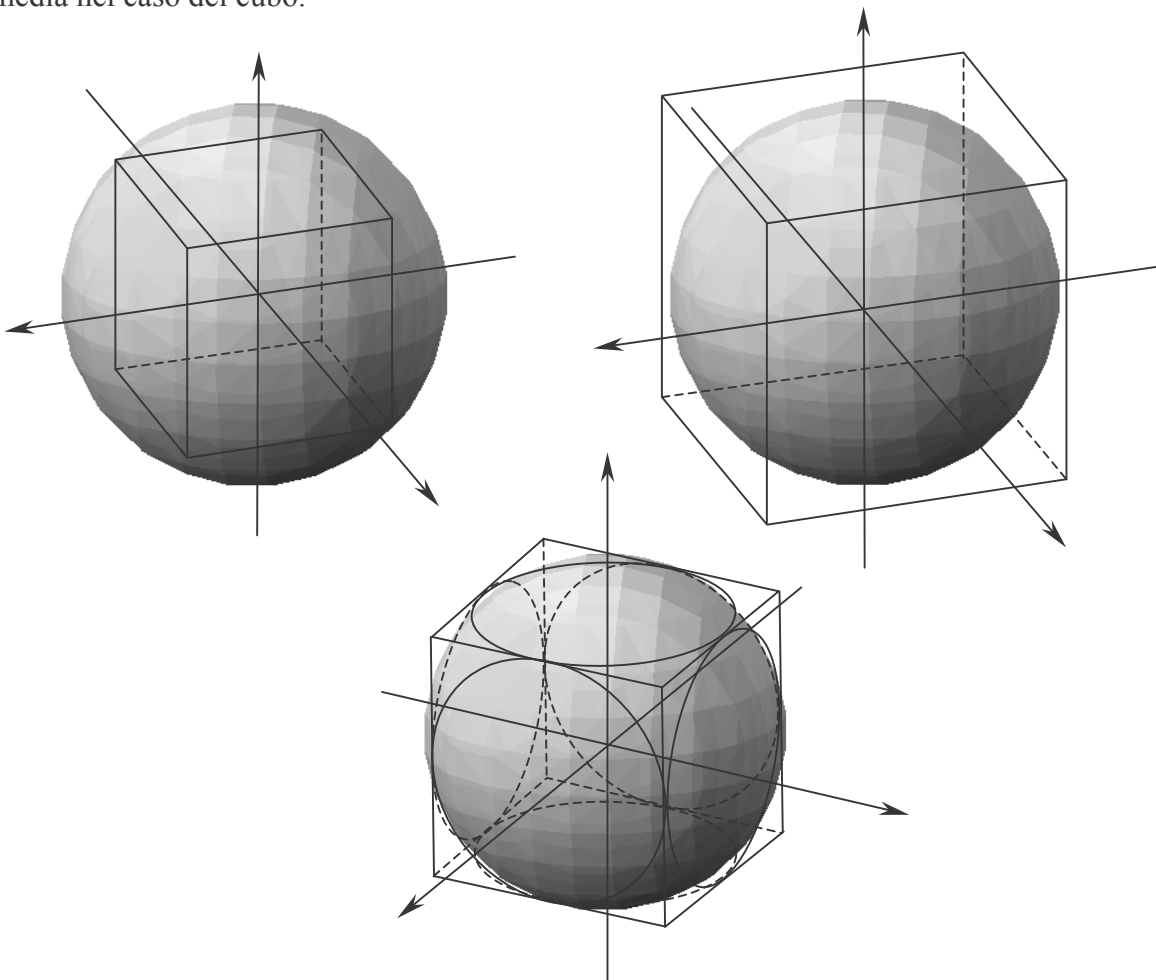
Da questo segue che $oh = oh'$ e $oph' = oph$ quindi op è la bisettrice della sezione normale del diedro di spigolo ae .

Ripetiamo lo stesso ragionamento sulla seconda e sulla terza faccia: il nuovo punto di intersezione sarà un certo v che coincide con o . Infatti i triangoli ohq e vhq sono uguali perché hanno hq in comune, l'angolo in h in comune e $oqh = vqh$ (perché sono la metà della stessa sezione normale del diedro di spigolo bc). Segue $o \equiv v$.

Confrontiamo infine i triangoli pho e ohq : risultano essere uguali perché hanno oh in comune, un angolo retto in h , $ph = qh$ perché raggio della circonferenza inscritta nella faccia del poliedro. Quindi:

$$\begin{aligned} op = oq = \dots &= R_1 \text{ (raggio della sfera media)} \\ oh = oh' = oh'' &= R_2 \text{ (raggio della sfera inscritta)} \\ oa = ob = \dots = ob' = oa'' &= R_0 \text{ (raggio della sfera circoscritta)} \end{aligned}$$

I tre disegni rappresentano rispettivamente la sfera circoscritta, la sfera inscritta e la sfera media nel caso del cubo.



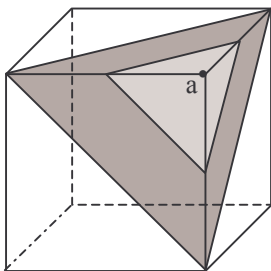
Cerchiamo ora alcune relazioni che legano i tre raggi.

Siano o il centro del poliedro, o_2 il centro di una faccia, o_1 il punto medio di un suo lato di lunghezza 2ℓ e sia o_0 un estremo di tale lato. Applicando il teorema di Pitagora ai triangoli rettangoli oo_0o_1 , oo_0o_2 , oo_1o_2 troviamo le relazioni:

$$R_0^2 = \ell^2 + R_1^2 = \left(\ell \operatorname{cosec} \frac{\pi}{p} \right)^2 + R_2^2$$

$$R_1^2 = \left(\ell \cot g \frac{\pi}{p} \right)^2 + R_2^2.$$

Per dare un'altra definizione di poliedro introduciamo due concetti, sostanzialmente analoghi, che si trovano nella letteratura: il concetto di figura al vertice per un poliedro [C] e quello di stella relativa ad un vertice [Be].



DEFINIZIONE 3.2.2 - Si dice **figura al vertice a** (v.f.), per un poliedro, la poligonale i cui lati sono i segmenti che uniscono i punti medi degli spigoli aventi a come vertice.

DEFINIZIONE 3.2.3 - Si dice **stella relativa al vertice a** la poligonale i cui lati sono i segmenti che uniscono i secondi estremi degli spigoli aventi a come vertice.

PROPRIETÀ 3.2.2 - Per un qualunque vertice di un poliedro regolare, la figura al vertice e la stella sono poligoni piani.

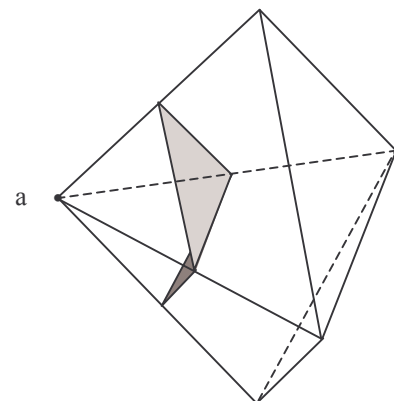
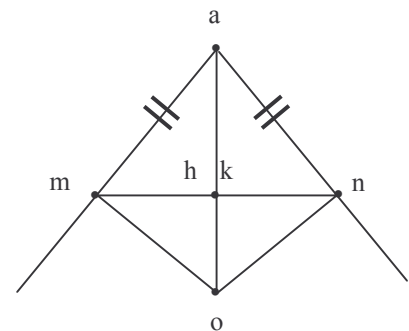
Dimostrazione - Consideriamo il caso della figura al vertice: siano a un vertice del poliedro, o il centro del solido ed m ed n i punti medi di due spigoli uscenti da a .

Dopo aver tracciato la retta ao , si considerano i triangoli $\operatorname{conv}(a,o,m)$ e $\operatorname{conv}(a,o,n)$, rettangoli ed eguali, inquanto ao è in comune ed $am = an$. Perciò risultano eguali le altezze relative all'ipotenusa ao che indichiamo con $[m,h]$ ed $[n,k]$.

I triangoli rettangoli $\operatorname{conv}(m,a,h)$ e $\operatorname{conv}(n,a,k)$ sono quindi eguali: ne segue che $h \equiv k$.

Allora i punti m ed n appartengono entrambi al piano α perpendicolare ad ao e passante per h .

Ripetendo questo procedimento per tutti i punti medi degli spigoli uscenti da a , risulta che essi appartengono tutti al piano α , quindi la figura al vertice è un poligono piano.



Osserviamo che se il poliedro non è regolare la figura al vertice può non essere piana.

Ad esempio considerata la bipiramide formata da due tetraedri regolari incollati per una faccia, detto a un vertice di tale faccia, la figura al vertice a risulta formata da due triangoli equilateri paralleli alle facce opposte al vertice e quindi non complanari.

Il caso della stella si prova in modo del tutto analogo e si può osservare che figura al vertice e stella sono poligoni simili.

DEFINIZIONE 3.2.4 - Un **poliedro** si dice **regolare** se le sue facce sono regolari e le sue figure al vertice (o le stelle relative ai vertici) sono poligoni regolari.

PROPRIETÀ 3.2.3 - Le due definizioni di poliedro regolare 3.2.1 e 3.2.4 sono equivalenti.

Dimostrazione - Vediamo che la Definizione 3.2.1 implica la Definizione 3.2.4.

Le due definizioni hanno in comune la condizione delle facce regolari quindi dobbiamo solo provare che se tutte le facce sono tra loro eguali, ad esempio poligoni $\{p\}$, e gli angoli di vertice sono tutti tra loro eguali allora le figure al vertice sono tutti poligoni regolari.

Se ℓ è il lato di una faccia i lati delle figure al vertice sono $\ell \cos \frac{\pi}{p}$ (cfr. Proprietà 3.1.1)

quindi sono tutti uguali e le figure al vertice risultano equilatera e piana per la Proprietà 3.2.2.

Riguardando la dimostrazione dell'esistenza del centro per i poliedri regolari (cfr. Proprietà 3.2.1) si ha che gli angoli $\hat{h'ph}$, $\hat{h'qh}$, ... sono uguali. Infatti dall'uguaglianza dei triangoli $\text{conv}(o,p,h)$ e $\text{conv}(o,q,h)$, provata nella Proprietà 3.2.1, segue che $\hat{o'ph} = \hat{o'qh}$.

Ma questi angoli sono uguali rispettivamente a metà delle sezioni normali dei diedri di spigoli ae e bc . Ne segue che tutti i diedri di un poliedro regolare sono uguali avendo sezioni ortogonali uguali. Consideriamo ora la piramide avente come base la figura al vertice: è

una piramide retta, le sue facce laterali sono triangoli isosceli di lato $\frac{\ell}{2}$ e base $\ell \cos \frac{\pi}{p}$; gli

angoli alla base di tali facce sono tutti uguali e quindi il piano su cui giace la figura al vertice taglia i diedri con la stessa inclinazione. Poiché sezioni egualmente inclinate di diedri uguali sono uguali, gli angoli della figura al vertice sono tutti uguali fra loro. Le figure al vertice sono quindi equiangole ed equilatera e perciò regolari.

Vediamo ora che la Definizione 3.2.4 implica la Definizione 3.2.1.

Supponiamo ora che il poliedro abbia le facce e le figure al vertice regolari e proviamo che le facce sono tutte eguali fra di loro e che gli angoli di vertice sono uguali. Poiché ogni spigolo è comune a due facce si ha che tutti gli spigoli sono uguali fra loro ed indichiamo con ℓ la loro lunghezza. Se, per assurdo, il poliedro avesse due facce con un numero diverso di lati, ad esempio p e p' ed un vertice in comune a , la figura al vertice a avrebbe almeno un lato di lunghezza $\ell \cos \frac{\pi}{p}$ ed uno di lunghezza $\ell \cos \frac{\pi}{p'}$ contro l'ipotesi di regolarità delle figure al

vertice. Quindi le facce sono eguali.

Consideriamo ora la piramide avente come base la figura al vertice, le sue facce laterali sono triangoli isosceli eguali di lato $\frac{\ell}{2}$ e base $\ell \cos \frac{\pi}{p}$, quindi il piano della base seziona i

diedri tra le facce laterali con la stessa inclinazione. Essendo la figura al vertice equiangola i diedri risultano uguali. Poiché dato un angolo di vertice ce n'è un altro con diedro comune tutti i diedri delle facce del poliedro sono uguali.

Consideriamo due angoli di vertice distinti e proviamo che sono uguali: questo è equivalente a dimostrare che tutte le figure al vertice sono eguali.

Infatti, se per assurdo avessimo due piramidi con basi due figure al vertice diverse, una di p

lati e l'altra di p' lati con angoli rispettivamente di $\left(1 - \frac{2}{p}\right)\pi$ e $\left(1 - \frac{2}{p'}\right)\pi$, le sezioni egual-

mente inclinate di diedri uguali sarebbero diverse, contro l'ipotesi che tutti i diedri siano uguali. Poiché le figure al vertice sono eguali tutti gli angoli di vertice sono uguali.

DEFINIZIONE 3.2.5 - Usando i simboli di Schläfli, un poliedro regolare si denota con $\{p, q\}$ dove p è il numero dei lati dei poligoni uguali fra loro che costituiscono le facce e q il numero di facce che concorrono ad ogni vertice.

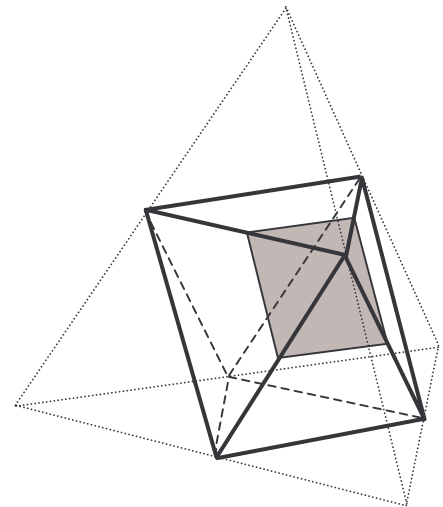
Ad esempio il cubo si denota con $\{4, 3\}$ in quanto le sue facce sono quadrati e ad ogni vertice concorrono tre facce.

DEFINIZIONE 3.2.6 - Dato un poliedro regolare $\{p, q\}$, si dice **poliedro troncato** e si indica con $\left\{ \begin{matrix} p \\ q \end{matrix} \right\}$ il poliedro avente come facce le figure al vertice di tutti i vertici di $\{p, q\}$ e le facce troncate del poliedro. I vertici di $\left\{ \begin{matrix} p \\ q \end{matrix} \right\}$ sono i punti medi degli spigoli di $\{p, q\}$ e ad ogni vertice concorrono due $\{p\}$ e due $\{q\}$.

Ad esempio troncando un tetraedro si ottiene un ottaedro che ha otto facce triangolari, di cui quattro sono le figure al vertice e quattro le facce troncate del tetraedro.

Come poliedro troncato il suo simbolo è $\left\{ \begin{matrix} 3 \\ 3 \end{matrix} \right\}$.

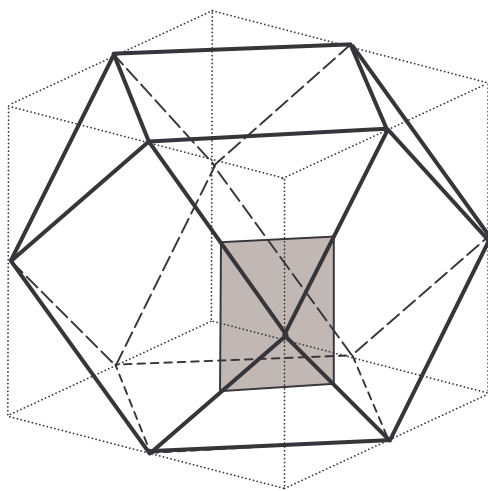
E' un poliedro regolare in quanto ha facce regolari e come figure al vertice dei quadrati, che sono poligoni regolari. In simboli $\{3, 4\} = \left\{ \begin{matrix} 3 \\ 3 \end{matrix} \right\}$.



Troncando un cubo od un ottaedro si ottiene un poliedro detto **cubottaedro**: $\left\{ \begin{matrix} 3 \\ 4 \end{matrix} \right\}$

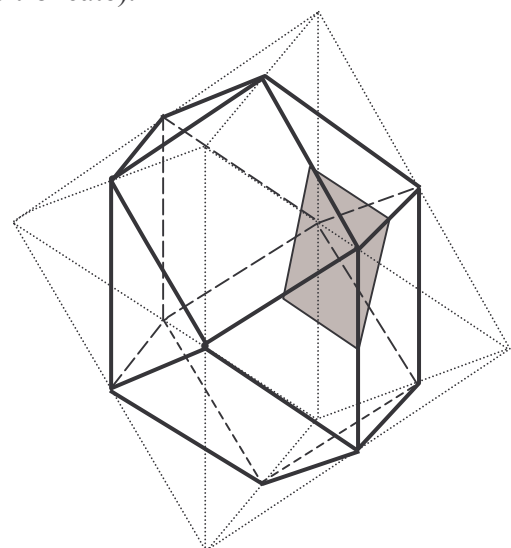
con la notazione precedente.

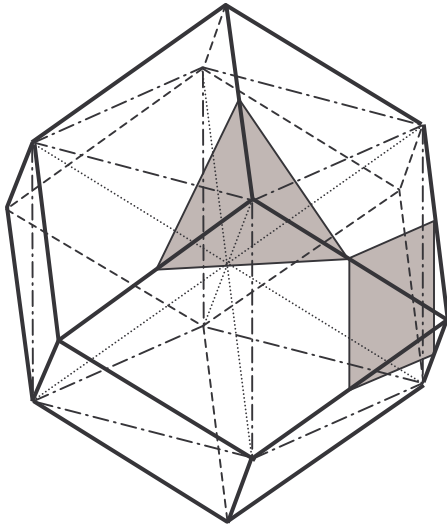
Troncando un cubo si ottiene un cubottaedro che ha come vertici i punti medi degli spigoli del cubo. Ha otto facce triangolari (le figure al vertice) e sei quadrate (le facce troncate).



Troncando un ottaedro si ottiene un cubottaedro che ha otto facce triangolari (le facce troncate) e sei quadrate (le figure al vertice).

Il cubottaedro non è però un poliedro regolare in quanto ha facce regolari ma come figure al vertice dei rettangoli, che non sono poligoni regolari.





Come ulteriore controesempio, per dimostrare l'indipendenza delle due condizioni della Definizione 3.2.4 di poliedro regolare, si consideri il dodecaedro rombico. Esso è costruito a partire da due cubi eguali: uno lo si scompone in sei piramidi rette a base quadrata, date dalle sei facce del cubo e con vertice nel centro del cubo, mentre l'altro serve da base per collocare le sei piramidi ottenute in precedenza. Le facce del dodecaedro rombico sono rombi, quindi non regolari, mentre le figure al vertice sono regolari: quadrati o triangoli equilateri. Il dodecaedro rombico non è quindi un poliedro regolare.

PROPRIETÀ 3.2.4 - *Gli unici poliedri regolari sono : tetraedro, cubo, ottaedro, icosaedro e dodecaedro.*

Dimostrazione - Diamo una prima dimostrazione utilizzando il teorema di Geometria Elementare che dice che in un angoloide la somma degli angoli sulle facce è minore di un angolo giro.

In un vertice di un poliedro regolare concorrono q facce che sono p -poligoni, per cui si ha:

$$q \left(1 - \frac{2}{p} \right) \pi < 2\pi \Rightarrow qp - 2q < 2p \Rightarrow qp - 2q - 2p < 0$$

$$qp - 2q - 2p + 4 < 4 \Rightarrow q(p - 2) - 2(p - 2) < 4 \Rightarrow (p - 2)(q - 2) < 4.$$

Allora, tenendo presente che p e q devono essere maggiori di 2, le uniche possibilità per p e q sono:

$\{3, 3\}$	tetraedro
$\{3, 4\}$	ottaedro
$\{4, 3\}$	cubo
$\{3, 5\}$	icosaedro
$\{5, 3\}$	dodecaedro.

Un'altra dimostrazione della proprietà fa uso del Teorema di Eulero.

Se contiamo tutti i lati delle N_2 facce del poliedro $\{p, q\}$ otteniamo pN_2 che è anche il doppio del numero N_1 degli spigoli (in quanto ogni spigolo viene contato due volte, una per ogni faccia): $pN_2 = 2N_1$.

Analogamente, poiché da ognuno degli N_0 vertici escono q spigoli ed ogni spigolo è contato due volte, in quanto è comune a due vertici, otteniamo: $2N_1 = qN_0$ e quindi:

$$pN_2 = 2N_1 = qN_0$$

ossia:

$$N_2 : \frac{1}{p} = N_1 : \frac{1}{2} = N_0 : \frac{1}{q}$$

Applicando le proprietà del componendo e dello scomponendo delle proporzioni possiamo scrivere:

$$N_2 : \frac{1}{p} = (N_2 - N_1 + N_0) : \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2} + \frac{1}{q} \right)$$

Per la formula di Eulero $N_2 - N_1 + N_0 = 2$; quindi i primi tre membri della proporzione so-

no positivi, deve essere positivo anche: $\frac{1}{p} - \frac{1}{2} + \frac{1}{q}$ ossia $2q - pq + 2p > 0$ che è la disuguaglianza della prima dimostrazione.

PROPRIETÀ 3.2.5 - *Noti i simboli $\{p, q\}$ dei poliedri regolari il numero di vertici, spigoli e facce risulta:*

Nome	Simbolo	N_0	N_1	N_2
tetraedro	$\{3, 3\}$	4	6	4
ottaedro	$\{3, 4\}$	6	12	8
cubo	$\{4, 3\}$	8	12	6
icosaedro	$\{3, 5\}$	12	30	20
dodecaedro	$\{5, 3\}$	20	30	12

Dimostrazione - Nella seconda dimostrazione della Proprietà 3.2.4 abbiamo visto che tra i numeri N_0, N_1, N_2, p, q valgono le relazioni: $pN_2 = 2N_1$, $qN_0 = 2N_1$ e la formula di Eulero: $N_0 - N_1 + N_2 = 2$ e che p e q possono solo assumere i valori che compaiono nei simboli di Schläfli della tabella precedente.

Per ogni coppia di valori ammissibili di p e q il sistema lineare:

$$\begin{cases} N_0 - N_1 + N_2 = 2 \\ 2N_1 - pN_2 = 0 \\ qN_0 - 2N_1 = 0 \end{cases}$$

permette di calcolare le incognite N_0, N_1, N_2 , in quanto il determinante dei coefficienti è $pq - 2q - 2p$ che è diverso da 0 perché sempre positivo come visto nella dimostrazione ricordata.

La soluzione del sistema è:

$$\begin{aligned} N_0 &= \frac{4p}{2p + 2q - pq} \\ N_1 &= \frac{2pq}{2p + 2q - pq} \\ N_2 &= \frac{4q}{2p + 2q - pq} \end{aligned}$$

Noti p e q si possono immediatamente calcolare il numero delle facce, spigoli e vertici di un poliedro regolare, che risultano quelli indicati sulla tabella.

Gli unici poliedri regolari, detti anche solidi platonici, si possono così descrivere:

Tetraedro: è una piramide a base triangolare, le cui 4 facce sono triangoli equilateri.

Ottaedro: si ottiene prendendo due piramidi a base quadrata e con facce triangoli equilateri e incollandole sulle basi.

Cubo: si ottiene regolando l'altezza di un prisma a base quadrata, in modo che ogni faccia laterale sia un quadrato e possa essere vista come base.

Icosaedro: si ottiene collegando due pentagoni uguali posti su piani paralleli uno dei quali è ruotato sul suo piano in modo da avere 10 triangoli equilateri che collegano un lato del

pentagono con il vertice corrispondente dell'altro pentagono. Poi sui pentagoni si incollano due piramidi in modo da avere in tutto 20 triangoli equilateri. In ogni vertice concorrono 5 triangoli.

Dodecaedro: per costruirlo si incastrano in modo opportuno 6 pentagoni in modo da formare una scodella. Gli spigoli liberi formano un decagono sghembo. Unendo due oggetti di questo tipo lungo gli spigoli liberi, si ottiene il dodecaedro.

NOTA STORICA - Ricordiamo che già i greci avevano studiato i poliedri regolari e ne avevano fatto dei simboli filosofici:

ottaedro = aria

cubo = terra

tetraedro = fuoco

dodecaedro = universo

icosaedro = acqua.

3.2.3 - L'icosaedro.

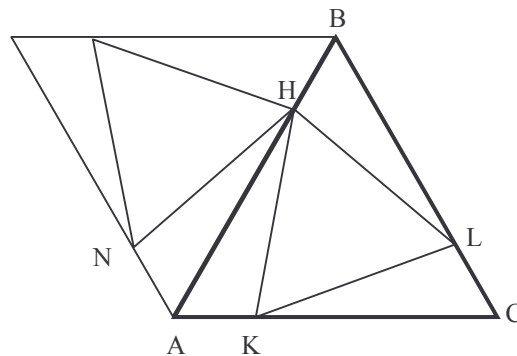
In questo paragrafo le lettere maiuscole indicano i punti e le lettere minuscole le misure dei segmenti.

Abbiamo già detto che troncando un ottaedro si ottiene un cubottaedro.

Vediamo ora un procedimento per ottenere l'icosaedro regolare a partire dall'ottaedro.

Sui dodici spigoli dell'ottaedro consideriamo dodici punti che dividano i lati in un rapporto prefissato $a:b$ in modo che i tre punti di ogni faccia determinino un triangolo equilatero.

Considerata la faccia ABC , fissati sui lati i punti H, K, L , i triangoli $\text{conv}(A,H,K)$, $\text{conv}(K,L,C)$, $\text{conv}(H,L,B)$ sono uguali per costruzione quindi: $HK = KL = LH$.



Siano $AH = ka$, $BH = kb$; risulta $AH + BH = ka + kb = \ell$ (lato dell'ottaedro) quindi:

$BH = AK = LC = kb$ e $AH = KC = BL = ka$.

Notiamo che da ogni vertice dell'ottaedro escono quattro spigoli: su due non adiacenti si prendono segmenti uguali. Se consideriamo due facce adiacenti aventi, ad esempio, lo spigolo AB in comune, ed indichiamo con K ed N i punti che dividono due spigoli uscenti da A e non appartenenti alla stessa faccia risulta $AK = AN$ per costruzione.

I triangoli $\text{conv}(A,H,K)$ e $\text{conv}(A,H,N)$ sono uguali avendo AH in comune, $AK = AN = kb$ e gli angoli in A uguali. Ne segue $HK = HN$.

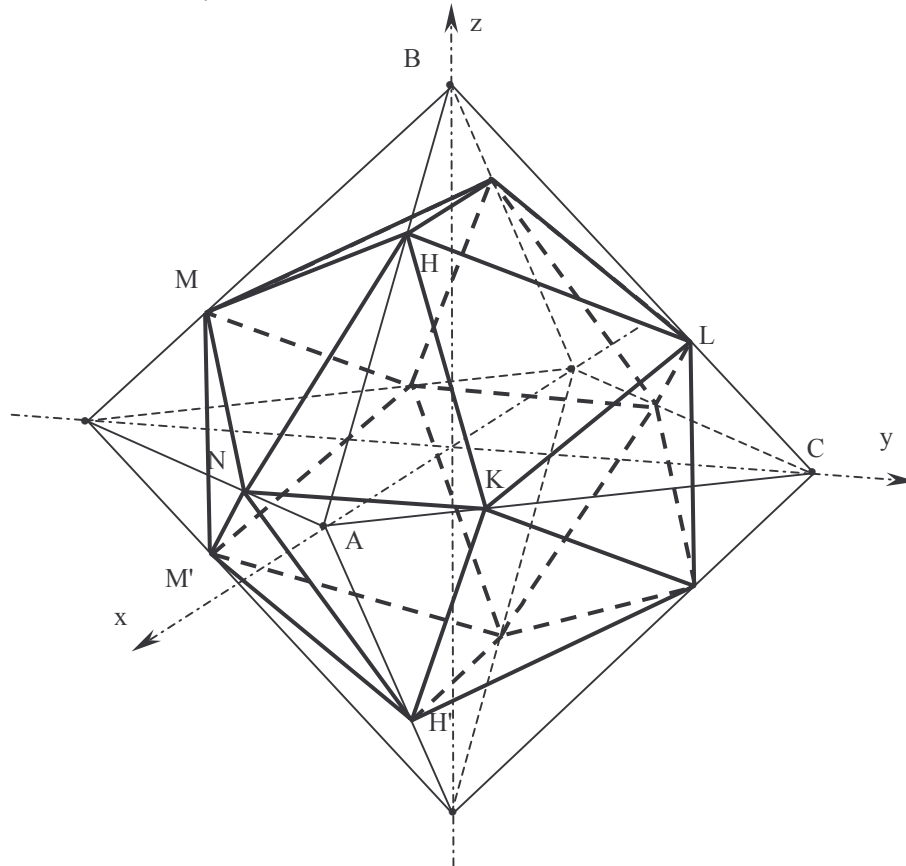
Applicando il Teorema di Carnot, la lunghezza HK del lato del triangolo equilatero $\text{conv}(H,K,L)$ è:

$$HK^2 = AH^2 + AK^2 - 2(AH)(AK)\cos\frac{\pi}{3} = (ka)^2 + (kb)^2 - 2(ka)(kb)\frac{1}{2} = k^2(a^2 + b^2 - ab).$$

Tale quantità rappresenta anche il quadrato della lunghezza del lato HN del triangolo equi-

latero della faccia adiacente.

Mediante i dodici punti si ottengono otto triangoli equilateri sulle facce dell'ottaedro e dodici triangoli isosceli (due per ogni vertice dell'ottaedro) aventi come lati eguali i lati dei triangoli equilateri e come base una congiungente di due punti su lati non adiacenti uscenti da uno stesso vertice. Si devono unire i due punti più vicini al vertice e si deve inoltre supporre il rapporto $a : b \neq 1$, cioè $a \neq b$ perché se fosse $a = b$ i triangoli isosceli risulterebbero complanari e il solido sarebbe il cubottaedro (costruito appunto congiungendo i punti medi degli spigoli dell'ottaedro).



Si ottiene in questo modo un icosaedro convesso; vediamo ora come si debba scegliere il rapporto $a : b$ affinché l'icosaedro risulti regolare.

Nel piano individuato da A, K, N il triangolo $\text{conv}(A, K, N)$ è rettangolo ed isoscele, quindi, essendo $AK = AN = kb$ risulta $NK^2 = 2(kb)^2$ per il Teorema di Pitagora.

Imponiamo ora ai dodici triangoli isosceli del tipo di $\text{conv}(H, K, N)$ di essere equilateri ed eguali agli altri otto. Deve essere: $HK^2 = KN^2$ e, sostituendo: $k^2(a^2 + b^2 - ab) = 2(kb)^2$ ossia

$$a^2 - ab - b^2 = 0 \text{ od anche: } \left(\frac{a}{b}\right)^2 - \left(\frac{a}{b}\right) - 1 = 0 \text{ da cui: } \frac{a}{b} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Dovendo essere il rapporto positivo, risulta: $\frac{a}{b} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$, che si indica con τ .

