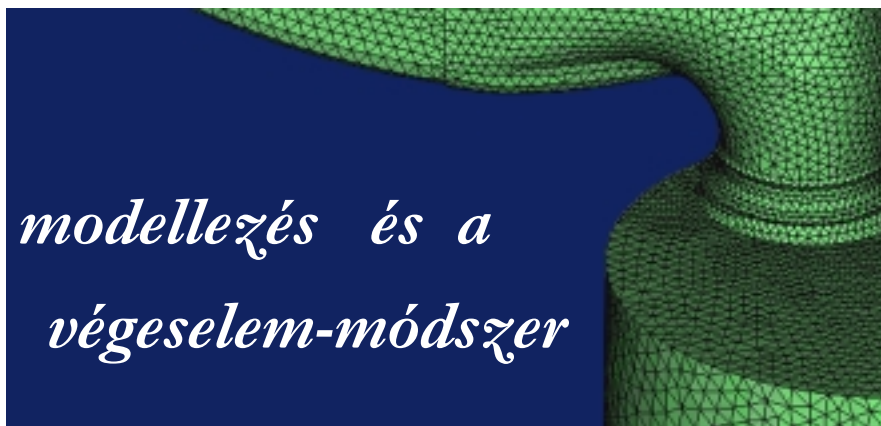


A matematikai modellezés és a végeselem-módszer



A modell szerepe a kultúra fejlődésében

Az emberi kultúra fejlődése során a modellezés mindig fontos szerepet játszott, hiszen a korai képzőművészeti alkotásokat (barlang rajzok) modelleknek is tekinthetjük, amik segítségével az emberek az őket körülvevő világ dolgait akarták megérteni, modellezni. Modelleknek tekinthetjük a kulturális szokásokat, játékokat is, mert velük valamilyen közösségi szituációt játszanak el. A játékok mint tárgyak valamilyen valóságos jelenségnek, tárgynak a modelljei (baba, match-box stb). Modellnek tekinthetjük a meséket, regényeket, színdarabokat, stb. mert azok is az életünk történéseit hivatottak tömör formában megfogalmazni.

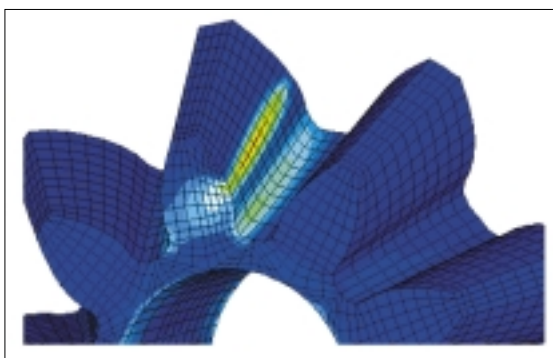
Az emberi kultúra fejlődése során a modellek használata mindig fellelhető, a megismerő és alkotó tevékenység elválaszthatatlan eszköze. Különösen igaz ez a tudomány és technika fejlődésére. Itt újabb fontos és nagyon hatékony eszközt kell megemlíteni: ez a matematikai modell. Szokás mondani, hogy

egy szakterület annyira tudományos, amennyi matematikát használ. Ez természetesen így maradéktalanul nem igaz, de jelzi a matematikai modellezés hatékonyságát.

A matematika, mint univerzális modellező eszköz

A matematikai modell a tudomány fejlődése során először mint a törvényszerűségek megfogalmazásának hatékony eszköze jelent meg. A fizikai tér fejlett matematikai modellje az euklideszi geometria, a szabadesés törvénye matematikai képlettel van megfogalmazva, a Kepler törvények matematikai fogalmak nél-

