Sur les fonctions d'ensemble additives et continues.

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

Soit E_0 un ensemble borné donné de points dans un espace à m dimensions, E — un ensemble variable, contenu dans E_0 et mesurable (L). On appelle une fonction d'ensemble $f(E)$ (dont la valeur $f(E)$ est un nombre réel (fini) déterminé pour les sous-ensembles de E_0) *additive* (simplement) dans E_0, si sa valeur sur un ensemble somme de deux sous-ensembles mesurables de E_0 sans point commun est la somme de ses valeurs sur chacun de ces sous-ensembles.. La fonction additive $f(E)$ est dite *continue* dans E_0, si elle tend vers zéro avec le diamètre de $E \subset E_0$; elle est dite *absolument continue*, si elle tend vers zéro avec la mesure de $E \subset E_0$.

On démotre sans peine qu'une fonction additive (simplement) et absolument continue dans un ensemble borné est dans cet ensemble *additive au sens complet*, c'est-à-dire que sa valeur sur un ensemble somme d'une infinité dénombrable d'ensembles mesurables sans point commun deux à deux et contenus dans E_0 est la somme de ses valeurs sur chaque partie [1]).

On voit sans difficulté qu'une fonction additive et continue dans un ensemble E_0 est *uniformément continue* dans cet ensemble. Cela veut dire: Si $f(E)$ est une fonction additive et continue dans un ensemble E_0, il existe pour tout nombre positif ε un nombre po-

[1]) C. Carathéodory: *Vorlesungen über reelle Funktionen,* Leipzig und Berlin 1918, p. 478. On pourrait démontrer que pour qu'une fonction additive au sens complet soit absolument continue, il suffit que sa valeur soit nulle sur tout ensemble de mesure nulle (H. Hahn: *Theorie der rellen Funktionen,* Berlin 1921, p. 417, Satz IV). Cela ne suffit pas pour qu'une fonction simplement additive soit absolument continue.

sitif $\eta = \eta(\varepsilon)$, tel que pour tout sous-ensemble mesurable E de E_0 l'inégalité

$$\delta(E) < \eta$$

(où $\delta(E)$ désigne le diamètre de E) entraîne l'inégalité

$$|f(E)| < \varepsilon.$$

Supposons, pour démontrer, que pour un nombre positif ε un tel nombre $\eta = \eta(\varepsilon)$ n'existe pas. Il existerait donc pour tout n naturel un sous ensemble mesurable E_n de E_0 tel que

$$\delta(E_n) < \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad |f(E_n)| \geqslant \varepsilon,$$

ce qui est impossible, $f(E)$ étant continue dans E_0.

Il en résulte sans peine qu'une fonction additive et continue dans un ensemble borné E_0 est bornée sur les ensembles mesurables contenus dans E_0. En effet, construisons un grillage $\mathcal{G}$ [1]) dont les mailles ont les diamètres $< \eta$, η étant un nombre positif (dont l'existence est prouvée plus haut), tel que l'inégalité $\delta(E) < \eta$ entraîne l'inégalité $|f(E)| < 1$ pour les sous-ensembles E de E_0. L'ensemble E_0 étant borné, on voit sans peine que le grillage $\mathcal{G}$ contient un nombre limité $M_1, M_2, \ldots, M_n$ de mailles ayant des points communs avec E_0. Soit maintenant E un sous-ensemble. mesurable de E_0: nous pouvons évidemment écrire $E = EM_1 + EM_2 + \ldots + EM_n$, les termes de cette somme étant sans point commun deux à deux. Donc, la fonction f étant additive:

$$(1) \qquad f(E) = f(EM_1) + f(EM_2) + \ldots + f(EM_n).$$

Or, d'après $\delta(M_k) < \eta$, nous avons à plus forte raison $\delta(EM_k) < \eta$ ce qui entraîne $|f(EM_n)| < 1$ pour $k = 1, 2, \ldots, n$: la formule (1) donne donc $|f(E)| < n$. Nous avons donc prouvé l'existence d'un nombre n tel que la fonction f est en valeur absolue $< n$ sur tout sous-ensemble mesurable de E_0, c. q. f. d.

Théorème: Une fonction additive et continue $f(E)$ qui prend pour deux sous-ensembles E_1 et E_2 d'un ensemble borné E_0 des valeurs $f(E_1)$ et $f(E_2)$, prend, pour un sous-ensemble convenable (mesurable) de E_0 toute valeur intermédiaire entre $f(E_1)$ et $f(E_2)$.