Osserviamo anche che risulta $\frac{a}{b} > 1$, cioè $a > b$ coerentemente con il fatto che si devono congiungere, per costruire i triangoli isosceli, i punti più vicini al vertice.

La radice τ trovata soddisfa all'equazione $\tau^2 = 1 + \tau$ che si può anche scrivere:

$(1 + \tau) : \tau = \tau : 1$; quindi τ è media proporzionale tra $1 + \tau$ ed 1.

Ricordando che la sezione aurea di un segmento è quella parte che risulta media proporzionale fra l'intero segmento e la parte restante per costruire un icosaedro avente come facce tutti triangoli equilateri eguali si devono dividere i dodici spigoli dell'ottaedro secondo

la sezione aurea.

Per dimostrare che l'icosaedro ottenuto è regolare si deve ancora verificare che le stelle relative ai vertici, che hanno cinque lati, sono poligoni regolari, il che verrà provato per via analitica dopo aver introdotto in modo opportuno le coordinate dei vertici dei poliedri regolari.

OSSERVAZIONE - Ricordiamo la costruzione del segmento aureo.

Il valore numerico del rapporto aureo è dato dalla radice positiva dell'equazione di secondo grado $\tau^2 - \tau - 1 = 0$ ossia $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ il cui valore approssimato con quattro cifre decimali è $\tau = 1,6180$.

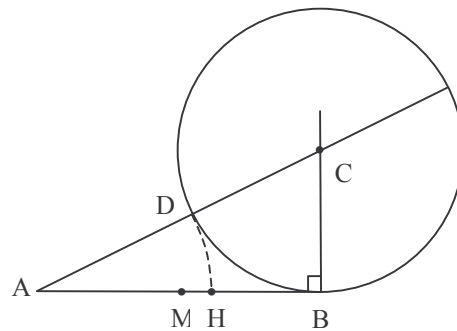
Supponiamo di avere un segmento AB e di voler determinare su di esso un punto H tale che il rapporto $\frac{AH}{BH}$ sia aureo. Si procede nel seguente modo:

i) si disegna il punto M che divide in parti uguali il segmento AB che si considera unitario;

ii) da B si traccia la perpendicolare al segmento AB fino ad ottenere $CB = MB = \frac{1}{2}$;

iii) dal punto C si traccia con il compasso un semicerchio fino ad incontrare D sul segmento AC;

iv) puntando in A il compasso con raggio AD si ottiene il punto H che divide il segmento in due parti con proporzione aurea.



Infatti $AC = \sqrt{1 + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ da cui $AH = AD = AC - CD = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2}$ ed

$$HB = AB - AH = 1 - \left(\frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2} \right) = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Facendo il rapporto risulta $\frac{AH}{HB} = \frac{\sqrt{5}-1}{3-\sqrt{5}} = \frac{(\sqrt{5}-1)(3+\sqrt{5})}{4} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$

3.2.4 - Dualità.

Euclide (300 a.C. circa) inscrive un'ottaedro in un cubo, un cubo in un ottaedro ed un dodecaedro in un icosaedro intuendo così la dualità rispetto alla sfera inscritta. Maurolycus (1494-1575) fu probabilmente il primo ad aver studiato in modo preciso le relazioni fra i poliedri duali.

Il poliedro duale di un poliedro regolare $\{p, q\}$ è il poliedro regolare $\{q, p\}$. I vertici, le facce e gli spigoli del poliedro duale sono i poli, i piani polari ed i duali rispettivamente delle facce, dei vertici, e degli spigoli del solido di partenza rispetto alla sfera media. Si può fare il duale del poliedro $\{p, q\}$ anche rispetto ad un'altra sfera, concentrica alla sfera media, e si ottiene un poliedro $\{q, p\}$ più grande o più piccolo.

Riprendiamo alcune nozioni relative alla polarità o dualità rispetto ad una quadrica non degenera, limitandoci al caso particolare in cui la quadrica è una sfera.

La polarità rispetto ad una sfera è una corrispondenza che associa a punti piani ed a piani punti, nel caso affine presenta delle eccezioni a causa dei punti all'infinito.

Se consideriamo la sfera 3-dimensionale:

$$\Sigma : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = r^2$$

ogni punto (y_1, y_2, y_3) diverso dal centro di Σ , che è l'origine del riferimento, ha come piano polare rispetto a Σ :

$$y_1x_1 + y_2x_2 + y_3x_3 = r^2 \quad (1)$$

che è un piano tangente se il punto (detto polo) giace sulla sfera.

L'iperpiano polare H del punto x rispetto alla sfera di centro a e raggio r gode della seguente proprietà: è sempre ortogonale al vettore ax ed è determinato dalla distanza $d(a, H) = \frac{r^2}{\text{dist}(a, x)}$. Nel caso in cui a coincida con l'origine si ha $d(o, H) = \frac{r^2}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}}$.

ESEMPIO - La sfera $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 3$ nel punto $x(1, 1, 1)$ ha come iperpiano tangente H:

$$x_1 + x_2 + x_3 - 3 = 0 \text{ e } \text{dist}(o, H) = \frac{|-3|}{\sqrt{3}} = \frac{r^2}{\text{dist}(o, x)}.$$

La (1) esprime anche la condizione affinché i punti (x_1, x_2, x_3) e (y_1, y_2, y_3) siano coniugati rispetto a Σ , per cui vale il **teorema di reciprocità**:

se un punto sta sul piano polare di un altro punto, questo, a sua volta, sta sul piano polare del primo.

Quindi se tre (o più) punti stanno su un piano, i tre (o più) piani polari si intersecano in un punto.

Vediamo ora, per via analitica, che il duale del cubo è l'ottaedro, il duale del tetraedro è ancora un tetraedro, il duale dell'icosaedro è il dodecaedro.

3.2.5 - Coordinate dei vertici dei poliedri regolari.

Dando le coordinate dei vertici risolviamo il problema dell'esistenza dei solidi platonici per via algebrica. Hess, nel 1876, fu il primo ad assegnare le coordinate dei vertici dei poliedri regolari e quasi regolari.

Ci poniamo in un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $R(o, x_1, x_2, x_3)$.

I vertici di un **cubo** avente centro nell'origine e spigolo lungo 2 hanno coordinate:

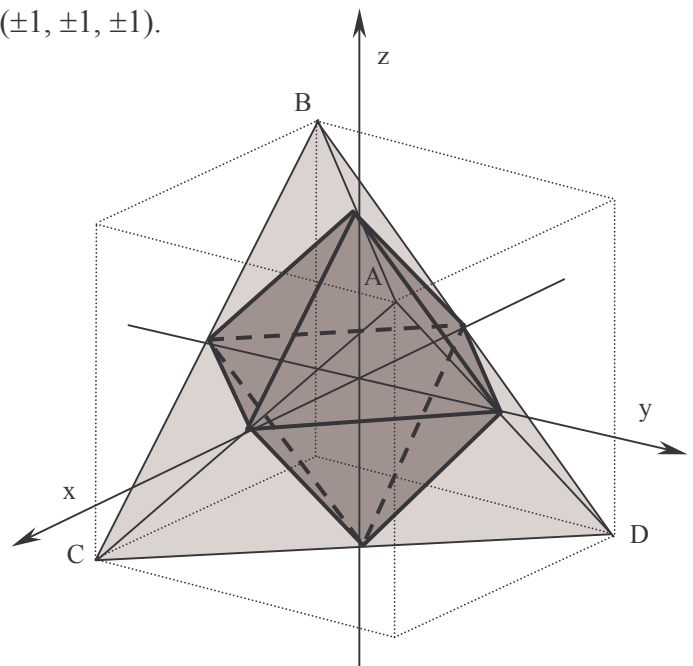
$$(\pm 1, \pm 1, \pm 1).$$

L'**ottaedro** è il duale del cubo rispetto, ad esempio, alla sfera inscritta nel cubo, di equazione $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$.

I piani $x_1 = \pm 1, x_2 = \pm 1, x_3 = \pm 1$, su cui giacciono le facce del cubo, sono i piani tangenti alla sfera inscritta.

Dalla (1) del § 3.2.4 in cui $r = 1$ segue che i poli di tali piani (nella polarità rispetto alla sfera unitaria) sono rispettivamente:

$(\pm 1, 0, 0), (0, \pm 1, 0), (0, 0, \pm 1)$ che determinano i vertici di un ottaedro regolare di spigolo $\sqrt{2}$.



Partendo dal cubo considerato prima costruiamo un **tetraedro** di spigolo $2\sqrt{2}$.

Fissiamo un vertice del cubo e consideriamo i vertici che hanno da esso distanza pari alla lunghezza della diagonale di una faccia:

$$A(1, 1, 1), B(-1, -1, 1), C(1, -1, -1), D(-1, 1, -1),$$

tali vertici hanno come piani polari, rispetto alla sfera unitaria:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

$$x_1 - x_2 - x_3 = 1$$

$$-x_1 + x_2 - x_3 = 1$$

$$-x_1 - x_2 + x_3 = 1$$

I quattro piani trovati si intersecano a tre a tre e sono le facce del tetraedro di vertici:

$$(-1, -1, -1), (-1, 1, 1), (1, -1, 1), (1, 1, -1).$$

Per ottenere un **icosaedro** consideriamo l'ottaedro di coordinate:

$$(\pm(1 + \tau), 0, 0), (0, \pm(1 + \tau), 0), (0, 0, \pm(1 + \tau))$$

ove $\tau > 0$ e soddisfa la condizione $1 + \tau = \tau^2$. Sui lati prendiamo i punti del tipo:

$$(\pm\tau, \pm 1, 0), (0, \pm\tau, \pm 1), (\pm 1, 0, \pm\tau)$$

che sono rispettivamente le sezioni auree degli spigoli.

Infatti, considerati ad esempio i punti: $A(1 + \tau, 0, 0)$, $B(0, 0, 1 + \tau)$, $H(1, 0, \tau)$, si ha che $AB : AH = AH : BH$ in quanto calcolando le lunghezze dei segmenti risulta:

$$\sqrt{2(1 + \tau)^2} : \sqrt{\tau^2 + \tau^2} = \sqrt{\tau^2 + \tau^2} : \sqrt{1 + 1} \text{ cioè } 2(1 + \tau) = 2\tau^2, \text{ che è l'equazione che definisce } \tau.$$

I punti come H, dividendo i lati dell'ottaedro secondo la sezione aurea, sono i vertici dell'icosaedro costruito nel § 3.2.3. Tale icosaedro ha, per costruzione, tutte le facce che sono triangoli equilateri eguali, nel nostro caso di spigolo 2.

Per poter affermare che l'icosaedro costruito è regolare, secondo la Definizione 3.2.4, rimane da provare che le stelle relative ai vertici sono poligoni regolari, in questo caso pentagoni.

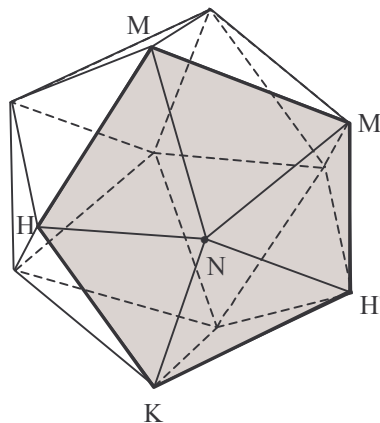
I punti $M(0, -\tau, 1)$, $M'(0, -\tau, -1)$, $H'(1, 0, -\tau)$, $K(\tau, 1, 0)$, $H(1, 0, \tau)$ formano la stella relativa al vertice $N(\tau, -1, 0)$. I lati della poligonale sono tutti eguali essendo spigoli dell'icosaedro. Effettuando direttamente il calcolo si ha:

$MM'^2 = 4$, $(M'H)^2 = 1 + \tau^2 + (-1 + \tau)^2 = 1 + \tau^2 + 1 + \tau^2 - 2\tau = 2(\tau^2 - \tau) + 2 = 4$, ricordando l'equazione che definisce τ , e così si ha: $MM' = M'H' = H'K = KH = HM = 2$.

Inoltre tali punti stanno tutti sul piano $-x_1 + \frac{x_2}{\tau} + 1 = 0$ per cui è verificato che la stella è un poligono piano.

Il pentagono $MM'H'KH$ è regolare perché è inscritto nella circonferenza intersezione della sfera $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \tau^2 + 1$, (che è circoscritta all'icosaedro perché su di essa stanno tutti i

vertici) con il piano $-x_1 + \frac{x_2}{\tau} + 1 = 0$.

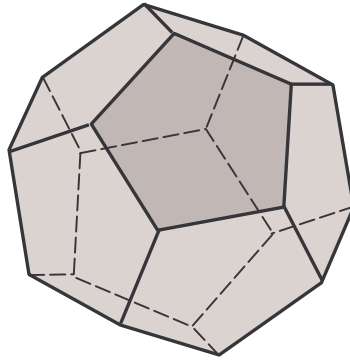


Il **dodecaedro** è il duale dell'icosaedro rispetto, ad esempio, alla sfera $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \tau^2$.

Consideriamo il piano per i punti $(0, \tau, 1)$, $(\pm 1, 0, \tau)$ che ha equazione $\tau^{-1}x_2 + \tau x_3 = \tau^2$ e come polo $(0, \tau^{-1}, \tau)$; il piano per i punti $(0, \tau, 1)$, $(1, 0, \tau)$, $(\tau, 1, 0)$ che ha equazione $x_1 + x_2 + x_3 = \tau^2$ il cui polo è $(1, 1, 1)$ e così via. I venti vertici sono quindi:

$$(0, \pm \tau^{-1}, \pm \tau), (\pm \tau, 0, \pm \tau^{-1}), (\pm \tau^{-1}, \pm \tau, 0), (\pm 1, \pm 1, \pm 1).$$

Abbiamo così provato l'esistenza dei solidi platonici.



Osserviamo infine che a partire dalle coordinate dei vertici del cubo, trovate sopra, è immediato determinare i vertici del cubottaedro, che sono i punti medi dei dodici spigoli del cubo quindi:

$$(0, \pm 1, \pm 1), (\pm 1, 0, \pm 1), (\pm 1, \pm 1, 0).$$

3.2.6 - La formula di Cartesio.

Abbiamo già richiamato nella dimostrazione della Proprietà 3.2.4 il teorema di Geometria Elementare che dice che in un angoloide la somma degli angoli sulle facce è minore di un angolo giro.

Costruendo modelli di poliedri convessi si osserva che più il solido è complicato, cioè al crescere del numero di facce e di spigoli che convergono in un vertice, la somma degli angoli detta sopra si avvicina a 2π .

DEFINIZIONE 3.2.7 - Diciamo *scarto in un vertice* V_j la differenza δ_j tra 2π e la somma degli angoli sulle facce che convergono a V_j .

PROPRIETÀ 3.2.6 - In un poliedro convesso la somma degli scarti in tutti i vertici vale 4π .

In formula:

$$\Delta = \sum_V \delta_j = 4\pi$$

detta **formula di Cartesio**.

Storicamente la formula di Cartesio, vissuto tra il 1596 ed il 1650, è un'anticipazione della formula di Eulero, vissuto tra il 1707 ed il 1783.

Nel caso che il poliedro sia regolare, indichiamolo con $\{p, q\}$, tutti i vertici sono circondati allo stesso modo, cioè $\delta_j = \delta$ per ogni j , quindi $\sum_V \delta_j = N_0 \delta$ e usando la formula di Cartesio

si ottiene:

$$N_0 = \frac{4\pi}{\delta}$$

cioè: *per i poliedri regolari, lo scarto è inversamente proporzionale al numero dei vertici.*

Vediamo dapprima una dimostrazione della formula di Cartesio, che utilizza la formula di Eulero, nel caso del poliedro regolare $\{p, q\}$.

Nella Proprietà 3.2.5 abbiamo visto, risolvendo un opportuno sistema lineare, (un'equazione è la formula di Eulero), che il numero dei vertici è $N_0 = \frac{4p}{2p + 2q - pq}$ da cui possiamo ricavare:

$$\frac{4\pi}{N_0} = (2p + 2q - pq) \frac{\pi}{p} = 2\pi - q \left(1 - \frac{2}{p}\right) \pi.$$

In ogni vertice ci sono q angoli e ciascuno misura $\left(1 - \frac{2}{p}\right) \pi$, dato che sono angoli di un poligono regolare $\{p\}$.

Lo scarto in ogni vertice risulta quindi: $2\pi - q \left(1 - \frac{2}{p}\right) \pi = \delta$ e sostituendo nell'espressione precedente si ottiene $\delta = \frac{4\pi}{N_0}$ da cui segue:

$$\sum_V \delta = N_0 \left(\frac{4\pi}{N_0} \right) = 4\pi.$$

OSSERVAZIONE - Dall'espressione $N_0 = \frac{4\pi}{\delta}$ possiamo ricavare il numero dei vertici conoscendo il valore dello scarto.

In un vertice del *tetraedro* concorrono tre facce con angoli di 60° , quindi l'angolo al vertice vale in tutto 180° , lo scarto è di 180° ed $N_0 = \frac{720}{180} = 4$.

In un vertice del *cubo* concorrono tre facce con angoli di 90° , quindi l'angolo al vertice vale in tutto 270° , lo scarto è di 90° ed $N_0 = \frac{720}{90} = 8$.

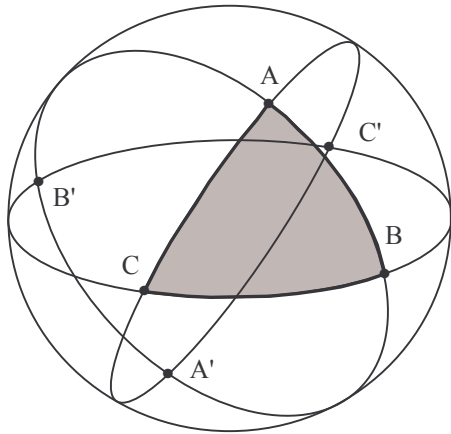
In un vertice dell'*ottaedro* concorrono quattro facce con angoli di 60° , quindi l'angolo al vertice vale in tutto 240° , lo scarto è di 120° ed $N_0 = \frac{720}{120} = 6$.

In un vertice del *dodecaedro* concorrono tre facce con angoli di 108° , quindi l'angolo al vertice vale in tutto 324° , lo scarto è di 36° ed $N_0 = \frac{720}{36} = 20$.

In un vertice dell'*icosaedro* concorrono cinque facce con angoli di 60° , quindi l'angolo al vertice vale in tutto 300° , lo scarto è di 60° ed $N_0 = \frac{720}{60} = 12$.

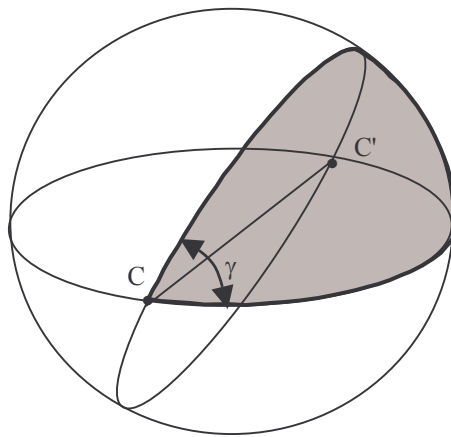
La formula di Cartesio si può dimostrare senza usare la formula di Eulero, che è successiva, utilizzando la *trigonometria sferica*.

Su una superficie sferica di raggio unitario consideriamo tre punti A, B, C non appartenenti ad una stessa circonferenza massima e tali che due qualsiasi di essi non siano estremi di un diametro: due di questi punti ed il centro della sfera individuano un piano che sega la superficie secondo una circonferenza massima. Si ottengono così tre circonferenze massime e la parte di superficie sferica da esse limitata si chiama *triangolo sferico*.



Nel disegno ci sono 8 triangoli sferici:
 ABC + 3 triangoli adiacenti (colunari):
 A'BC, B'CA, C'AB;
 A'B'C' opposto ad ABC + 3 triangoli ad es-
 so adiacenti (colunari):
 AB'C', BC'A', CA'B';
 Ogni triangolo è uguale al suo opposto, per-
 ciò indicando con S, S_1, S_2, S_3 rispettiva-
 mente le aree di ABC, A'BC, B'CA, C'AB
 si ha $S + S_1 + S_2 + S_3 = 2\pi$ (metà della su-
 perficie sferica).
 Se invece si somma ABC con solo uno dei
 suoi colunari, ad esempio con ABC', si ot-
 tiene il fuso di vertici C, C' ossia di diame-

tro CC' la cui ampiezza γ è l'ampiezza del diedro che si può visualizzare come l'angolo formato dalle due tangenti in C agli archi considerati.



Quindi: $\frac{S+S_3}{\gamma} = \frac{4\pi R^2}{2\pi} = \frac{4\pi}{2\pi} = 2$ essendo $R = 1$ ed, in modo analogo, $\frac{S+S_1}{\alpha} = 2$ e

$$\frac{S+S_2}{\beta} = 2.$$

Riducendo a forma intera e sommando si ottiene: $3S + S_1 + S_2 + S_3 = 2(\alpha + \beta + \gamma)$.

Ricordando che $S + S_1 + S_2 + S_3 = 2\pi$ si ottiene: $2S + 2\pi = 2(\alpha + \beta + \gamma)$, da cui:

$$S = \alpha + \beta + \gamma - \pi.$$

Vale la proprietà che *in un triangolo sferico la somma dei tre angoli è maggiore di un angolo piatto*. La differenza tra la somma di tali angoli e l'angolo piatto si dice *eccesso sferico*.

Abbiamo provato che, considerando la sfera di raggio unitario, l'area del triangolo sferico è uguale al suo eccesso:

$$\varepsilon = \alpha + \beta + \gamma - \pi.$$

Poiché ogni poligono si può suddividere in triangoli, si ha che l'area di un poligono sferico (sulla superficie sferica unitaria) è data dalla somma dei suoi angoli meno la somma degli angoli interni di un poligono piano avente lo stesso numero di lati:

$$\varepsilon = \alpha_1 + \dots + \alpha_n - (n - 2)\pi.$$

Considerato ora il poliedro convesso, è possibile proiettare i suoi vertici sulla superficie sferica unitaria a partire da un suo qualunque punto interno.

Si ottiene una partizione della superficie sferica in N_2 poligoni sferici, uno per ogni faccia del poliedro.

La somma degli angoli di tutti questi poligoni sferici è $2\pi N_0$ cioè 2π per ogni vertice.

D'altra parte la somma totale degli angoli dei poligoni piani corrispondenti è

$$\sum_{i=1}^{N_0} (2\pi - \delta_i) = 2\pi N_0 - \sum_{i=1}^{N_0} \delta_i.$$

L'eccesso di tutti i poligoni sferici è quindi la differenza tra la somma $2\pi N_0$ di tutti i loro angoli e la somma degli angoli dei poligoni piani corrispondenti:

$$2\pi N_0 - \left(2\pi N_0 - \sum_{i=1}^{N_0} \delta_i \right) = \sum_{i=1}^{N_0} \delta_i = \Delta.$$

Tale eccesso rappresenta l'area di tutti i poligoni sferici che danno una partizione della superficie sferica di area 4π .

Si ottiene quindi la formula di Cartesio: $\Delta = 4\pi$.

E' possibile anche dimostrare che:

PROPRIETA' 3.2.7 - Per un poliedro convesso qualsiasi P avente F facce, S spigoli e V vertici vale la relazione: $\Delta = 2\pi(V - S + F)$.

Dimostrazione - Indicando con L il numero totale dei lati delle facce del poliedro P risulta $L = 2S$ in quanto ogni spigolo è lato di due facce. Indicata con σ_n la somma degli angoli sulle facce che convergono all' n -esimo vertice con $1 \leq n \leq V$ lo scarto angolare al vertice

V_n è $\delta_n = 2\pi - \sigma_n$ e lo scarto totale è $\Delta = \sum_{n=1}^V \delta_n$.

Detta A la somma di tutti gli angoli delle facce di P risulta:

$$A = \sum_{n=1}^V \sigma_n = \sum_{n=1}^V (2\pi - \delta_n) = 2\pi V - \Delta \text{ da cui } \Delta = 2\pi V - A. (*)$$

D'altra parte se una faccia possiede m lati, allora la somma degli angoli interni è $(m - 2)\pi$.

Se P possiede F_m m -poligoni, questi m -poligoni contribuiscono alla somma degli angoli delle facce con $(m - 2)\pi + \dots + (m - 2)\pi$ in tutto F_m volte, ossia $(m - 2)\pi F_m$ quindi:

$$A = \sum_m (m - 2) F_m \pi = \left(\sum_m m F_m - 2 \sum_m F_m \right) \pi (**).$$

La somma del numero degli m -poligoni è il numero delle facce: $F = \sum_m F_m$.

Poiché ogni m -poligono possiede m lati, il contributo al numero dei lati dato dalle facce m -poligonali è $m F_m$; sommando tali contributi risulta $\sum_m m F_m = L$ (numero totale dei lati delle facce).

La relazione (**) precedente si può quindi scrivere $A = (L - 2F)\pi$.

Sostituendo tale espressione di A nella (*) risulta:

$$\Delta = 2\pi V - A = \pi(2V - L + 2F) = \pi(2V - 2S + 2F) \text{ ossia } \Delta = 2\pi(V - S + F).$$

OSSERVAZIONE - Dalla proprietà 3.2.7 e dalla formula di Cartesio segue la formula di Eulero. Infatti da $\Delta = 2\pi(V - S + F)$ e $\Delta = 4\pi$ segue $V - S + F = 2$.

3.2.7 - Poliedri quasi regolari.

DEFINIZIONE 3.2.8 - Un poligono si dice **ciclico** se è inscrittibile in una circonferenza e se ha i lati alternativamente uguali.

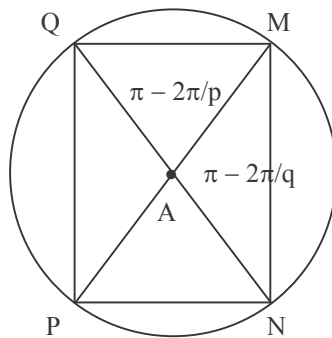
Un rettangolo è un esempio di poligono ciclico.

DEFINIZIONE 3.2.9 - Un poliedro è detto **quasi regolare** se tutte le sue facce sono regolari e se le figure al vertice sono cicliche ed equiangole.

Dalla definizione segue che tutti gli spigoli hanno la stessa lunghezza che indichiamo con $2L$. Tutti i diedri sono uguali essendo le v.f. equiangole.

Risulta poi che le facce sono solo di due tipi ed ogni faccia è circondata completamente da facce del secondo tipo. Questo succede perchè ci fossero più di due tipi di facce le v.f. non potrebbero avere lati alternativamente uguali contro l'ipotesi di ciclicità.

Se ad ogni vertice convergono r facce di p lati ed r facce di q lati, la figura al vertice sarà un $2r$ -poligono equiangolo di lati uguali a $2L\cos\frac{\pi}{p}$ e $2L\cos\frac{\pi}{q}$ alternativamente.



In figura A rappresenta un vertice del poliedro e $MNPQ$ la v.f. del vertice A.

$$AM = AN = AP = AQ = L$$

PROPRIETÀ 3.2.8 - *Troncando i poliedri regolari $\{p, q\}$ secondo la Definizione 3.2.5 è possibile ottenere solo tre poliedri di cui uno è regolare, l'ottaedro, e due semiregolari il cubottaedro e l'icosidodecaedro.*

Dimostrazione - Dalla geometria solida elementare è noto che la somma degli angoli delle facce che concorrono in uno stesso vertice di un poliedro convesso è minore di 2π .

Indicato con $2r$ il numero delle facce che concorrono in un vertice di un poliedro semiregolare risulta:

$$r\left(1 - \frac{2}{p}\right)\pi + r\left(1 - \frac{2}{q}\right)\pi < 2\pi \text{ da cui } 1 - \frac{2}{p} + 1 - \frac{2}{q} < \frac{2}{r} \text{ ossia } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} > 1.$$

Non può essere $r = 1$ altrimenti in un vertice ci sarebbero solo due facce una con p lati e l'altra con q lati, poichè $p \geq 3$ e $q \geq 3$ la relazione precedente implica $r < 3$ ossia necessariamente $r = 2$.

Se $r = 2$ la diseuguaglianza precedente diventa $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > \frac{1}{2}$ ossia $2q + 2p > pq$.

Esaminiamo ora quali possono assumere p e q .

Se si pone $p = 3$ si ottiene $q < 6$, quindi i casi possibili sono:

$$p = 3 \text{ e } q = 3 \quad p = 3 \text{ e } q = 4 \quad p = 3 \text{ e } q = 5.$$

Se si pone $p = 4$ si ottiene $q < 4$, quindi il solo caso possibile è $p = 4$ e $q = 3$.

Se si pone $p = 5$ si ottiene $3q < 10$, quindi il solo caso possibile è $p = 5$ e $q = 3$.

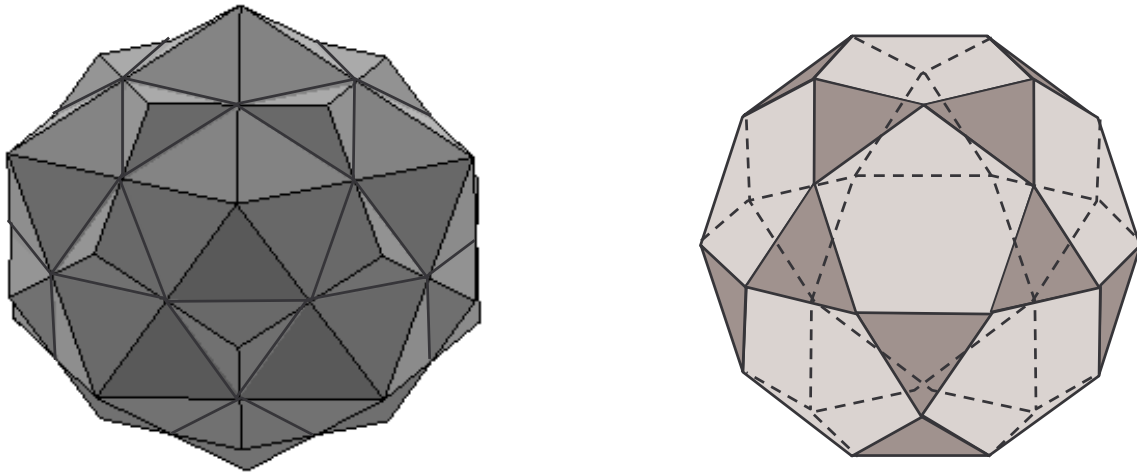
Se si pone $p \geq 6$ si ottiene $q < 3$ che è assurdo.

I tre solidi quasi regolari ottenuti sono quindi:

$$\left\{ \begin{matrix} 3 \\ 3 \end{matrix} \right\} = \{3, 4\} \text{ l'ottaedro che è un poliedro regolare.}$$

$$\left\{ \begin{matrix} 3 \\ 4 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 4 \\ 3 \end{matrix} \right\} \text{ il cubottaedro che è già stato descritto dopo la definizione 3.2.6.}$$

$$\left\{ \begin{matrix} 3 \\ 5 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 5 \\ 3 \end{matrix} \right\} \text{ l'icosidodecaedro dato dall'intersezione dell'icosaedro con il dodecaedro.}$$



Il solido così ottenuto possiede 30 vertici, 60 spigoli e 32 facce, di cui 20 triangolari e 12 pentagonali.