kül nem mondhatók ki, a Newton törvények eredeti megfogalmazásban a kor legfejlettebb matematikai eszközeit (pl. a differenciálszámítás) használják. Az általánosított átfogalmazások is új, éppen arra a célra kifejlesztett matematikai eszközökkel (pl. a variációszámítás) történnek. Ezekben a modellekben a matematikai eszközök egyszerűsége további absztrakciókkal érhető el, mint pl. a mechanikai pont fogalma. Ezeknek a jelenségeknek a modellezésénél a közöséges differenciálegyenletek az a nagy teljesítő képességű matematikai eszköz, amelyet sikerrel alkalmazhatunk. Hosszú időn keresztül az analitikus elmélet nagyon szép sikereket tudott produkálni a közöséges differenciálegyenletekkel leírható jelenségek elemzésénél. Ezek a véges számú mennyiség időbeli változását leíró modellek. De már a XIX sz. második felében világossá vált, hogy az analitikus elmélet nem elegendő, különösen a gyakorlatból származó problémák megoldásánál. Ekkor azonban még



Kúpfogaskerék érintkezési analízisének eredménye

nem voltak számítógépek, így a numerikus számítási módszerek is csak korlátozott bonyolultságú feladatok megoldására voltak alkalmazhatók. Bár meg kell jegyezni, hogy ilyen eszközök alkalmazásával fedezték fel a Naprendszer legtávolabbi bolygóját a Pluto-t.

A térbeli jelenségek modellezési lehetőségei

A felhasználható matematikai eszközöktől nagy mértékben függ az, milyen jelenséget tudunk matematikai modellel leírni. Különösen nagy feladatot jelentett a térben és időben lejátszódó folyamatok kielégí-

tő pontosságú leírása mint például a gáz áramlások (szél), a folyadékok áramlása (folyók), testek rugalmas és nem rugalmas deformációja, anyagok diffúziója, hőáramlás, az elektromágneses jelenségek (hőszugárzás, rádióhullámok), stb. Ezeknek a folyamatoknak a matematikai modelljei csak a többváltozós függvénykalkulus, a differenciálgeometria és a parciális differenciálegyenletek elméletének megalkotása után fogalmazhatók meg. (A valóságban a matematikai eszközök kidolgozása nem vált el a modellek készítésétől, ezek a munkálatok párhuzamosan egymással szoros kapcsolatban folytak). Ma már óriási matematikai apparátus áll rendelkezésünkre, felhasználásukkal nagyon összetett jelenségek matematikai modelljeit is fel tudjuk írni, pl. a levegőben történő szennyező anyagok terjedése egy város felett, a viszkoelasztikus érben történő véráramlás a szív környékén, egy belsőégésű motor belsejében lejátszódó folyamatok, stb., de az analitikus eszközökkel felírt matematikai modellekhez tartozó megoldások meghatározása analitikus eszközökkel csak nagyon nagy egyszerűsítések árán határozható meg. Egy bizonyos egyszerűsítés után pedig a modell szinte semmit sem tükröz a modellezett jelenségből, így a gyakorlati kérdések eldöntésére használhatatlan lesz.

A számítógépek szerepe a modellek megoldásában

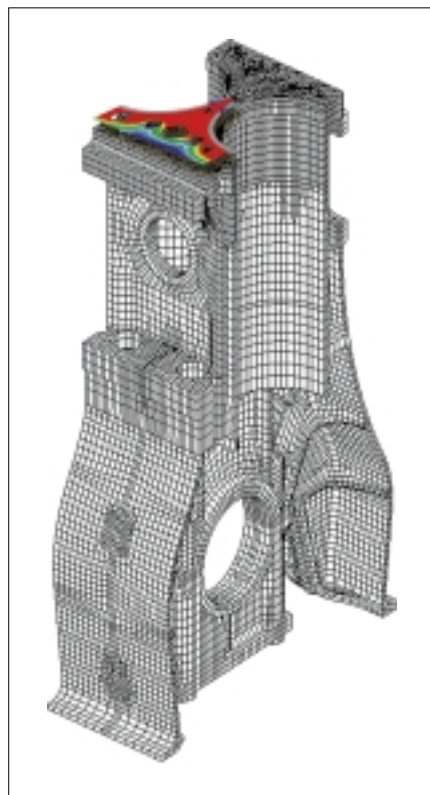
A térbeli folyamatokat leíró egyenletek, a gyakorlatban legtöbbször parciális differenciálegyenletek. Ezek analitikus megoldása a legkritikább esetben adható meg, és a gyakorlatban érdekes esetek a nagy részét már a XX. sz. első felében kiderítették. Egyetlen lehetséges út maradt a megoldások meghatározására – a numerikus közelítő algoritmusok kifejlesztése. Szerencsére a számítógépek kifejlesztésének kezdete is erre az időszakra esik. Pontosabban fogalmazva a fenti igények adtak nagy impulzust a számítógépek fejlesztésének, hiszen tudjuk, hogy a Neumann János által vezetett számítógép fejlesztés éppen a fent sorolt problémák