[1]) C. de la Vallée Poussin. *Intégrale de Lebesgue. Fonctions d'ensemble Classes de Baire.* Paris 1916, p. 61 ss.

Démonstration. Soit E_0 un ensemble borné donné, P — l'ensemble constitué d'un seul point de E_0. La fonction $f(E)$ étant continue, nous avons $f(P)=0$. Donc, une fonction continue dans E_0 est nulle pour certains sous-ensembles (mesurables) de E_0 Il en résulte tout de suite que pour démontrer notre théorème il suffira de prouver que si $f(E)$ est une fonction additive et continue dans E_0 qui prend pour un sous-esemble (mesurable) H de E_0 la valeur $f(H)=a \neq 0$, elle prend, pour un sous-ensemble (mesurable) convenable de E_0 toute valeur intermédiaire entre 0 et a. Or, la fonction $-f(E)$ étant additive et continue en même temps que $f(E)$, on pourra supposer que $a>0$.

Soit donc c un nombre tel que $0<c<a=f(H)$.

Soit $\{\varepsilon_n\}$ une suite infinie de nombres positifs convergente vers 0. La fonction $f(E)$ étant continue. il existe pour tout n naturel un nombre $\eta_n>0$, tel que l'inégalité

$$\delta(E)<\eta_n$$

entraîne, pour tout sous-ensemble mesurable E de E_0, l'inégalité

$$|f(E)|<\varepsilon_n$$

et nous pouvons supposer

(2)
$$\eta_n<\frac{1}{2^{n+1}}.$$

Construisons un grillage $\mathcal{G}_1$ dont les mailles ont les diamètres $<\eta_1$. L'ensemble E_0 étant borné, le grillage $\mathcal{G}_1$ contient un nombre fini $M_1^1, M_2^1, \ldots, M_{n_1}^1$ de mailles ayant des points communs avec E_0. D'après $\delta(M_k^1)<\eta_1$ nous aurons, à plus forte raison, $\delta(HM_k^1)<\eta_1$, ce qui entraîne

(3)
$$|f(M_k^1)|<\varepsilon_1 \quad \text{pour} \quad k=1,2,\ldots,n_1.$$

Posons $S_0^1=0$, $S_k^1=HM_1^1+HM_2^1+\ldots+HM_k^1$ pour $k=1,2,\ldots n_1$: d'après (3) nous aurons

(4)
$$|f(S_k^1-S_{k-1}^1)|<\varepsilon_1 \quad \text{pour} \quad k=1,2,\ldots,n_1$$

Or, la fonction f étant additive et $S_{k-1}^1 \subset S_k^1$. nous avons

$$f(S_k^1-S_{k-1}^1)+f(S_{k-1}^1)=f(S_k^1), \qquad (k=1,2,\ldots,n_1),$$

et (4) donne:

(5)
$$|f(S_k^1)-f(S_{k-1}^1)|<\varepsilon_1 \quad \text{pour} \quad k=1,2,\ldots,n_1.$$

Les termes consécutifs de la suite

(6) $$f(S_0^1)=0, f(S_1^1), f(S_2^1), \ldots, f(S_{n_1}^1)=f(H)=a$$

diffèrent donc en valeur absolue à moins que de ε_1. D'après $0<c<a$ nous avons $f(S_0^1)<c$, $f(S_{n_1}^1)>c$: il existe donc dans la suite (6) un dernier terme, soit $f(S_{k_1}^1)$, $(k_1<n_1)$, qui est $<c$: nous aurons donc

$$f(S_{k_1}^1)\leqslant c<f(S_{k_1+1}^1)$$

donc, d'après (5):

$$c-\varepsilon_1<f(S_{k_1}^1)\leqslant c.$$

Construisons maintenant un grillage $\mathcal{G}_2$ dont les mailles ont des diamètres $<\eta_2$: soient $M_1^2, M_2^2, \ldots, M_{n_2}^2$ ses mailles ayant des points communs avec E_0. Posons

$$S_0^2=S_{k_1}^1,\ S_k^2=S_{k_1}^1+(S_{k_1+1}^1-S_{k_1}^1)(M_1^2+M_2^2+\ldots+M_k^2)$$
$$\text{pour}\quad k=1, 2, \ldots, n_2.$$