- I vertici sono 30 perché sono i punti medi degli spigoli del dodecaedro e dell'icosaedro
- Gli spigoli sono 60 in quanto l'icosaedro ha 12 vertici e v.f. pentagonali quindi gli spigoli dell'icosidodecaedro sono $12 \times 5 = 60$ o in modo analogo il dodecaedro ha 20 vertici e v.f. triangolari e quindi l'icosidodecaedro ha $20 \times 3 = 60$ spigoli.
- Le facce sono 32 in quanto l'icosaedro ha 20 facce triangolari e dodici v.f. pentagonali mentre il dodecaedro ha 12 facce pentagonali e 20 v.f. triangolari.

CAPITOLO IV

POLITOPPI

Generalizzando la nozione di poliedro data in \mathbf{R}^3 si ottiene in \mathbf{R}^n il politopo (cfr. Definizione 3.1.1).

Un politopo P_n è l'intersezione limitata di un numero finito di semispazi chiusi. Sia H^+ uno di tali semispazi, H l'iperpiano che lo limita, $P_n \cap H$ è una cella del poliedro di dimensione $n - 1$, ed è un politopo $(n - 1)$ -dimensionale P_{n-1} . Le celle di P_{n-1} sono politopi di dimensione $n - 2$ e così via. Diciamo vertici di P_n i suoi punti estremi.

Essendo H iperpiano di supporto:

$$(\text{Extr } P) \cap H = \text{Extr } (P \cap H)$$

quindi i punti estremi della cella $P \cap H$ sono vertici di P .

In particolare un politopo 4-dimensionale ha celle 3-dimensionali che sono poliedri, celle piane, dette facce, celle 1-dimensionali, dette spigoli, e vertici che sono i punti estremi.

Si deve tener presente che, in dimensione superiore a 3, la rappresentazione grafica di un politopo non è possibile se non ricorrendo a considerazioni particolari.

4.1 - Generalizzazione della formula di Eulero.

Per i politopi convessi di qualunque dimensione vale una formula, analoga alla formula di Eulero (cfr. § 3.2.1), che mette in relazione il numero dei vertici, degli spigoli, delle facce e delle celle detta formula di Eulero-Poincarè.

Un segmento P_1 ha due estremi: $N_0 = 2$.

Un poligono P_2 ha tanti vertici quanti sono i lati: $N_0 - N_1 = 0$.

Un poliedro P_3 ha un numero di vertici, spigoli e facce soddisfacenti la formula:

$$N_0 - N_1 + N_2 = 2.$$

Un politopo P_4 di dimensione 4 ha un numero di vertici, spigoli, facce e celle 3-dimensionali soddisfacenti la formula: $N_0 - N_1 + N_2 - N_3 = 0$.

In generale per un politopo P_n di dimensione n vale la **formula di Eulero-Poincarè**:

$$N_0 - N_1 + N_2 - \dots + (-1)^{n-1} N_{n-1} = 1 - (-1)^n$$

dove N_i ($i = 0, \dots, n - 1$) è il numero delle celle i -dimensionali della sua frontiera.

NOTA - Esistono condizioni necessarie e sufficienti affinché una data n -pla di interi $(N_0, N_1, \dots, N_{n-1})$ sia relativa ad un politopo di \mathbf{R}^n , con $n \geq 4$? Il problema resta aperto, sono stati pubblicati finora risultati parziali che riguardano una particolare famiglia di politopi detti *simpliciali*.

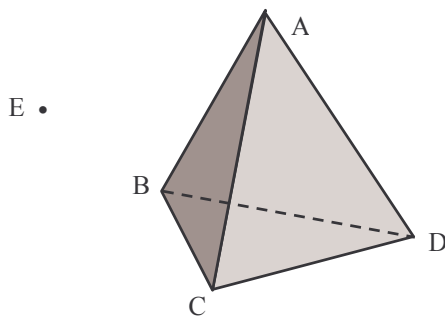
4.2 - Esempi di politopi.

Cominciamo a considerare il caso $n = 4$ e vediamo la costruzione di alcuni politopi di \mathbf{R}^4 .

Un triangolo si ottiene unendo i vertici di un segmento con un punto esterno alla retta del segmento; e se si uniscono i vertici del triangolo con un punto esterno al piano su cui giace si ottiene un tetraedro, in generale non regolare.

Nel paragrafo 1.7 abbiamo visto che il segmento coincide con l'1-simplesso, il triangolo con il 2-simplesso, il tetraedro con il 3-simplesso.

In dimensione 4, unendo i vertici A, B, C, D del tetraedro con un punto E nella quarta dimensione, esterno al poliedro, otteniamo la generalizzazione del tetraedro.

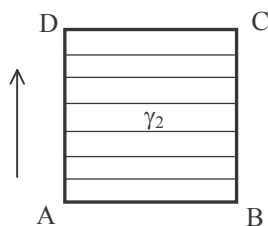


Diciamo α_4 o **5-celle** il *simplesso in dimensione 4* avente tutti gli spigoli eguali.

- $N_0 = 5$ {A, B, C, D, E}
 - $N_1 = 10$ {AB, AC, AD, AE, BC, BD, BE, CD, CE, DE}
 - $N_2 = 10$ {ABC, ADC, ABD, BDC, EAB, EAC, EAD, EBC, ECD, EBD}
 - $N_3 = 5$ {ABCD, ABCE, ABED, AECD, EBCD} tetraedri.
- Uno spigolo, ad esempio AB, è comune a tre tetraedri: ABCD, ABCE, ABED.
Una faccia, ad esempio ABC, è comune a due tetraedri: ABCD, ABCE.

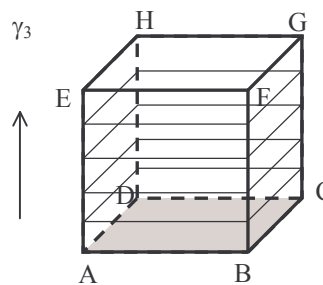
Generalizziamo ora la costruzione del cubo ottenendo un politopo detto ipercubo.

Traslando un punto γ_0 lungo una retta si ottiene un segmento γ_1 lungo ℓ .



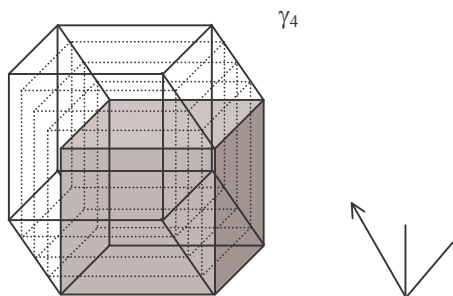
Trasliamo γ_1 lungo la seconda dimensione ortogonale alla prima di lunghezza ℓ : si ottiene un quadrato γ_2 .
Come contorno si hanno il segmento iniziale AB, il segmento finale CD ed i due segmenti AD e BC che li collegano.

Possiamo poi traslare γ_2 lungo la terza dimensione di ℓ ottenendo un cubo di lato ℓ .
Come contorno si hanno il quadrato iniziale ABCD, il quadrato finale EFGH, ed i quattro quadrati che li collegano.



Un'analogia costruzione è possibile in dimensione superiore: traslando γ_3 lungo la quarta dimensione si ottiene l'*ipercubo* γ_4 detto anche **8-celle**.

Possiamo pensare a γ_4 come un prisma avente per basi due cubi uguali γ_3 e γ_3' . Come vertici per γ_4 ci sono i vertici per γ_3 A, B, C, D, E, F, G, H e del suo traslato γ_3' A', B', C', D', E', F', G', H'. In tutto i vertici sono $8 + 8 = 16$.

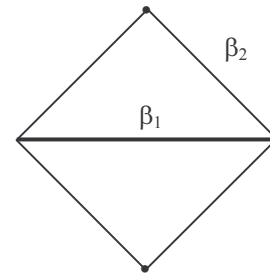


Gli spigoli di γ_4 sono quelli di γ_3 , quelli di γ_3' ed ogni vertice di γ_3 , ad esempio A, genera uno spigolo in più: AA'.
Gli spigoli sono $12 + 12 + 8 = 32$.
Le facce di γ_4 sono quelle di γ_3 , quelle di γ_3' ed inoltre ogni spigolo di γ_3 , ad esempio AB, genera una faccia in più ABA'B'.
Le facce sono quindi $6 + 6 + 12 = 24$.

Le celle di γ_4 sono γ_3 e γ_3' ed inoltre ogni faccia, ad esempio ABCD, genera un cubo in più ABCDA'B'C'D': le celle sono quindi 8.

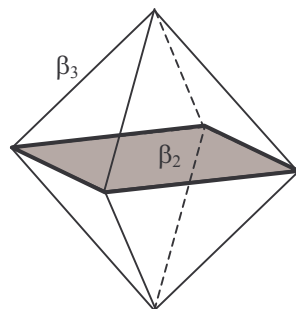
Riassumendo per γ_4 : $N_0 = 16$, $N_1 = 32$, $N_2 = 24$, $N_3 = 8$.

Generalizziamo ora la costruzione dell'ottaedro. Dato un segmento β_1 consideriamo su un piano che contiene il segmento stesso, due punti da parti opposte rispetto alla retta sostegno di β_1 . Unendo tali punti con gli estremi del segmento si può fare in modo di ottenere un quadrato che indichiamo con β_2 .

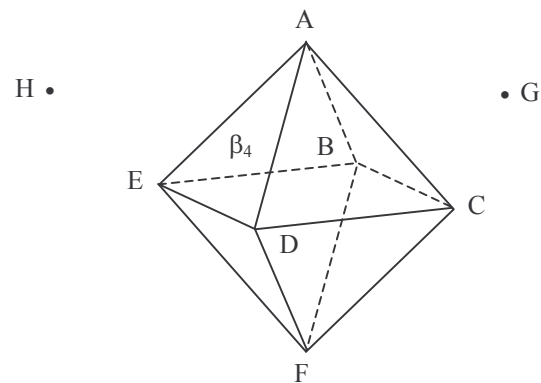


Prendendo il quadrato β_2 e scegliendo due punti nella terza dimensione da parti opposte rispetto al piano di β_2 , e congiungendoli con i vertici del quadrato, se tutti gli spigoli sono eguali fra loro, si ottiene l'ottaedro, che indichiamo con β_3 .

Il quadrato β_2 che è servito per la costruzione non fa parte del contorno.



Analogamente dato β_3 consideriamo l'iperpiano che lo contiene e due punti appartenenti ai due semispazi opposti rispetto a questo iperpiano. Unendo questi due punti con i vertici di β_3 otteniamo β_4 detto anche **16-celle**, quando tutti gli spigoli sono uguali.



Per β_4 i vertici sono 8, i sei vertici dell'ottaedro A, B, C, D, E, F ed i due punti G ed H appartenenti ai due semispazi opposti.

Le celle sono 16 tetraedri: ACDG, FCDG, FEDG, AEDG, ABEG, FBEG, ABCG, FBCG, ACDH, FCDH, FEDH, AEDH, ABEH, FBEH, ABCH, FBCH.

Uno spigolo è comune a quattro tetraedri: ad esempio CD è comune ad ACDG, FCDG, ACDH, FCDH.

Una faccia è comune a due tetraedri: ad esempio ACD è comune ad ACDG e ACDH quindi il 16-celle ha:

$$N_0 = 8, N_3 = 16, N_1 = \frac{16 \times 6}{4} = 24, N_2 = \frac{16 \times 4}{2} = 32.$$

Vediamo ora la generalizzazione in \mathbf{R}^n dei tre politopi visti in \mathbf{R}^4 .

In dimensione n definiamo **n-simplesso** il politopo individuato da $n + 1$ punti, detti vertici, non appartenenti ad uno stesso piano ed avente tutti gli spigoli uguali.

Un n -simplesso possiede $n + 1$ vertici, $\binom{n+1}{2}$ spigoli, $\binom{n+1}{3}$ triangoli, $\binom{n+1}{4}$ tetraedri,

..., $\binom{n+1}{n} = n + 1$ celle. Tali numeri della configurazione possono essere riassunti mediante la formula $N_k = \binom{n+1}{k+1}$.

$$N_k = \binom{n+1}{k+1}.$$

Infatti se $n = 4$ otteniamo $N_0 = 5$, $N_1 = 10$, $N_2 = 10$, $N_3 = 5$.

Traslando l'ipercubo in \mathbf{R}^{n-1} che indichiamo con γ_{n-1} lungo l' n -esima dimensione di una lunghezza pari al lato si ottiene γ_n ossia l'**ipercubo** in \mathbf{R}^n .

Indichiamo con N'_k e con N_k i numeri della configurazione di γ_{n-1} e γ_n . Possiamo pensare a γ_n come un prisma le cui basi sono due γ_{n-1} (uguali). Il numero degli spigoli è dato dal doppio di N'_1 a cui si aggiungono tanti spigoli quanti sono i vertici di un γ_{n-1} . Le facce sono il doppio delle facce di γ_{n-1} più tante facce quanti sono gli spigoli di γ_{n-1} , etc.

Ossia: $N_0 = 2N'_0$ $N_1 = 2N'_1 + N'_0$ $N_2 = 2N'_2 + N'_1$

Ossia $N_0 = 2^n$ $N_k = 2N'_k + N'_{k-1}$ per $1 \leq k \leq n-1$.

Per induzione su n , dalla formula precedente si ha:

$$N_k = 2^{n-k} \binom{n}{k} \quad 0 \leq k \leq n-1.$$

Ad esempio per $n = 4$ si ha:

$$N_0 = 2^4 \binom{4}{0} = 16 \quad N_1 = 2^3 \binom{4}{1} = 32 \quad N_2 = 2^2 \binom{4}{2} = 24 \quad N_3 = 2^1 \binom{4}{3} = 8.$$

Per analogia al caso $n = 4$, dato β_{n-1} detto anche ottaedro o **cocubo** in \mathbf{R}^{n-1} possiamo costruire β_n .

Indichiamo con N'_k e con N_k i numeri della configurazione di β_{n-1} e β_n . Nella costruzione di β_n a partire da β_{n-1} il numero dei vertici è aumentato di 2, il numero degli spigoli di $2N'_0$, poi per ogni spigolo della base si aggiungono due facce e così via.

$$N_0 = N'_0 + 2 \quad N_1 = N'_1 + 2N'_0 \quad N_2 = N'_2 + 2N'_1$$

Ossia:

$$N_k = N'_k + 2N'_{k-1} \quad \text{per } 1 \leq k \leq n-1.$$

$$N_{n-1} = 2N'_{n-2} \quad \text{perché } N'_{n-1} = 0.$$

Per induzione su n si ricava:

$$N_k = 2^{k+1} \binom{n}{k+1} \quad 0 \leq k \leq n-1.$$

Ad esempio per $n = 4$ si ha:

$$N_0 = 2 \binom{4}{1} = 8 \quad N_1 = 2^2 \binom{4}{2} = 24 \quad N_2 = 2^3 \binom{4}{3} = 32 \quad N_3 = 2^4 \binom{4}{4} = 16.$$

4.3 - Politopi regolari.

DEFINIZIONE 4.3.1 - Siano P_n un politopo di \mathbf{R}^n ed a un suo vertice e si considerino i punti medi degli spigoli uscenti da a : collegandoli si ottiene un politopo $(n-1)$ -dimensionale detto **figura al vertice** (v.f.) di P_n relativa ad a .

DEFINIZIONE 4.3.2 - Un **politopo** si dice **regolare** se le sue celle sono regolari e le sue figure al vertice sono regolari.

Sia P un politopo regolare in \mathbf{R}^4 : le celle sono dei $\{p, q\}$ le figure al vertice saranno dei $\{q, r\}$ perché le loro facce sono dei q -poligoni essendo le v.f. dei $\{p, q\}$ ed il politopo si indica con $\{p, q, r\}$.

Analogamente, in dimensione superiore, se le celle sono $\{p, q, \dots, v\}$ e le v.f. $\{q, \dots, v, w\}$ il politopo viene indicato con il simbolo $\{p, q, \dots, v, w\}$.

Consideriamo ora i tre politopi costruiti in dimensione 4.

Il 5-celle è composto da cinque tetraedri, in ogni vertice concorrono quattro spigoli, per esempio in E: AE, BE, CE, DE. Le v.f. sono poliedri aventi quattro vertici e come facce triangoli equilateri, quindi tetraedri: $\alpha_4 = \{3, 3, 3\}$.

L'8-celle è composto da 8 cubi. In ogni vertice ci sono quattro spigoli; per esempio in F: FE, FG, FB, FF', dove F' è il punto finale della traslazione di F. Le v.f. hanno quattro vertici, sono tetraedri $\{3, 3\}$, quindi $\gamma_4 = \{4, 3, 3\}$.

Il 16-celle è composto da sedici tetraedri $\{3, 3\}$ ed in ogni vertice concorrono sei spigoli, per esempio in G: AG, BG, CG, DG, EG, FG. Le v.f. hanno facce triangolari e sei vertici: si prova che sono regolari e sono ottaedri $\{3, 4\}$. Quindi β_4 si indica con $\beta_4 = \{3, 3, 4\}$.

Analogamente, in dimensione superiore, si prova che l'n-simplesso, l'ipercubo e la estensione dell'ottaedro (cocubo) sono politopi regolari che si indicano con:

$$\begin{aligned}\alpha_n &= \{3, 3, \dots, 3\} \\ \gamma_n &= \{4, 3, \dots, 3\} \\ \beta_n &= \{3, \dots, 3, 4\}.\end{aligned}$$

OSSERVAZIONE 1 - Si può provare che ogni politopo regolare ammette un **centro**, ossia un punto al suo interno, che è centro di n sfere di raggio R_j ($R_0 > R_1 > \dots > R_{n-1}$), passanti per i centri di tutte le celle P_j per j che varia da 0 ad n - 1.

OSSERVAZIONE 2 - Anche in dimensione superiore, considerato un politopo regolare $\{p, q, \dots, v, w\}$, applicando la polarità rispetto ad un qualsiasi sfera dell'osservazione 1, si può ottenere il politopo **duale**, che è ancora regolare ed è dato da $\{w, v, \dots, q, p\}$.

OSSERVAZIONE 3 - Anche la nozione di poliedro troncato si generalizza in dimensione superiore. In dimensione quattro, dato un politopo regolare $\{p, q, r\}$, le N_0 v.f. $\{q, r\}$ e gli N_3 poliedri troncati $\left\{ \begin{matrix} p \\ q \end{matrix} \right\}$ sono le celle di un politopo, detto **politopo troncato**, che indichiamo

con: $\left\{ \begin{matrix} p \\ q, r \end{matrix} \right\}$ oppure $\left\{ \begin{matrix} q, r \\ p \end{matrix} \right\}$.

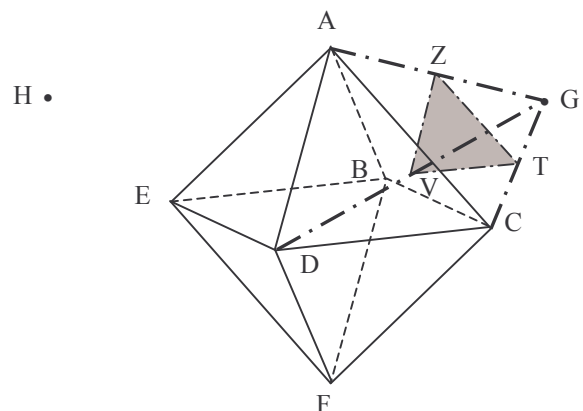
Come in dimensione 3 i suoi vertici coincidono con i punti medi degli N_1 spigoli di $\{p, q, r\}$.

4.4 - La costruzione del 24-celle.

Il 24-celle è un politopo troncato $\left\{ \begin{matrix} 3 \\ 3, 4 \end{matrix} \right\}$ che si costruisce a partire dal 16-celle $\{3, 3, 4\}$.

Il 16-celle è un politopo regolare: poiché da ogni vertice escono sei spigoli, le v.f. hanno sei vertici (punti medi degli spigoli), quindi sono ottaedri $\{3, 4\}$.

Le celle del 24-celle sono ventiquattro: otto ottaedri, uno per ogni vertice, dati dalle v.f. del 16-celle e poi le sedici celle troncate del $\{3, 3, 4\}$, ma le sedici celle sono dei tetraedri per cui troncando si ottengono degli ottaedri.



Le ventiquattro celle sono pertanto poliedri regolari.

Vogliamo provare che anche le v.f. del 24-celle sono regolari e sono cubi. Infatti le facce delle v.f. del 24-celle sono le facce delle v.f. degli ottaedri, quindi sono quadrate.

Vogliamo provare che ogni vertice della v.f. del 24-celle è comune a tre facce quadrate. Basterà provare che ogni spigolo del 24-celle è comune a tre celle per cui il punto medio della v.f. è comune a tre facce.

Partendo dal 16-celle si ha che, considerato il punto medio T del lato GC ed il punto medio V dello spigolo GD, lo spigolo TV appartiene al 24-celle ed è comune ai due tetraedri che vanno troncati GACD e GFCD (e diventano due ottaedri) ed anche alla v.f. in G.

Poiché il punto medio (vertice della v.f. del 24-celle) è comune a tre facce quadrate, il triedro è regolare (per un teorema di geometria elementare) e quindi le figure al vertice sono triangoli equilateri. Dunque la v.f. è un cubo, quindi il 24-celle è regolare.

$$\left\{ \begin{array}{c} 3 \\ 3, 4 \end{array} \right\} = \{3, 4, 3\}.$$

I vertici sono i punti medi degli spigoli del 16-celle quindi sono 24. Le celle sono 24 e sono ottaedri.

Ogni cella ha otto facce ed ogni faccia è comune a due celle (ad esempio considerando il vertice G del 16-celle il triangolo TVZ, ove Z è il punto medio di GA, appartiene alla v.f. relativa a G ed è anche un triangolo del tetraedro troncato ACDG) quindi le facce sono $\frac{24 \times 8}{2} = 96$.

Ogni cella ha 12 spigoli ed ogni spigolo è comune a tre celle, (come visto prima); quindi gli spigoli sono $\frac{24 \times 12}{3} = 96$.

Riassumendo: $N_0 = 24$; $N_1 = 96$; $N_2 = 96$; $N_3 = 24$.

4.5 - Cenni sulla costruzione del 600-celle.

Consideriamo un 24-celle $\{3, 4, 3\}$ che ha quindi $N_0 = 24$; $N_1 = 96$; $N_2 = 96$; $N_3 = 24$.

Troncando il 24-celle si ottiene $\left\{ \begin{array}{c} 3 \\ 4, 3 \end{array} \right\}$ avente 96 vertici (punti medi degli spigoli) e come

celle 24 cubi dati dalle v.f. e 24 cubottaedri dati degli ottaedri troncati. Quindi tale politopo non è regolare. Ogni faccia quadrata è comune ad un cubo e ad un cubottaedro; infatti se A è un vertice di un ottaedro del 24-celle, la v.f. dell'ottaedro relativo ad A è un quadrato, ossia una faccia del cubottaedro ottenuto facendo il troncamento, ma è anche una faccia bidimensionale della v.f. relativa ad A.

Ogni cubo ha sei facce, perciò in totale le facce quadrate sono $6 \times 24 = 144$.

Le facce triangolari del cubottaedro sono le facce troncate dell'ottaedro. Ogni faccia bidimensionale è comune a due celle e, poiché ci sono otto triangoli in ogni cubottaedro, le

facce triangolari sono $\frac{8 \times 24}{2} = 96$.

Allora $\left\{ \begin{array}{c} 3 \\ 4, 3 \end{array} \right\}$ possiede 96 vertici, 96 facce triangolari più 144 facce quadrate e 24 + 24 celle (cubi e cubottaedri).

Per contare gli spigoli si può usare la formula di Eulero-Poincaré: $N_0 + N_2 = N_1 + N_3$: $96 + (96 + 144) = (24 + 24) + N_1$ da cui $N_1 = 288$.

Oppure: ogni spigolo è comune a due cubottaedri e ad una f.v. (cubo) essendoci 24 cubi

con 12 spigoli ciascuno $N_1 = 24 \times 12 = 288$.

Per troncato il 24-celle abbiamo considerato i punti medi degli spigoli; se invece dividiamo ogni spigolo nel rapporto $a : b$ ogni cubottaedro viene sostituito da un icosaedro, in generale non regolare, secondo una costruzione già vista. Anche ponendo $a : b = 1$ non si ottiene

$\left\{ \begin{matrix} 3 \\ 4, 3 \end{matrix} \right\}$ perché ogni faccia quadrata dei cubottaedri ha in più una diagonale; ci sono quindi $6 \times 24 = 144$ spigoli aggiunti. Le celle $\{4, 3\}$ di $\left\{ \begin{matrix} 3 \\ 4, 3 \end{matrix} \right\}$ sono sostituite da un tetraedro e

quattro piramidi che scompongono il cubo.

Se poniamo $a : b = \tau$ ossia dividiamo ogni spigolo (con un opportuno orientamento) secondo la sezione aurea, gli icosaedri sono regolari e le piramidi si deformano diventando tetraedri regolari.

Tale politopo viene detto **snub** e viene indicato con $s\{3, 4, 3\}$.

Esso possiede:

$$N_0 = 96;$$

$$N_1 = 288 + 144;$$

$$N_3 = 24 \text{ icosaedri regolari} + 24 \text{ tetraedri} + 96 \text{ piramidi che sono tetraedri regolari} = \\ = 24 \text{ icosaedri} + 120 \text{ tetraedri};$$

e le facce sono (dalla formula di Eulero-Poincaré $N_0 + N_2 = N_1 + N_3$):

$$N_2 = (288 + 144) + (24 + 120) - 96 = 480 \text{ tutte triangolari.}$$

Il politopo troncato $\left\{ \begin{matrix} 3 \\ 4, 3 \end{matrix} \right\}$ ed il politopo $s\{3, 4, 3\}$ furono descritti dall'avvocato Gosset

(1897), matematico per diletto. Le sue scoperte, però, non furono apprezzate dai contemporanei.

Per analogia al caso tridimensionale, nella quarta dimensione, è possibile costruire una piramide avente come base un icosaedro e le cui rimanenti celle sono venti tetraedri regolari.

Se ora sostituiamo ai 24 icosaedri di $s\{3, 4, 3\}$ le piramidi si ottiene un nuovo politopo. Per ogni icosaedro si aggiunge un vertice, 12 spigoli (unendo il nuovo vertice con i 12 vertici dell'icosaedro) 30 facce bidimensionali (avendo l'icosaedro 30 spigoli) e 20 tetraedri (avendo l'icosaedro 20 facce). Il nuovo politopo possiede pertanto:

$$N_0 = 96 + 24 = 120;$$

$$N_3 = 120 + 20 \times 24 = 120 + 480 = 600 \text{ celle (tutti tetraedri)};$$

$$N_1 = 288 + 144 + 12 \times 24 = 288 + 144 + 288 = 720;$$

$$N_2 = 480 + 30 \times 24 = 480 + 720 = 1200 \text{ facce triangolari.}$$

Le figure al vertice sono icosaedri regolari quindi il politopo è regolare e viene detto **600-celle** $\{3, 3, 5\}$.

Il restante politopo regolare in dimensione 4 si ottiene per dualità da $\{3, 3, 5\}$: è il **120-celle** che ha come simbolo $\{5, 3, 3\}$. Ha 600 vertici, 1200 spigoli, 720 facce e 120 celle. Le celle sono dei dodecaedri.

4.6 - Classificazione dei politopi regolari.

DEFINIZIONE 4.6.1 - Siano P un politopo regolare, o il suo centro, a un suo vertice e σ l'iperpiano perpendicolare alla retta oa contenente i secondi estremi dei lati aventi come primo estremo a . Diciamo **stella di P in a** il politopo regolare dato da $P \cap \sigma$ che indicheremo con **$Et(P)$** , senza fare riferimento al vertice a in quanto in un politopo regolare le stelle relative ad un qualunque vertice sono eguali.

DEFINIZIONE 4.6.2 - Sia P un politopo regolare di dimensione n . Diciamo **simbolo di P** e lo denotiamo con $\{r_1, \dots, r_{n-1}\}$ la successione di $n - 1$ interi r_i definiti come segue:

- r_1 è il numero dei lati delle facce bidimensionali di P ,
- $\{r_2, \dots, r_{n-1}\}$ è il simbolo di $Et(P)$, stella di P che coincide con il simbolo della figura al vertice, essendo figure simili.

Si consideri ora l'ipersfera circoscritta al politopo P di dimensione n e sia r il suo raggio, denotata con ℓ la lunghezza dello spigolo di P , diciamo $\rho(P)$ il rapporto tra lo spigolo al quadrato ed il diametro elevato al quadrato, poniamo cioè:

$$(1) \quad \rho(P) = \frac{\ell^2}{4r^2}.$$

Esiste una **relazione fondamentale** per i politopi regolari :

PROPRIETÀ 4.6.1 - Siano P un politopo regolare n -dimensionale $\{r_1, \dots, r_{n-1}\}$ e $Et(P)$ la stella riferita ad un generico vertice di P , allora $\rho(P)$ e $\rho(Et(P))$ sono legati dalla relazione:

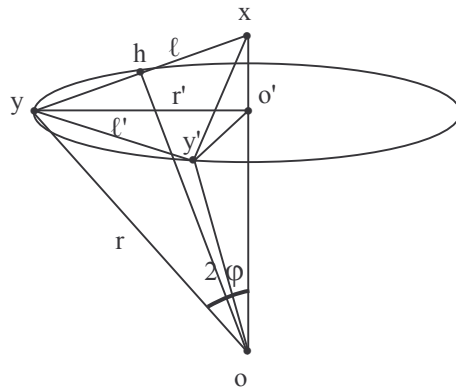
$$\rho(P) = 1 - \frac{\cos^2 \frac{\pi}{r_1}}{\rho(Et(P))},$$

o, equivalentemente:

$$\rho(r_1, \dots, r_{n-1}) = 1 - \frac{\cos^2 \frac{\pi}{r_1}}{\rho(r_2, \dots, r_{n-1})}.$$

Dimostrazione - Siano x ed y due vertici consecutivi di P , o il centro ed r il raggio della sfera circoscritta, ℓ la lunghezza di uno spigolo ed ℓ' la lunghezza del segmento yy' , spigolo della stella $Et_x(P)$. Siano poi o' il centro ed r' il raggio della sfera circoscritta ad $Et_x(P)$. Indichiamo con 2φ l'angolo in o del triangolo $\text{conv}(y, o, x)$. Poichè $ox = oy = r$ il triangolo $\text{conv}(y, o, x)$ è isoscele: l'altezza oh è anche mediana relativa a $yx = \ell$ e bisettrice di 2φ . Risulta allora, considerando il triangolo rettangolo $\text{conv}(o, h, y)$: $yh = \ell/2 = r \sin\varphi$, da cui $\ell = 2r \sin\varphi$, e sostituendo nella (1) si ottiene:

$$\rho(P) = \frac{\ell^2}{4r^2} = \frac{4r^2 \sin^2 \varphi}{4r^2} = \sin^2 \varphi = 1 - \cos^2 \varphi.$$



$$\begin{aligned} [x, y] &= [x, y'] = \ell \\ [y, o'] &= [y', o'] = r' \\ [y, y'] &= \ell' \\ [y, o] &= [y', o] = r = [x, o] \end{aligned}$$

D'altra parte, considerando il triangolo rettangolo $\text{conv}(o, h, x)$ risulta $\widehat{yxo} = \widehat{y'xo'} = \frac{\pi}{2} - \varphi$

e, considerando poi il triangolo rettangolo $\text{conv}(x, y, o')$ si ha $\widehat{xyo'} = \varphi$ e quindi $r' = \ell \cos\varphi$.