megoldására irányult (az időjárás előrejelzés pontosabbá tétele a Csendes Óceán felett a haditengerészet számára).

A tudományos és technológiai feladatok megoldása elemi erővel kényszeríti ki a térbeli jelenségeket leíró modellek számítógépekkel elvégezhető numerikus algoritmusok kidolgozását, fejlesztését és számítógépeken történő végrehajtását. A feladat megoldása azért nagyon fontos, mert az emberi agy számítási teljesítménye alkalmatlan ilyen feladatok megoldására, hiszen a kellő pontosságú közelítő megoldás kiszámításához egy háromdimenziós jelenség modelljénél annyi számításra lehet szükség, amit a teljes emberiség, ha mindenki részt venne ezekben a számításokban, évezredek alatt sem tudna elvégezni. A technológiai igény pedig adott. Pl. egy repülőgép konstrukció sem lenne kivitelezhető napjainkban ilyen számítások nélkül, és egy modern számítógép processzort sem lehetne megtervezni. (Itt is összekapcsolódik a számítástechnika fejlődése a matematikai modellezés fejlődésével.)

A XX. sz. második felében a matematikai modellezés, a numerikus számítógépes megoldó algoritmusok és a számítógépek fejlődésében óriási, egymásra utalt fejlődését tapasztaljuk. A megoldó algoritmusok egyik leghatékonyabb családját véges elem módszereknek nevezzük. Az elnevezés onnan ered, hogy bonyolult alakú testek deformációjának kiszámításánál egy lehetséges eljárás az, hogy egyszerű alakú testekből (véges elemekből)

kirakjuk a testet. Az egyszerű test terhelés alatti deformációit ki tudjuk számítani és ezekből bizonyos egymáshoz való illesztési feltételekkel következtethetünk a teljes test deformációira. Ezt a megközelítést először mérnökök alkalmazták. Jelenleg a véges elem számítógépes szoftvereknek csak nagyon kis része működik ezen az elven, a véges elem elnevezés ma arra utal, hogy az alkalmazott numerikus algoritmus ebbe a módszer-családba tartozik. (Megjegyezzük, hogy több más elven működő algoritmus is megtalálható ma már ezekben a rendszerekben).



Motorblokk hengerfejtömítés-hengerfej érintkezési vizsgálat

A véges elem módszerek a mérnöki gyakorlatban

A végeelem-módszer nemcsak az eredetét és elnevezését köszönheti a mérnököknek, hanem egyben ők a legfőbb felhasználói is ennek a kétség kívül hatékony módszernek. Ha a ma tervezőmérnöke egy parciális differenciálegyenlet (például egy rugalmasságtani feladat) megoldását geometriailag bonyolult tartományon keresi, akkor több mint valószínű, hogy a végeelem-módszert fogja alkalmazni. Azt mondhatjuk, hogy a végeelem-módszer, mint közelítő eljárás talán a leghatékonyabb módszer a mérnöki gyakorlat kontinuum-feladatainak numerikus megoldása során. Bár más numerikus eljárások is, mint például a véges differencia-módszer, vagy a jóval fiatalabb ún. peremelem-módszer (Boundary Element Method) is említhető a végeelem-módszer alternatívájaként, mégis ez utóbbi terjedt el nemcsak a hagyományos szerkezet-mechanikai és rugalmasságtani területeken, hanem a folyadékok mechanikája, a hőtan, a villamoságtan és más tudományterületeken felmerülő feladatok numerikus megoldása terén is. De vajon miben rejlik a módszer sikere?