Nous aurons $\delta(S_k^2-S_{k-1}^2)=\delta[(S_{k_1+1}^1-S_{k_1}^1)M_k^2]\leqslant\delta(M_k^2)<\eta_2$ ce qui entraîne:

$$|f(S_k^2-S_{k-1}^2)|<\varepsilon_2\quad\text{pour}\quad k=1, 2, \ldots, n_2,$$

d'où l'on déduit, comme plus haut, que les termes de la suite

$$f(S_0^2)=f(S_{k_1}^1)\leqslant c,\quad f(S_1^2), \ldots,\quad f(S_{n_2}^2)=f(S_{k_1+1}^1)>c$$

diffèrent en valeur absolue à moins que de ε_2. Il existe donc un indice $k_2<n_2$ tel que

$$f(S_{k_2}^2)\leqslant c<f(S_{k_2+1}^2)$$

et

$$c-\varepsilon_2<f(S_{k_2}^2)\leqslant c.$$

Or, nous avons $S_{k_1}^1\subset S_{k_2}^2\subset S_{k_1+1}^1$, donc

$$S_{k_2}^2-S_{k_1}^1\subset S_{k_1+1}^1-S_{k_1}^1\subset M_{k_1+1}^1$$

et parsuite

$$\delta(S_{k_2}^2-S_{k_1}^1)<\eta_1.$$

Construisons maintenant un grillage $\mathcal{G}_3$ dont les mailles ont des diamètres $<\eta_3$: soient $M_1^3, M_2^3, \ldots, M_{n_3}^3$ ses mailles ayant des points communs avec E_0. En posant

$$S_0^3=S_{k_2}^2,\ S_k^3=S_{k_2}^2+(S_{k_2+1}^2-S_{k_2}^2)(M_1^3+M_2^3+\ldots+M_k^3),$$
$$(k=1, 2, \ldots, n_3),$$

nous prouverons, comme plus haut, l'existence d'un indice $k_3 < n_2$ tel que

$$c - \varepsilon_3 < f(S^3_{k_3}) \leqslant c, \quad S^2_{k_2} \subset S^3_{k_3} \quad \text{et} \quad \delta(S^3_{k_3} - S^2_{k_2}) < \eta_2.$$

En raisonnant ainsi de suite nous obtenons une suite infinie d'ensembles $S^n_{k_n}$ tels que $S^1_{k_1} \subset S^2_{k_2} \subset S^3_{k_3} \subset \ldots \subset H$

(7) $$c - \varepsilon_n < f(S^n_{k_n}) \leqslant c$$

et

(8) $$\delta(S^n_{k_n} - S^{n-1}_{k_{n-1}}) < \eta_{n-1} \quad \text{pour} \quad n = 2, 3, 4, \ldots.$$

Posons

(9) $$E = S^1_{k_1} + (S^2_{k_2} - S^1_{k_1}) + (S^3_{k_3} - S^2_{k_2}) + \ldots$$

— ce sera un sous-ensemble (mesurable) de H.

Soit ε un nombre positif donnée quelconque, η — un nombre positif tel que $|f(E)| < \varepsilon$ pour $E \subset E_0$, $\delta(E) < \eta$, m — un nombre naturel tel que

(10) $$\frac{1}{2^m} < \eta \quad \text{et} \quad \varepsilon_m < \varepsilon.$$

D'après (9) nous avons $E \supset S^m_{k_m}$; posons

(11) $$E = S^m_{k_m} + R_m;$$

nous aurons, d'après (9), (8), (2), et (10):

$$\delta(R_m) = \delta[(S^{m+1}_{k_{m+1}} - S^m_{k_m}) + (S^{m+2}_{k_{m+2}} - S^{m+1}_{k_{m+1}}) + \ldots] \leqslant$$
$$\leqslant \eta_m + \eta_{m+1} + \ldots < \frac{1}{2^{m+1}} + \frac{1}{2^{m+2}} + \ldots = \frac{1}{2^m} < \eta,$$

donc:

(12) $$|f(R_m)| < \varepsilon.$$

Or, d'après (7) et (10) nous avons

(13) $$c - \varepsilon < f(S^m_{k_m}) \leqslant c.$$

D'après (11) nous trouvons, la fonction f étant additive:

(14) $$f(E) = f(S^m_{k_m}) + f(R_m).$$

Les formules (12), (13) et (14) donnent:

$$c - 2\varepsilon < f(E) < c + \varepsilon.$$

Le nombre ε étant aussi petit que l'on veut. cette inégalité prouve que

$$f(E) = c, \qquad \text{c. q. f. d.}$$

Notre théorème est ainsi démontré.