Per come è stata costruita la stella, y , x ed y' sono i vertici consecutivi di una faccia bidimensionale di P che è un poligono regolare con r_1 lati circoscrittibile da una circonferenza di centro o'' e raggio r'' .

L'angolo $\widehat{x o'' y}$ vale $\frac{2\pi}{r_1}$ mentre l'angolo $\widehat{x y m}$ vale $\frac{\pi}{r_1}$, perciò $ym = \ell'/2 = \ell \cos \frac{\pi}{r_1}$ quindi

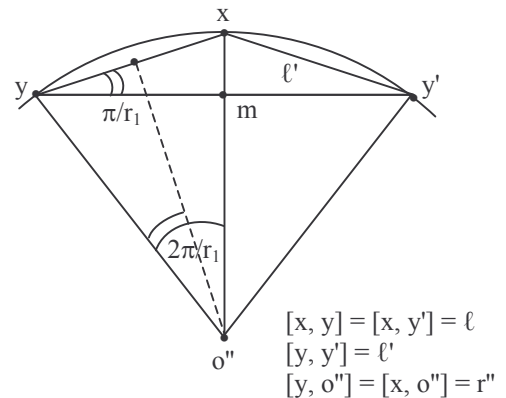
$$\text{di } \ell' = 2 \ell \cos \frac{\pi}{r_1}.$$

Sostituendo i valori ottenuti per r' ed ℓ' ricaviamo:

$$\rho(\text{Et}(P)) = \frac{\ell'^2}{4r'^2} = \frac{\ell^2 \cos^2 \frac{\pi}{r_1}}{\ell^2 \cos^2 \varphi} = \frac{\cos^2 \frac{\pi}{r_1}}{\cos^2 \varphi}$$

e quindi:

$$\rho(P) = 1 - \cos^2 \varphi = 1 - \frac{\cos^2 \frac{\pi}{r_1}}{\cos^2 \varphi}.$$



TEOREMA 4.6.1 - (Schläfli 1850) - *A meno di similitudini, gli unici politopi convessi regolari n-dimensionali che esistono sono quelli rappresentati dai seguenti simboli:*

- $n = 2$ $\{r_1\}$ per qualunque intero $r_1 \geq 3$
- $n = 3$ $\{3, 3\}$ $\{3, 4\}$ $\{4, 3\}$ $\{3, 5\}$ $\{5, 3\}$
- $n = 4$ $\{3, 3, 3\}$ $\{3, 3, 4\}$ $\{4, 3, 3\}$ $\{3, 4, 3\}$ $\{3, 3, 5\}$ $\{5, 3, 3\}$
- $n \geq 5$ $\{3, \dots, 3\}$ $\{3, \dots, 3, 4\}$ $\{4, 3, \dots, 3\}$.

Dimostrazione - Proviamo che i soli simboli possibili sono quelli dell'enunciato.

Poichè $r_1 \geq 3$ (lati di una faccia) risulta $\cos^2 \frac{\pi}{r_1} \geq \cos^2 \frac{\pi}{3} = \frac{1}{4}$, ma $\rho(P) = \rho(r_1, r_2, \dots, r_{n-1})$ è

una quantità positiva per definizione:

$$\rho(P) = 1 - \frac{\cos^2 \frac{\pi}{r_1}}{\rho(r_2, \dots, r_{n-1})} > 0 \quad \text{perciò} \quad \rho(r_2, \dots, r_{n-1}) > \cos^2 \frac{\pi}{r_1} \geq \frac{1}{4}.$$

I politopi regolari, stelle di politopi regolari, devono quindi soddisfare alla doppia condizione:

$$\rho(r_1, r_2, \dots, r_{n-1}) > 0 \quad \rho(r_2, \dots, r_{n-1}) > \frac{1}{4}.$$

Esaminiamo il caso $n = 2$.

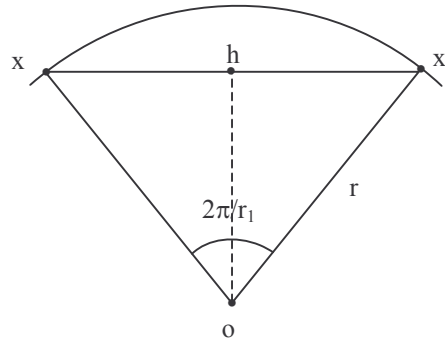
Dato il poligono $\{r_1\}$, presi due vertici consecutivi x, x' , indicato con o il centro della circonferenza circoscritta di raggio r , l'angolo $\widehat{x o x'}$ vale $\frac{2\pi}{r_1}$.

Detto h il punto di intersezione della bisettrice di tale angolo con il lato xx' di lunghezza ℓ nel triangolo conv(o, h, x) si ha $\frac{\ell}{2} = r \sin \frac{\pi}{r_1}$ da cui $\frac{\ell}{2r} = \sin \frac{\pi}{r_1}$.

La (1) si può allora scrivere $\rho(r_1) = \frac{\ell^2}{4r^2} = \sin^2 \frac{\pi}{r_1}$.

Quindi:

$$\begin{aligned}
 r_1 = 3 & \quad \rho(3) = \operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{3} = \frac{3}{4} > \frac{1}{4} \\
 r_1 = 4 & \quad \rho(4) = \operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} > \frac{1}{4} \\
 r_1 = 5 & \quad \rho(5) = \operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{5} = \frac{1}{8} (5 - \sqrt{5}) > \frac{1}{4} \\
 r_1 = 6 & \quad \rho(6) = \operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{6} = \frac{1}{4}.
 \end{aligned}$$



Qualsiasi sia il numero dei lati $\rho(r_1)$ è sempre maggiore di zero, ma solo i poligoni con al più cinque lati possono essere stelle di poliedri.

Esaminiamo il caso $n = 3$.

Sia P un poliedro di simbolo $\{r_1, r_2\}$; il secondo parametro può assumere solo i valori 3, 4 e 5 per quanto visto nel caso bidimensionale.

Per $r_2 = 3$ $\rho(\text{Et}(P)) = \rho(3) = \frac{3}{4}$. Calcoliamo ora $\rho(r_1, 3)$.

$$\text{Se } r_1 = 3 \quad \rho(3, 3) = 1 - \frac{\cos^2 \frac{\pi}{3}}{\frac{3}{4}} = 1 - \frac{4}{3} \frac{1}{4} = \frac{2}{3} > \frac{1}{4}.$$

$$\text{Se } r_1 = 4 \quad \rho(4, 3) = 1 - \frac{\cos^2 \frac{\pi}{4}}{\frac{3}{4}} = 1 - \frac{4}{3} \frac{1}{2} = \frac{1}{3} > \frac{1}{4}.$$

$$\text{Se } r_1 = 5 \quad \rho(5, 3) = 1 - \frac{\cos^2 \frac{\pi}{5}}{\frac{3}{4}} = 1 - \frac{4}{3} \frac{1}{8} (3 + \sqrt{5}) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{6} > 0.$$

$$\text{Se } r_1 = 6 \quad \rho(6, 3) = 1 - \frac{\cos^2 \frac{\pi}{6}}{\frac{3}{4}} = 1 - \frac{4}{3} \frac{3}{4} = 0.$$

Pertanto esistono solo tre poliedri con stelle triangolari: il tetraedro, il cubo ed il dodecaedro e soltanto i primi due, $\{3, 3\}$ e $\{4, 3\}$, sono stelle di politopi regolari di dimensione quattro.

Per $r_2 = 4$ $\rho(\text{Et}(P)) = \rho(4) = \frac{1}{2}$. Calcoliamo ora $\rho(r_1, 4)$.

$$\text{Se } r_1 = 3 \quad \rho(3, 4) = 1 - \frac{\cos^2 \frac{\pi}{3}}{\frac{1}{2}} = 1 - 2 \frac{1}{4} = \frac{1}{2} > \frac{1}{4}$$

$$\text{Se } r_1 = 4 \quad \rho(4, 4) = 1 - \frac{\cos^2 \frac{\pi}{4}}{\frac{1}{2}} = 1 - 2 \frac{1}{2} = 0$$

Quindi esiste solo l'ottaedro $\{3, 4\}$ e può essere stella di politopi regolari di dimensione quattro.

Per $r_2 = 5$ $\rho(\text{Et}(P)) = \rho(5) = \frac{5-\sqrt{5}}{8}$ Calcoliamo ora $\rho(r_1, 5)$.

$$\text{Se } r_1 = 3 \quad \rho(3, 5) = 1 - \frac{8 \cos^2 \frac{\pi}{3}}{5-\sqrt{5}} = 1 - \frac{2}{5-\sqrt{5}} = \frac{3-\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}} = \frac{5-\sqrt{5}}{10} > \frac{1}{4}$$

$$\text{Se } r_1 = 4 \quad \rho(4, 5) = 1 - \frac{8 \cos^2 \frac{\pi}{4}}{5-\sqrt{5}} = 1 - \frac{4}{5-\sqrt{5}} = \frac{1-\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}} = \frac{-\sqrt{5}}{5} < 0$$

Solo $\{3, 5\}$ è un politopo regolare, l'icosaedro, e può essere stella di politopi in dimensione quattro.

Esaminiamo ora il caso $n = 4$.

I politopi $\{r_1, r_2, r_3\}$ in dimensione quattro ammettono come stelle i poliedri $\{3, 3\}$, $\{4, 3\}$, $\{3, 4\}$, $\{3, 5\}$.

Se $\text{Et}(P) = \{3, 3\}$ allora abbiamo $\rho(\text{Et}(P)) = \rho(3, 3) = \frac{2}{3}$.

Calcoliamo ora $\rho(r_1, 3, 3)$.

$$\text{Se } r_1 = 3 \quad \rho(3, 3, 3) = 1 - \frac{\cos^2 \frac{\pi}{3}}{\frac{2}{3}} = 1 - \frac{3}{2} \frac{1}{4} = \frac{5}{8} > \frac{1}{4}.$$

$$\text{Se } r_1 = 4 \quad \rho(4, 3, 3) = 1 - \frac{\cos^2 \frac{\pi}{4}}{\frac{2}{3}} = 1 - \frac{3}{2} \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

$$\text{Se } r_1 = 5 \quad \rho(5, 3, 3) = 1 - \frac{\cos^2 \frac{\pi}{5}}{\frac{2}{3}} = 1 - \frac{3}{2} \frac{1}{8} (3 + \sqrt{5}) = \frac{7-3\sqrt{5}}{16} > 0.$$

$$\text{Se } r_1 = 6 \quad \rho(6, 3, 3) = 1 - \frac{\cos^2 \frac{\pi}{6}}{\frac{2}{3}} = 1 - \frac{3}{2} \frac{3}{4} = -\frac{1}{8} < 0.$$

Esistono quindi $\{3, 3, 3\}$, $\{4, 3, 3\}$, $\{5, 3, 3\}$ ma solo $\{3, 3, 3\}$ può essere stella di politopi regolari di dimensione cinque.

Se $\text{Et}(P) = \{4, 3\}$ allora abbiamo $\rho(\text{Et}(P)) = \rho(4, 3) = \frac{1}{3}$.

Calcoliamo ora $\rho(r_1, 4, 3)$.

$$\text{Se } r_1 = 3 \quad \rho(3, 4, 3) = 1 - \frac{\cos^2 \frac{\pi}{3}}{\frac{1}{3}} = 1 - 3 \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

$$\text{Se } r_1 = 4 \quad \rho(4, 4, 3) = 1 - \frac{\cos^2 \frac{\pi}{4}}{\frac{1}{3}} = 1 - 3 \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} < 0.$$

Quindi esiste solo $\{3, 4, 3\}$ ma non può essere stella di politopi regolari di dimensione cin-

que.

Se $\text{Et}(P) = \{3, 4\}$ allora abbiamo $\rho(\text{Et}(P)) = \rho(3, 4) = \frac{1}{2}$.

Calcoliamo ora $\rho(r_1, 3, 4)$.

$$\text{Se } r_1 = 3 \quad \rho(3, 3, 4) = 1 - \frac{\cos^2 \frac{\pi}{3}}{\frac{1}{2}} = 1 - 2 \frac{1}{4} = \frac{1}{2} > \frac{1}{4}$$

$$\text{Se } r_1 = 4 \quad \rho(4, 3, 4) = 1 - \frac{\cos^2 \frac{\pi}{4}}{\frac{1}{2}} = 1 - 2 \frac{1}{2} = 0.$$

Esiste solo $\{3, 3, 4\}$ ed è stella di politopi regolari in dimensione cinque.

Infine se $\text{Et}(P) = \{3, 5\}$ allora abbiamo $\rho(\text{Et}(P)) = \rho(3, 5) = \frac{5 - \sqrt{5}}{10}$.

Calcoliamo ora $\rho(r_1, 3, 5)$.

$$\text{Se } r_1 = 3 \quad \rho(3, 3, 5) = 1 - \frac{10 \cos^2 \frac{\pi}{3}}{5 - \sqrt{5}} = 1 - \frac{10 \frac{1}{4}}{5 - \sqrt{5}} = \frac{\frac{5}{2} - \sqrt{5}}{5 - \sqrt{5}} = \frac{15 - 5\sqrt{5}}{40} = \frac{3 - \sqrt{5}}{8} < \frac{1}{4}$$

ma è una quantità positiva.

Quindi esiste solo $\{3, 3, 5\}$ ma non può essere stella di politopi regolari di dimensione cinque.

Riassumendo, in dimensione $n = 4$ esistono sei politopi regolari i cui simboli sono:

$$\{3, 3, 3\} \quad \{4, 3, 3\} \quad \{5, 3, 3\} \quad \{3, 4, 3\} \quad \{3, 3, 4\} \quad \{3, 3, 5\}$$

ma tra essi solo il simpleso 5-celle $\{3, 3, 3\}$ (5 vertici, 10 spigoli, 10 facce e 5 celle formate da tetraedri) ed il cocubo o 16 celle $\{3, 3, 4\}$ (8 vertici, 24 spigoli, 32 facce e 16 celle formate da ottaedri) possono essere stelle di politopi regolari in dimensione cinque.

Sia ora $n \geq 5$.

Dimostriamo, per induzione, che per $n \geq 5$ esistono solo tre politopi n -dimensionali α_n , β_n , γ_n e che di questi solo il simpleso $\{3, \dots, 3, 3\}$ ed il cocubo $\{3, \dots, 3, 4\}$, $(n-1)$ -dimensionali, possono essere stelle di politopi regolari.

Sia $\text{Et}(P) = \{3, 3, 3\}$ allora $\rho(3, 3, 3) = \rho(\alpha_4) = \frac{5}{8}$ ed $r_1 = 3$.

Dimostriamo che $\rho(\alpha_n) = \frac{n+1}{2n}$.

Se $n = 5$ $\rho(\alpha_{n-1}) = \rho(\alpha_4) = \frac{4+1}{8} = \frac{5}{8}$, vero, come abbiamo visto prima.

Supponiamo vero che $\rho(\alpha_{n-1}) = \frac{n}{2(n-1)}$, allora:

$$\rho(\alpha_n) = \rho(3, \dots, 3, 3) = 1 - \frac{\cos^2 \frac{\pi}{3}}{\rho(\alpha_{n-1})} = 1 - \frac{1}{4} \frac{2(n-1)}{n} = \frac{n+1}{2n}.$$

Se $n \geq 4$ allora $\frac{n+1}{2n} > \frac{1}{4}$, quindi α_n esiste e $\rho(\alpha_n)$ può essere stella di politopi regolari di dimensione $n+1$.

$$\text{Se } r_1 = 4 \quad \rho(\gamma_n) = \rho(4, 3, \dots, 3) = 1 - \frac{\cos^2 \frac{\pi}{4}}{\rho(\alpha_{n-1})} = 1 - \frac{1}{2} \frac{2(n-1)}{n} = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{4} \text{ se } n \geq 4.$$

γ_n esiste, ma non può essere stella di politopi regolari di dimensione $n + 1$.

Vediamo infine che non ci sono politopi regolari $\{n, 3, \dots, 3\}$ per $n \geq 5$.

Infatti, se $r_1 = 5$,

$$\rho(5, 3, \dots, 3) = 1 - \frac{\cos^2 \frac{\pi}{5}}{\rho(\alpha_{n-1})} = 1 - \frac{2(n-1)}{n} \frac{3 + \sqrt{5}}{8} = 1 - \frac{(n-1)(3 + \sqrt{5})}{4n} < 0 \text{ se } n \geq 5.$$

Consideriamo ora la stella $\text{Et}(P) = \{3, 3, 4\}$ con $\rho(3, 3, 4) = \frac{1}{2}$ e sia $r_1 = 3$.

Dimostriamo per induzione che per $n \geq 4$ $\rho(\beta_n) = \rho(3, \dots, 3, 4) = \frac{1}{2}$.

Se $n = 4$ $\rho(\beta_4) = \frac{1}{2}$; supponiamo vero che $\rho(\beta_{n-1}) = \frac{1}{2}$, allora:

$$\rho(\beta_n) = 1 - \frac{\cos^2 \frac{\pi}{3}}{\frac{1}{2}} = 1 - 2 \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

Quindi esiste il politopo regolare $\{3, \dots, 3, 4\}$ (cocubo) in dimensione n ed è stella di politopi regolari di dimensione $n + 1$. Non esistono politopi regolari $\{r_1, 3, \dots, 3, 4\}$ con $r_1 > 3$.

$$\text{Infatti se } r_1 = 4 \quad \rho(4, 3, \dots, 3, 4) = 1 - \frac{\cos^2 \frac{\pi}{4}}{\frac{1}{2}} = 1 - 2 \frac{1}{2} = 0.$$

Quindi, in dimensione $n \geq 5$ i soli simboli possibili sono l' n -simpleso $\{3, \dots, 3, 3\}$, l'ipercubo $\{4, \dots, 3, 3\}$ ed il cocubo $\{3, \dots, 3, 4\}$.

OSSERVAZIONE - Si può provare, come in dimensione 3, l'esistenza di politopi regolari in dimensione maggiore od uguale a 4 dando le coordinate cartesiane.

Ad esempio: gli 8 vertici del 16-celle sono del tipo $(\pm 2, 0, 0, 0)$,
 i 24 vertici del 24-celle sono del tipo $(\pm 1, \pm 1, 0, 0)$,
 i 16 vertici dell'ipercubo sono $(\pm 1, \pm 1, \pm 1, \pm 1)$.

Classificazione dei politopi regolari

$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n \geq 5$
simbolo $\{\}$ $\rho()$	simbolo $\{\}$ $\rho()$	simbolo $\{\}$ $\rho()$	simbolo $\{\}$ $\rho()$
			$\left\{ \begin{array}{l} \{3, 3, \dots, 3\} \quad \frac{n+1}{2n} \Rightarrow \\ \{4, 3, \dots, 3\} \quad \frac{1}{n} \end{array} \right.$
	$\{3, 3\} \quad \frac{2}{3} \Rightarrow$	$\left\{ \begin{array}{l} \{3, 3, 3\} \quad \frac{5}{8} \Rightarrow \\ \{4, 3, 3\} \quad \frac{1}{4} \\ \{5, 3, 3\} \quad \frac{7-3\sqrt{5}}{16} \end{array} \right.$	
$\{3\} \quad \frac{3}{4} \Rightarrow$	$\{4, 3\} \quad \frac{1}{3} \Rightarrow$	$\{3, 4, 3\} \quad \frac{1}{4}$	
	$\{5, 3\} \quad \frac{3-\sqrt{5}}{6}$		
$\{4\} \quad \frac{1}{2} \Rightarrow$	$\{3, 4\} \quad \frac{1}{2} \Rightarrow$	$\{3, 3, 4\} \quad \frac{1}{2} \Rightarrow$	$\{3, \dots, 3, 4\} \quad \frac{1}{2} \Rightarrow$
$\{5\} \quad \frac{5-\sqrt{5}}{8} \Rightarrow$	$\{3, 5\} \quad \frac{5-\sqrt{5}}{10} \Rightarrow$	$\{3, 3, 5\} \quad \frac{5-\sqrt{5}}{8}$	

CAPITOLO V

IL PROBLEMA ISOPERIMETRICO

5.1 - Cenni storici.

L'antico problema degli isoperimetri consiste nel trovare fra tutte le figure piane di dato perimetro quella di area maggiore. E' noto che si tratta del cerchio ed è talmente intuitivo che sembrerebbe superfluo darne la dimostrazione. Al contrario per i geometri la dimostrazione esatta ha presentato grandi difficoltà.

Per esprimere il problema indichiamo con S l'area di una generica figura di perimetro L .

Il cerchio di perimetro (circonferenza) L ha raggio $\frac{L}{2\pi}$ e quindi area $\pi\left(\frac{L}{2\pi}\right)^2 = \frac{L^2}{4\pi}$.

L'asserzione che tra le figure piane di perimetro L il cerchio sia quella che ha area maggiore può essere espressa dalla disuguaglianza:

$$\frac{L^2}{4\pi} - S \geq 0.$$

Questa disuguaglianza è detta **disuguaglianza isoperimetrica** e fu provata da Hurwitz nel 1901. La quantità $D = \frac{L^2}{4\pi} - S$ è detta **deficit isoperimetrico** della figura.

Ricordiamo le ricerche di Jacob Steiner che permettono con costruzioni elementari di costruire, a partire da una figura che non sia un cerchio, un'altra figura con la stessa area. Poiché la costruzione nel caso del cerchio lascia tutto inalterato, Steiner concluse che il teorema è provato. Ma tale ragionamento è privo di rigore.

In seguito ci furono ricerche più o meno semplici che poggiavano su metodi di convergenza; verrà qui presentata una soluzione del problema isoperimetrico con il teorema di Blaschke.

L'esistenza di una curva estemale che risolve il problema isoperimetrico fu provata da Carathéodory e Study nel 1909. Una dimostrazione elementare fu data da M. Henri Lebesgue nel 1914.

Viste le difficoltà che presenta la dimostrazione della disuguaglianza isoperimetrica classica è curioso come con costruzioni elementari si possa arrivare ad una disuguaglianza migliore.

Proveremo che se F è una figura piana convessa, R il raggio del cerchio circoscritto ad F ed r il raggio di un cerchio inscritto in F (che verranno definiti in modo rigoroso), con metodi

geometrici si ottiene la disuguaglianza $\frac{L^2}{4\pi} - S \geq \frac{\pi}{4}(R - r)^2$ che migliora la disuguaglianza

isoperimetrica e che prova che il deficit di F è positivo eccetto nel caso $R = r$, in cui F è un cerchio.

Tale disuguaglianza è stata poi ancora migliorata da Bonnesen.

5.2 - Cerchio inscritto e cerchio circoscritto.

Le nozioni che introduciamo sono relative agli insiemi compatti di \mathbf{R}^n cioè chiusi e limitati

ad interno non vuoto, ma noi ne faremo uso solo nel caso di corpi convessi.

Supponiamo di essere in dimensione 2. Sia C un compatto ad interno non vuoto e sia σ un qualunque cerchio di centro (x, y) e raggio ρ contenuto in C . Consideriamo nello spazio a tre dimensioni l'insieme \mathcal{A} delle terne (x, y, ρ) , dove (x, y) sono le coordinate del centro e ρ il raggio di un cerchio contenuto in C ; ovviamente \mathcal{A} è limitato perché ogni cerchio σ è contenuto in C . Per dimostrare che \mathcal{A} è chiuso utilizzeremo la Proprietà 1.4.3.

PROPRIETÀ 5.2.1 - *Siano C un compatto ad interno non vuoto ed \mathcal{A} l'insieme delle terne (x, y, ρ) dove (x, y) sono le coordinate del centro e ρ il raggio di un cerchio contenuto in C . L'insieme \mathcal{A} è chiuso.*

Dimostrazione - Per la Proprietà 1.4.3 per provare che \mathcal{A} è chiuso dimostriamo che per ogni successione convergente di punti di \mathcal{A} il limite appartiene ad \mathcal{A} .

Costruiamo una successione (x_n, y_n, ρ_n) di punti di \mathcal{A} . Essendo \mathcal{A} limitato questa successione, per il Teorema di Bolzano-Weierstrass, ha almeno un punto limite o di accumulazione (x^*, y^*, ρ^*) ; vogliamo provare che esso appartiene ad \mathcal{A} . Il punto (x^*, y^*) appartiene a C ; è quindi sufficiente provare che il cerchio σ^* di centro $c^*(x^*, y^*)$ e raggio ρ^* è contenuto in C .

Se, per assurdo, esistesse un punto a appartenente a σ^* ed esterno a C , detto b un punto del segmento $[a, c^*]$ di lunghezza $\leq \rho^*$ tale che b sia esterno a C e la distanza fra a e b sia d .

Si avrebbe ovviamente che: $d(b, c^*) \leq \rho^* - d$.

Essendo (x^*, y^*, ρ^*) punto limite, esiste un indice N tale che $n \geq N$ si ha:

$$d(c_n, c^*) < \frac{d}{2} \text{ e } |\rho^* - \rho_n| < \frac{d}{2} \text{ ossia } \rho^* - \frac{d}{2} < \rho_n < \rho^* + \frac{d}{2}.$$

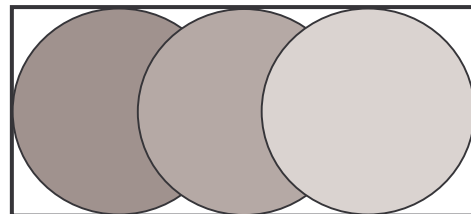
$$\text{Allora si ha: } d(b, c_n) \leq d(b, c^*) + d(c^*, c_n) \leq \rho^* - d + \frac{d}{2} = \rho^* - \frac{d}{2} < \rho_n.$$

Dunque il punto b apparterebbe al cerchio σ_n contenuto in C , ossia b apparterebbe a C che è assurdo.

L'insieme \mathcal{A} è chiuso e limitato, l'area è una funzione continua, quindi in \mathcal{A} l'area dei cerchi raggiunge un massimo: in corrispondenza si ha il raggio r del cerchio inscritto detto **raggio inscritto**. Possiamo allora dare la:

DEFINIZIONE 5.2.1 - *Dato un corpo convesso piano C si dice **cerchio inscritto in C** un cerchio di raggio massimo contenuto interamente in C .*

Il cerchio inscritto è ben determinato in grandezza, ma può non essere unico, come dimostra l'esempio del rettangolo.



Il cerchio inscritto ha sicuramente almeno un punto in comune con il bordo dell'insieme, dimostreremo che ne ha almeno due, dando anche la caratterizzazione del cerchio inscritto.

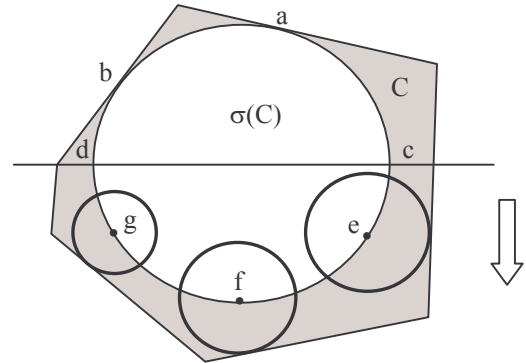
PROPRIETÀ 5.2.2 - (Caratterizzazione del cerchio inscritto) *Siano C il corpo convesso e $\sigma(C)$ il cerchio inscritto: allora i punti che appartengono all'intersezione della frontiera di C con la frontiera del cerchio ($bd C \cap bd \sigma(C)$) sono contenuti in un arco (a, b) maggiore od uguale ad una semicirconferenza.*

Dimostrazione - Supponiamo per assurdo che l'arco (a, b) sia minore di una semicirconferenza di diametro [c, d]. Sia (c, e, d) l'arco di estremi c, d non contenente (a, b). Poiché tutti i punti di (c, e, d) sono interni a C consideriamo i cerchi di ampiezza massima aventi centro su (c, e, d) ed interni a C. Sia δ il minimo di tali raggi. Risulta $\delta \neq 0$ perché (c, e, d) non contiene punti di frontiera.

Facendo una traslazione perpendicolare alla direzione della retta c, d di ampiezza minore di δ si ottiene un cerchio di raggio r tutto contenuto in C, il che è assurdo.

In particolare se i punti di contatto sono solo due sono estremi di un diametro.

Ricordiamo che nel caso di un corpo convesso piano l'iperpiano di supporto (cfr. Definizione 1.4.1) è una retta che si dice retta di supporto.



DEFINIZIONE 5.2.2 - Si dice **spessore** di un corpo convesso piano C, e si indica con d, la minima distanza fra rette di supporto parallele di C.

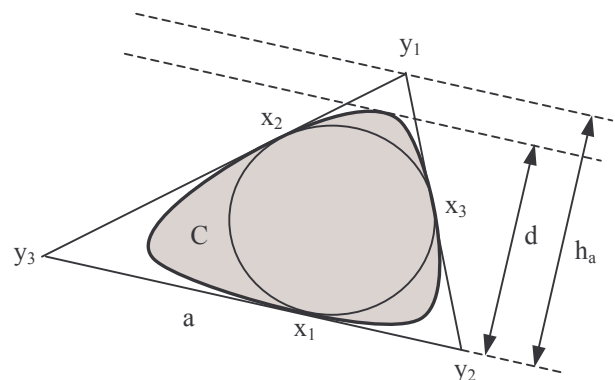
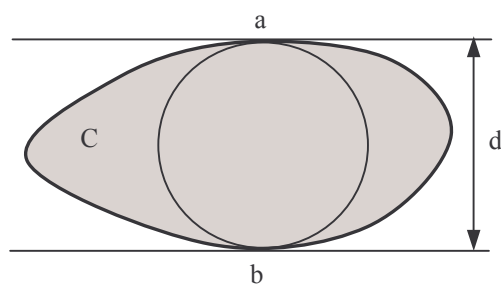
Tra il raggio del cerchio inscritto e lo spessore di un corpo convesso piano sussistono delle relazioni evidenziate dal:

TEOREMA 5.2.1 - Il raggio inscritto r di un corpo convesso piano C di spessore d soddisfa le disequazioni:

$$\frac{d}{3} \leq r \leq \frac{d}{2}.$$

Dimostrazione - Se il cerchio inscritto ha solo due punti di contatto con la frontiera di C questi devono essere estremi di un diametro (cfr. Proprietà 5.2.2).

Poiché il cerchio inscritto giace dentro ogni striscia formata da una coppia di rette parallele di supporto alla figura, dovendo essere interno alla figura, si ha che esso ha diametro che non può superare d, per cui $r \leq \frac{d}{2}$.



Se il cerchio inscritto S tocca la frontiera del corpo convesso C in tre punti x_1, x_2, x_3 questi sono vertici di un triangolo acutangolo o rettangolo. Il caso in cui il triangolo è rettangolo ricade nel caso precedente in cui due punti sono estremi di un diametro e quindi $r \leq \frac{d}{2}$.