A végeelem-módszer sikerének a titka az, hogy a teljes numerikus folyamat implementálható digitális számítógépre. Ezt, egyrészt az tette lehetővé, hogy műveleti sebesség, memória és háttértár tekintetében olyan hardver eszközök állnak ma már rendelkezésre, melyek nagy modellek feldolgozását is lehetővé teszik, vagyis nincsenek méretbeli korlátok. Másrészt olyan ún. professzionális szoftver termékek jelentek meg, amelyek a számítógéppel segített műszaki tervezés és elemzés (CAD, CAE) fázisait komplex módon tartalmazzák. Gyakorlatilag ezek a programok a mérnököt a véges elemes munkafolyamat minden egyes lépésében segítik, eszközöket biztosítanak számára a különböző feladatok megvalósításában. Tehát a lényeg a folyamat egyes fázisainak automatizálhatóságában van. A szoftver algo-

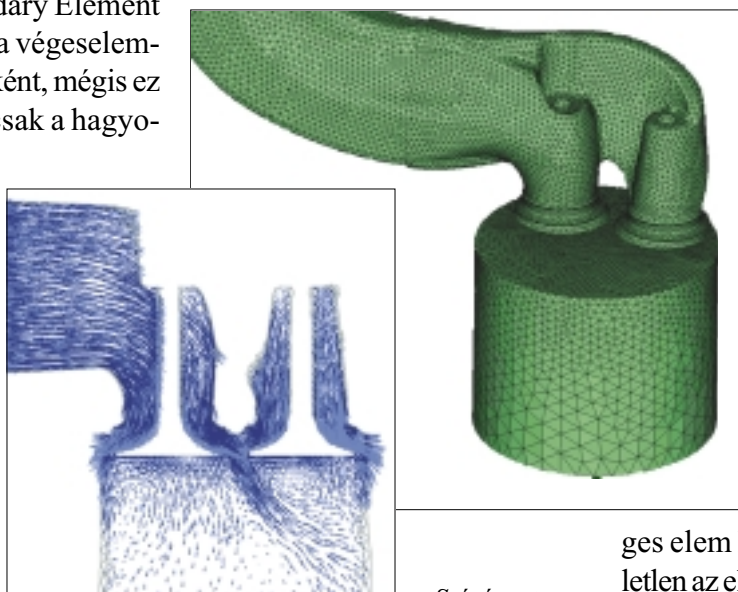
ritmusai segítségével a mérnök párbeszédés (interaktív) formában képes kezelni a geometriát, létre tudja hozni a véges elemes modellt, meg tudja oldani az előállított algebrai feladatot és végül hatékonyan, szemléletes formában ki tudja értékelni az eredményeket. Mindez a számítógép virtuális világában történik, anélkül, hogy egyáltalán készült volna valamiféle fizikailag megfogható, mérhető darab vagy prototípus. Ráadásul az eredmények birtokában a folyamat újrakezdhető azokkal a módosításokkal, melyektől javulást remélünk. A termék virtuálisan keletkezik, ezzel egy időben más tervezési, konstrukciós területekkel is kapcsolódni lehet, természetesen ezt is digitális, vagy népszerűbb nevén, virtuális modelleken keresztül. Tehát az egész termék szimulációs folyamat egy még átfogóbb folyamat része lehet, amely a termék korai, koncepció fázisától egészen a prototípus

megépítéséig teljes egészében digitális, vagyis csak a számítógépek adattárolóin létezik, mint virtuális adat. Lássuk tehát a véges elemes feldolgozási folyamat fő lépéseit.