Il importe de remarquer que, pareillement comme pour les fonctions d'une variable réelle, il ne suffit pas, pour qu'une fonction additive d'ensemble soit continue dans E_0, qu'elle prend, pour un sous-ensemble convenable de E_0, toute valeur intermédiaire entre deux valeurs données quelconques qu'elle prenne pour deux sous-ensembles de E_0. En effet, nous démontrerons (à l'aide de l'axiome de M. Zermelo) l'existence d'une fonction additive qui prend toute valeur réelle sur un sous-ensemble (mesurable) convenable d'un ensemble quelconque de mesure positive (Une telle fonction ne peut évidemment être continue dans aucun ensemble de mesure positive).

Soit

$$\mathfrak{B}) \qquad b_1, b_2, \ldots, b_\omega, b_{\omega+1}, \ldots, b_\alpha, \ldots$$

la *base* de M. Hamel[1]). Il existe, comme on sait, une fonction $\varphi(x)$ d'une variable réelle, satisfaisant à l'équation fonctionnelle

$$\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y) \tag{15}$$

(pour x et y réels) et prenant des valeurs données d'avance pour les nombres b_α de la base $\mathfrak{B}$. Celle-ci ayant la puissance du continu[2]), il existe une fonction discontinue $\varphi(x)$ satisfaisant à l'équation (15) et prenant (pour les nombres de la base $\mathfrak{B}$) toutes les valeurs réelles. Or, comme on sait, une fonction discontinue satisfaisant à l'équation (15) prend dans tout intervalle toutes les valeurs qu'elle est susceptible de prendre (pour x réels).

Désignons maintenant par $m(E)$ la mesure (lebesguienne) de l'ensemble E est posons

$$f(E) = \varphi(m(E))$$

— ce sera, comme on voit sans peine, une fonction additive d'ensemble, définie pour tout E mesurable. Or, je dis que si $\mu = m(E_0) > 0$. il existe pour tout ξ réel un sous-ensemble E de E_0 tel que $f(E) = \xi$.

1) *Math. Ann.* Bd. 60, p. 459.

2) Voir C. Burstin: *Sitzungsber. Akad. Wien*, Bd. 125 (1916), p. 209.

En effet, $\varphi(x)$ prend, comme nous savons, toute valeur réelle dans tout intervalle: il existe donc un nombre x tel que $0 < x < \mu$ et $\varphi(x) = \xi$. Or E_0 étant un ensemble de mesure $\mu > x > 0$, il existe évidemment un sous-ensemble E de E_0 de mesure $m(E) = x$. Nous aurons donc $f(E) = \varphi(m(E)) = \varphi(x) = \xi$, c. q. f. d.

Soit maintenant $f(E)$ une fonction additive au sens complet dans un ensemble borné E_0, l et L respectivement les bornes inférieure et supérieure de $f(E)$ pour tous les ensembles (mesurables) E contenus dans E_0. Il existe, comme on sait, des sous-ensembles E_1 et E_2 de E_0 tels que $f(E_1) = l$ et $f(E_2) = L$ [1]). On en déduit tout de suite, d'après notre théorème la proposition suivante:

Corollaire. *L'ensemble de toutes les valeurs que prend une fonction additive au sens complet et continue sur les sous-ensembles (mesurables) d'un ensemble borné E_0 est toujours un intervalle fini fermé.*

Je ne sais pas si cette proposition est vraie pour les fonctions simplement additives et continues.

Je terminerai par énoncer quelques problèmes concernant les fonctions additives d'ensembles qui me semblent difficiles à résoudre.

Quelles sont les puissances de classes 1) de toutes les fonctions additives (définies pour les ensembles mesurables L) [2]) 2) de toutes les fonctions additives non négatives? 3) de toutes les fonctions additives et continues? 4) de toutes les fonctions additives au sens complet? (On peut démontrer sans peine que la puissance de la classe de toutes les fonctions additives absolument continues est $2^{\aleph_0}$).

Peut-on donner un exemple effectif d'une fonction additive non bornée (finie) pour les sous-ensembles (mesurables) d'un ensemble borné?

[1]) V. H. Hahn, l. c. p. 408, Satz IV a.

[2]) En utilisant une idée due à M. Banach on pourrait démontrer (à l'aide de l'axiome du choix) que la puissance de toutes les fonctions additives (d'ensembles mesurables) est $2^{2^{\aleph_0}}$