Nel caso del triangolo acutangolo, poiché solo una linea di supporto può passare per un

punto di frontiera di S segue che tale punto non può essere un punto angoloso per C .

Se il cerchio S passa per x_1, x_2, x_3 , punti di frontiera di C , allora le linee di supporto a C in x_1, x_2, x_3 formano un triangolo $\text{conv}(y_1, y_2, y_3)$ che è circoscritto sia ad S che a C .

Indichiamo con a, b, c le lunghezze dei lati di questo triangolo, supponiamo che a sia la lunghezza del lato maggiore ed indichiamo con h_a, h_b, h_c le corrispondenti altezze. L'area del triangolo $\text{conv}(y_1, y_2, y_3)$ è $\frac{1}{2}(a + b + c)r$ oppure $\frac{1}{2}a h_a$. Poiché abbiamo supposto

$a \geq b$ ed $a \geq c$, dall'uguaglianza $\frac{1}{2}(a + b + c)r = \frac{1}{2}a h_a$ segue $h_a = \left(1 + \frac{b}{a} + \frac{c}{a}\right)r \leq 3r$ ossia

$r \geq \frac{1}{3}h_a$. Ma h_a non può essere minore dello spessore d per cui $r \geq \frac{d}{3}$.

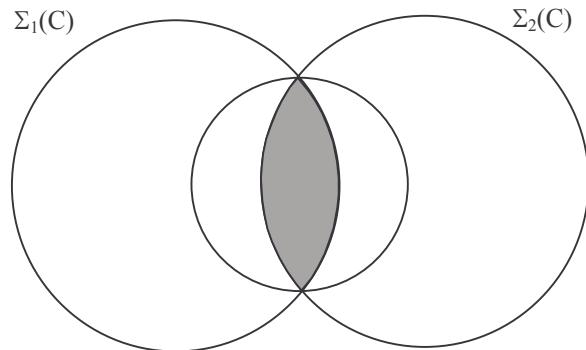
In modo analogo si definisce il cerchio circoscritto.

Sia C un compatto ad interno non vuoto e sia Σ un qualunque cerchio di centro (x, y) e raggio τ contenente C . Consideriamo nello spazio a tre dimensioni l'insieme \mathcal{B} delle terne (x, y, τ) , dove (x, y) sono le coordinate del centro e τ il raggio di un cerchio contenente C ; l'insieme \mathcal{B} non è limitato superiormente ma è chiuso e limitato inferiormente quindi τ raggiungerà un minimo R detto **raggio circoscritto**.

DEFINIZIONE 5.2.3 - Dato un corpo convesso piano C , il cerchio $\Sigma(C)$ contenente C ed avente come raggio il raggio circoscritto, si dice **cerchio circoscritto a C** .

Tale cerchio è determinato in grandezza e posizione, quindi esiste ed è unico.

Siano infatti $\Sigma_1(C)$ e $\Sigma_2(C)$ due cerchi di equal raggio contenenti C . Allora C è contenuto in $\Sigma_1(C) \cap \Sigma_2(C)$ e questa "lente" può essere inscritta in un cerchio di raggio Σ minore del raggio di $\Sigma_1(C)$ e $\Sigma_2(C)$, il che è assurdo.



La dimostrazione segue immediatamente anche per via analitica.

Sia $\Sigma_1(C)$ il cerchio di centro $(0, 0)$ e raggio r e sia $\Sigma_2(C)$ il cerchio di centro $(d, 0)$ e raggio anch'esso r . Il punto che sta in $\Sigma_1(C) \cap \Sigma_2(C)$ deve soddisfare alle disequazioni:

$$x^2 + y^2 \leq r^2 \quad (x - d)^2 + y^2 \leq r^2$$

Sommando tali disequazioni si ottiene:

$$2x^2 - 2xd + d^2 + 2y^2 \leq 2r^2$$

e, semplificando, $x^2 - xd + \frac{d^2}{2} + y^2 \leq r^2$ ossia:

$$\left(x - \frac{d}{2}\right)^2 + y^2 \leq r^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2.$$

Dunque l'intersezione giace in un disco centrato in $\left(\frac{d}{2}, 0\right)$ con raggio h dato da:

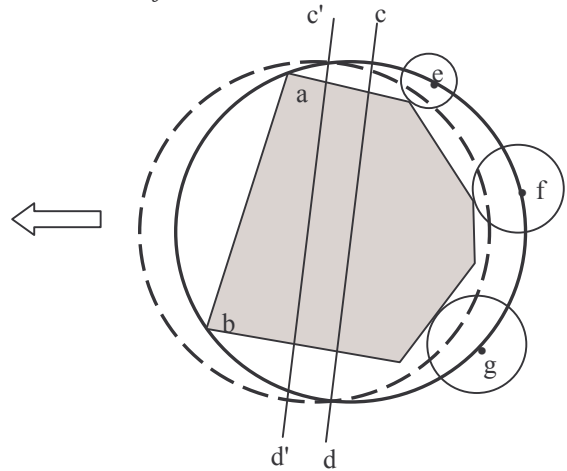
$h^2 = r^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2$, essendo d la distanza dei centri.

PROPRIETÀ 5.2.3 - (Caratterizzazione del cerchio circoscritto) *Detti C un corpo convesso e $\Sigma(C)$ il suo cerchio circoscritto, tutti i punti di intersezione tra bdC e $bd\Sigma(C)$ sono contenuti in un arco (a, b) uguale o maggiore di una semicirconferenza.*

Dimostrazione - E' analoga a quella del cerchio inscritto. Supponiamo che l'arco (a, b) sia minore di una semicirconferenza e consideriamo un diametro $[c, d]$ che non divide a da b lasciandoli quindi dalla stessa parte.

Prendiamo una corda $[c', d']$ parallela a $[c, d]$ nella semicirconferenza (c, a, b, d) che comunque non divide a da b e consideriamo δ il minimo dei raggi dei cerchi aventi centro sull'arco (c', c, e, d, d') e non contenenti alcun punto di C .

Facendo subire a $\Sigma(C)$ una "piccola" traslazione, ossia minore di δ , perpendicolarmente a $[c, d]$ si ottiene un cerchio di raggio uguale al raggio di $\Sigma(C)$ contenente C e che non contiene nella frontiera alcun punto della frontiera di C , il che è assurdo. Quindi (a, b) è maggiore od uguale ad una semicirconferenza.



OSSERVAZIONE - Nel piano siano C un insieme compatto ad interno non vuoto e Σ il suo cerchio circoscritto:

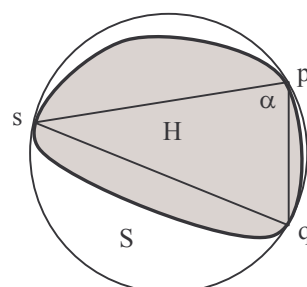
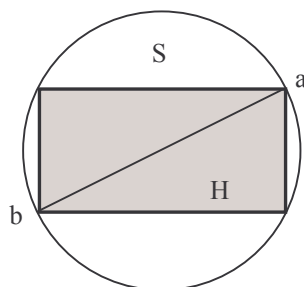
- se $bd C \cap bd \Sigma$ è formato solo da due punti, questi sono necessariamente estremi di un diametro.
- se $bd C \cap bd \Sigma$ è formato da più di due punti, almeno tre di essi sono vertici di un triangolo rettangolo o acutangolo
- il centro di Σ appartiene all'involuppo convesso di $bd C \cap bd \Sigma$.

E' possibile dare delle relazioni tra il raggio circoscritto R di un corpo convesso H ed il suo diametro $D(H)$, ricordando (cfr. Definizione 1.7.2) che si dice diametro di un insieme H l'estremo superiore delle distanze tra due suoi punti.

TEOREMA 5.2.2 - *In \mathbf{R}^2 il raggio circoscritto R di un corpo convesso H di diametro $D(H)$ soddisfa le disuguaglianze:*

$$\frac{D(H)}{2} \leq R \leq \frac{D(H)}{\sqrt{3}} = D(H)(0,577\dots).$$

Dimostrazione - Se il corpo convesso H tocca il cerchio circoscritto S in due punti diametralmente opposti a e b , la più grande distanza fra due punti della figura H è $2R$ poiché H è contenuto in S . Quindi $D(H) = 2R$ come accade nel caso del rettangolo.



Se il corpo convesso H tocca il cerchio circoscritto in tre punti p, q, s formanti un triangolo acutangolo non equilatero almeno uno degli angoli, indichiamolo con α , risulta maggiore di 60° . Indicato con a il lato opposto all'angolo α , per una nota proprietà di trigonometria, si ha $R = \frac{a}{2\text{sen}\alpha}$, ma $\text{sen}\alpha > \text{sen } 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ed $a \leq D(H)$ per cui risulta $R < \frac{D(H)}{\sqrt{3}}$.

Nel caso in cui H sia un triangolo equilatero risulta $R = \frac{D(H)}{\sqrt{3}}$.

TEOREMA 5.2.3 - (Jung) *Se X è un corpo convesso in \mathbf{R}^n con raggio circoscritto R e diametro $D(X)$ allora:*

$$R \leq D(X) \sqrt{\frac{n}{2n+2}}.$$

Dimostrazione - E' sufficiente considerare il caso in cui X è un politopo, il caso generale può essere ottenuto per approssimazione.

Il centro della circumsfera è contenuto nell'involuppo convesso di quei vertici di X che giacciono sulla frontiera della circumsfera e di conseguenza appartengono all'involuppo convesso di s di tali punti dove $s \leq n+1$ per il Teorema 1.9.1 (Carathéodory).

Consideriamo il centro della sfera come origine e siano x_1, \dots, x_s gli s vertici di X .

Esisteranno s numeri $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ tali che $\sum_{i=1}^s \lambda_i x_i = 0$ dove $\sum_{i=1}^s \lambda_i = 1$ e $\lambda_i \geq 0$ con $1 \leq i \leq s$.

Sia D_1 il massimo di $\|x_i - x_j\|$ per ogni $j = 1, \dots, s$. Si consideri:

$$\begin{aligned} (1 - \lambda_j)D_1^2 &= (\lambda_1 + \dots + \lambda_s)D_1^2 - \lambda_j D_1^2 = (\lambda_1 + \dots + \lambda_{j-1} + \lambda_{j+1} + \dots + \lambda_s) \left(\max \|x_i - x_j\| \right)^2 \geq \\ &\geq \lambda_1 \|x_1 - x_j\|^2 + \dots + \lambda_{j-1} \|x_{j-1} - x_j\|^2 + \lambda_j \|x_j - x_j\|^2 + \lambda_{j+1} \|x_{j+1} - x_j\|^2 + \dots + \lambda_s \|x_s - x_j\|^2 = \\ &= \sum_{i=1}^s \lambda_i \|x_i - x_j\|^2 = \sum_{i=1}^s \lambda_i \left(\|x_i\|^2 + \|x_j\|^2 - 2x_i \cdot x_j \right) \text{ ma gli } x_i \text{ ed } x_j \text{ sono punti di frontiera} \end{aligned}$$

$$\text{quindi} = \sum_{i=1}^s \lambda_i (2R^2 - 2x_i \cdot x_j) = 2R^2 - 2x_j \cdot \sum_{i=1}^s \lambda_i x_i = 2R^2 - 2x_j \cdot (\mathbf{0}) = 2R^2.$$

Sommando questa disuguaglianza da 1 ad s si ha per il primo membro

$$\sum_{j=1}^s (1 - \lambda_j)D_1^2 = [(1 - \lambda_1) + \dots + (1 - \lambda_s)]D_1^2 = \left(s - \sum_{j=1}^s \lambda_j \right) D_1^2 = (s - 1)D_1^2$$

e per il secondo membro si ha $2sR^2$ quindi $(s - 1)D_1^2 \geq 2sR^2$ da cui $D_1 \geq R \sqrt{\frac{2s}{s-1}}$ dunque

$$D \geq D_1 \geq R \sqrt{\frac{2s}{s-1}}.$$

$$\text{Ma } \frac{2s}{s-1} \geq \frac{2n+2}{n} \text{ dunque } D \geq R \sqrt{\frac{2n+2}{n}}.$$

OSSERVAZIONE - Valgono le seguenti disuguaglianze, ove i simboli hanno il significato prima precisato:

- per \mathbf{R}^2 si ha: $\frac{d}{3} \leq r_i \leq \frac{d}{2}$; è il Teorema di 5.2.1 dimostrato da Blaschke nel 1914.

- per \mathbf{R}^n con n generico $\begin{cases} r_i \geq \frac{d}{2\sqrt{n}} & \text{se } n \text{ è dispari} \\ r_i \geq \frac{d\sqrt{n+2}}{2(n+1)} & \text{se } n \text{ è pari} \end{cases}$ dimostrato da Steinhagen nel 1922,

vedi [E].

- $\frac{D}{2} \leq R_c \leq D\sqrt{\frac{n}{2n+2}}$; è il Teorema 5.2.2 dimostrato da Jung nel 1901.

Notiamo che la dimostrazione di tale teorema presentata sopra fa uso del teorema di Carathéodory (1907), che è successivo alla dimostrazione originale del 1901.

5.3 - Anello minimale di un corpo convesso.

Dato un corpo convesso C consideriamo le coppie concentriche di cerchi di centro $c = (x, y)$ e raggi R ed r ($R > r$) tali che il cerchio di raggio R contenga C ed il cerchio di raggio r sia contenuto in C .

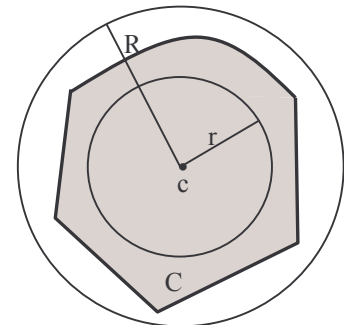
Sia ora \mathcal{D} l'insieme delle quaterne (x, y, R, r) dove (x, y) sono le coordinate del centro, R il raggio del cerchio contenente C ed r il raggio del cerchio contenuto in C .

Si prova che l'insieme \mathcal{D} è chiuso. La quantità $R - r$ non è mai negativa, quindi è limitata inferiormente ed ha un limite che raggiunge, detto **spessore minimo**.

Al corpo convesso C è associata una corona circolare di spessore minimo $R - r$ detta **anello minimale** o **minimal annulus** o **corona circolare minima**.

Per provare l'unicità dell'anello minimale ed al tempo stesso caratterizzarlo si prova che:

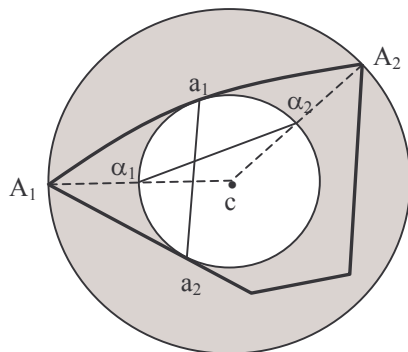
1. se una corona non gode di una certa proprietà "P" non è anello minimale;
2. la corona circolare di C che gode della proprietà "P" è unica.



DEFINIZIONE 5.3.1 - Diciamo che una corona circolare (K_1, K_2) associata a C , dove K_1 è il cerchio di centro c e raggio r e K_2 è il cerchio di centro c e raggio $R > r$, gode della proprietà "P" se:

1. esistono due punti $a_1, a_2 \in bd C \cap bd K_1$ e due punti $A_1, A_2 \in bd C \cap bd K_2$ tali che, dette α_1 ed α_2 le proiezioni radiali di A_1 ed A_2 su $bd K_1$, si ha:

$$\text{conv}(a_1, a_2) \cap \text{conv}(\alpha_1, \alpha_2) \neq \emptyset;$$



In questa forma la proprietà è stata estesa a dimensione $d = 3$ da Kritikos nel 1927 ed a dimensione qualsiasi da Bárány nel 1988.

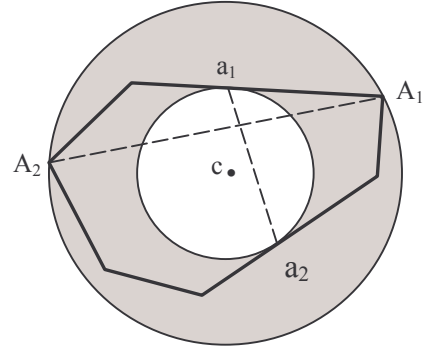
2. non esistono due punti $a, b \in K(\text{cerchio unitario di centro l'origine})$ tali che tutti i

punti dell'insieme $\{x: x - 0 = \frac{p-c}{r}$ ove $p \in bd C \cap bd K_1\}$ sono elementi dello stesso sottoarco di $bd K$ con punti finali a, b mentre tutti i punti dell'insieme $\{x: x - 0 = \frac{q-c}{R}$ ove $q \in bd C \cap bd K_2\}$ sono elementi dell'altro sottoarco.

Invece di K si può anche considerare il cerchio K_1 .

La proprietà "P" enunciata nei seguenti modi vale solo in dimensione 2.

3. esistono due punti $a_1, a_2 \in bd C \cap bd K_1$ e due punti $A_1, A_2 \in bd C \cap bd K_2$ tali che:
 $[a_1, a_2] \cap [A_1, A_2] \neq \emptyset$;
4. esistono due punti $a_1, a_2 \in bd C \cap bd K_1$ e due punti $A_1, A_2 \in bd C \cap bd K_2$ che si separano mutuamente cioè a_1 ed a_2 sono elementi di due diversi archi individuati da A_1 e A_2 su $bd C$.

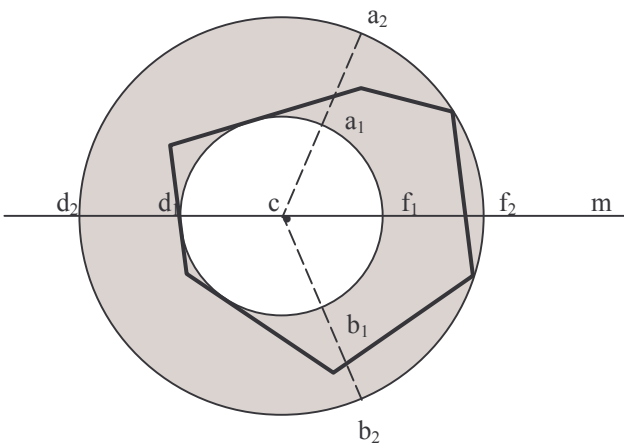
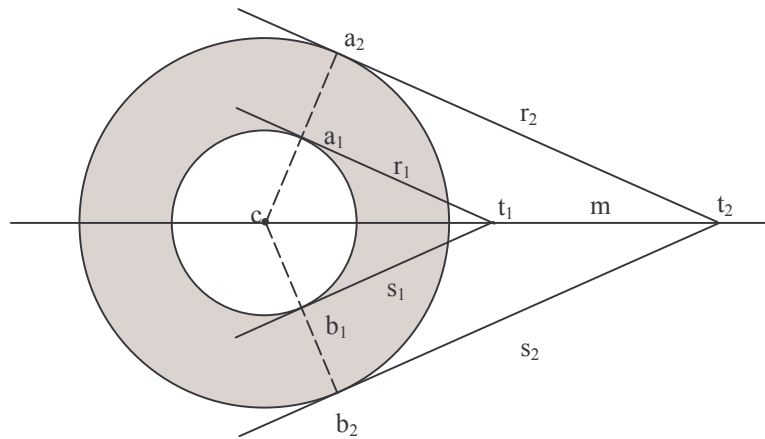


PROPRIETÀ 5.3.1 - Se una corona circolare (K_1, K_2) di C non gode della proprietà "P" non è l'anello minimale di C .

Dimostrazione - Sia c il centro di (K_1, K_2) corona circolare di C e supponiamo che per (K_1, K_2) non valga la proprietà "P" nella forma (2) in cui K coincide con K_1 .

In figura vengono indicati con a_1, b_1 due punti di $bd K_1$ con le relative tangenti r_1 ed s_1 e sia $\{t_1\} = r_1 \cap s_1$ e con a_2, b_2 i corrispondenti punti di $bd K_2$ con le relative tangenti r_2 ed s_2 e sia $\{t_2\} = r_2 \cap s_2$.

I punti c, t_1, t_2 stanno sulla stessa semiretta della retta m uscente da c .



Denotiamo con d_1 ed f_1 i punti di intersezione di m con $bd K_1$ in modo che $bd C \cap (a_1, f_1, b_1) = \emptyset$ e con d_2 ed f_2 i punti corrispondenti in $bd K_2$, poiché non è soddisfatta la condizione "P" risulta $bd C \cap (a_2, d_2, b_2) = \emptyset$.

In figura i punti $bd C \cap bd K_1$ sono interni all'arco (a_1, d_1, b_1) ed i punti $bd C \cap bd K_2$ sono interni all'arco (a_2, f_2, b_2) .

Poiché l'arco (a_2, d_2, b_2) di $bd K_2$ non contiene punti di C e l'arco (a_1, f_1, b_1) di $bd K_1$ ha tutti i punti interni a C , esistono due numeri positivi δ_1 e δ_2 tali che:

- i cerchi di centro $x \in (a_2, d_2, b_2)$ e raggio δ_2 sono esterni a C ;
- i cerchi di centro $x \in (a_1, f_1, b_1)$ e raggio δ_1 sono contenuti in C .

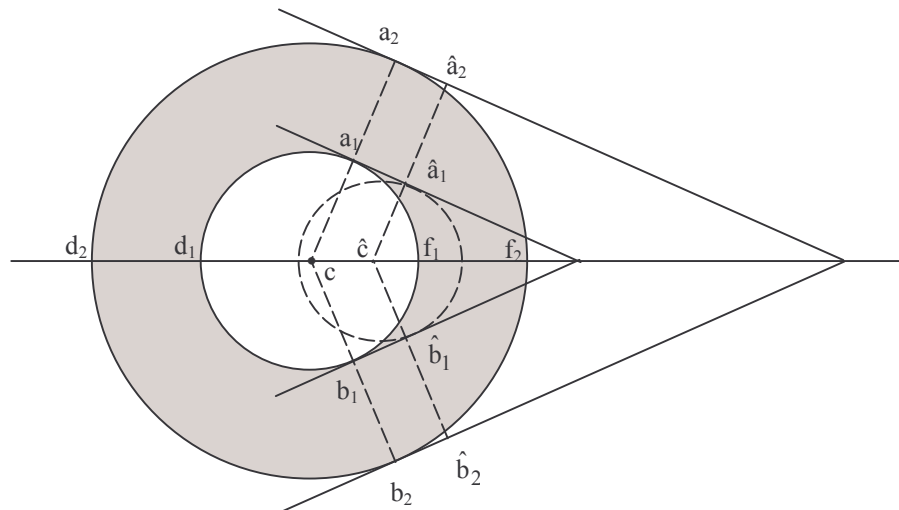
Sia $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$.

Prendiamo un punto del segmento $[c, f_1]$, sia ad esempio $\hat{c} \in \text{int}C$ tale che $d(c, \hat{c}) < \delta$.

Sia \hat{a}_1 il punto di intersezione della retta per \hat{c} e parallela a $[c, a_1]$ con r_1 e sia \hat{a}_2 il punto di intersezione della retta per \hat{c} e parallela a $[c, a_1]$ con r_2 . In modo analogo (v. figura) si definiscono \hat{b}_1 e \hat{b}_2 .

Detto \hat{K}_1 il cerchio di centro \hat{c} e raggio $d(\hat{c}, \hat{a}_1) = \hat{r}$ e \hat{K}_2 il cerchio di centro \hat{c} e raggio $d(\hat{c}, \hat{a}_2) = \hat{R}$. Si ha:

- i) $\hat{K}_1 \subset C$ perché l'intersezione di \hat{K}_1 con K_1 dà dei punti appartenenti alla striscia $\text{conv}(a_1, c, \hat{c}, \hat{a}_1) \cup \text{conv}(b_1, c, \hat{c}, \hat{b}_1)$, di conseguenza, indicato con \hat{d}_1 il punto di intersezione di \hat{K}_1 con il segmento $[\hat{c}, d_1]$, l'arco $(\hat{a}_1, \hat{d}_1, \hat{b}_1)$ non può superare l'arco (a_1, d_1, b_1) ;



- ii) $\hat{K}_2 \supset C$ e $C \cap bd \hat{K}_2 = \emptyset$ perché l'intersezione di K_2 con \hat{K}_2 è costituita da due punti che stanno nella striscia $\text{conv}(\hat{a}_2, \hat{c}, c, a_2) \cup \text{conv}(b_2, c, \hat{c}, \hat{b}_2)$ e \hat{K}_2 contiene tutti i punti di $bd C \cap bd K_2$, per costruzione di \hat{c} , essendo $d(c, \hat{c}) < \delta$.

iii) $\hat{R} - \hat{r} = d[\hat{a}_1, \hat{a}_2] = d[a_1, a_2] = R - r$.

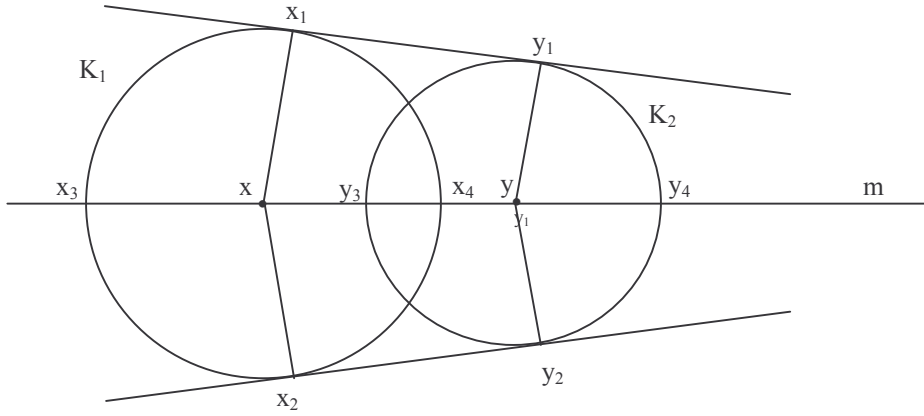
Quindi $R - r$ non è minimo in quanto nella corona circolare del corpo convesso C , che indichiamo con (\hat{K}_1, \hat{K}_2) , la differenza dei raggi $\hat{R} - \hat{r}$ si può ancora diminuire.

PROPRIETÀ 5.3.2 - Per ogni corpo convesso C esiste un'unica corona circolare che gode della proprietà "P".

Dimostrazione - Supponiamo per assurdo che esistano due diverse corone circolari $K_x(C)$ e $K_y(C)$ di centri rispettivamente x ed y soddisfacenti la condizione P. Per brevità poniamo:

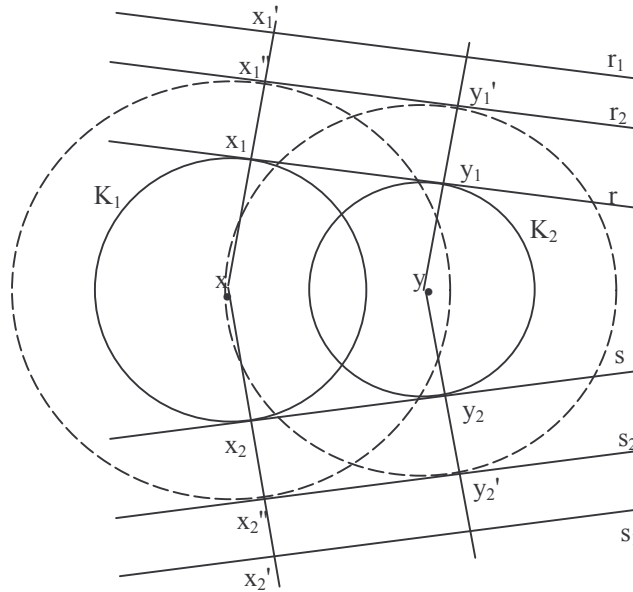
$K_1 = K(x, r(x))$, $K_2 = K(y, r(y))$, $K_1' = K(x, R(x))$, $K_2' = K(y, R(y))$. Siano r ed s le due tangenti comuni a K_1, K_2 ed a $\text{conv}(K_1 \cup K_2)$ e sia m la retta per x ed y . Siano poi:

- $\{x_1\} = r \cap bd K_1$, $\{y_1\} = r \cap bd K_2$, $\{x_2\} = s \cap bd K_1$, $\{y_2\} = s \cap bd K_2$
 - $\{x_3, x_4\} = m \cap bd K_1$, $\{y_3, y_4\} = m \cap bd K_2$, scegliendo gli indici in modo che:
- $bd C \cap bd K_1 \subseteq (x_1, x_3, x_2)$, $bd C \cap bd K_2 \subseteq (y_1, y_4, y_2)$.



Indichiamo con x_i' i punti di $bd K_1'$ corrispondenti ai punti x_i di $bd K_1$ e con y_i' i punti di $bd K_2'$ corrispondenti ai punti y_i di $bd K_2$ per $i = 1, 2, 3, 4$. Siano r_1 ed s_1 le tangenti a K_1' in x_1' ed x_2' rispettivamente ed r_2 ed s_2 le tangenti a K_2' in y_1' ed y_2' rispettivamente.

Le rette r_1 ed r_2 sono parallele ad r , mentre le rette s_1 ed s_2 sono parallele ad s .



Si possono presentare due casi:

i) se r_2 giace fra r ed r_1 sia $\{x_1''\} = r_2 \cap [x_1, x_1']$. Indichiamo con K_1'' il cerchio di centro x e raggio $d(x, x_1'')$.

Poiché $R(x) - r(x) = R(y) - r(y)$ si ha $K_1 \subset K_1'' \subset K_1'$ e le rette r_2 ed s_2 sono tangenti comuni a K_1'' e K_2' .

Indichiamo con x_i'' i punti di $bd K_1''$ corrispondenti ai punti x_i di K_1 . I punti x_1'' ed x_2'' di K_1'' non appartengono al cerchio K_2' , mentre i punti y_1' e y_2' di K_2' non appartengono al cerchio K_1'' , inoltre $x \in K_1''$ dato che è centro ed $x \in K_2'$ perché $x \in C$.

Segue che $bd K_1'' \cap bd K_2' \subset \text{conv}(x_1'', x, y, y_1') \cup \text{conv}(x_2'', x, y, y_2')$. Poiché tutti i punti dell'arco (x_1'', x_3'', x_2'') non appartengono a K_2' mentre $C \subset K_2'$ si ha:

$$bd C \cap bd K_1' \subseteq (x_1', x_4', x_2').$$

Ma questo è assurdo perché si era supposto $bd C \cap bd K_1 \subseteq (x_1, x_3, x_2)$ e per $K_x(C)$ deve valere la proprietà "P".

ii) se r_1 giace fra r ed r_2 sia $\{y_1''\} = r_1 \cap [y_1, y_1']$. Indichiamo con K_2'' il cerchio di centro y e passante per y_1'' . Allora si ha che $K_2 \subset K_2'' \subset K_2'$.