Előfeldolgozás

Ebben a fázisban történik az ún. diszkrétizáció, vagyis a véges elem háló generálása. Nem véletlen az elnevezés, hiszen a kész modell úgy néz ki, mintha kicsi négyzetekből és háromszögekből rakták

volna ki az egész szerkezetet. Valójában a mérnök szabványos ún. véges elemekkel építi fel magát az alkatrészt (1, 2 vagy 3 dimenziós elemek), úgy, mint ahogy egy házat építenek téglából, sorról-sorra. Ez a mérnöki munka legmunkaigényesebb része. Annak ellenére, hogy számos algoritmus segíti a mérnök munkáját, a kívánt háló előállítására sokszor emberfeletti munkát kíván, főleg 3 dimenziós és komplex geometriájú modellek esetén (például öntött vagy kovácsolt alkatrészek, teljes jármű, stb). Az egész véges elemes folyamatra igaz, de talán a hálózásra még fokozottabban érvényes a gyakorlat igénye. A mérnöknek jó érzékkel kell elhanyagolnia az eredmények szempontjából lényegtelen részeket, s ily módon ritkább hálót használni, viszont ki-



*Szívócsatorna
áramlási végeelemes modellje*

emelni a lényegeseket, ahol a sűrűbb, így pontosabb felosztást kell alkalmazni. A véges elemes háló mérete és minősége (az elemek szabályos geometriai alaktól való eltérése) alapvetően befolyásolja az eredmények pontosságát, ugyanakkor a különböző feladattípusok (statika, dinamika, hőtan, folyadékok áramlása, crash, stb) különböző átlag elemméretű hálót kívánnak. A gyakorlott véges elemes mérnök tudja mikor milyen diszkretizációt alkalmazzon a kívánt pontosság érdekében, azonban ehhez hosszú évek tapasztalata szükséges.

Aki nyomon követte a számítástechnika elmúlt 10-15 évi változását ezen a téren, tanúja lehetett ugrásszerű fejlődésének. Amíg a 80-as évek végén az első hazai, ipari környezetben installált véges elem szoftverek számára ezer-kétezer elemet, illetve csomópontot tartalmazó modellek a szoftver határát jelentették, addig mára nem ritkák a több millió véges elemet is hatékonyan kezelni és feldolgozni tudó előfeldolgozó és megoldó szoftverek, hozzátevé, hogy ezek kezelése nem igényel szuperszámítógépet. Egy, a mai mérnöki gyakorlatban használatos un. munkaállomás (SGI, HP, Sun, stb) képes kielégíteni ezeket az igényeket.

Peremfeltételek definiálása

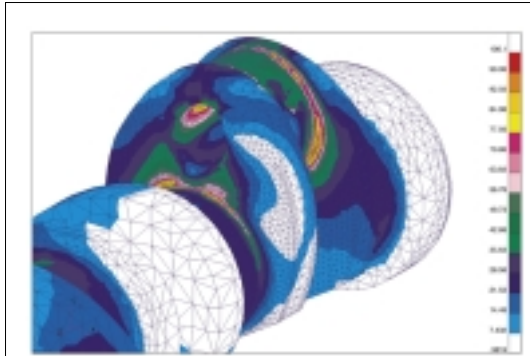
Ebben a szakaszban kell a szimuláció kiindulási adatait, feltételeit előállítani. Itt adhatók meg azok a paraméterek, melyeket már az analízis indításakor ismertnek tételezünk fel. Melyek lehetnek ezek?

Például a szerkezet egyes részeinek elmozdulásai (megfogások), vagy folyadék áramlás esetén a beáramló keresztmetszet sebességeloszlása. Meg kell adni a szerkezet terhelését is. Definiálhatók koncentrált erők, felületi, illetve térfogati terhelések, időfüggő terhelések, illetve gerjesztések. Egyszóval minden olyan paraméter definiálandó, amely a modell és az eredmények szempontjából számottevő.

Az algebrai egyenlet megoldása

Miután kész a véges elem háló és megadtuk a peremfeltételeket, a szoftver előállítja az algebrai egyenlet mátrixait (merevségi, tömegmátrix, stb), vagyis felállítja azt az algebrai egyenletet, amely az approximáció eredménye, s melyet megoldva közelítő eredményeket kaphatunk az adott fizikai folyamatra. Talán ebben a fázisban szolgáltatja a véges elem program a legjelentősebb

segítséget a mérnöknek, hiszen műveletek millióit hajtja végre olyan sebességgel, amelyre az ember – a számítógép megalakítója – nem képes. Egy adott számítógépet tekintve a futásidő alapvetően a feladat típusától és a véges elem modell méretétől (un. szabadságfokok, mint az algebrai egyenlet ismeretlenjei száma) függ. Elképzelhető több órás, akár több napos futásidő is egy viszonylag kisebb modell esetén, ha a feladat időfüggő és számos nemlinearitást tartalmaz (nemlineáris anyagi jellemzők, kontakt-kezelés, stb). A futásidőkre és a számítógépes kapacitások, illetve numerikus algoritmusok fejlődésére lehet szemléletes példa az előzőekben már említett egy-két ezer csomópontot tartalmazó rugalmasságtani modell. Ennek a modellnek a megoldása több, mint 12 órát vett



Főtengely kifáradási analízise



igénybe egy 80-as évek végi számítógépen. Ma egy átlagos felszereltségű munkaállomásnak, de az otthonainkban használt un. személyi számítógépeknek is csak pár percre lenne szükségük ahhoz, hogy az említett modellnél akár többszörösen nagyobb véges elemes feladatot megoldjanak. Természetesen a számítási kapacitások és algoritmusok fejlődésével párhuzamosan nő a megoldani kívánt feladatok mérete és bonyolultsága is. Ma már elmondható, hogy mindennaposak azok a modellek, melyek több millió szabadságfokúak, rendkívül bonyolultak és a megoldani kívánt feladat típusa is a lehető legsúlyosabb. Nagyon jó példák erre az un. „crash” alkalmazások, melyek elsősorban a személy-

gépkocsik számára előírt szabványos ütközési teszteket szimulálva vizsgálják komplett járművek viselkedését az ütközés alatt. Ezekben az ütközés-analízisekben a személygépkocsi véges elem modellje ritkán tartalmaz 500.000 elemnél kevesebbet. A modellnek időfüggő dinamikai folyamatot kell leírnia, ugyanakkor számos érintkezési (kontakt) feltételt kell kezelnie. Az analízis végrehajtásához nemlineáris anyagtörvényt kell alkalmazni, hiszen az ütközés során az egyes alkatrészek, lemezek képlékeny alakváltozást szenvednek. Ráadásul a viszonylag nagy sebességgel lejátszódó folyamat miatt az anyagjellemzők még az alakváltozás sebességétől is függenek. Mindezek ismeretében nem meglepő, hogy ezen alkalmazások egyprocesszoros gépen akár több napos futásidőt is igényelnek és sikeres végrehajtásuk jelentős eredménynek számít.