Indichiamo con y_i'' i punti di K_2'' corrispondenti ai punti y_i di K_2 . Segue, come nel caso precedente, che:

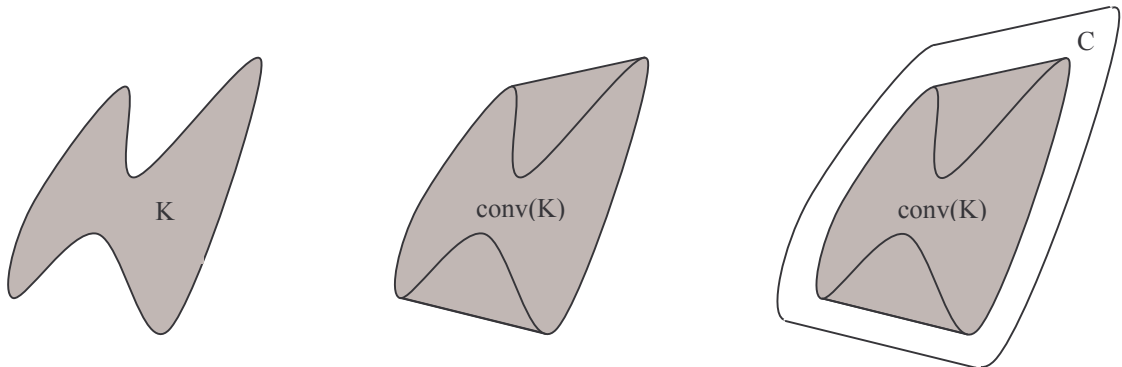
$$bd C \cap bd K_2' \subseteq (y_1', y_3', y_2'),$$

il che è assurdo, in quanto avevamo supposto $bd C \cap bd K_2 \subseteq (y_1, y_4, y_2)$ e $K_y(C)$ deve soddisfare la condizione "P".

5.4 - Soluzioni geometriche del problema isoperimetrico.

Considerata la classe \mathcal{L} dei compatti del piano ad interno non vuoto la cui frontiera è una curva chiusa semplice di lunghezza assegnata L il problema isoperimetrico consiste nel cercare se esiste tra tali compatti uno di area massima.

Osserviamo che possiamo limitarci a considerare compatti convessi; infatti fissato comunque un compatto K non convesso, in \mathcal{L} esiste un convesso C tale che $\text{area}(C) > \text{area}(K)$. Considerato $\text{conv}(K)$: si ha che il perimetro di $\text{conv}(K)$ è minore di L e l'area di $\text{conv}(K)$ è maggiore dell'area di K . Il convesso C cercato di perimetro L si ottiene da $\text{conv}(K)$ con una dilatazione di ragione > 1 . Risultando $\text{area}(C) > \text{area}(\text{conv}(K)) > \text{area}(K)$ segue la tesi.



Le definizioni di area e di perimetro di un corpo convesso vengono qui trattate in modo intuitivo, mentre per una formulazione rigorosa rimandano ai testi di Analisi Matematica.

Se il corpo convesso è una figura base come il triangolo pieno (2-simplex) od il quadrato pieno allora l'area ed il perimetro sono i numeri dati dalle formule della geometria elementare euclidea.

Più in generale se il corpo convesso C appartiene all'insieme \mathcal{P} dei poligoni, il perimetro è la somma delle lunghezze dei suoi spigoli e scomponendolo si ricava facilmente l'area.

Generalizziamo questi concetti ad un qualsiasi corpo convesso piano mediante la:

DEFINIZIONE 5.4.1 - Sia C un corpo convesso nello spazio euclideo 2-dimensionale: allora l'area di C ed il perimetro sono definiti rispettivamente da:

$$S(C) = \sup\{S(P) : P \in \mathcal{P} \wedge P \subset C\} = \inf\{S(P) : P \in \mathcal{P} \wedge P \supset C\}$$

$$L(C) = \sup\{L(P) : P \in \mathcal{P} \wedge P \subset C\} = \inf\{L(P) : P \in \mathcal{P} \wedge P \supset C\}.$$

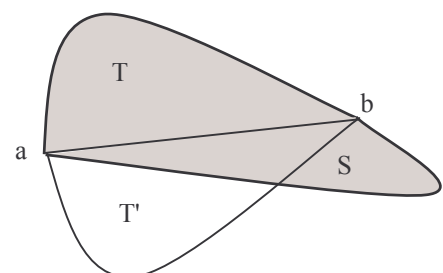
Ciò posto vediamo come è stato risolto il problema isoperimetrico per vie geometriche elementari.

5.4.1 - Tentativi di Steiner e critica di Perron.

TEOREMA 5.4.1 - (Steiner).- Dato un corpo convesso piano K che non sia un cerchio, esiste un altro corpo convesso K' con lo stesso perimetro ed area maggiore.

Dimostrazione - Sia r una retta che biseca il perimetro e divide l'area in parti disuguali. Siano S e T i due sottoinsiemi in cui r divide K e supponiamo che T abbia area maggiore di S . Riflettendo T su r , otteniamo T' .

Ora $T \cup T'$ ha area maggiore di K e lo stesso perimetro, ma non è detto che sia convesso.



Per trovare K' si può utilizzare $\text{conv}(T \cup T')$ e poi fare un'omotetia in modo da riottenere lo stesso perimetro.

Supponiamo ora che ogni retta r bisecchi sia il perimetro che l'area.

Sia $r \cap K$ il segmento $[a, b]$, poiché K non è un cerchio esiste sul contorno di K almeno un punto c tale che l'angolo (a, c, b) non sia retto.

Vale la proprietà che fra tutti i triangoli aventi due lati di lunghezza fissata, ha area massima quello in cui tali lati sono ortogonali.

Allora si costruisce il triangolo rettangolo $\text{conv}(a', b', c')$ la cui ipotenusa $[a', b']$ è maggiore del segmento $[a, b] = r \cap K$. Il lato $[a', c']$ di lunghezza uguale ad $[a, c]$ lo si completa come su K con l'insieme A , il lato $[c', b']$ di lunghezza uguale ad $[c, b]$ lo si completa come su K con l'insieme B .

Ora si costruisce $M = A \cup B \cup \text{conv}(a', b', c')$ che riflesso su r dà M' .

L'insieme risultante $M \cup M'$ ha lo stesso perimetro di K , ma area maggiore.

Si conclude poi come nel caso visto prima.

Il teorema precedente non implica che il cerchio abbia area massima.

E' come dire, secondo Perron, che poichè ogni numero naturale $\neq 1$ ha come quadrato un numero maggiore e poichè ciò non succede per il numero 1, tale numero è il più grande di tutti.

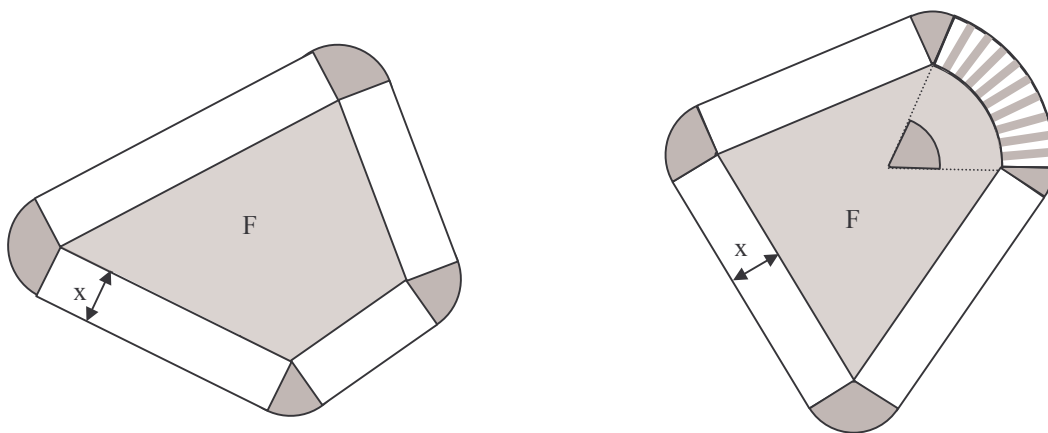
Che il problema isoperimetrico abbia soluzione e che la sua soluzione sia il cerchio lo proveremo usando le dimostrazioni geometriche di Lebesgue e Bonnesen.

5.4.2 - Formule di Steiner.

Sia F una figura convessa piana di perimetro L ed area S . Supponiamo inizialmente che F sia un n -poligono. Ricordando la definizione di corpo parallelo (cfr. Definizione 1.4.2), se F è un poligono, il corpo parallelo F_x di F a distanza x è formato da F stesso, dalla riunione di rettangoli di altezza x costruiti sui lati di F ed infine da settori circolari che traslati in uno stesso centro formano un disco intero, essendo F convesso, la cui area è πx^2 .

Per semplicità indichiamo con L_x il perimetro $L(F_x)$ e con S_x l'area $A(F_x)$. Valgono le formule:

$$L_x = L + 2\pi x \quad S_x = S + xL + \pi x^2$$



Se F non è un poligono queste formule, che sono dette **formule di Steiner**, valgono ancora e si ottengono con un passaggio al limite.

Poiché per la Proprietà 1.4.1 il corpo parallelo F_x è la somma di Minkowski $F + B(o, x)$, dove $B(o, x)$ è la boccia chiusa di centro o e raggio x , l'area di F_x data dalla formula di Steiner si può scrivere (indicando ogni area come $A(\text{figura di cui si considera l'area})$)

$A(F_x) = A(F) + xL + A(B)$ ed il termine xL viene indicato anche con $2A(F; B)$ e viene detto **area mista**.

PROPRIETÀ 5.4.1 - Una figura convessa piana F ed il corpo parallelo F_x hanno lo stesso deficit isoperimetrico.

Dimostrazione - Per definizione il deficit di D_x del corpo parallelo F_x è $\frac{L_x^2}{4\pi} - S_x$. Usando le formule di Steiner risulta:

$$D_x = \frac{L_x^2}{4\pi} - S_x = \frac{L^2 + 4\pi^2 x^2 + 4L\pi x}{4\pi} - (S + xL + \pi x^2) = \frac{L^2}{4\pi} - S = D \text{ deficit del convesso } F.$$

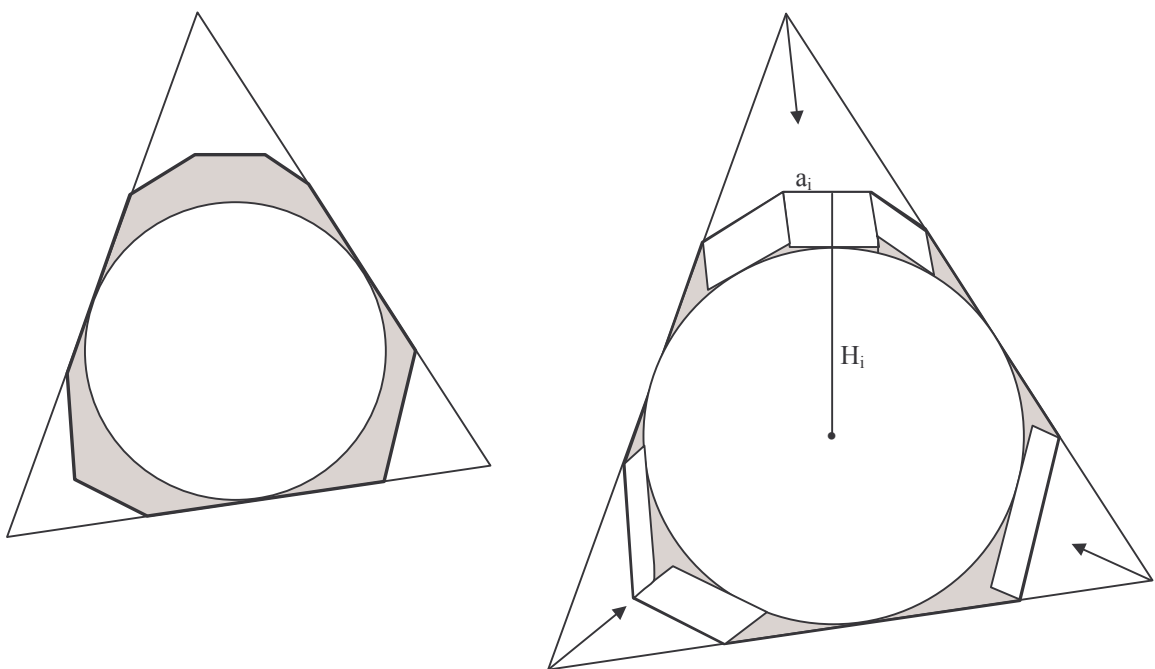
Si consideri ora il trinomio di secondo grado $f(x) = S + xL + \pi x^2$: il suo discriminante è $L^2 - 4\pi S$, cioè il deficit della figura F a meno della costante 4π .

Per provare che il deficit è non negativo dimostriamo inizialmente che, se indichiamo con r ed R rispettivamente i raggi del cerchio inscritto e di quello circoscritto alla figura, valgono le disuguaglianze: $f(-r) \leq 0$ (**disuguaglianza di Lebesgue**) e $f(-R) \leq 0$ (**disuguaglianza di Bonnesen**).

5.4.3 - La disuguaglianza di Lebesgue.

PROPRIETÀ 5.4.2 (Lebesgue 1914) - Siano F una figura convessa piana ed r il raggio del cerchio inscritto ad F . Considerato il trinomio di secondo grado $f(x) = S + xL + \pi x^2$ risulta: $f(-r) \leq 0$.

Dimostrazione - Consideriamo il cerchio inscritto e supponiamo che vi siano almeno tre punti di contatto non giacenti su una stessa semicirconferenza. Le tangenti in questi tre punti formano un triangolo circoscritto ad F .



Supponiamo che F sia un poligono di n lati e che sia a_i il lato situato a distanza H_i dal centro del cerchio inscritto ($i = 1, \dots, n$). Spostiamo a_i parallelamente alla bisettrice di un angolo

lo del triangolo fino ad essere tangente al cerchio. Procediamo allo stesso modo con tutti gli altri lati del poligono F . Otteniamo un poligono non convesso che contiene sempre il cerchio e quindi la sua area è maggiore dell'area del cerchio inscritto, cioè di πr^2 . L'area di tale poligono è la somma di tutti i triangoli di base a_i ed altezza H_i meno l'area di tutti i parallelogrammi di base a_i e di altezza $H_i - r$ cioè:

$$\sum_{i=1}^n \left[\frac{1}{2} H_i a_i - (H_i - r) a_i \right] = \sum_{i=1}^n \left[-\frac{1}{2} H_i a_i + r a_i \right] = r \sum_{i=1}^n [a_i] - \sum_{i=1}^n \left[\frac{1}{2} H_i a_i \right] = r L - S \geq \pi r^2.$$

Segue $f(-r) = S - rL + \pi r^2 \leq 0$.

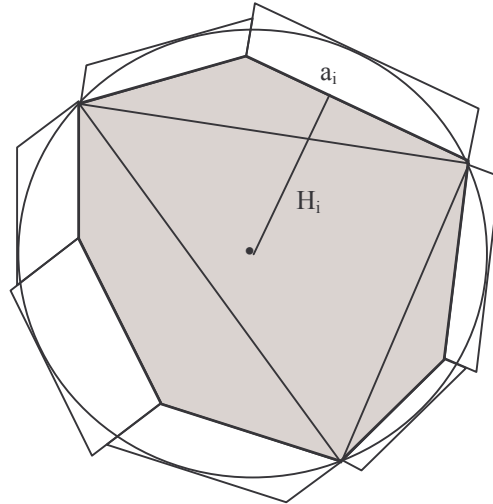
Nel caso generale di una figura convessa che non sia necessariamente un poligono è sufficiente traslare tutte le rette tangenti parallelamente verso il cerchio fino a renderle tangenti ad esso, poi riportare i punti di tangenza iniziali sulla nuova retta tangente parallelamente ad una stessa direzione. Il luogo dei punti così ottenuti è una figura che contiene il cerchio e si ottiene ancora la disuguaglianza precedente. Notiamo che in questo caso l'uguaglianza si ottiene solo quando la figura coincide con il cerchio inscritto, mentre negli altri casi l'area della figura ottenuta è maggiore di quella del cerchio inscritto.

5.4.4. - La disuguaglianza di Bonnesen.

PROPRIETÀ 5.4.3 (Bonnesen 1920) - *Siano F una figura convessa piana ed R il raggio del cerchio circoscritto ad F . Considerato il trinomio di secondo grado $f(x) = S + xL + \pi x^2$ risulta: $f(-R) \leq 0$.*

Dimostrazione - E' analoga a quella della disuguaglianza di Lebesgue. Supponiamo che F sia un poligono e consideriamo il suo cerchio circoscritto. Supponiamo che il poligono abbia almeno tre punti di contatto con il cerchio circoscritto che formano un triangolo acutangolo.

Considerate le tre direzioni ortogonali ai lati del triangolo spostiamo i lati del convesso parallelamente a tali direzioni in modo che diventino tangenti al cerchio circoscritto. La figura così ottenuta (non convessa) contiene il cerchio e quindi avrà area maggiore di πR^2 . Se indichiamo con a_i ($i = 1, \dots, n$) la lunghezza di un lato generico e con H_i la sua distanza dal centro, l'area della nuova figura è la somma di tutti i triangoli di base a_i ed altezza H_i più l'area di tutti i parallelogrammi di base a_i ed altezza $R - H_i$ quindi:



$$\sum_{i=1}^n \left[\frac{1}{2} H_i a_i + (R - H_i) a_i \right] = \sum_{i=1}^n \left[R a_i - \frac{1}{2} H_i a_i \right] = R \sum_{i=1}^n [a_i] - \sum_{i=1}^n \left[\frac{1}{2} H_i a_i \right] = R L - S \geq \pi R^2.$$

Segue $f(-R) = S - R L + \pi R^2 \leq 0$.

Se ci sono due punti di contatto, diametralmente opposti, si ripete la stessa costruzione spostando i lati parallelamente alla direzione delle due tangenti in modo che diventino tangenti al cerchio.

Notiamo che l'uguaglianza si ottiene solo quando la figura coincide con il cerchio circoscritto.

5.4.5 - Disuguaglianze isoperimetriche.

PROPRIETÀ 5.4.4 - Se F è una figura convessa piana di perimetro L ed area S il suo deficit isoperimetrico è non negativo, cioè vale la disuguaglianza isoperimetrica:

$$\frac{L^2}{4\pi} - S \geq 0.$$

Dimostrazione - Consideriamo il trinomio di secondo grado $f(x) = S + xL + \pi x^2$ il cui discriminante è $L^2 - 4\pi S$, cioè il deficit della figura F a meno della costante 4π .

Per dimostrare che il deficit è non negativo osserviamo che se $x \rightarrow \pm\infty$, allora $f(x) = +\infty$, abbiamo visto che, indicati rispettivamente con r ed R i raggi del cerchio inscritto e di quello circoscritto alla figura, valgono le disuguaglianze: $f(-r) \leq 0$ (**disuguaglianza di Lebesgue**) ed $f(-R) \leq 0$ (**disuguaglianza di Bonnesen**).

Esistono quindi delle radici reali della $f(x)$ ed il suo discriminante è non negativo, cioè $L^2 - 4\pi S \geq 0$, che è la disuguaglianza isoperimetrica classica.

PROPRIETÀ 5.4.5 - Se F è una figura convessa piana di perimetro L ed area S ed r è il raggio del cerchio inscritto, vale la disuguaglianza:

$$\frac{L^2}{4\pi} - S \geq \pi \left(\frac{L}{2\pi} - r \right)^2$$

che migliora la disuguaglianza isoperimetrica classica.

Dimostrazione - La disuguaglianza di Lebesgue si può anche scrivere: $rL - S \geq \pi r^2$; aggiungendo ad entrambi i membri la quantità $L^2/4\pi$ si ha:

$$\begin{aligned} rL - S + \frac{L^2}{4\pi} &\geq \pi r^2 + \frac{L^2}{4\pi} \\ \frac{L^2}{4\pi} - S &\geq \pi \left(r^2 + \frac{L^2}{4\pi^2} - \frac{rL}{\pi} \right) \\ (1) \quad \frac{L^2}{4\pi} - S &\geq \pi \left(\frac{L}{2\pi} - r \right)^2. \end{aligned}$$

PROPRIETÀ 5.4.6 - Se F è una figura convessa piana di perimetro L ed area S ed R è il raggio del cerchio circoscritto, vale la disuguaglianza:

$$\frac{L^2}{4\pi} - S \geq \pi \left(R - \frac{L}{2\pi} \right)^2$$

che migliora la disuguaglianza isoperimetrica classica.

Dimostrazione - Modifichiamo la disuguaglianza di Bonnesen $RL - S \geq \pi R^2$ aggiungendo ad entrambi i membri la quantità positiva $L^2/4\pi$.

$$\begin{aligned} RL - S + \frac{L^2}{4\pi} &\geq \pi R^2 + \frac{L^2}{4\pi} \\ \frac{L^2}{4\pi} - S &\geq \pi \left(R^2 + \frac{L^2}{4\pi^2} - \frac{RL}{\pi} \right) \\ (2) \quad \frac{L^2}{4\pi} - S &\geq \pi \left(R - \frac{L}{2\pi} \right)^2. \end{aligned}$$

PROPRIETÀ 5.4.7 - Vale la seguente disuguaglianza $\frac{L^2}{4\pi} - S \geq \frac{\pi}{4}(R-r)^2$ che migliora la disuguaglianza isoperimetrica classica.

Dimostrazione - Per ottenere la disuguaglianza voluta utilizziamo le relazioni (1) e (2) ottenute rispettivamente dalla disuguaglianza di Lebesgue e da quella di Bonnesen.

$$\text{La (1)} \quad \frac{L^2}{4\pi} - S \geq \pi \left(\frac{L}{2\pi} - r \right)^2 \quad \text{si può scrivere anche} \quad \frac{L^2}{4\pi} - S \geq \left(\frac{L}{2\sqrt{\pi}} - \sqrt{\pi} r \right)^2.$$

$$\text{La (2)} \quad \frac{L^2}{4\pi} - S \geq \pi \left(R - \frac{L}{2\pi} \right)^2 \quad \text{si può scrivere anche} \quad \frac{L^2}{4\pi} - S \geq \left(\sqrt{\pi} R - \frac{L}{2\sqrt{\pi}} \right)^2.$$

Sommando membro a membro si ottiene:

$$2 \left(\frac{L^2}{4\pi} - S \right) \geq \left(\sqrt{\pi} R - \frac{L}{2\sqrt{\pi}} \right)^2 + \left(\frac{L}{2\sqrt{\pi}} - \sqrt{\pi} r \right)^2 \geq \frac{1}{2} \left(\sqrt{\pi} R - \sqrt{\pi} r \right)^2,$$

ricordando che $x^2 + y^2 \geq \frac{1}{2}(x+y)^2$. Quindi:

$$\frac{L^2}{4\pi} - S \geq \frac{\pi}{4}(R-r)^2.$$

5.5 - Il Teorema di Bonnesen.

Ci proponiamo di migliorare la disuguaglianza del deficit isoperimetrico di una figura ottenuta nella Proprietà 5.4.7

$$\frac{L^2}{4\pi} - S \geq \frac{\pi}{4} (R_c - r_i)^2$$

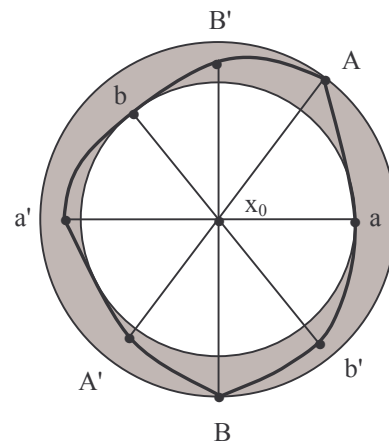
dove indichiamo con R_c il raggio circoscritto ed r_i il raggio inscritto della figura convessa F considerata, dimostrando che essa vale ancora se si considerano i due raggi R ed r della corona circolare minima associata alla figura. Si tratta di un miglioramento essendo

$$r \leq r_i \leq R_c \leq R.$$

L'idea è di trovare nella corona circolare minima di F una nuova figura N di deficit non superiore al deficit di F , contenuta nella corona circolare minima di F che sia simmetrica ed in modo che i cerchi della corona circolare minima coincidano con il cerchio inscritto ed il cerchio circoscritto di N .

Si può arrivare alla tesi con semplici ragionamenti di tipo geometrico, senza usare la simmetrizzazione di Bonnesen.

Ricordiamo (cfr. proprietà "P" della Definizione 5.3.1 enunciata in dimensione 2) che x_0 è il centro della corona circolare minima (c.c.m) di F se e solo se esistono due punti a, b appartenenti al contorno di F ed al contorno del cerchio piccolo e due punti A, B appartenenti al contorno di F ed al contorno del cerchio grande tali che A, B stiano su archi diversi di bd F individuati da a e b .



Riguardo a tale punto esiste il seguente lemma:

LEMMA 5.5.1 - *Esiste una retta m con le seguenti proprietà:*

- i) $m \cap F$ è un segmento con punto medio x_0 ;
- ii) m separa a da b e pure A da B ed almeno una coppia (es. A e B) è separata strettamente ossia i due punti considerati stanno in semipiani aperti diversi.

Dimostrazione - Poiché $x_0 \in \text{int } F$, possiamo rappresentare ogni $x \in \text{bd } F$ in coordinate polari (r, θ) dove

$$r = d(x, x_0) > 0 \quad 0 \leq \theta < 2\pi \quad \text{ed} \quad r = r(\theta).$$

Siano $\theta_a, \theta_b, \theta_A, \theta_B \in (0, 2\pi)$ gli angoli corrispondenti ad a, b, A, B : possiamo porre $0 = \theta_a < \theta_A < \theta_b < \theta_B < 2\pi$.

Consideriamo la funzione $f(\theta) = r(\theta) - r(\theta + \pi)$: f è continua e risulta $f(\theta) = -f(\theta + \pi)$.

Se θ_0 è tale che

$$f(\theta_0) = 0$$

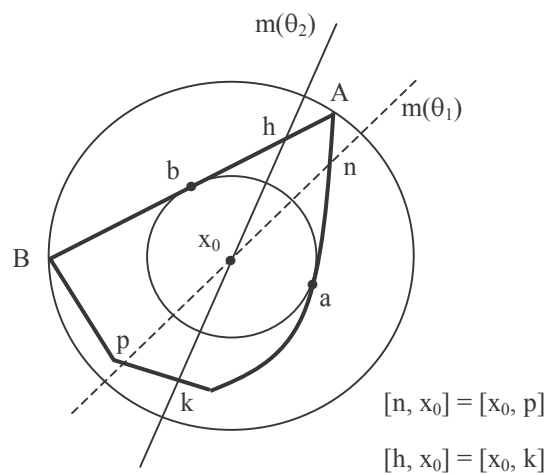
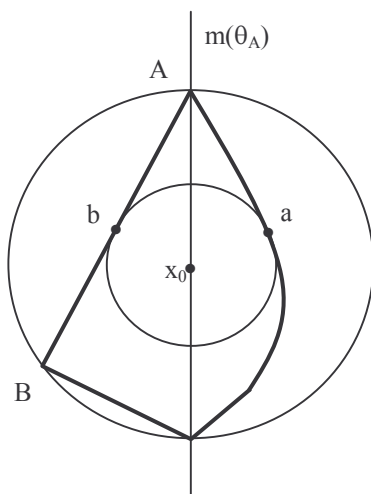
allora la linea m per x_0 definita da θ_0 , che indichiamo con $m(\theta_0)$, è tale che $r(\theta_0) = r(\theta_0 + \pi)$ quindi soddisfa la condizione i).

Sia a' l'ulteriore intersezione della retta (x_0, a) con F quindi il segmento $[x_0, a]$ non è maggiore di $[a', x_0]$ perciò $f(\theta_a) \leq 0$ e procedendo analogamente per b risulta $f(\theta_b) \leq 0$.

Sia A' l'ulteriore intersezione della retta (x_0, A) con F quindi il segmento $[x_0, A]$ non è minore di $[A', x_0]$ perciò $f(\theta_A) \geq 0$ e procedendo analogamente per B risulta $f(\theta_B) \geq 0$.

Dunque per costruzione

$$f(\theta_a) \leq 0 \quad f(\theta_A) \geq 0 \quad f(\theta_b) \leq 0 \quad f(\theta_B) \geq 0.$$



Consideriamo due casi:

$f(\theta_A) = 0$ allora $m(\theta_A)$ separa A e B ed inoltre separa strettamente a e b ,

$f(\theta_A) > 0$ per il teorema di esistenza degli zeri delle funzioni continue esistono θ_1 e θ_2 tali che $f(\theta_1) = 0$ e $f(\theta_2) = 0$, allora $m(\theta_1)$ oppure $m(\theta_2)$ soddisfano al lemma.

TEOREMA 5.5.1 (Bonnesen) - *Considerata una figura convessa piana F di perimetro L ed area S ed indicati con r ed R ($R > r$) i raggi dell'anello minimale vale la seguente disuguaglianza:*

$$\frac{L^2}{4\pi} - S \geq \frac{\pi}{4}(R-r)^2.$$

Dimostrazione - Consideriamo la seguente funzione $f(x) = S - xL + \pi x^2$ ricavata dalle formule di Steiner scambiando x in $-x$, che viene detta **funzione di Bonnesen**.

Per le condizioni ricavate da Lebesgue e Bonnesen (cfr. Proprietà 5.4.3 e 5.4.4) risulta:

$$S - xL + \pi x^2 \leq 0 \quad \text{per } r_i \leq x \leq R_c.$$

Consideriamo ora un qualsiasi convesso F : siano x_0 il centro ed r ed R i raggi della c.c.m. La retta del lemma taglia il convesso in due parti F^- e F^+ .

Indichiamo con F_1 e F_2 le figure ottenute da F^- e F^+ simmetrizzando rispetto al centro x_0 e siano $K_1 = \text{conv}(F_1)$ e $K_2 = \text{conv}(F_2)$.

Posto:

$S = \text{area di } F$ ed $L = \text{perimetro di } F$,
 $S_1 = \text{area di } K_1$ ed $L_1 = \text{perimetro di } K_1$,
 $S_2 = \text{area di } K_2$ ed $L_2 = \text{perimetro di } K_2$,
 risulta $S_1 + S_2 > 2S$ ed $L_1 + L_2 < 2L$.

Per le condizioni di Lebesgue e di Bonnesen si ha:

$$S_1 - xL_1 + \pi x^2 \leq 0 \quad \text{per } r_i \text{ di } K_1 \leq x \leq R_c \text{ di } K_1$$

$$S_2 - xL_2 + \pi x^2 \leq 0 \quad \text{per } r_i \text{ di } K_2 \leq x \leq R_c \text{ di } K_2.$$

Se il cerchio piccolo σ della c.c.m. tocca K_1 nel punto a , la retta t di supporto a K_1 in a deve essere anche di supporto al cerchio piccolo in a , altrimenti il cerchio piccolo σ non sarebbe contenuto in K_1 ; essendo σ un cerchio, in a c'è una sola retta di supporto per σ , la tangente, così deve essere per K_1 .

Simmetrizzando rispetto al punto x_0 centro della c.c.m., da a si ottiene un punto a' del cerchio piccolo σ con tangente parallela a t . Allora il cerchio piccolo è inscritto in K_1 .