Eredmények kiértékelése

A végeselemes feldolgozási folyamat utolsó lépése a számított eredmények kiértékelése. Számítógépes támogatás nélkül bizonyára sikertelen vállalkozás lenne azt a tömör adatot és információt feldolgozni, ami egy numerikus módszer megoldása során keletkezik. Gondoljunk csak meg, a modell egyetlen csomópontjához - például rugalmasságtani vizsgálat esetén - legalább 3 elmozdulás érték (x , y és z irányú), valamint a feszültségi tenzor 9 elemének értékei tartozhatnak. Látható, hogy a modell csomópontjainak számánál egy nagyságrenddel nagyobb mennyiségű adat keletkezik, ráadásul egyetlen végeselemes futáson belül több terhelési eset is kezelhető, így az adatok száma sokszorozódik. Gondoljunk csak meg, egy nagyobb modell akár több százezer csomópontot is tartalmazhat, így szinte megoldhatatlan feladat lenne manuálisan, listákból feldolgozni az adatokat. Ezen okok miatt, a végeselemes szoftverek külön modulja tartalmazza azokat a funkciókat, amelyek az adatok gyors, szemléletes és hatékony feldolgozását teszik lehetővé. Az eredmények kiértékelésének az a leghatékonyabb módja, ha a szoftver magán a számítógépes végeselem modellen jeleníti meg grafikusán azokat a jellemzőket (elmozdulás, feszültségek, sebesség, gyorsulás, stb), amelyeket az algebrai egyenletrendszer megoldása során eredményül kapott. Ez a leggyorsabb módja annak, hogy a mérnök vizuálisan lássa és értékelje az általa összeállított modellt „működését”, helyességét, vagy annak módosítandó, gyenge pontjait. A grafikus megjelenítés sokféle lehet, főleg attól függően, hogy milyen jellegű feladatot

oldottunk meg. Az eredményül kapott paraméter értéktartománya felosztható egyenként, minden tartományhoz egy adott szint rendelve. Így kapjuk azokat az ábrákat, melyek a vizsgált értékek eloszlását (például feszültség - eloszlás) egy színskálának feleltetik meg, és ezt a színskálát a szoftver a végeselem modell felületén megjeleníti együtt az egyes színekhez tartozó értéktartományokkal. A felhasználó azonnal el tudja dönteni, hogy az alkatrész feszültség - eloszlása milyen, megfelel-e az elvárásoknak, vagy mely része túlterhelt, így módosításra szorul. Egy másik megjelenítési mód lehet az ún. vektoros eredmény megjelenítés. Ezt a módszert főleg olyan alkalmazásokban használják, ahol az eredmény a sebesség. Jó példa erre a belsőégésű motor hengerfejének szívócsatornája, ahol a szelepeken keresztül hengerbe áramló levegő sebessége fontos tényezője a keverékképzésnek, ilyen módon az égésnek. A beáramló levegő sebesség - eloszlását legszemléletesebben a modellmetsetekben lévő csomópontok sebességvektorai mutatják. Ezeken kívül számos más grafikus megjelenítési mód is szokásos, mindegyik esetben a cél az adatok gyors és hatékony kiértékelése. Természetesen – hiszen ez mindig szükséges – a szoftver konkrét számszerű eredményeket is képes szolgáltatni, azokon a helyeken és formában, ahol és ahogyan a felhasználó kéri.

Összegzés

A ma kutatója, mérnöke a számítógépek, byte-ok, file-ok, szoftverek világában él. A számítógép jelenti számára az íróeszközt, a vonalzót, a rajzasztalt, az elektronikus könyvtárak az információt, stb. Szinte nincs olyan funkció, melyhez ne találunk eszközt, támogatást a számítógépen. Ilyen nagy és a tervezés, fejlesztés jól elkülöníthető területe az ún. termékszimuláció, amely a mérnökök, matematikusok és számítástechnikai szakemberek munkája révén ma már nélkülözhetetlen része a korszerű termékfejlesztésnek. Megtalálni az egyensúlyt pontosság, modellméret és futásidő között. Inspirálni új eljárásokat, elemezni azok tulajdonságait, kutatni hatékonyságukat, alkalmazhatóvá tenni új eljárásokat, és végül használni őket a mindennapi tervezésben. Ezek a feladatok jellemzik munkájukat, amelynek eredménye arra irányul, hogy az eddig az ember számára láthatatlant ismeretté tegyék.

Dr. Molnárka Győző