In modo analogo per il procedimento di simmetrizzazione rispetto ad x_0 il cerchio grande della c.c.m. avendo due punti di contatto diametralmente opposti risulta circoscritto a K_1 .

La stessa costruzione si può fare per K_2 , quindi:

$$r_i \text{ di } K_1 = r \quad R_c \text{ di } K_1 = R,$$

$$r_i \text{ di } K_2 = r \quad R_c \text{ di } K_2 = R,$$

perciò le precedenti disuguaglianze valgono per $r \leq x \leq R$.

Sommandole si ha

$$(S_1 + S_2) - x(L_1 + L_2) + 2\pi x^2 \leq 0$$

quindi pure

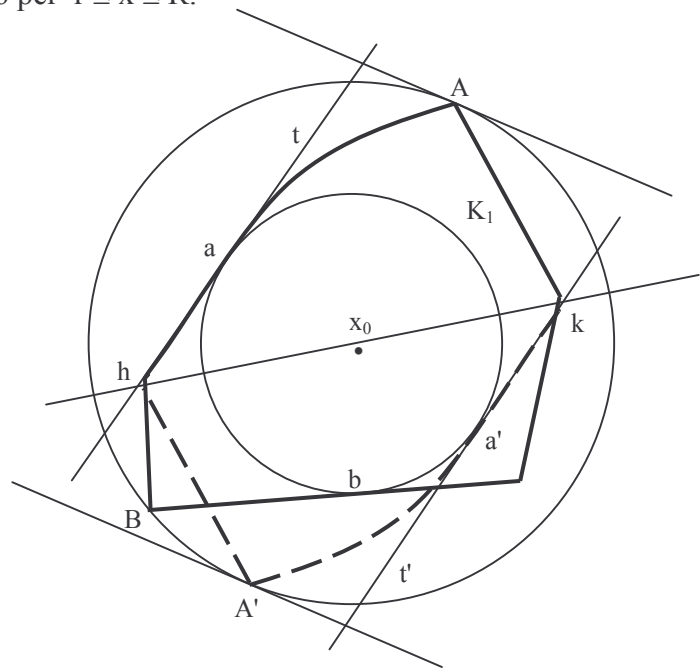
$$2S - 2xL + 2\pi x^2 \leq 0$$

ossia $S - xL + \pi x^2 \leq 0$ per $r \leq x \leq R$.

Da tale disuguaglianza si ricava

$$\frac{L^2}{4\pi} - S \geq \frac{\pi}{4} (R - r)^2.$$

OSSERVAZIONE Il deficit minimo viene raggiunto solo se $R = r$. Poiché la corona circolare minima di F in questo caso ha i due cerchi K_1 e K_2 coincidenti (tali che sia $K_1 \subseteq F \subseteq K_2$), si deduce che il deficit minimo viene raggiunto solo se F è un cerchio.



5.6 - Soluzione del problema isoperimetrico con il teorema di Blaschke.

Proviamo ora che il cerchio risolve il problema isoperimetrico utilizzando il teorema di selezione di Blaschke. Si considera la classe \mathcal{L} dei compatti del piano la cui frontiera è una curva semplice chiusa di lunghezza L . Si cerca se esiste fra essi uno di area massima. Si prova che l'insieme massimante esiste ed è univocamente determinato a meno di traslazioni. Esso è, come suggerisce l'intuizione, il cerchio.

Abbiamo già osservato (cfr. § 5.4) che ci si può limitare a considerare figure convesse.

Per le funzioni continue a valori reali definite su di una famiglia \mathcal{F} compatta nella topologia di Hausdorff di insiemi convessi (cfr. Definizione 1.12.4) vale il seguente:

TEOREMA 5.6.1 - (di minimo-massimo) *Sia \mathcal{F} una famiglia compatta (non vuota) di insiemi convessi e sia g una funzione continua a valori reali definita su tutti gli elementi di \mathcal{F} . Allora g raggiunge i suoi valori di massimo e di minimo su \mathcal{F} .*

Dimostrazione - Per prima cosa, l'insieme dei valori $\{g(F) : F \in \mathcal{F}\}$ è limitato. Se per assurdo non lo fosse potremmo trovare una successione $\{F_i\}$ $i = 1, 2, \dots$ tale che $g(F_i) \rightarrow \infty$ per $i \rightarrow \infty$. Ma per la compattezza di \mathcal{F} , da $\{F_i\}$ si può estrarre una sottosuccessione convergente $\{F_{i_j}\} \rightarrow F_0$. Ma g è continua quindi $\{g(F_{i_j})\} \rightarrow g(F_0)$ che è un numero reale r .

Ma se $g(F_i) \rightarrow \infty$ da un certo R in poi tutti i $g(F_i)$ dovrebbero cadere in $]R, \infty]$ mentre ce ne sono infiniti (quelli della sottosuccessione) che cadono in un intorno di r , il che è assurdo. Proviamo ora che, ad esempio, il massimo $M = \sup_{F \in \mathcal{F}} g(F)$ appartiene a $g(\mathcal{F})$.

Costruiamo una successione che tende ad M nel modo seguente:

per definizione di \sup in $(M - \varepsilon, M)$ esiste un $g(F_1)$ tale che $M - \varepsilon < g(F_1) < M$, poi in $(g(F_1), M)$ esiste un $g(F_2)$ tale che $g(F_1) < g(F_2) < M$ e così via. I $g(F_i)$ così costruiti costituiscono la successione che tende ad M cercata.

Per la compattezza di F , da $\{F_i\}$ si può estrarre una sottosuccessione convergente $\{F_{i_j}\} \rightarrow F_0$. Ma g è continua quindi $\{g(F_{i_j})\} \rightarrow g(F_0)$: occorre provare che $g(F_0)$ coincide con M . Se per assurdo fosse $g(F_0) < M$ si potrebbero costruire due intorni disgiunti di $g(F_0)$ e di M rispettivamente $]g(F_0) - \varepsilon, g(F_0) + \varepsilon[$ e $]M - \varepsilon, M + \varepsilon[$. Da un certo i_0 in poi i $g(F_i)$ devono cadere tutti in $]M - \varepsilon, M + \varepsilon[$ mentre infiniti, ossia quelli della sottosuccessione $g(F_{i_j})$ cadono in $]g(F_0) - \varepsilon, g(F_0) + \varepsilon[$, il che è assurdo.

Notiamo che area e perimetro che abbiamo definito nel § 5.4 possono anche essere introdotti assiomaticamente (cfr. [K-W]) nel modo seguente:

ad ogni sottoinsieme non vuoto compatto convesso K di E^2 sono associati:

- un numero non negativo $A(K)$ = area di K ,
- un numero non negativo $L(K)$ = perimetro di $bd(K)$

con le seguenti proprietà:

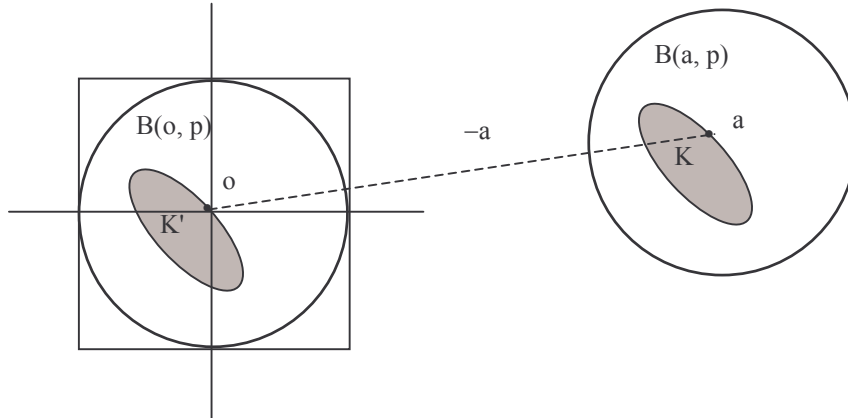
- 1) Insiemi congruenti hanno la stessa area e lo stesso perimetro, cioè:
 $K \cong K' \Rightarrow A(K) = A(K')$ e $L(K) = L(K')$
- 2) Se $K_1 \subseteq K_2 \Rightarrow A(K_1) \leq A(K_2)$ e $L(K_1) \leq L(K_2)$
- 3) $Diametro(K) \leq L(K)$
- 4) Le funzioni A ed L sono funzioni continue dello spazio dei compatti con la metrica di Hausdorff, cioè, scelti comunque K_0 ed $\varepsilon > 0$ esiste un δ tale che:
 $\delta_H(K_0, K) < \delta \Rightarrow |A(K_0) - A(K)| < \varepsilon$ ed $|L(K_0) - L(K)| < \varepsilon$.
- 5) Se K è una figura base come il triangolo pieno (2-simplex) od il quadrato pieno allora $A(K)$ ed $L(K)$ sono i numeri dati dalle formule della geometria elementare euclidea.

LEMMA 5.6.1. - *Sia \mathcal{C}_p la collezione di tutti i convessi compatti in E^2 con fissato perimetro p ($p > 0$). Allora esiste un quadrato pieno Q tale che per ogni $K \in \mathcal{C}_p$ esiste un $K' \subset Q$ e $K' \cong K$.*

Dimostrazione - Per l'assunzione 3) p è un confine superiore dei diametri degli insiemi di $\mathcal{C}_{(p)}$. Sia Q il quadrato pieno $Q = \{(x_1, x_2): -p \leq x_1 \leq p, -p \leq x_2 \leq p\}$.

Ovviamente il disco $B(o, p)$ è contenuto in Q . Sia $K \in \mathcal{C}_{(p)}$ e sia $a \in K$ poiché $K \neq \emptyset$ (non si richiede ad interno non vuoto). Per ogni punto $x \in K$: $d(a, x) \leq \text{diam}(K) \leq p$ ossia $x \in B(a, p)$ di conseguenza $K \subseteq B(a, p)$.

La traslazione di E^2 di vettore $-a$ manda $B(a, p)$ in $B(o, p)$, perciò manda $K \subseteq B(a, p)$ nell'immagine $K' \subseteq B(o, p) \subset Q$ e $K' \cong K$ (poiché le traslazioni sono movimenti di E^2).



TEOREMA 5.6.2 - *Il problema isoperimetrico ha una soluzione.*

Dimostrazione - Sia $\mathcal{C}_{(p)}$ la collezione di tutti i convessi compatti in E^2 con fissato perimetro p ($p > 0$) e \mathcal{C} l'insieme di tutti i compatti convessi di E^2 (\mathcal{C} è un chiuso nell'insieme dei compatti con la topologia di Hausdorff) (cfr. [E]).

La funzione $L: \langle \mathcal{C}, \delta_H \rangle \rightarrow \langle \mathbf{R}, d \rangle$ per l'assunzione 4) è continua. Il punto $\{p\}$ è un chiuso di \mathbf{R} di conseguenza $\mathcal{C}_{(p)} = \{K: L(K) = p\}$ è un chiuso nell'insieme dei compatti convessi con la topologia di Hausdorff.

Sia Q il quadrato pieno del Lemma 5.6.1 e $\mathcal{C}(Q)$ l'insieme dei compatti convessi non vuoti di Q . Lo spazio iniziale $\langle Q \subset E^2, d \times d \rangle$ è compatto: si può usare il Teorema 1.12.4 (di Blaschke) perché si considerano tutti i compatti convessi e non si richiede che siano ad interno non vuoto (ossia anche un segmento di lunghezza $p \in \mathcal{C}$) allora $\langle \mathcal{C}(Q), \delta_H \rangle$ è compatto ed essendo $\mathcal{C}_{(p)}$ chiuso $\mathcal{C}_{(p)}(Q) = \mathcal{C}(Q) \cap \mathcal{C}_{(p)}$ è compatto.

Per l'assunzione 4) la funzione a valori reali area A è continua nell'insieme dei compatti con la metrica δ_H quindi è continua anche su $\mathcal{C}_{(p)}(Q)$ e per il Teorema 5.6.1 di minimo-massimo A raggiunge un punto di massimo K_0 in $\mathcal{C}_{(p)}(Q)$.

Sia K un arbitrario insieme in $\mathcal{C}_{(p)}$. Per il Lemma 5.6.1. esiste un K' congruente a K e $K' \subset Q$. K' è compatto e convesso e quindi appartiene a $\mathcal{C}(Q)$.

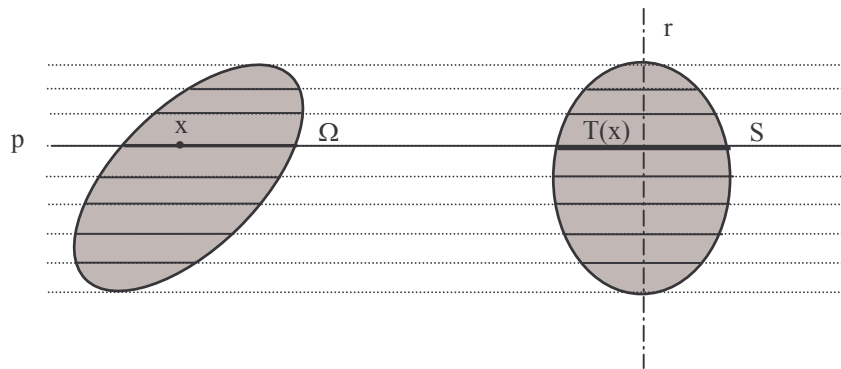
Per l'assunzione 1): $L(K') = L(K) = p$ quindi K' appartiene a $\mathcal{C}_{(p)}(Q)$. Poiché A raggiunge il suo massimo su $\mathcal{C}_{(p)}(Q)$ in K_0 allora $A(K') \leq A(K_0)$.

Per l'assunzione 1) K' è congruente a K quindi $A(K) = A(K')$ e perciò $A(K) \leq A(K_0)$. Di conseguenza K_0 è una soluzione del problema isoperimetrico.

TEOREMA 5.6.3 - *Gli insiemi di area massima che risolvono il problema isoperimetrico sono cerchi.*

Dimostrazione - Introduciamo la seguente simmetrizzazione di Steiner.

Dati un convesso Ω ed una retta r per ogni punto x di Ω consideriamo la retta p passante per x e perpendicolare ad r e costruiamo un segmento $T(x)$ su p con centro su r e lunghezza uguale a quella del segmento intersezione di p con Ω .



Sia S l'unione dei segmenti $T(x)$ al variare di x in Ω . Si osserva che S ha r come asse di simmetria e per il principio di Cavalieri S ha la stessa area di Ω .

Si prova che la simmetrizzazione di Steiner trasforma il convesso Ω in un convesso S , simmetrico rispetto alla retta fissata, avente la stessa area e perimetro minore od al più uguale.

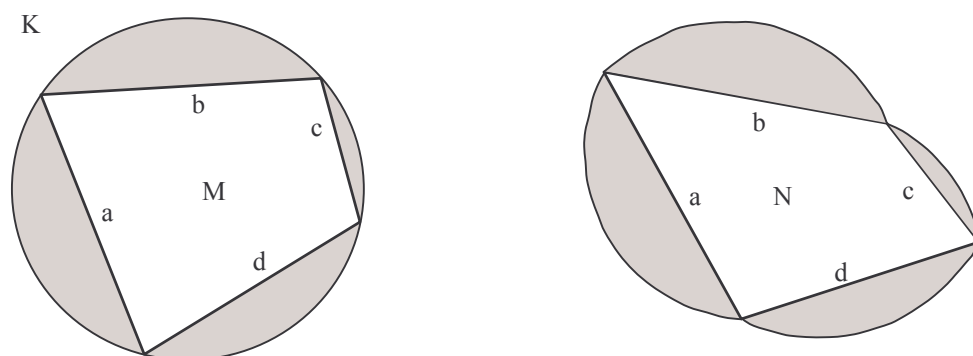
Sia C un convesso di area massima in \mathcal{L} , fissata comunque una retta r si considera il simmetrico S di Steiner di C rispetto ad r . Non può essere perimetro $L(S) < \text{perimetro } L(C)$ perché con una dilatazione si otterrebbe da S un convesso di area maggiore dell'area di C e con lo stesso perimetro di C . Poiché $L(S) = L(C)$, C è simmetrico rispetto ad r ossia ha un asse di simmetria parallelo ad r . Per l'arbitrarietà di r , C è simmetrico rispetto ad ogni retta passante per il baricentro g .

Se a e b sono due punti sulla frontiera di C ed s è la bisettrice dell'angolo convesso \widehat{agb} per la simmetria di C rispetto ad s segue che la misura di $[a, g]$ è uguale alla misura di $[b, g]$. Per cui i punti della frontiera di C hanno distanza costante da g e perciò C è un cerchio di centro g .

5.7 - Alcune applicazioni.

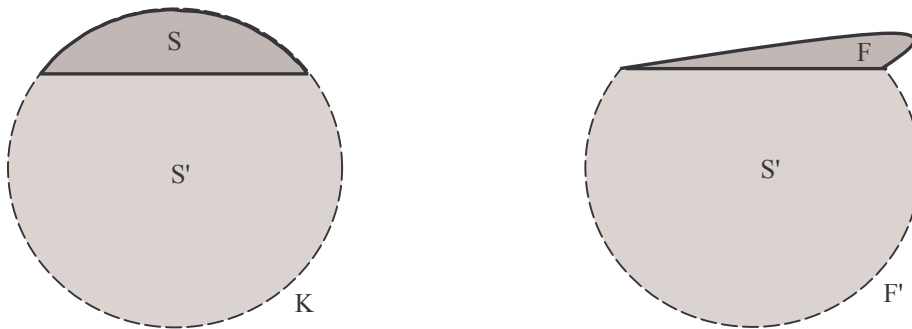
PROPRIETÀ 5.7.1 - *Un poligono inscrittibile in una circonferenza ha area maggiore di un qualunque altro poligono avente i lati corrispondenti uguali.*

Dimostrazione - Siano M il poligono inscrittibile in un cerchio K ed N un altro poligono avente i lati corrispondenti uguali. Costruiamo una figura F avente egual perimetro di K : poiché il cerchio risolve il problema isoperimetrico la sua area sarà minore di quella di K . Allo scopo riportiamo su ogni lato di N il segmento circolare del cerchio K avente come corda il lato corrispondente. Si ottiene una figura F avente come perimetro la circonferenza circoscritta e come area la somma dell'area di N e delle aree dei segmenti circolari. L'area di F risulta minore dell'area di K che si può considerare come somma dell'area di M e delle aree degli stessi segmenti circolari: segue che l'area di M è maggiore di quella di N .



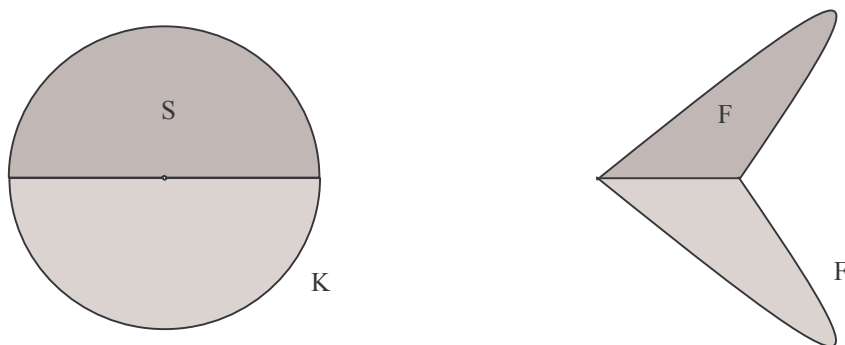
PROPRIETÀ 5.7.2 - *Fra tutte le figure semplici chiuse, limitate da un segmento di lunghezza assegnata a e da un arco di lunghezza ℓ , con $\ell > a$, il segmento circolare ha area maggiore.*

Dimostrazione - Consideriamo il segmento circolare S limitato da una corda a e da un arco di lunghezza ℓ e completiamolo con il segmento circolare S' in modo da ottenere un cerchio K . Considerata poi una figura chiusa F di perimetro $a + \ell$ la cui frontiera contiene un segmento di lunghezza a completiamo anch'essa con il segmento circolare S' da parte opposta di F rispetto ad a ottenendo una figura F' . Poiché K ed F' hanno lo stesso perimetro e K è un cerchio, F' ha area minore di K . Sottraendo ad entrambe l'area di S' risulta che l'area di F è minore di quella di S .



PROPRIETÀ 5.7.3 - *Fra tutte le figure semplici chiuse limitate da un arco di lunghezza ℓ e da un segmento, il semicerchio S di raggio $\frac{\ell}{\pi}$ ha l'area maggiore.*

Dimostrazione - Considerato il semicerchio riflettiamolo rispetto al diametro ottenendo un cerchio K . Considerata una qualunque figura convessa F limitata da un segmento e da un arco di lunghezza ℓ riflettiamola rispetto al segmento ottenendo una figura F' . K ed F' hanno, per costruzione, lo stesso perimetro 2ℓ e quindi il cerchio K ha area maggiore. Poiché S ed F hanno come area rispettivamente la metà di K e la metà di F' segue l'asserto.



OSSERVAZIONE - La Proprietà 5.7.3 porta il nome di **Problema di Didone**.

Narra la leggenda che Didone, regina dei Fenici, cacciata dal suo regno dal fratello Pigmalione, che le uccise anche il marito Sicheo, si rifugiò sulle coste libiche.

Il re africano Iarba, per non venir meno al dovere dell'ospitalità e contemporaneamente non inimicarsi i Fenici, le concesse il permesso di insediarsi in quel territorio, ma solamente su tanta terra quanta ne poteva contenere una pelle di mucca, sperando così di liberarsi della sgradita ospite.

Didone risolse invece a suo favore la beffarda concessione ricorrendo ad un astuto stratagemma: non coprì semplicemente, come si aspettava il re, una inutile superficie di terreno con la pelle intera, ma la tagliò in sottilissime strisce, le congiunse in modo da ottenere un nastro, e cercò il modo di ottenere la massima area possibile.

Per riuscire nel suo intento si pose su un tratto di litorale e delimitò un'area a semicerchio avente come perimetro il nastro che aveva a disposizione. Ottenne così una superficie di terreno sufficiente a fondare il primo nucleo di una città: Cartagine.

5.8 - Disuguaglianze classiche e recenti.

La disuguaglianza isoperimetrica classica per corpi convessi K in \mathbf{R}^2 afferma che:

$$A(K) \leq \frac{1}{4\pi} L^2(K)$$

ove A è l'area di K , L il perimetro e l'uguaglianza si ha solo se K è un cerchio.

L'**area mista** di due corpi convessi piani H ed M , $A(K, M)$ è definita da

$$A(K + M) = A(K) + 2A(K, M) + A(M)$$

dove $K + M$ è il corpo convesso somma di K ed M .

Nel caso in cui M coincida con la boccia B di centro o e raggio x si ha $A(K, B) = \frac{1}{2} Lx$

dove L è il perimetro di K (cfr. § 5.4.2).

Sia $-K$ la riflessione di K in o . Si hanno i seguenti risultati:

- 1) **disuguaglianza di Betke-Weil (1991) per due corpi convessi $K, M \subset \mathbf{R}^2$.**

$$A(K, M) \leq \frac{1}{8} L(K)L(M)$$

con l'uguaglianza se e solo se K ed M sono segmenti ortogonali.

Verifichiamola, ad esempio, nel caso in cui K sia un rettangolo R di lati a e b ed M la boccia $B(o, x)$ di centro o e raggio x .

Per le formule di Steiner $A(R, B) = \left(\frac{1}{2}Lx\right) = (a + b)x$ ed ovviamente $L(K) = 2a + 2b$ ed

$$L(M) = 2\pi x.$$

La disuguaglianza di Betke-Weil in questo caso è espressa da $(a + b)x \leq \frac{1}{8}(2a + 2b)(2\pi x)$

cioè $(a + b)x \leq \frac{\pi}{2}(a + b)x$ ovvero $1 \leq \frac{\pi}{2}$.

- 2) **disuguaglianza di Betke-Weil (1991) per un corpo convesso $K \subset \mathbf{R}^2$.**

$$A(K, -K) \leq \frac{\sqrt{3}}{18} L^2(K).$$

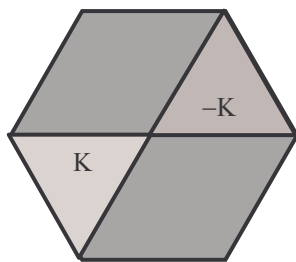
Se K è un poligono l'uguaglianza vale se e solo se K è un triangolo equilatero.

Infatti se K è un triangolo equilatero di lato r si ha che $2A(K, -K)$ equivale a 4 triangoli

equilateri ossia $2A(K, -K) = 4 \left(\frac{r^2\sqrt{3}}{4}\right)$ per cui $A(K, -K) = \frac{r^2\sqrt{3}}{2}$ ed inoltre

$$\frac{\sqrt{3}}{18} L^2(K) = \frac{\sqrt{3}(3r)^2}{18} = \frac{r^2 \sqrt{3}}{2}.$$

Quindi i due termini della disequazione sono uguali.



3) **disuguaglianza di Baschke-Frobenius per due corpi convessi $K, M \subset \mathbb{R}^2$:**

$$2A(K, M) \geq \frac{L(K)A(M)}{L(M)} + \frac{L(M)A(K)}{L(K)}.$$

Verifichiamola, ad esempio, nel caso in cui K sia un quadrato di lato a ed M la boccia $B(o, x)$ di centro o e raggio x .

Per le formule di Steiner $2A(K, M) = L(K)x = 4ax$, la disuguaglianza diventa quindi:

$$4a x \geq \frac{4a \pi x^2}{2\pi x} + \frac{2\pi x a^2}{4a} \text{ ossia } 4a x \geq 2ax + \frac{\pi}{2} xa \text{ da cui } 2 \geq \frac{\pi}{2}.$$

4) la nota **disuguaglianza di Minkowski**

$$A^2(K, M) \geq A(K)A(M)$$

che vale con l'uguaglianza se e solo se K ed M sono omotetici, cioè differiscono solo per una dilatazione e traslazione.

Per una dimostrazione elegante si può vedere il lavoro di Flanders H. (1968) - A Proof of Minkowski's Inequality for Convex Curves. American Mathematical Monthly 75

Per maggiori informazioni sulle disuguaglianze isoperimetriche si possono consultare i seguenti testi: Burago J. U. Zalgaller V. A. (1988) - Geometric Inequalities. Springer Berlin, Schneider R. (1993) - Convex Bodies The Brunn-Minkowski Theory. EM 44.

CAPITOLO VI

CENNI SULLA GEOMETRIA DEI NUMERI

6.1 - Premesse.

Lagrange aveva studiato il seguente problema:

Data una forma quadratica definita positiva in due variabili

$$q(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$$

esistono sempre due numeri interi u, v con $(u, v) \neq (0, 0)$ tali che $q(u, v) \leq \sqrt{\frac{4D}{3}}$ dove

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} = ac - b^2 \text{ è il discriminante della forma quadratica?}$$

E' ovvio che se il risultato è vero è il migliore possibile.

Infatti se consideriamo il caso $q(x, y) = x^2 + xy + y^2$ si ha che $D = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} = \frac{3}{4}$, quindi si

devono trovare due numeri interi u, v tali che $q(u, v) \leq \sqrt{\frac{4D}{3}} = 1$. Per le coppie $(0, 1)$ ed $(1, 0)$ risulta $q(0, 1) = q(1, 0) = 1$, ma $q(u, v) = u^2 + uv + v^2 \geq 1$ per tutte le altre coppie di interi $(u, v) \neq (0, 0)$, anche negativi, ad esempio $q(2, -1) = 4 - 2 + 1 > 1$.

Ci sono due modi per risolvere questo problema: considerare i valori reali che lo risolvono e poi cercare quelli interi, oppure interpretare geometricamente il problema.

Il primo che ha seguito il metodo geometrico è stato Minkowski (1896).

Egli ha dedotto, da un teorema generale sui corpi convessi, molti risultati relativi a problemi numerici. Questa teoria è stata intitolata da Minkowski stesso "Geometria dei numeri".

Poiché nelle considerazioni che seguono si utilizza il concetto di volume di un corpo convesso, intuitivamente si può pensare di procedere in modo analogo a quanto fatto in \mathbf{R}^2 .

Utilizzando la metrica canonica di \mathbf{R}^3 per un parallelepipedo rettangolo il volume è dato dal prodotto delle misure dei lati e per un parallelepipedo qualunque vale la formula:

$$\text{"volume"} = \text{"base"} \times \text{"altezza"}.$$

Facendo uso delle nozioni vettoriali si ha che il volume di un parallelepipedo qualsiasi si può esprimere come il valore assoluto del prodotto misto dei tre vettori associati ai lati che escono da un suo vertice e si può calcolare mediante un determinante. Per scomposizione si può allora calcolare il volume di un qualsiasi poliedro.

Indicato con \mathcal{P} l'insieme dei poliedri, per ogni corpo convesso C si definisce come **volume di C** , $V(C)$, l'estremo superiore dei volumi dei poliedri contenuti in C che coincide con l'estremo inferiore dei volumi dei poliedri contenenti C .

In simboli: $V(C) = \sup\{V(P): P \in \mathcal{P} \wedge P \subset C\} = \inf\{V(P): P \in \mathcal{P} \wedge P \supset C\}$ (cfr. [Be] vol. III pag.141).

Tale definizione ha il vantaggio di potersi estendere facilmente ad una dimensione qualsiasi n .

Facendo uso di nozioni più elevate di Analisi Matematica si può dare la:

DEFINIZIONE 6.1.1 - Il **volume di un insieme** C in \mathbf{R}^n è la sua misura n -dimensionale di Lebesgue e si indica con $V(C)$ oppure con $V_n(C)$.

Il volume di un insieme in \mathbf{R}^2 è usualmente detto la sua *area* ed il volume di un insieme in \mathbf{R}^1 è detto la sua *lunghezza*.

Introdurre la nozione di misura di Lebesgue esula dal nostro programma: ricordiamone solo le proprietà più importanti.

- i) $V_n(C) > 0$ se C contiene una sfera in \mathbf{R}^n ;
 $V_n(C) = 0$ se C è contenuto in un iperpiano.
- ii) Se $C \supset D$ allora $V(C) \geq V(D)$.
- iii) Siano \mathbf{u} un versore e $P(\lambda)$ l'iperpiano $\mathbf{x} \cdot \mathbf{u} = \lambda$, allora:

$$V(C) = \int_{-\infty}^{\infty} V_{n-1}(P(\lambda) \cap C) d\lambda$$

dove l'integrale è un integrale di Lebesgue.

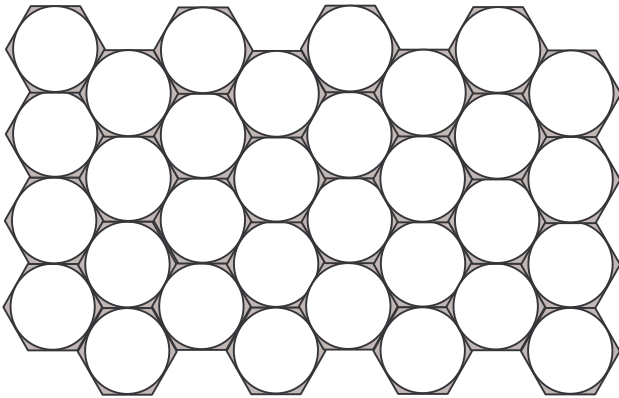
- iv) Se C_1 è simile a C_2 ed è $C_1 = \mu C_2$ (cfr. § 1.4) allora $V(C_1) = \mu^n V(C_2)$ (proprietà di omogeneità).

Siano C un corpo convesso di \mathbf{R}^n ed X un insieme discreto di punti di \mathbf{R}^n : indichiamo con $C + \mathbf{x} = \{c + \mathbf{x} : c \in C\}$ dove $c + \mathbf{x} = (c - o) + (\mathbf{x} - o)$ ossia $c + \mathbf{x}$ è la somma di due vettori di origine un punto arbitrario o .

Indichiamo con $C + X = \{C + \mathbf{x} : \mathbf{x} \in X\}$: $C + X$ è un insieme di traslati del convesso C .

DEFINIZIONE 6.1.2 - Diciamo che $C + X$ è un **packing di traslati di C** se vale la seguente condizione:

$$(int C + x_i) \cap (int C + x_j) = \emptyset \quad \text{con } x_i, x_j \in X, x_i \neq x_j$$



Spesso l'interesse dei packing è rivolto alla loro massima densità. Intuitivamente la densità è rappresentata dal rapporto tra la somma dei volumi degli elementi della famiglia ed il volume dello spazio stesso: tale rapporto è quindi minore od uguale ad 1.

Per esempio il packing più denso di cerchi uguali in \mathbf{R}^2 è quello nel quale i cerchi sono iscritti in esagoni regolari che ricoprono tutto \mathbf{R}^2 : ogni cerchio ne tocca altri sei.

DEFINIZIONE 6.1.3 - Data in \mathbf{R}^n una base di vettori $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ si dice **rete o reticolo in \mathbf{R}^n** l'insieme A delle combinazioni lineari dei vettori della base a coefficienti interi.

In simboli: $A = \{z_1 \mathbf{a}_1 + z_2 \mathbf{a}_2 + \dots + z_n \mathbf{a}_n / z_1, \dots, z_n \in \mathbf{Z}\}$

La rete n -dimensionale si dice **intera** e si indica con \mathbf{Z}^n se la base scelta è la base canonica $B = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$.

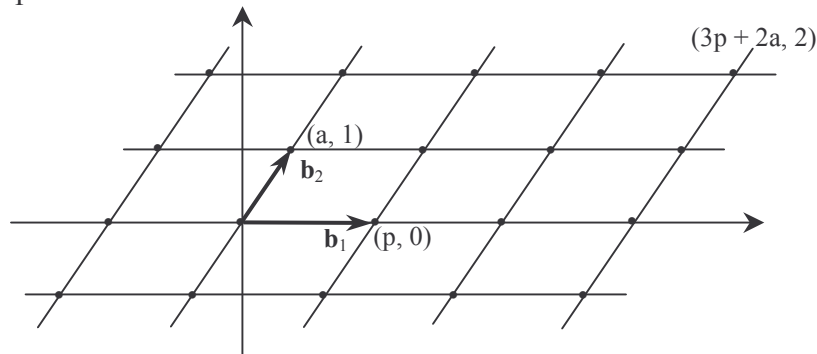
DEFINIZIONE 6.1.4 - Si dice **n -parallelogramma di base** e si indica con $P(A)$ della rete A l'insieme $P = P(A) = \{x_1 \mathbf{a}_1 + x_2 \mathbf{a}_2 + \dots + x_n \mathbf{a}_n / 0 \leq x_1 < 1, \dots, 0 \leq x_n < 1\}$. Si indica con

$d(\Lambda)$ il volume $V(P)$ dell' n -parallelogramma di base.

Se la rete è \mathbb{Z}^n risulta $d(\mathbb{Z}^n) = 1$

ESEMPIO 6.1.1 - Nel caso di $n = 2$ si consideri la base $B = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ con $\mathbf{b}_1 = (p, 0)$ e $\mathbf{b}_2 = (a, 1)$. la rete Λ è formata da elementi del tipo $m(p, 0) + n(a, 1) = (mp + na, n)$ con m ed n interi.

Geometricamente si costruiscano nel piano \mathbb{R}^2 le rette r_1 ed r_2 per l'origine parallele rispettivamente a \mathbf{b}_1 e \mathbf{b}_2 . Su tali rette si riportino segmenti congruenti rispettivamente a \mathbf{b}_1 e \mathbf{b}_2 e per gli estremi dei segmenti su r_1 (o r_2) si conducano le rette parallele a r_2 (o r_1). I due sistemi di rette così ottenuti dividono il piano in parallelogrammi uguali i cui vertici costituiscono la rete piana.



Se la base è la base canonica i parallelogrammi sono quadrati di lato unitario. Il quadrato avente un vertice nell'origine e contenuto nel primo quadrante è il 2-parallelogramma di base e risulta $d(\Lambda) = 1$.

OSSERVAZIONE - Se consideriamo come insieme discreto di \mathbb{R}^n la rete Λ , il packing $C + \Lambda$ viene detto **packing reticolare** e la densità in questo caso è semplicemente:

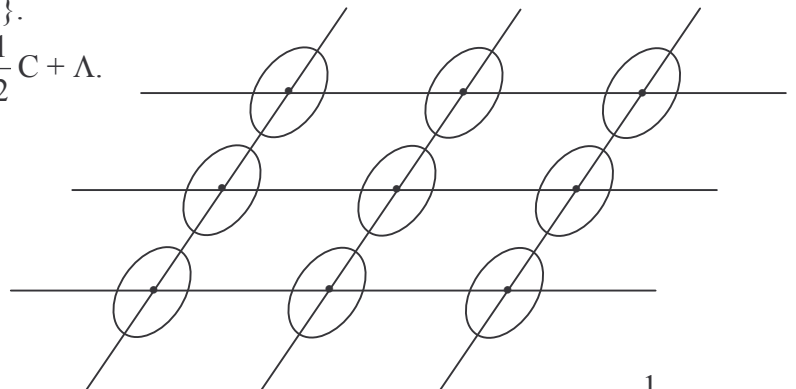
$$\theta = \frac{V(C)}{d(\Lambda)}$$

6.2 - Il primo teorema di Minkowski.

TEOREMA 6.2.1 - In \mathbb{R}^n siano C un corpo convesso centro-simmetrico rispetto all'origine, cioè tale che $C = -C$ di volume $V(C)$, e Λ una rete. Se $V(C) \geq 2^n d(\Lambda)$ esistono due punti u e $-u$ diversi dall'origine appartenenti a $C \cap \Lambda$.

Dimostrazione (secondo la tecnica di Blichfeldt) - Supponiamo per assurdo che, indicata con o l'origine, risulti $C \cap \Lambda = \{o\}$.

Costruiamo il packing reticolare $\frac{1}{2}C + \Lambda$.



Notiamo che gli elementi sono a due a due disgiunti in quanto se esistesse un $x \in \frac{1}{2}C + \Lambda$

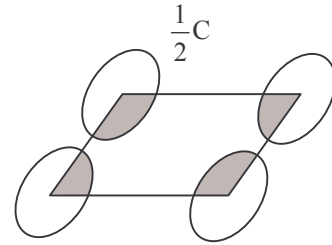
ed $x \in \frac{1}{2}C + s$, con $r \neq s$ ed $r, s \in \Lambda$, risulterebbe $x - r \in \frac{1}{2}C$ ed $x - s \in \frac{1}{2}C$ da cui

$$(x - r) - (x - s) = s - r \in \frac{1}{2}C - \frac{1}{2}C = \frac{1}{2}C + \frac{1}{2}C = C$$

(in quanto C è o-simmetrico); ma $s - r \in \Lambda$ e quindi $s - r$ apparterrebbe a $C \cap \Lambda$ contro l'ipotesi che tale intersezione contenga solo l'origine.

Essendo i corpi a due a due disgiunti la densità è minore di 1: ricordando la definizione di densità data nell'osservazione

precedente risulta: $\theta = \frac{V\left(\frac{1}{2}C\right)}{d(\Lambda)} < 1$ dato che la densità è uguale in ogni parallelogramma della rete.



Per una proprietà di omogeneità risulta: $V\left(\frac{1}{2}C\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^n V(C)$ quindi dalla disuguaglianza

$\theta < 1$ segue $\left(\frac{1}{2}\right)^n V(C) < d(\Lambda)$ da cui $V(C) < 2^n d(\Lambda)$, il che è assurdo.

Esiste quindi almeno un punto nell'intersezione diverso dall'origine ed essendo C simmetrico i punti sono almeno due.

Come applicazione del Teorema di Minkowski, indicato con k_n il volume della sfera unitaria di \mathbf{R}^n , possiamo dimostrare il seguente:

TEOREMA 6.2.2 - Sia $q(x)$ una forma quadratica definita positiva nelle n variabili x_1, \dots, x_n e sia $D = \det(s_{ij})$ il suo discriminante:

$$q(x) = \sum_{i,j=1}^n s_{ij}x_i x_j \quad (\text{con } s_{ij} = s_{ji}).$$

Allora esistono n interi u_1, \dots, u_n , non tutti nulli, tali che $q(u_1, \dots, u_n) \leq 4 \left(k_n^{-2} D\right)^{\frac{1}{n}} = n \sqrt[n]{\frac{4^n D}{k_n^2}}$.

Dimostrazione - Consideriamo inizialmente il caso $n = 2$.

Sia $q(x, y)$ una forma quadratica definita positiva: essa ammette due autovalori reali positivi λ_1 e λ_2 e si può porre nella forma canonica $\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2$ con $D = \lambda_1 \lambda_2$.

Considerato un numero positivo λ l'insieme

$$E = \{q(x, y) \leq \lambda\}$$

è un'ellisse che si può scrivere in forma canonica:

$$E = \left\{ \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 \leq \lambda \right\} = \left\{ \frac{x_1^2}{\frac{\lambda}{\lambda_1}} + \frac{x_2^2}{\frac{\lambda}{\lambda_2}} \leq 1 \right\}$$

la cui area è $V(E) = \pi \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda_1}} \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda_2}} = \pi \frac{\lambda}{\sqrt{D}}$.

Se scegliamo $\lambda = \frac{4}{\pi} \sqrt{D}$, risulta $V(E) = 2^2 = 4$.

Per il primo teorema di Minkowski considerata la rete $\Lambda = \mathbf{Z}^2$ (per cui $d(\Lambda) = 1$) si ha che, se $V(C) \geq 2^2$, allora C contiene un punto della rete diverso dall'origine. Nel nostro caso

poiché $V(E) = 4 \geq 2^2$, $E = \left\{ q(x, y) \leq \frac{4}{\pi} \sqrt{D} \right\}$ contiene un punto della rete $\Lambda = \mathbf{Z}^2$ diverso da

o, cioè esistono due numeri interi non nulli (a, b) tali che $q(a, b) \leq \frac{4}{\pi} \sqrt{D}$.

Notiamo che questo risultato risolve il problema di Lagrange dove la costante $\sqrt{\frac{4}{3}} = 1,1547\dots$ è sostituita da ogni numero più grande di $\frac{4}{\pi} = 1,2732\dots$

Passiamo ora al caso di n qualsiasi.

Sia λ un numero reale positivo. Essendo $q(x)$ una forma quadratica definita positiva i suoi autovalori $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sono tutti reali e positivi e $q(x)$ si può scrivere in forma canonica $q(x) = \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_n x_n^2$ e risulta $D = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n$.

L'ellissoide $E = \{q(x) \leq \lambda\}$ ha forma canonica

$$E = \{ \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_n x_n^2 \leq \lambda \} = \left\{ \frac{x_1^2}{\frac{\lambda}{\lambda_1}} + \dots + \frac{x_n^2}{\frac{\lambda}{\lambda_n}} \leq 1 \right\}$$

ed il suo volume è $V(E) = k_n \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda_1}} \dots \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda_n}} = k_n \frac{\lambda^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{D}}$ che risulta uguale a 2^n se $\lambda^{\frac{n}{2}} = \frac{2^n \sqrt{D}}{k_n}$.

Deve quindi essere $\lambda^n = \frac{4^n D}{k_n^2}$ ovvero $\lambda = \sqrt[n]{\frac{4^n D}{k_n^2}}$.

Per il primo teorema di Minkowski nel caso in cui $\Lambda = \mathbf{Z}^n$ si ha che, se $V(C) \geq 2^n$, allora C contiene un punto della rete; nel nostro caso possiamo quindi concludere che, poiché il volume di E soddisfa alla condizione richiesta, E contiene un punto della rete diverso dall'o-

rigine, cioè esistono n interi u_1, \dots, u_n , non tutti nulli, tali che $q(u_1, \dots, u_n) \leq \sqrt[n]{\frac{4^n D}{k_n^2}}$.

Come ulteriore applicazione del teorema di Minkowski vediano ora un risultato relativo alle forme lineari omogenee.

TEOREMA 6.2.3 - Siano f_1, \dots, f_n n forme lineari omogenee in n variabili x_1, \dots, x_n a coefficienti reali arbitrari e con determinante $D \neq 0$. Allora, per ogni insieme di n numeri positivi non tutti nulli τ_1, \dots, τ_n tali che $\tau_1 \dots \tau_n = |D|$ esistono valori interi delle variabili x_1, \dots, x_n non tutti nulli tali che $|f_i| \leq \tau_i$.

Dimostrazione - Sia P il parallelepipedo definito da $|f_i| \leq \tau_i$ ($i = 1, \dots, n$) ossia:

$$P: \begin{cases} -\tau_1 \leq a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \leq \tau_1 \\ \dots \\ -\tau_n \leq a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n \leq \tau_n \end{cases} \quad \text{con} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = D \neq 0.$$

P è chiuso e limitato perché intersezione di striscie chiuse e non ci sono iperpiani paralleli in quanto $D \neq 0$; P è centro-simmetrico ed è convesso perché intersezione di iperpiani con-

vessi. Il suo volume è $V(P) = \int \dots \int dx_1 \dots dx_n$. Facendo il cambiamento di variabili:

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ \dots \\ \dots \\ y_n = a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n \end{cases} \quad \text{risulta } V(P) = \int \dots \int \left| \frac{\partial(x_1, \dots, x_n)}{\partial(y_1, \dots, y_n)} \right| dy_1 \dots dy_n \quad \text{dove la funzione in-}$$

tegranda è il valore assoluto dello Jacobiano della trasformazione.

Lo Jacobiano delle x rispetto alle y è non nullo perché, per ipotesi, D è diverso da 0. Possiamo quindi scrivere:

$$V(P) = \int \dots \int \frac{1}{\left| \frac{\partial(x_1, \dots, x_n)}{\partial(y_1, \dots, y_n)} \right|} dy_1 \dots dy_n = \int_{-\tau_1}^{\tau_1} \dots \int_{-\tau_n}^{\tau_n} \frac{1}{|D|} dy_1 \dots dy_n = \frac{2\tau_1 \dots 2\tau_n}{|D|} = 2^n \frac{\tau_1 \dots \tau_n}{|D|}$$

Ma, per ipotesi, $\frac{\tau_1 \dots \tau_n}{|D|} = 1$ e quindi $V(P) = 2^n$.

Essendo $V(P) \geq 2^n$, per il primo teorema di Minkowski, P contiene un punto della rete \mathbf{Z}^n diverso dall'origine.

Vediamo ora una diversa dimostrazione del primo teorema di Minkowski in dimensione 2. Allo scopo premettiamo la seguente proprietà:

PROPRIETÀ 6.2.1. - Siano Λ una rete in \mathbf{R}^2 , C un sottoinsieme di \mathbf{R}^2 convesso e simmetrico rispetto all'origine tale che $\text{area}(C) > 4d(\Lambda)$ e sia $U = \frac{1}{2}C$. Allora esiste un elemento α della rete tale che:

$$U \cap (U + \alpha) \neq \emptyset.$$

Dimostrazione - Ricordiamo che $U = \frac{1}{2}C$ significa che $p \in U$ se $2p \in C$; ne segue che:

$$\text{area}(U) = \frac{1}{4} \text{area}(C) > d(\Lambda).$$

Se P è il parallelogramma di base della rete Λ , i traslati $P + \alpha$ con $\alpha \in \Lambda$ ricoprono il piano senza sovrapporsi tranne lungo i lati. U è limitato quindi interseca un numero finito di traslati $P + \alpha_1, \dots, P + \alpha_k$. Allora U è scomposto in sottoinsiemi $U_i = U \cap (P + \alpha_i)$, con $i = 1, \dots, k$, e l'area di U è la sommatoria delle aree degli U_i . Riportiamo U_i in P sottraendo α_i : poniamo cioè $V_i = U_i - \alpha_i$. Risultato: $\sum \text{area}(V_i) = \text{area}(U) > d(\Lambda) = \text{area}(P)$.

Ciò significa che due insiemi V_i devono sovrapporsi, ossia per qualche $i \neq j$ risulta: $V_i \cap V_j = (U - \alpha_i) \cap (U - \alpha_j) \neq \emptyset$. Aggiungendo α_i e ponendo $\alpha = \alpha_i - \alpha_j$ si ottiene $(U - \alpha_i + \alpha_i) \cap (U - \alpha_j + \alpha_i) = U \cap (U + \alpha) \neq \emptyset$.

Il primo teorema di Minkowski in dimensione 2 si può enunciare nel modo seguente:

Siano Λ una rete in \mathbf{R}^2 , C un sottoinsieme di \mathbf{R}^2 convesso e simmetrico rispetto all'origine tale che $\text{area}(C) > 4d(\Lambda)$ allora C contiene un punto della rete diverso dall'origine.

Dimostrazione - Notiamo che nell'enunciato si fa uso della disuguaglianza forte.

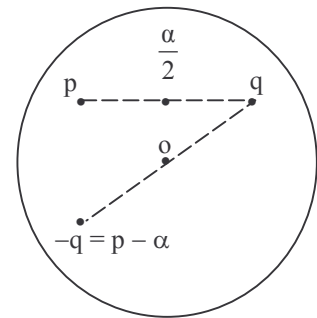
Sia $U = \frac{1}{2}C$ allora, per ipotesi, $\text{area}(U) > d(\Lambda)$. Per la Proprietà 6.3.1 esiste un $\alpha \in \Lambda$ tale che $U \cap (U + \alpha) \neq \emptyset$ e sia p un elemento di tale intersezione. In particolare p appartiene ad

$U + \alpha$ quindi $p - \alpha \in U$. Poiché U è simmetrico anche $q = \alpha - p$ appartiene ad U .

Considerati nel convesso U i punti p e q , il loro punto medio appartiene ancora ad U :

esso è $\frac{p+q}{2} = \frac{p+\alpha-p}{2} = \frac{1}{2}\alpha$. Ne segue

che $\alpha \in C$, poichè è anche $\alpha \in \Lambda$ segue che $\alpha \in C \cap \Lambda$, come richiesto.



6.3 - Applicazioni del teorema di Minkowski.

Ci proponiamo ora di utilizzare il primo teorema di Minkowski per provare il seguente teorema di Fermat:

L'equazione $x^2 + y^2 = p$ ha soluzioni intere in x, y per ogni numero primo p congruo 1 modulo 4.

Ricordiamo dapprima alcuni noti risultati di algebra.

PROPRIETÀ 6.3.1 - L'anello Z_p delle classi di resto modulo p è un campo se e solo se p è un numero primo e quindi $U_p = Z_p - \{0\}$ è un gruppo moltiplicativo di ordine $p - 1$.

TEOREMA 6.3.1 (Piccolo teorema di Fermat) - Sia p un numero primo e sia a un intero primo con p (cioè $MCD(a, p) = 1$), allora a^{p-1} è congruo 1 mod p .

Dimostrazione - Sia m il periodo di $\{a\}_p \in U_p$ (ossia $\{a\}_p^m = \{1\}$ ed m è il più piccolo intero positivo per cui questo capita). Per il teorema Lagrange il periodo m di un elemento divide l'ordine di U_p ossia $p - 1$, quindi $\frac{p-1}{m}$ è un intero.

Calcoliamo $\{a^{p-1}\}_p = \{a\}_p^{p-1} = \{a\}_p^{m \frac{p-1}{m}} = \{1\}_p^{\frac{p-1}{m}} = \{1\}_p$.

TEOREMA 6.3.2 (Wilson) - Se p è un numero primo allora $(p - 1)! \equiv -1 \pmod{p}$.

Dimostrazione - Se $p = 2$ la proprietà è banale. Se p è un numero primo diverso da 2, nel gruppo moltiplicativo U_p fra le classi $\{1\}_p, \{2\}_p, \dots, \{p-1\}_p$ le uniche che sono inverse di sé stesse sono $\{1\}_p$ e $\{p-1\}_p$.

Infatti se una classe $\{x\}_p$ fosse inversa di sé stessa risulterebbe $x^2 \equiv 1 \pmod{p}$ ovvero $x^2 - 1 \equiv 0 \pmod{p}$, quindi p divide $x^2 - 1$ cioè $(x + 1)(x - 1)$.

Essendo p primo se divide un prodotto divide uno dei fattori:

- se p divide $x - 1$ segue che $x \equiv 1 \pmod{p}$;
- se p divide $x + 1$ segue che $x \equiv -1 \pmod{p} \equiv p - 1 \pmod{p}$.

Possiamo ora calcolare $\{(p-1)!\}_p$ (che ha un numero pari di fattori per quanto supposto) accoppiando le classi inverse fra loro:

$$\{(p-1)!\}_p = \{1\}_p (\{2\}_p \{2\}_p^{-1}) \dots \{p-1\}_p = \{p-1\}_p = \{-1\}_p$$

PROPRIETÀ 6.3.2 - Sia p un numero primo diverso da 2. L'equazione $x^2 \equiv -1 \pmod{p}$ ha soluzioni se e solo se $p \equiv 1 \pmod{4}$ nel qual caso $x = \pm \left(\frac{p-1}{2}\right)!$ sono le uniche due soluzio-

ni modulo p .

Dimostrazione - Proviamo inizialmente che se l'equazione $x^2 \equiv -1 \pmod{p}$ con p primo diverso da 2 ha soluzioni, allora $p \equiv -1 \pmod{4}$. Si ha:

$$(x^2)^{\frac{p-1}{2}} \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}} \equiv \begin{cases} 1 & \text{se l'esponente } \frac{p-1}{2} \text{ è pari } \Rightarrow p = 1 + 4k \Rightarrow p \equiv 1 \pmod{4} \\ -1 & \text{se l'esponente } \frac{p-1}{2} \text{ è dispari } \Rightarrow p = 3 + 4k \Rightarrow p \equiv 3 \pmod{4} \end{cases}$$

d'altra parte $(x^2)^{\frac{p-1}{2}} = x^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ per il piccolo teorema di Fermat quindi ricorre solo il primo dei due casi precedenti cioè $p \equiv 1 \pmod{4}$.

Viceversa supponiamo che sia $p \equiv 1 \pmod{4}$ e costruiamo una soluzione dell'equazione $x^2 \equiv -1 \pmod{p}$ usando il procedimento di Lagrange.

$$\begin{aligned} -1 &\equiv (p-1)! = \left(1 \times 2 \times \dots \times \frac{p-1}{2}\right) \left(\frac{p+1}{2} \times \dots \times (p-1)\right) \text{ ma essendo } \frac{p+1}{2} = p - \frac{p-1}{2} \\ &= \left(1 \times 2 \times \dots \times \frac{p-1}{2}\right) \left(\left(p - \frac{p-1}{2}\right) \times \dots \times (p-1)\right) = \left(\frac{p-1}{2}\right)! \left(\left(p - \frac{p-1}{2}\right) \times \dots \times (p-1)\right). \end{aligned}$$

Ricordando che $\{p\}_p = \{0\}_p$ possiamo scrivere:

$$-1 \equiv \left(\frac{p-1}{2}\right)! \left(-\left(\frac{p-1}{2}\right) \times \dots \times (-2) \times (-1)\right) = \left(\frac{p-1}{2}\right)! (-1)^{\frac{p-1}{2}} \left(\frac{p-1}{2}\right)! = \left[\left(\frac{p-1}{2}\right)!\right]^2 (-1)^{\frac{p-1}{2}}.$$

Essendo $p \equiv 1 \pmod{4}$ si ottiene $-1 \equiv \left[\left(\frac{p-1}{2}\right)!\right]^2$ quindi l'equazione data si può scrivere

$$x^2 \equiv \left[\left(\frac{p-1}{2}\right)!\right]^2.$$

Notiamo che $a^2 \equiv b^2 \pmod{p}$ significa $a^2 - b^2 \equiv 0 \pmod{p}$ quindi p divide $(a+b)(a-b)$. Essendo p primo se divide un prodotto divide uno dei fattori:

- se p divide $a+b$ allora $a \equiv -b \pmod{p}$
- se p divide $a-b$ allora $a \equiv b \pmod{p}$.

Quindi $a^2 \equiv b^2 \pmod{p}$ significa $a \equiv \pm b \pmod{p}$. Nel nostro caso l'equazione data ha quindi le soluzioni $x = \pm \left(\frac{p-1}{2}\right)! \pmod{p}$.

ESEMPIO 6.3.1 - Se $p = 13$ l'equazione $x^2 \equiv -1 \pmod{13}$ ha come soluzioni:

$$x = \pm \left(\frac{13-1}{2}\right)! \pmod{13} \text{ da cui } x = \pm 6! \pmod{13} \text{ ossia } x = \pm 5 \pmod{13}, \text{ avendo calcolato}$$

$6!$ in Z_{13} .

Possiamo ora dimostrare il seguente teorema di Fermat utilizzando il primo teorema di Minkowski.

TEOREMA 6.3.3 (Fermat) - L'equazione $x^2 + y^2 = p$ ha soluzioni intere x ed y per ogni numero primo p congruo 1 modulo 4.

Dimostrazione - Sia p un numero primo congruo 1 modulo 4. Per la Proprietà 6.3.2 esiste un intero a tale che $a^2 \equiv -1 \pmod{p}$.

Si consideri in \mathbf{R}^2 la base $\{(p, 0), (a, 1)\}$ e sia Λ la rete formata da elementi del tipo

$m(p, 0) + n(a, 1) = (mp + na, n)$ con m ed n interi (cfr. Esempio 6.1.1).

L'area del 2-parallelogramma di base di Λ è $d(\Lambda) = p \times 1 = p$.

Se (x, y) appartiene a Λ , allora $x^2 + y^2$ è un multiplo intero di p . Infatti risulta: $(x, y) = m(p, 0) + n(a, 1) = (mp + na, n)$ e quindi:

$x^2 + y^2 = (mp + na)^2 + n^2 \equiv 0 + 0 + (na)^2 + n^2 = n^2(a^2 + 1) \equiv 0 \pmod{p}$ ricordando che $a^2 \equiv -1 \pmod{p}$.

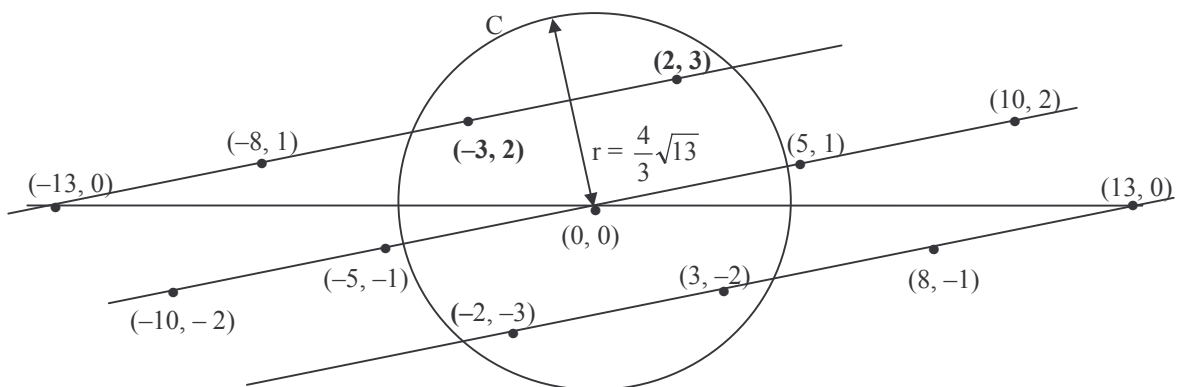
Sia C un disco di centro $(0, 0)$ e raggio minore di $\sqrt{2p}$ e di area maggiore di $4d(\Lambda) = 4p$:
ciò si può ottenere scegliendo $r = \frac{4}{3}\sqrt{p}$ per cui risulta: area di $C = \pi \frac{16}{9}p > 4p = 4d(\Lambda)$.

Per il primo teorema di Minkowski esiste un punto (x, y) diverso da $(0, 0)$ appartenente a $\Lambda \cap C$.

Se $(x, y) \in C$ ed è diverso da $(0, 0)$ si ha $0 < x^2 + y^2 < r^2 = \frac{16}{9}p < 2p$.

Ma $(x, y) \in \Lambda$ e quindi $x^2 + y^2$ è un multiplo intero di p e poichè $x^2 + y^2 < 2p$ deve essere $x^2 + y^2 = 1 \times p = p$.

ESEMPIO 6.3.2 - Se $p = 13$ si è visto nell'Esempio 6.3.1 che l'equazione $a^2 \equiv -1 \pmod{13}$ ha come soluzioni $a = \pm 5 \pmod{13}$. Scegliamo $a = 5 \pmod{13}$ e costruiamo la rete Λ di base $\{(13, 0), (5, 1)\}$ ed il disco C di centro $(0, 0)$ e raggio $\frac{4\sqrt{13}}{3}$, come nella dimostrazione del Teorema 6.3.3. I punti $(2, 3)$ $(-3, 2)$ $(-2, -3)$ $(3, -2)$ stanno in $\Lambda \cap C$ e sono le soluzioni cercate.



OSSERVAZIONE - Fermat (usando il metodo della discesa infinita) provò che nessun cubo si può ripartire in due cubi, cioè che non esistono interi positivi x, y, z tali che $x^3 + y^3 = z^3$. Il teorema di Fermat (ora risolto), detto ultimo o grande, afferma che per ogni $n > 2$ non esistono valori interi x, y, z tali che $x^n + y^n = z^n$.



BIBLIOGRAFIA

- [Be] M. BERGER, *Géométrie*, Cedic Nathan, Paris (1977)
- [Bo] T. BONNESEN, W. FENCHEL, *Theory of convex bodies*, BCS Associates, Moscow, Idaho, USA (1987)
- [C] H. S. M. COXETER, *Regular Polytopes*, Methuen & Co Ltd, London, (1948)
- [D] D. C. DEMARIA, *Topologia generale*, Editrice Tirrenia, Torino (1972)
- [E] H. G. EGGLESTON, *Convexity*, Cambridge, England (1958)
- [F] D. FLATH, *Introduction to Number Theory*, J. Wiles & Sons (1987)
- [G-L] P. GRUBER, G. LEKKERKERKER, *Geometry of Number*, North Holland Mathematical Library (1987).
- [G-W 1] P. M. GRUBER, J. M. WILLS, *Convexity and its applications*, Birkhauser (1983)
- [G-W 2] P. M. GRUBER, J. M. WILLS, *Handbook of Convex Geometry*, North Holland Mathematical Library (1993).
- [K-W] P. J. KELLY, M. L. WEISS, *Geometry and Convexity*, J. Wiles & Sons (1979).